مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

آنالیز ریاضی

نوشتهٔ :
تام م. اپوستل
ترجمهٔ :
دکتر علی اکبر عالم‌زاده

آنالیز ریاضی

نوشتهٔ:
تام م. اپوستل

ترجمهٔ:
علی‌اکبر عالم‌زاده

مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

مؤسسهٔ انتشارات علمی
دانشگاه صنعتی شریف

ویراستار ارشد: علی کافی
مدیر چاپ: احمدعلی طاهری

Mathematical Analysis
(second edition)
Tom M. Apostl
Addison-Wesley, 1975

آنالیز ریاضی
نوشتهٔ تام م. آپوستل
ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده
ویراستهٔ احمد بیرشک
مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران
چاپ ششم، ۱۳۷۶
تعداد: ۲۰۰۰
لیتوگرافی، چاپ، و صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه صنعتی شریف

مقدمهٔ مترجم

همهٔ متخصصین ریاضی به‌کمبود کتابهای ریاضی به فارسی بویژه در زمینهٔ دانشگاهی اذعان دارند، تا آن‌جا که برخی ازآنها با بذل همت‌وصرف وقت، متناسب با اهمیت موضوع و علاقهٔ شخصی خویش، در راه پرکـــردن این خلاء علمی گام برداشته‌اند.
یکی از زیباترین مباحث و نیز نیرومندترین حربه‌هـــای آدمی در حل مسائل علمی، آنالیزریاضی است، و نظر به اهمیت بنیادی آن در دروس ریاضی دانشگـــاه، همواره ضرورت وجود کتابهائی دراین مورد بیش از هر زمینهٔ دیگر احساس می‌شده است.

مشهورترین کتاب آنالیز سالهای اخیرکتاب *Mathematical Analysis* اثر Tom M.Apostol است، که اینک ترجمهٔ چاپ دوم آن برای اولین بار تقدیم علاقمندان می گردد.

سالها است که این‌کتاب به‌عنوان مأخذی جهت تهیهٔ جزوات‌آنالیز برای دورهٔ لیسانس بکار رفته، ونیزمورد استفادهٔ مکرر دانشجویان فوق‌لیسانس،چه درامرآموزش وچه برای امتحان ورودی، بوده است.

در تـرجمهٔ این کتاب حتی‌المقدور سعی شده است کـه از واژه‌هـای موجود استفاده شود. اما ازآن‌جا که تا بحال کتابی‌که تا این حد جدی باشد در این زمینه به فارسی نـوشته و یـا تـرجمه نشده است، و نیز چند اصطلاح متداول مناسب بنظر نمی‌رسیدند، بناچار برخی واژه‌هـای نوظاهر شده‌انـد، که البته هر یک کـه مورد تأیید اهل فن قرارگیرد جای خودرا باز خواهد کرد.

بدیهی است که این ترجمه از عبارات نارسا وغیرمنطبق با متن ونیز واژه‌های فارسی نامناسب بی‌بهره نیست،که امید است خوانندگان گرامی مترجم را ازنظریات اصلاحی خویش مستحضر فرمایند تا درچاپهای بعدی به‌رفع نقائص اقدام گردد.

در پایان لازم می‌دانم مراتب سپاسگزاری خود را از مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، که وسائل لازم برای ترجمه، ویرایش، وچاپ این کتاب را فراهم آورده است، ابراز دارم.

علی‌اکبر عالم‌زاده

خرداد ماه

۱۳۵۹ هجری شمسی

مقدمهٔ مؤلف

یک نگاه اجمالی به فهرست مطالب آشکار خواهد ساخت که این کتاب درسی مباحث آنالیز را در سطح «حساب دیفرانسیل و انتگرال عالی» مورد بحث قرار می‌دهد. هدف این بوده است که موضوع به‌صورت صحیح، دقیق، امروزی، و درعین حال نه چندان غیرعملی، عرضه گردد. این کتاب راهی را از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به دوره‌های عالی در نظریهٔ تابعهای حقیقی و مختلط می‌گشاید، و خواننده را با برخی از تفکرات انتزاعیی که در آنالیز نوین متداول است آشنا می‌سازد.

چاپ دوم ازجهات بسیار با چاپ اول متفاوت است. دراین چاپ، توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای درمحدودهٔ فضاهای متری کلی بهمان‌گونهٔ فضای n بعدی اقلیدسی عرضه شده،وبرآن دوفصل جدید دربارهٔ انتگرالگیری لبگ[1] اضافه شده‌است. مطالب مربوط به انتگرالهای خط، آنالیز برداری، و انتگرالهای سطح حذف شده‌اند. ترتیب برخی از فصلها تغییر کرده است، بسیاری از بخشها کاملاً دوباره‌نویسی شده‌اند، وچند تمرین جدید اضافه گشته است.

انتگرالگیری لبگ به‌روش ریس‌ـناگی[2] عرضه می‌شود، که مستقیماً به‌تابعها و انتگرالهای آنها توجه داشته و از نظریهٔ اندازه‌ها مستقل است. طرز عمل در این جا آسانتر شده، بسط داده شده، و بنوعی تجدید آرایش یافته است تا درسطح لیسانس عرضه گردد.

چاپ اول این‌کتاب، در دوره‌های ریاضیات، درسطوح مختلفی بکار رفته است، از سال اول لیسانس تا سال اول فوق‌لیسانس، و ازآن هم به عنوان یک کتاب درسی

---

1. Lebesgue 2. Riesz-Nagy

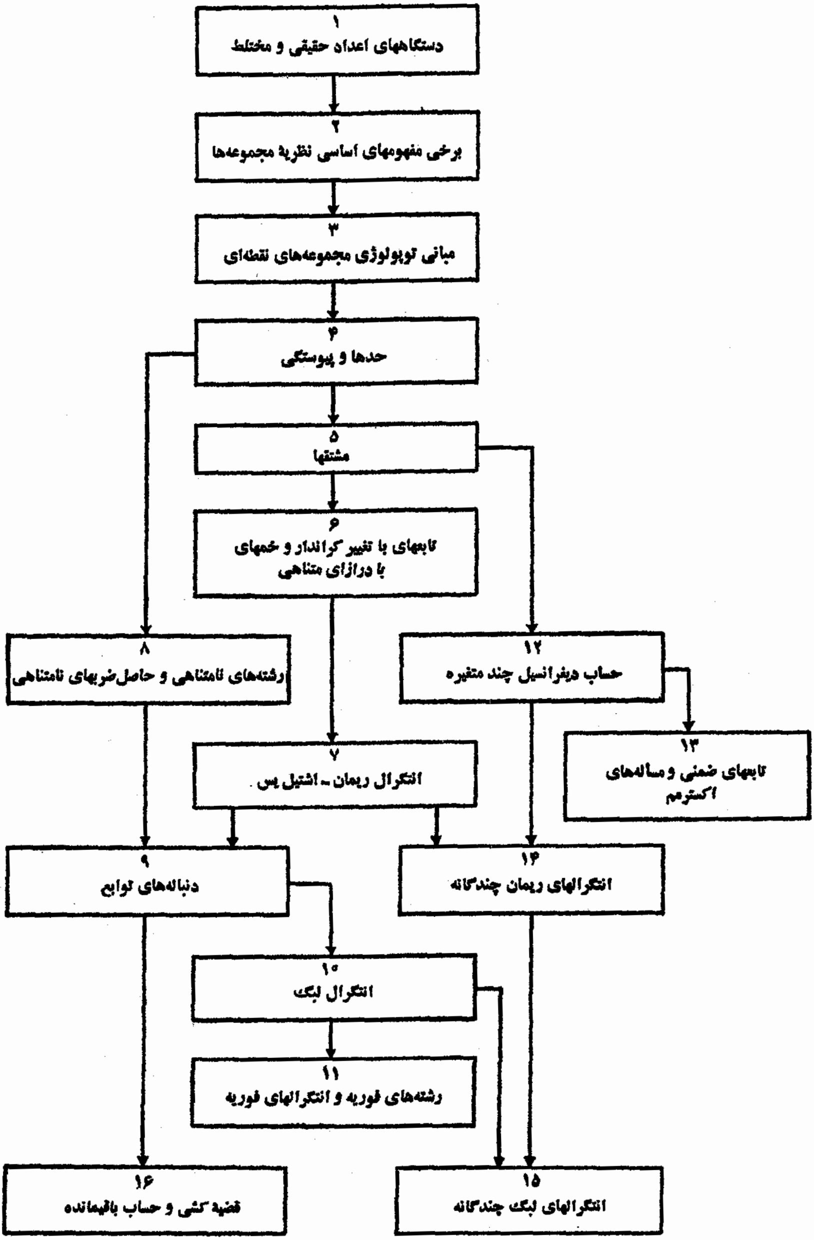
وهم به‌عنوان یک کتاب مرجع تکمیلی استفاده شده است. چاپ دوم این تنوع را حفظ کرده است. به‌عنوان مثال، از فصلهای ۱ تا ۵ و ۱۲ و ۱۳ می‌توان درسی در حساب دیفرانسیل تابعهای یک یا چند متغیره واز فصلهای ۶ تا ۱۱ و ۱۴ و ۱۵ درسی درنظریهٔ انتگرالگیری فراهم ساخت. تلفیقهای بسیار دیگری نیز میسر است؛ استادان، هریک، می‌توانند، با مراجعه به‌نمودار صفحهٔ بعد (که معرف ارتباط منطقی فصلها است)، مباحث مورد نیاز خود را انتخاب کنند.

مایلم مراتب قدردانی خود را نسبت به‌افراد بسیاری که قبول زحمت نموده دربارهٔ چاپ اول به‌من نامه نوشته‌اند ابراز دارم. نظریات و پیشنهادهای آنها درتهیهٔ چاپ دوم مؤثر بوده است. بخصوص، از دکتر کارالامبوس آلیپرانتیس[1]، که تمام نسخهٔ دست‌نویس را بدقت خوانده وپیشنهادات مفید بسیاری‌کرده است، سپاسگزارم. بعضی ازتمرینهای جدید نیز توسط ایشان فراهم شده است. درخاتمه، خودرا مدیون دانشجویان دورهٔ لیسانس مؤسسهٔ صنعتی کالیفرنیا[2] می‌دانم که علاقهٔ آنها به‌ریاضیات انگیزهٔ اصلی تألیف این کتاب بوده است.

تام م. اپوستل
پاسادنا[3]
سپتامبر ۱۹۷۳

1. Dr. Charalambos Aliprantis
2. California Institute of Technology (Caltech)
3. Pasadena

ارتباط منطقی میان فصلها



فهرست مطالب

عنوان | صفحه

عنوان | صفحه

عنوان		صفحه
۸.۷	تابعهای پله‌ای به عنوان انتگرالگیر	۲۱۶
۹.۷	تحویل انتگرال ریمان-اشتیل‌یس به مجموع متناهی	۲۱۸
۱۰.۷	دستور جمعبندی اویلر	۲۲۰
۱۱.۷	انتگرالگیری صعودی. انتگرالهای بالائی وپائینی	۲۲۱
۱۲.۷	خاصیتهای جمعپذیری وخطی انتگرالهای بالائی وپائینی	۲۲۵
۱۳.۷	شرط ریمان	۲۲۵
۱۴.۷	قضیه‌های مقایسه‌ای	۲۲۷
۱۵.۷	انتگرالگیرهای باتغییر کراندار	۲۲۹
۱۶.۷	شرطهای کافی برای وجود انتگرالهای ریمان-اشتیل‌یس	۲۳۳
۱۷.۷	شرطهای لازم برای وجود انتگرالهای ریمان-اشتیل‌یس	۲۳۳
۱۸.۷	قضیه‌های مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان-اشتیل‌یس	۲۳۴
۱۹.۷	انتگرال به عنوان تابعی از بازه	۲۳۶
۲۰.۷	قضیهٔ اساسی دوم حساب انتگرال	۲۳۷
۲۱.۷	تغییر متغیر در انتگرال ریمان	۲۳۸
۲۲.۷	قضیهٔ دوم مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان	۲۴۰
۲۳.۷	انتگرالهای ریمان-اشتیل‌یس که به یک پرما بستگی دارند	۲۴۱
۲۴.۷	مشتقگیری زیرعلامت انتگرال	۲۴۲
۲۵.۷	تعویض ترتیب عمل انتگرالگیری	۲۴۳
۲۶.۷	محک لبگ برای وجود انتگرالهای ریمان	۲۴۵
۲۷.۷	انتگرالهای ریمان-اشتیل‌یس مختلط	۲۵۱
	تمرین	۲۵۲

۸ رشته‌های نامتناهی و حاصل‌ضربهای نامتناهی

عنوان		صفحه

۱

دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط

۱.۱ مقدمه

در آنالیز ریاضی مفهومهائی مورد مطالعه قرار می‌گیرند که بنحوی با عدد های حقیقی مربوط هستند، از این روی کار خود را در آن با بحثی از دستگاه عددهای حقیقی آغاز می‌کنیم.

روشهای متعدد برای معرفی عددهای حقیقی بکار می‌روند. در یک روش، در آغاز، عددهای صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، . . . به عنوان مفهومهای تعریف نشده پذیرفته می‌شوند، و از آنها برای ساختن دستگاهی وسیعتر، که از عددهای گویای مثبت (خارج قسمتهای اعداد صحیح مثبت)، قرینه‌های آنها، و صفر تشکیل شده است، استفاده می‌شود. عددهای گویا، به نوبهٔ خود، برای ساختن عددهای گنگ، یعنی عدد-های حقیقی مانند $\sqrt{۲}$ و π، که گویا نیستند، بکار می‌روند. عددهای گویا و گنگ با هم دستگاه عددهای حقیقی را تشکیل می‌دهند.

هر چند این مطالب قسمت مهمی از بنیادهای ریاضیات را در بر می‌گیرند، اما در این‌جا از آنها بتفصیل صحبت نخواهد شد. در حقیقت، در اکثر نمودهای آنالیز تنها به خاصیتهای اعداد حقیقی توجه داریم، نه به روشهائی که برای ساختن آنها بکار رفته‌اند. بنابراین، عددهای حقیقی را به‌عنوان چیزهای تعریف نشده‌ای اختیار می‌کنیم که در بعضی از اصلهای موضوع، که خاصیتهای دیگری از این عددها را نتیجه می‌دهند، صدق کنند. چون خواننده احتمالاً با اکثر خاصیتهای اعداد حقیقی، که در چند صفحهٔ آینده بررسی خواهند شد، آشناست، نمایش این خاصیتها نسبتاً

باختصار برگزار می‌شود. مقصود از این‌کار این است که خاصیتهای مهم عددها را از نظر بگذرانیم، و خواننده را متقاعد سازیم که، در صورت لزوم، می‌توان ریشهٔ همهٔ این خاصیتها را در اصلهای موضوع یافت. تفصیل بیشتری را می‌توان درکتابهای مرجع، که در انتهای این فصل ازآنها یاد می‌شود، بدست‌آورد.

برای‌آسان‌کردن‌کار، برخی از نمادها و اصطلاحهای مقدماتی نظریهٔ مجموعه‌ها را بکار می‌بریم. فرض‌کنیم S مجموعه‌ای (دسته‌ای از چیزها) باشد. نماد $x \in S$ یعنی x در مجموعهٔ S است، و وقتی می‌نویسیم $x \notin S$ یعنی x در S نیست.

مجموعهٔ S را یك زیرمجموعهٔ T می‌نامیم، و می‌نویسیم $S \subseteq T$، در صورتی که هرچیز که در S است در T نیز باشد. مجموعه‌ای که دست‌کم حاوی یك چیز باشد ناتهی نامیده می‌شود.

فرض کنیم مجموعهٔ ناتهی $\mathbf{R}$، متشکل از چیزهائی به‌نام عددهای حقیقی، وجود داشته باشد که در ده اصل موضوع زیر صدق کند. این اصلهای موضوع به طور طبیعی به‌سه گروه تقسیم می‌شوند، که از آنها به‌عنوان اصلهای موضوع میدان، اصلهای موضوع ترتیب، و اصل موضوع تامیت (که اصل موضوع کوچکترین کران بالائی یا اصل موضوع پیوستگی نیز نامیده می‌شود) یاد می‌کنیم.

۲.۱ اصلهای موضوع میدان

علاوه برمجموعهٔ عددهای حقیقی $\mathbf{R}$، فرض می‌کنیم دوعمل، به‌نامهای جمع و ضرب، وجود داشته باشند بقسمی که به‌ازای هرجفت از عددهای حقیقی مانند x و y، مجموع $x + y$ و حاصل‌ضرب xy عددهائی حقیقی باشند که به‌طور منحصر بفرد به‌وسیلهٔ x و y مشخص شوند، ودراصلهای موضوع زیرصدق‌کنند. (دراین اصلها، x، y، و z نمایشگر عددهای حقیقی دلخواه می‌باشند، مگر این‌که خلاف آن گفته شود.)

اصل موضوع ۱ $x + y = y + x$ ، $xy = yx$ (قانونهای تعویضپذیری).

اصل موضوع ۲ $x + (y + z) = (x + y) + z$ ، $x(yz) = (xy)z$
(قانونهای شرکتپذیری).

اصل موضوع ۳ $x(y + z) = xy + xz$ (قانون پخشپذیری).

اصل موضوع ۴ به‌ازای هردو عدد حقیقی x و y، عددی حقیقی مانند z هست که $x + z = y$. این z با $y - x$ نشان داده می‌شود؛ عدد $x - x$ را با 0 نشان می‌دهیم. (می‌توان ثابت کرد که 0 از x مستقل است.) به‌جای $0 - x$ می‌نویسیم $-x$، و $-x$ را قرینهٔ x می‌نامیم.

اصل موضوع ۵ دست کم یک عدد حقیقی $x \neq 0$ وجود دارد. هرگاه x و y دو عدد حقیقی باشند و $x \neq 0$، آنگاه عددی حقیقی مانند z وجود دارد بقسمی‌که $xz = y$. این z را با y/x نشان می‌دهیم؛ عدد x/x با ۱ نشان داده می‌شود، و می‌توان ثابت کرد که ۱ مستقل از x است. اگر $x \neq 0$، به‌جای $1/x$ می‌نویسیم x^{-1}، و x^{-1} را متقابل x می‌نامیم.

از این اصلهای موضوع می‌توان همهٔ قانونهای متداول در حساب را نتیجه گرفت؛ مثلاً، $-(-x) = x$، $(x^{-1})^{-1} = x$، $-(x-y) = y-x$، $x - y = x + (-y)$، ومانند اینها. (برای تفصیل بیشتر، ر. ک. کتاب مرجع ۱.۰۱.)

۳.۱ اصلهای موضوع ترتیب

همچنین فرض می کنیم رابطه‌ای مانند $<$ وجود داشته باشد که میان عددهای حقیقی ترتیبی برقرار کند، و این رابطه در اصلهای موضوع زیرین صدق نماید:

اصل موضوع ۶ فقط یکی از رابطه های $x = y$، $x < y$، $x > y$ برقرار باشد.

تبصره. $y > x$ و $x < y$ دارای یك معنی هستند.

اصل موضوع ۷ هرگاه $x < y$، آنگاه به‌ازای هر z، $x + z < y + z$.

اصل موضوع ۸ هرگاه $x > 0$ و $y > 0$، آنگاه $xy > 0$.

اصل موضوع ۹ هرگاه $x > y$ و $y > z$، آنگاه $x > z$.

تبصره. عدد حقیقی x را مثبت گوئیم اگر $x > 0$، و منفی نامیم اگر $x < 0$. مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی مثبت را با $\mathbf{R}^+$، و مجموعهٔ همهٔ عدد های حقیقی منفی را با $\mathbf{R}^-$ نشان می‌دهیم.

از این اصلهای موضوع می‌توان قاعده‌هائی راکه درعمل با نامساویها متداول هستند بدست آورد. مثلاً، هر گاه $x < y$، آنگاه چنانچه z مثبت باشد $xz < yz$، حال‌آن‌که به‌ازای z منفی $xz > yz$. همچنین، هرگاه $x > y$ و $z > w$ و درآنها y و w هردو مثبت باشند، آنگاه $xz > yw$. (برای بحث کاملی از این قواعد، ر. ک. کتاب مرجع ۱.۰۱.)

تبصره. علامت $x \leqslant y$ را به‌عنوان شکل اختصاری عبارت

$$«x < y \text{ یا } x = y»$$

بکار می بریم. پس $2 \leqslant 3$ زیرا $2 < 3$؛ و $2 \leqslant 2$ زیرا $2 = 2$. علامت $\geqslant$ **نیز**

به‌نحو مشابه بکار برده می‌شود. عدد حقیقی x را نامنفی گوئیم در صورتی که $x \geqslant 0$.
جفتی از نامساویهای همزمان مانند $x < y$ و $y < z$ را معمولاً به صورت خلاصه‌تر $x < y < z$ می‌نویسیم.

قضیهٔ زیر، که نتیجهٔ ساده‌ای از اصلهای موضوع پیشگفته است، غالباً در برهانها درآنالیز بکار برده می‌شود.

قضیهٔ ۱.۱ هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند بقسمی که

$$a \leqslant b + \varepsilon \quad \text{،} \quad \text{به‌ازای هر } \varepsilon > 0 \text{،} \qquad (1)$$

آنگاه $a \leqslant b$.

برهان. هرگاه $b < a$، آنگاه نامساوی (۱) به‌ازای $\varepsilon = (a - b)/2$ نقض می‌شود زیرا

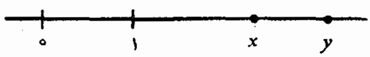
$$b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a.$$

بنابراین، بنا بر اصل موضوع ۶ باید $a \leqslant b$.

اصل موضوع ۱۰، یعنی اصل موضوع تامیت، در بخش ۱۱.۱ توصیف خواهد شد.

۴.۱ نمایش هندسی عددهای حقیقی

عددهایِ حقیقی غالباً به‌شکل‌هندسی به‌صورت نقطه‌هائی بر یك خط (به‌نام خط‌حقیقی یا محور حقیقی) نمایش داده می‌شوند. همان‌طورکه در شکل ۱.۱ نشان داده شده است، نقطه‌ای براین خط برای نمایش ۰ و نقطه‌ای دیگر برای نمایش ۱ انتخاب می‌شوند. این انتخاب مقیاس را مشخص می‌کند. طبق مجموعهٔ مناسبی از اصلهای موضوع برای هندسهٔ اقلیدسی، هرنقطه برخط حقیقی متناظر با یك، و فقط یك، عدد حقیقی است و، برعکس، هرعدد حقیقی با یك، و فقط یك، نقطه برخط حقیقی نمایش داده می‌شود. رسم براین است که به‌جای «نقطهٔ نمایندهٔ عدد حقیقی x» گفته شود «نقطهٔ x».



شکل ۱.۱

رابطهٔ ترتیبی تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. اگر $x < y$، همان‌طورکه درشکل

۱.۱ نشان داده شده است، نقطهٔ x در طرف چپ نقطهٔ y قـرار دارد. عددهـای مثبت در طرف راست ۰، و عددهای منفی در طرف چپ ۰ واقعند. اگـر $a < b$، نقطه‌ای مانند x در نامساویهای $a < x < b$ وقتی، و فقط وقتی، صدق می‌کند کـه x بین a و b باشد.

۵.۱ بازه ها

مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های بین a و b یك بازه نامیده می‌شود. گاهی تمایز بین بازه‌هائی که نقطه‌های انتهائی خود را در بر داشته باشند و بازه‌هائی که چنین نباشند اهمیت دارد.

نمادگذاری. نماد $\{x \mid x$ در P صدق می‌کند$\}$ یعنی مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی x که در خاصیت P صدق کنند.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم $a < b$. بازهٔ باز $]a, b[$ با مجموعهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}.$$

بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ عبارت است از مجموعـهٔ $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. به‌طریق مشابـه می‌توان بـا بکار بـردن نامساویهای $a < x \leqslant b$ و $a \leqslant x < b$، بـترتیب، بازه‌های نیمباز $]a, b]$ و $[a, b[$ را تعریف کـرد. بازه‌های نامتناهـی به‌صورتهای زیـرنـد:

$$]a, +\infty[=\{x|x>a\}, \ [a, +\infty[=\{x|x\geqslant a\},$$
$$]-\infty, a[=\{x|x<a\}, \ ]-\infty, a]=\{x|x\leqslant a\}.$$

گاهی خط حقیقی $\mathbf{R}$ به‌عنوان بازهٔ باز $]-\infty, +\infty[$ در نظر گـرفته می‌شود. همچنین، یك نقطه به‌عنوان یك بازهٔ بستهٔ «تبه شده» تلقی می گردد.

تبصره. علامتهای $+\infty$ و $-\infty$ عددهای حقیقی نیستند، و در این‌جا صرفاً برای سهولت در نمادگذاری بکار می‌روند. بعداً دستگاه عددهـای حقیقی را بقسمی وسعت می‌دهیم که این دو علامت را دربر گیرد. ولی تا انجام این عمل، همهٔ عددهـای حقیقی «متناهی» می باشند.

۶.۱ عددهای صحیح

در این بخش زیرمجمـوعهٔ بخصوصی از $\mathbf{R}$، به نام مجموعهٔ عدد هـای صحیح، را توصیف می کنیم. پیش‌از این که عددهای صحیح را تعریف کنیم، برای سهولت ابتدا مفهوم مجموعهٔ استقرائی را معرفی می نمائیم.

تعریف ۳.۱ مجموعه‌ای از عددهای حقیقی یک مجموعهٔ استقرائی نامیده می‌شود که دارای دو خاصیت زیرین باشد:

آ) عدد ۱ در این مجموعه باشد؛

ب) به‌ازای هر x در این مجموعه، عدد $x+1$ نیز در مجموعه باشد.

مثلاً، $\mathbf{R}$ یك مجموعهٔ استقرائی است همچنین مجموعهٔ $\mathbf{R}^+$. حال عدد های صحیح مثبت را آن عددهای حقیقی تعریف می کنیم که متعلق به هر مجموعهٔ استقرائی باشند.

تعریف ۴.۱ یک عدد حقیقی عدد صحیح مثبت نامیده می‌شود در صورتی که این عدد به‌هرمجموعهٔ استقرائی تعلق داشته باشد. مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت را به $\mathbf{Z}^+$ نشان می‌دهیم.

مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ خود یك مجموعهٔ استقرائی است. این مجموعه حاوی عدد ۱، عدد ۱ + ۱ (که با ۲ نشان داده می‌شود)، عدد ۱ + ۲ (که با ۳ نشان داده می‌شود)، و مانند اینها، می باشد. چون $\mathbf{Z}^+$ زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ استقرائی است، $\mathbf{Z}^+$ را به‌عنوان کوچکترین مجموعهٔ استقرائی تلقی می کنیم. گاهی این خاصیت $\mathbf{Z}^+$ را اصل استقرا می نامند. فرض ما این است که خواننده با اثبات قضایا به وسیلهٔ استقرا، که بر این اصل استوار است، آشنا باشد. (ر. ک. کتاب مرجع ۱۰۱.) مثالهائی ازچنین اثباتها در بخش آینده داده می‌شوند.

قرینه‌های اعداد صحیح مثبت را عددهای صحیح منفی می نامند. عددهای صحیح مثبت، به‌انضمام عددهای صحیح منفی و ۰ (صفر)، تشکیل مجموعه‌ای مانند $\mathbf{Z}$ می‌دهند که ما آن را مجموعهٔ عددهای صحیح می نامیم.

۷.۱ قضیهٔ یکتائی تجزیه برای عددهای صحیح

اگر n و d عددهائی صحیح باشند و عدد صحیحی مانند c وجود داشته باشد بقسمی که $n=cd$، می گوئیم d یك مقسوم علیه n است، یا n مضربی است از d، و می‌نویسیم $d|n$ (بخوانید: d عاد می کند n را). عدد صحیح n را اول نامیم درصورتی که $n>1$ و تنها مقسوم علیه‌های مثبت آن عبارت باشند از ۱ و n. هرگاه $n>1$ و n اول نباشد، آنگاه آن را مرکب می نامند. عدد صحیح ۱ نه اول است و نه مرکب.

در این بخش نتایجی مقدماتی دربارهٔ تجزیهٔ عددهای صحیح گرفته، سپس به کمك آنها قضیهٔ یکتائی تجزیه را، که به قضیهٔ اساسی حساب نیز معروف است، ثابت می کنیم.

بنا بر قضیهٔ اساسی: (۱) هرعـدد صحیح $n>1$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب سازه‌های اول درآورد، و (۲) این تجزیه، صرف‌نظر از ترتیب سازه‌ها، منحصربفرد می‌باشد. اثبات قسمت (۱) آسان است.

قضیهٔ ۱.۵ هرعدد صحیح $n>1$ یا اول است یا حاصل ضرب چند عدد اول.

برهان. روش استقرا برn را بکار می‌بریم. قضیه برای $n=2$ واضح است. فرض کنیم قضیه برای هرعدد صحیح k، که $1<k<n$، درست باشد. اگر n اول نباشد، دارای مقسوم‌علیه مثبتی مانند d ، که $1<d<n$ ، خواهد بود. بنابراین $n=cd$ ، که در آن $1<c<n$. چون c و d هر دو کوچکتر از n اند، هریك یا اول است یا به‌صورت حاصل‌ضرب چند عدد اول خواهد بود؛ پس n به‌صورت حاصل‌ضرب عددهائی اول است.

قبل از اثبات قسمت (۲) ، یعنی یکتائی تجـزیه ، چند مفهـوم دیگر را معرفی می‌کنیم.

اگر $d|a$ و $d|b$، می‌گوئیم d یك مقسوم علیه مشترك a و b است. بنا بر قضیهٔ زیر، هر جفت از عددهای صحیح مانند a و b دارای مقسوم علیه مشترکی است، که ترکیبی خطی از a و b می‌باشد.

قضیهٔ ۱.۶ هر جفت از عددهای صحیح مانند a و b دارای مقسوم علیه مشترکی است مانند d به‌شکل

$$d=ax+by,$$

که در آن x و y عددهائی صحیح هستند. بعـلاوه، هر مقسوم علیه مشترك a و b این d را عاد می‌کند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$ ، وروش استقرا را بر $n=a+b$ بکار می‌بریم. هرگاه $n=0$ ، آنگاه $a=b=0$ ، و می‌توان d را مساوی صفر گرفت و فرض کرد که $x=y=0$. حال فرض کنیم قضیه برای ۰، ۱، ۲، . . .، $n-1$ ثابت شده باشد. بنا بر تقارن، می‌توان فرض کـرد که $a\geqslant b$. اگر $b=0$ ، قرار می‌دهیم $d=a$ ، $x=1$ ، $y=0$ ؛ اگر $b\geqslant 1$ چون مجموع $a-b$ و b مساوی a است و $a=n-b\leqslant n-1$ ، پس می‌توان فرض استقرا را در مورد $a-b$ و b بکار برد. بنا براین، $a-b$ و b مقسوم علیه مشترکی مـانند d بـه شکل $d=(a-b)x+by$ دارند. این d عدد $(a-b)+b=a$ را نیزعاد می‌کند، پس d یك مقسوم‌علیه مشترك a و b است و $d=ax+(y-x)b$، یعنی d ترکیبی خطی از a و b می‌باشد. برای تمام کردن برهان لازم است نشان دهیم که هر مقسوم علیه مشترك a و b عاد می‌کند d

را. چون هرمقسوم‌علیه مشترک a و b هریك از a و b را عاد می کند، پس این مقسوم‌علیه ترکیب خطی $ax + (y - x)b = d$ را نیزعاد خواهدکرد. پس قضیه برای حالت $a \geqslant 0$ و $b \geqslant 0$ برقرار است. اگر یکـی یا هر دوی a و b منفی باشند، کافی است نتیجه‌ای را که هم اکنون بدست آمد در مورد $|a|$ و $|b|$ بکار بریم.

تبصره. هرگاه d یك مقسوم علیـه مشترك a و b به شکل $d=ax+by$ باشد، آنگاه $-d$ نیز یك مقسوم علیه مشترك است باهمان شکل، زیرا

$$-d = a(-x) + b(-y).$$

از این دو مقسوم علیه مشترك آن را کـه نامنفی است بزرگترین مقسوم علیه مشترك a و b نامیده با نماد (a, b) بمعم یا، فقط با (a, b)، نشان می‌دهیم. هرگاه $(a, b)=1$، آنگاه a و b را نسبت به هم اول گویند.

قضیهٔ ۷.۱ (لم اقلیدس). هرگاه $a|bc$ و $(a, b) = 1$، آنگاه $a|c$.

برهان. چون $(a, b) = 1$، می‌توان نوشت $ax + by = 1$. بنابراین،

$$c = acx + bcy.$$

اما $a|acx$ و $a|bcy$، پس $a|c$.

قضیهٔ ۸.۱ هرگاه عدد اولی مانند p حاصل ضرب ab را عاد کند، آنگـاه $p|a$ یا $p|b$. به‌طور کلی، هرگـاه عـدد اولـی مانند p حاصل ضرب $a_1 \cdots a_k$ را عاد کند، آنگاه p دست کم یکی از سازه‌ها را عاد خواهد کرد.

برهان. فرض کنیم $p|ab$ و p عاد نکند a را. هرگاه ثابت کنیم که $(p, a) = 1$، آنگاه از لم اقلیدس نتیجه می‌شود که $p|b$. برای این کار قرار می‌دهیم $d=(p, a)$. چون $d|p$، پس $d = 1$ یا $d = p$. d نمی‌تواند مساوی p باشد زیرا $d|a$ ولی p عاد نمی‌کند a را. بنابراین $d = 1$. برای اثبات حالت کلیتر قضیه، روش استقرا را بر k، یعنی تعداد سازه‌ها، بکار می‌بریم. توضیح مفصل آن به خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۹.۱ (قضیهٔ یکتائی تجزیه). هـر عدد صحیح $n > 1$ را می‌توان، صـرف نظر از ترتیب سازه‌ها، فقط به‌یک طریق به‌صورت حـاصل ضرب عددهـائی اول نشان داد.

برهان. روش استقرا بر n را بکار می‌بریم. قضیه برای $n = 2$ درست است. اکنون فرض کنیم قضیه برای همهٔ عددهای صحیح بزرگتر از ۱ وکوچکتر از n درست باشد. اگر n اول باشد، قضیه ثابت است. بنابراین، فرض کنیم n مرکب بوده به دوصورت متمایز به سازه‌های اول تجزیه شود، یعنی

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t \qquad (2)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $t = s$، وهر p مساوی یکی از q هاست. چون $p_۱$ حاصل‌ضرب $q_۱q_۲ \cdots q_t$ را عاد می‌کند، دست‌کم یکی‌از سازه‌های آن‌را عاد خواهد کرد. با دادن برچسب مجدد به q ها در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که $p_۱|q_۱$. چون $p_۱$ و $q_۱$ هر دو اولند، پس $p_۱ = q_۱$. در رابطهٔ (۲) $p_۱$ را از دو طرف حذف می‌کنیم، حاصل می‌شود

$$\frac{n}{p_۱} = p_۲ \cdots p_s = q_۲ \cdots q_t \cdot$$

چون n مرکب است، $۱ < n/p_۱ < n$؛ از این روی با توجه به‌فرض استقرا نتیجه می‌شود که دو تجزیهٔ $n/p_۱$، صرف‌نظر از ترتیب سازه‌ها، یکی هستند. بنابراین، دو تجزیهٔ موجود در رابطهٔ (۲) نیز، صرف‌نظر از ترتیب سازه‌ها، یکی هستند و برهان تمام است.

۸.۱ عددهای گویا

خارج قسمتهای اعداد صحیح مانند a/b $(b \neq ۰)$ را عددهای گویا می‌نامند. مثلاً، ۱/۲، ۷/۵ −، و ۶ عددهائی گویا هستند. مجموعهٔ عددهای گویا با $\mathbf{Q}$ نشان داده می‌شود. این مجموعه $\mathbf{Z}$ را به عنوان یک زیرمجموعه در بر می‌گیرد. باید‌توجه داشت که همهٔ اصلهای موضوع میدان و اصلهای موضوع ترتیب در مورد $\mathbf{Q}$ برقرار می‌باشند.

فرض می‌کنیم خواننده با بعضی از خاصیتهای مقدماتی عددهای گویا آشنا باشد. مثلاً، اگر a و b عددهائی گویا باشند، میانگین آنها، یعنی $(a + b)/۲$، نیز گویا است و بین a و b قرار دارد. بنابراین، بین هر دو عدد‌گویا تعدادی نامتناهی عدد‌گویا وجود دارد. این وضع ایجاب می‌کند که اگر عدد گویای معینی داده شده باشد، دربارهٔ عدد گویای «بی‌فاصله بعد از آن» نتوان سخن گفت.

۹.۱ عددهای گنگ

عددهای حقیقی که‌گویا نباشند گنگ نامیده می‌شوند. مثلاً، عددهای $\sqrt{۲}$، e، π، و e^{π} گنگ هستند.

معمولاً اثبات گنگ بودن یك عدد بخصوص کار چندان آسانی نیست. مثلاً، برهان ساده‌ای برای گنگ بودن e^{π} وجود ندارد. اما اثبات گنگ بودن بعضی از عددها مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ چندان دشوار نمی‌باشد. در حقیقت، بآسانی قضیهٔ آتی را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰.۱ هرگاه n عدد صحیح مثبتی فرض شود و n مربع کامل نباشد، آنگاه $\sqrt{n}$

گنگ است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم n در تجزیهٔ خود سازهٔ مربعی بزرگتر از ۱ نداشته باشد. $\sqrt{n}$ را گویا فرض می‌کنیم و با تناقضی روبرو می‌شویم. فرض می‌کنیم $\sqrt{n} = a/b$، که در آن a و b دو عدد صحیح بی‌سازهٔ مشترك باشند. در این صورت $nb^{۲} = a^{۲}$. چون طرف چپ این‌معادله مضربی است از n، پس $a^{۲}$ نیز مضربی از n خواهد بود. اما، اگر $a^{۲}$ مضربی از n باشد، چون n سازهٔ مربعی بزرگتر از ۱ ندارد، پس a خود نیز مضربی از n می‌باشد. (با تجزیهٔ a به سازه‌های اول بآسانی متوجه این مطلب می‌توان شد.) یعنی $a = cn$، که در آن c عددی است صحیح. در این صورت، معادلهٔ $nb^{۲} = a^{۲}$ به شکل $nb^{۲} = c^{۲}n^{۲}$، یا $b^{۲} = nc^{۲}$، در می‌آید. به‌همان دلیل معلوم می‌شود که b نیز باید مضربی از n باشد. پس a و b هر دو مضربی از n هستند، و این مخالف فرض نداشتن سازهٔ مشترك آنهاست. پس اگر n سازهٔ مربعی بزرگتر از ۱ نداشته باشد، برهان تمام است.

اگر n دارای سازهٔ مربع باشد، می‌توان نوشت $n = m^{۲}k$، که درآن $k > ۱$ و k دارای سازهٔ مربعی بزرگتر از ۱ نیست. در این صورت $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$؛ و اگر $\sqrt{n}$ گویا بود، عدد $\sqrt{k}$ نیز گویا می‌بود، و این خلاف مطلبی است که هم اکنون ثابت گردید.

برای اثبات گنگ بودن e دلیلی از نوع دیگر لازم است. (فرض می‌کنیم خواننده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با تابع نمائی e^{x} و نمایش آن به صورت یك رشتهٔ نامتناهی آشنا باشد.)

قضیهٔ ۱۱.۱ هرگاه

$$e^{x} = ۱ + x + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۳}}{۳!} + \cdots + \frac{x^{n}}{n!} + \cdots,$$

آنگاه عدد e گنگ است.

برهان. ثابت می‌کنیم که $e^{-۱}$ گنگ است. رشتهٔ متناظر $e^{-۱}$ یك رشتهٔ متناوب است. در این رشته قدر مطلق جمله ها رفته رفته نزول می‌کند. در یك چنین رشتهٔ متناوبی، اگر در جملهٔ nم توقف کنیم، خطائی که مرتکب شده‌ایم دارای علامت جبری اولین جمله‌ای است که از آن صرف‌نظر می‌شود، و قدر مطلق این خطا از قدر مطلق اولین جملهٔ صرف نظر شده کوچکتر است. از این روی، اگر $s_n = \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^{k}/k!$، نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$۰ < e^{-۱} - s_{۲k-۱} < \frac{۱}{(۲k)!}.$$

پس به ازای هر عدد صحیح $k \geqslant ۱$،

$$۰ < (۲k-۱)!(e^{-۱} - s_{۲k-۱}) < \frac{۱}{۲k} \leqslant \frac{۱}{۲} \cdot \qquad (۳)$$

اما $(۲k-۱)!\, s_{۲k-۱}$ همواره عددی است صحیح. پس هرگاه $e^{-۱}$ گویا می‌بود، آنگاه می‌توانستیم k را آن قدر بزرگ اختیار کنیم که $(۲k-۱)!\, e^{-۱}$ نیز عددی صحیح باشد. بنابر رابطهٔ (۳)، تفاضل این دوعدد صحیح عددی بین ۰ و ۱/۲ است، و چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین، $e^{-۱}$، و در نتیجه e، نمی‌تواند گویا باشد.

تبصره. برای اثبات گنگ بودن π، ر. ک. تمرین ۷.۳۰۳.

یونانیان باستان در پانصد سال قبل از میلاد مسیح به‌وجود عددهای گنگ پی برده بودند، اما نظریهٔ رضایت‌بخشی دربارهٔ عددهای گنگ تا اواخر قرن نوزدهم عرضه نشده بود. در آن زمان سه نظریهٔ متفاوت به‌وسیلهٔ کانتور[1]، ددکیند[2]، و وایراشتراس[3] عرضه شدند. برای مطالعه‌ای در نظریه‌های ددکیند و کانتور و هم‌ارز بودن آنها، ر. ک. کتاب مرجع ۶.۱.

۱۰.۱ کرانهای بالائی، عنصر ماکزیمم، کوچکترین کران بالائی (سوپریمم)

در جبر وقتی که برای حل برخی معادلات درجهٔ دوم تلاش می‌کنیم به‌عددهای گنگ برمی‌خوریم. مثلاً، می‌خواهیم عددی حقیقی مانند x داشته باشیم بقسمی که $x^۲ = ۲$. از نه اصل موضوع یاد شده در بالا نمی‌توان وجود یک‌چنین x را در $\mathbf{R}$ ثابت کرد، زیرا این ۹ اصل موضوع درمورد $\mathbf{Q}$ نیز صادق هستند، و ما ثابت کرده‌ایم که عدد گویائی وجود ندارد که مربع آن ۲ باشد. به‌کمک اصل موضوع تامیت می‌توان عددهای گنگ را در دستگاه عددهای حقیقی معرفی نمود. این اصل به‌دستگاه عددهای حقیقی خاصیت پیوستگی می‌بخشد، و این خاصیت اساس بسیاری از قضیه‌ها در آنالیز است.

قبل از توصیف اصل موضوع تامیت، برای تسهیل کار، اصطلاحها و نمادهای دیگری را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱ فرض‌کنیم S مجموعه‌ای از عددهای حقیقی باشد. هرگاه عددی حقیقی مانند b وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر x در S رابطهٔ $x \leqslant b$ برقرار باشد، آنگاه b را یک کران بالائی برای S می‌نامیم و می‌گوئیم که S از بالا به b کراندار است.

می‌گوئیم یک کران بالائی، زیرا هرعدد بزرگتر از b نیز یک کران بالائی

---

1. Cantor 2. Dedekind 3. Weierstrass

است برای S. هرگاه کران بالائی b عضو S هم باشد، آنگاه آن را بزرگترین عضو یا عنصر ماکزیمم S می‌نامیم. حداکثر یك عضو مانند b می‌تواند وجود داشته باشد. در صورت وجود می‌نویسیم

$$b = \max S.$$

هرمجموعه‌ای‌راکه کرانی بالائی نداشته باشد از بالا بی‌کران می‌نامند.

اصطلاحهای کران پائینی، ازپائین کراندار، کوچکترین عضو (یا عنصر مینیمم) را می‌توان به نحو مشابه تعریف کرد. اگر S عنصر مینیمم داشته باشد، آن را به $\min S$ نشان می‌دهیم.

چند مثال

۱. مجموعهٔ $\mathbf{R}^+ =]0, +\infty[$ از بالا بی‌کران است. این مجموعه کران بالائی و عنصر ماکزیمم ندارد. از پائین به ۰ کراندار است ولی عنصر مینیمم ندارد.

۲. بازهٔ بستهٔ $S = [0, 1]$ از بالا به ۱، و از پائین به ۰، کراندار است. در واقع، $\max S = 1$ و $\min S = 0$.

۳. بازهٔ نیمباز $S = [0, 1[$ از بالا به ۱ کراندار است ولی عنصر ماکزیمم ندارد. عنصر مینیمم این مجموعه ۰ است.

برای مجموعه‌هائی شبیه به‌مجموعهٔ مثال ۳، که از بالا کراندار باشند اما عنصر ماکزیمم نداشته باشند، مفهومی را می‌توان جایگزین مفهوم ماکزیمم نمود. این مفهوم کوچکترین کران بالائی یا سوپرمم مجموعه نامیده و بدین صورت تعریف می‌شود:

تعریف ۱۳۰۱ فرض کنیم S مجموعه‌ای از عددهای حقیقی، و از بالا کراندار باشد. عدد حقیقی b را یک کوچکترین کران بالائی برای S نامیم در صورتی که b دارای این دو خاصیت باشد:

آ) b یك‌کران بالائی برای S باشد؛

ب) هیچ عدد کوچکتر از b یك کران بالائی برای S نباشد.

چند مثال. اگر $S = [0, 1]$، عنصر ماکزیمم، یعنی ۱، یك کوچکترین کران بالائی برای S نیز هست. اگر $S = [0, 1[$، عدد ۱ یك کوچکترین کران بالائی برای S است، هرچند S عنصر ماکزیمم ندارد.

به‌عنوان تمرینی ساده، می‌توان ثابت کرد که یك مجموعه دارای دو کوچکترین کران بالائی متفاوت نیست. بنابراین، اگر یك کوچکترین کران بالائی برای S

وجود داشته باشد، فقط یکی است و مـی‌توانیم از کـوچکترین کران بالائی مجموعه سخن بگوئیم.

معمولاً به کوچکترین کران بالائی یك مجموعه اصطلاح مختصرتر سوپرمم، با نماد اختصاری sup، اطلاق می‌شود. ما این اصطلاح را می‌پذیریم، و برای آن کـه نشان دهیم b سوپرمم S است می نویسیم

$$b = \sup S.$$

هرگاه S عنصر ماکزیمم داشته باشد، آنگاه $\max S = \sup S$.

بزرگترین کران پائینی، یـا اینفیمم S، که با نماد $\inf S$ نشان داده می‌شود، دارای تعریفی مشابه است.

۱۱.۱ اصل موضوع تامیت

آخرین اصل موضوع ما برای دستگاه عددهای حقیقی متضمن مفهوم سوپرمم است.

اصل موضوع ۱۰ هر مجموعهٔ ناتهی S از عددهای حقیقی کـه از بالا کـراندار باشد سوپرمم دارد؛ یعنی، عددی حقیقی مانند b وجود دارد بقسمی که $b = \sup S$.

از این اصل نتیجه می‌شود که هرمجموعهٔ ناتهی از عددهای حقیقی که از پائین کراندار باشد دارای اینفیمم است.

۱۲.۱ چند خاصیت سوپرمم

دراین بخش دربـارهٔ چند خاصیت اساسی سوپرمم کـه در این کتاب درسی مـورد استفاده خواهند بود بحث می کنیم. مشابه این خاصیتها برای اینفیمم وجود دارند، و خواننده می‌تواندآنها را بـرای خود تنظیم نماید.

اولین خاصیت نشان می‌دهد که هرمجموعهٔ سوپرمم‌دار حاوی عضوهائی به‌قدر کافی نزدیك به‌سوپرمم خود می باشد.

قضیهٔ ۱۴.۱ (خاصیت تقریب). فرض کنیم S مجموعه‌ای ناتهی از عددهـای حقیقی، و دارای سوپرمم باشد، مثلاً، $b = \sup S$. دراین صورت، به‌ازای هر $a < b$، xی در S هست بقسمی که

$$a < x \leqslant b.$$

برهان. اولاً، به‌ازای هـر $x \in S$، $x \leqslant b$. هـرگاه بـه‌ازای هر x در S داشته بـاشیم $x \leqslant a$، آنگاه a یك کران بالائی برای S کوچکتراز کوچکترین کران بالائی خواهد بود. بنابراین، دست کم یك x در S که به‌ازای آن $x > a$ وجود دارد.

قضیهٔ ۱۵۰۱ (خاصیت جمعپذیری). فرض کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbf{R}$ باشند، و C مجموعهٔ

$$C = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$$

باشد. هرگاه A و B هردو سوپرمم داشته باشند، آنگاه C نیز سوپرمم دارد و

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

برهان. قرار می‌دهیم $a = \sup A$ و $b = \sup B$. هرگاه $z \in C$، آنگاه $z = x + y$، که در آن $x \in A$ و $y \in B$، پس، $z = x + y \leqslant a + b$. بنابراین، $a + b$ یك کران بالائی برای C است. پس C سوپرمم دارد، مثلاً $c = \sup C$، لذا $c \leqslant a + b$. حال نشان می‌دهیم که $a + b \leqslant c$. برای این کار $\varepsilon > 0$ دلخواهی اختیار می‌کنیم. بنابر قضیهٔ ۱۴۰۱، xی در A و yی در B وجود دارند بقسمی که

$$x > a - \varepsilon \text{ و } y > b - \varepsilon.$$

از جمع این دونامساوی بدست می‌آید

$$a + b - 2\varepsilon < x + y \leqslant c.$$

بنابراین، به ازای هر $\varepsilon > 0$، $a + b < c + 2\varepsilon$ پس، بنابرقضیهٔ ۱۰۱، $a + b \leqslant c$.

اثبات قضیهٔ زیر به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۱۶۰۱ (خاصیت مقایسه‌ای). فرض کنیم S و T دو زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbf{R}$ باشند بقسمی که به‌ازای هر s در S و هر t در T، $s \leqslant t$. هرگاه T سوپرمم داشته باشد، آنگاه S نیز سوپرمم دارد و

$$\sup S \leqslant \sup T.$$

۱۳۰۱ خاصیتهائی ازعددهای صحیح که از اصل‌موضوع تامیت نتیجه می‌شوند

قضیهٔ ۱۷۰۱ مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ متشکل از عددهای صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، . . . از بالا بی‌کران است.

برهان. هرگاه $\mathbf{Z}^+$ از بالا کراندار باشد، آنگاه $\mathbf{Z}^+$ باید سوپرمم داشته باشد، مثلاً $a = \sup \mathbf{Z}^+$. بنابرقضیهٔ ۱۴۰۱، به ازای یك nی در $\mathbf{Z}^+$، خواهیم داشت $n > a - 1$. بنابراین، به‌ازای این n، $n + 1 > a$. چون $n + 1 \in \mathbf{Z}^+$، پس a نمی‌تواند سوپرمم $\mathbf{Z}^+$ باشد، و این ناقض فرض اول ما است.

قضیهٔ ۱۸.۱ به‌ازای هرعدد حقیقی x، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد بقسمی که $n > x$.

برهان. اگر حکم صحیح نباشد، برخلاف آنچه در قضیهٔ ۱۷.۱ ثابت شد، عددی مانند x یك کران بالائی برای $\mathbf{Z}^+$ خواهد بود.

۱۴.۱ خاصیت ارشمیدسی[1] دستگاه عددهای حقیقی

قضیهٔ زیرین خاصیت ارشمیدسی دستگاه عدد های حقیقی را توصیف می‌کند. از نظر هندسی، این خاصیت به‌ما می‌گوید که هرپاره‌خط را، هرقدر هم دراز باشد، می‌توان با تعدادی متناهی پاره‌خط که درازای‌آنها مساوی عدد مثبت مفروضی است‌پوشانید، هرقدر هم‌که این عددکوچك باشد.

قضیهٔ ۱۹.۱ اگر $x > 0$ و y عدد حقیقی دلخواهی باشد، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد بقسمی که $nx > y$.

برهان. از قضیهٔ ۱۸.۱ درحالی‌که درآن y/x به‌جای x گذارده شده باشد استفاده کنید.

۱۵.۱ عددهای‌گویا با نمایش اعشاری متناهی

هرعدد حقیقی به شکل

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

را، که درآن a_0 عددی صحیح و نامنفی باشد و a_1، a_2، ...، a_n عدد هائی صحیح باشند و در رابطهٔ $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ صدق کنند، معمولاً به صورت ساده‌تر

$$r = a_0{,}a_1a_2 \cdots a_n$$

نوشته، آن را یك نمایش اعشاری متناهی r می‌نامیم. مثلاً،

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5, \qquad \frac{1}{50} = \frac{2}{10^2} = 0{,}02,$$

$$\frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7{,}25.$$

عددهای حقیقی‌که به شکل بالا نموده شوند لزوماً گویا هستند. در واقع، همهٔ آنها به شکل $r = a/10^n$ می‌باشند، که درآن a عددی است صحیح. اما باید توجه داشت

1. Archimedean

که همهٔ عددهای گویا را نمی‌توان به صورت اعشاری متناهی نمایش داد. مثلاً، اگر $1/3$ نمایش اعشاری متناهی داشته باشد، باید به ازای عدد صحیحی مانند a بتوان نوشت $a/10^n = 1/3$ یا $3a = 10^n$. اما این ممکن نیست زیرا ۳ هیچ توانی از ۱۰ را عاد نمی‌کند.

۱۶.۱ تقریب عددهای حقیقی به عددهای اعشاری متناهی

دراین بخش، با استفاده از اصل موضوع تامیت، نشان می‌دهیم که عددهای حقیقی را می‌توان با هر درجه‌ای از دقت به عددهای گویای دارای نمایش اعشاری متناهی نزدیک کرد.

قضیهٔ ۲۰.۱ فرض کنیم که $x \geqslant 0$. در این صورت، به‌ازای هرعدد صحیح $n \geqslant 1$، یک عدد اعشاری متناهی مانند $r_n = a_0.a_1 a_2 \ldots a_n$ وجود دارد بقسمی که

$$r_n \leqslant x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

برهان. فرض می‌کنیم S مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح نامنفی نابیشتر از x باشد. چون $0 \in S$، پس S تهی نیست. همچنین، S از بالا به x کراندار است. بنابراین، S سوپرمم دارد. مثلاً $a_0 = \sup S$. بآسانی معلوم می‌شود که $a_0 \in S$، پس a_0 عددی صحیح و نامنفی است. a_0 را بزرگترین عدد صحیح در x نامیده، می‌نویسیم $a_0 = [x]$. واضح است که

$$a_0 \leqslant x < a_0 + 1.$$

حال فرض می‌کنیم $a_1 = [10x - 10a_0]$، یعنی a_1 مساوی بزرگترین‌عدد صحیح در $10x - 10a_0$ باشد. چون

$$0 \leqslant 10x - 10a_0 = 10(x - a_0) < 10,$$

نتیجه می‌گیریم که $0 \leqslant a_1 \leqslant 9$ و $a_1 \leqslant 10x - 10a_0 < a_1 + 1$. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، a_1 بزرگترین عدد صحیحی است که در نامساویهای

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

صدق می‌کند.

به‌طورکلی، پس از انتخاب a_1، ...، a_{n-1}، که درآنها $0 \leqslant a_i \leqslant 9$، a_n را بزرگترین جواب صحیح نامساویهای

$$(۴)\quad a_\circ + \frac{a_۱}{۱\circ} + \dots + \frac{a_n}{۱\circ^n} \leqslant x < a_\circ + \frac{a_۱}{۱\circ} + \dots + \frac{a_n + ۱}{۱\circ^n}$$

فرض می‌کنیم. دراین صورت $۹ \geqslant a_n \geqslant \circ$، و با فرض $r_n = a_\circ{}_ر a_۱ a_۲ \dots a_n$ نتیجه می‌شود که

$$r_n \leqslant x < r_n + \frac{۱}{۱\circ^n},$$

و برهان قضیه تمام است. بآسانی می‌توان تحقیق کرد که x عملاً مساوی سوپرمم مجموعهٔ عددهای گویای $r_۱$ ، $r_۲$ ، . . . می‌باشد.

۱۷.۱ نمایشهای اعشاری نامتناهی عددهای حقیقی

عددهای صحیح $a_\circ$،$a_۱$،$a_۲$، . . . راکه از برهان قضیهٔ ۲۰.۱ حاصل شده‌اند می‌توان برای تعریف نمایش اعشاری نامتناهی x بکار برد. منظور از رابطهٔ

$$x = a_\circ{}_ر\, a_۱ a_۲ \dots$$

این است که a_n بزرگترین عدد صحیحی است که در نامساویهای (۴) صدق می‌کند. مثلاً، اگر $x = ۱/۸$ را در نظر بگیریم، بدست می‌آوریم

$$a_\circ = \circ,\ a_۱ = ۱,\ a_۲ = ۲,\ a_۳ = ۵,$$

و به ازای هر $n \geqslant ۴$ ، $a_n = \circ$. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{۸} = \circ{}_ر ۱۲۵\circ\circ\circ \dots .$$

اگر در رابطه‌های (۴) جای دو علامت $\leqslant$ و $<$ را با یکدیگر عوض کنیم، تعریف بسط اعشاری بالا تغییرمختصری می‌کند. دراین‌تعریف جدید باوجودآن که r_nها در رابطهٔ $r_n < x \leqslant r_n + ۱\circ^{-n}$ صدق می‌کنند، ولی رقمهای $a_\circ$، $a_۱$، $a_۲$، . . . لزوماً همانهائی که از (۴) بدست می‌آیند نخواهند بود. مثلاً، اگر تعریف دوم را در مورد $x = ۱/۸$ بکار ببریم، نمایش اعشاری نامتناهی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۸} = \circ{}_ر ۱۲۴۹۹۹ \dots .$$

امکان نمایش اعشاری یك عدد حقیقی به دو صورت متفاوت صرفاً انعکاس این‌واقعیت است که دو مجموعهٔ مختلف از عددهای حقیقی می‌توانند دارای یك سوپرمم باشند.

۱۸.۱ قدر مطلقها و نامساوی مثلثی

درآنالیز محاسبات با نامساویها مکرر مورد پیدا می‌کند. این محاسبات وقتی که با

مفهوم قدرمطلق سروکار داشته باشیم دارای اهمیت خاصی خواهند بود. اگر x عددی حقیقی باشد، قدر مطلق آن با $|x|$ نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ ، } & x \geqslant 0 \quad \text{اگر} \\ -x \text{ ، } & x \leqslant 0 \quad \text{اگر} \end{cases}.$$

یك نامساوی اساسی در مورد قدر مطلقها در قضیهٔ زیر بیان می‌شود:

قضیهٔ ۲۱۰۱ هرگاه $a \geqslant 0$، آنگاه نامساوی $|x| \leqslant a$ وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که $-a \leqslant x \leqslant a$.

برهان. از تعریف $|x|$ معلوم می‌شودکه چون $|x| = x$ یا $|x| = -x$، پس $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. هرگاه فرض کنیم که $|x| \leqslant a$ ، آنگاه می‌توان نوشت $-a \leqslant -|x| \leqslant x \leqslant |x| \leqslant a$؛ پس نیمی از قضیه باثبات رسید. برعکس، فرض کنیم که $-a \leqslant x \leqslant a$. دراین صورت اگر $x \geqslant 0$، داریم $|x| = x \leqslant a$، حال آن‌که اگر $x < 0$، داریم $|x| = -x \leqslant a$. در هرحالت $|x| \leqslant a$، وقضیه اثبات شده است.

قضیهٔ بالا را می‌توان برای اثبات نامساوی مثلثی بکار برد.

قضیهٔ ۲۲۰۱ به‌ازای هردوعدد حقیقی دلخواه x و y،

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{(نامساوی مثلثی)}.$$

برهان. داریم $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ و $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. از جمع این دو نامساوی نتیجه می‌شود که $-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$. بنابراین، با توجه به‌قضیهٔ ۲۱۰۱، $|x + y| \leqslant |x| + |y|$، و حکم ثابت است.

نامساوی مثلثی غالباً به‌شکلهای دیگر بکار می‌رود. مثلاً، اگر در قضیهٔ ۲۲۰۱ فرض کنیم که $x = a - c$ و $y = c - b$، خواهیم داشت

$$|a - b| \leqslant |a - c| + |c - b|.$$

همچنین، از قضیهٔ ۲۲۰۱ معلوم می‌شودکه $|x| \geqslant |x + y| - |y|$. با فرض $x = a + b$ و $y = -b$، داریم

$$|a + b| \geqslant |a| - |b|.$$

ونیز باتعویض a و b خواهیم داشت $|a+b| \geqslant |b| - |a| = -(|a| - |b|)$، و در نتیجه

$$|a+b| \geqslant \big||a|-|b|\big|.$$

بعلاوه، به استقرا، می‌توان تعمیم نامساویهای بالا، یعنی رابطه های زیرین، را ثابت کرد:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

و

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \geqslant |x_1|-|x_2|-\cdots-|x_n|.$$

۱۹.۱ نامساوی کشی ـ شوارتز[1]

اکنون نامساوی دیگری راکه غالباً در آنالیز بکار می‌رود بدست می آوریم.

قضیهٔ ۲۳.۱ (نامساوی کشی‌ـشوارتز). اگر a_1 ، . . . ، a_n، و b_1 ، . . . ، b_n عددهای حقیقی دلخواهی باشند،

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

بعلاوه، اگر دست کم یکی از a_iها صفر نباشد، تساوی وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که عددی حقیقی مانند x باشد بقسمی که به‌ازای هر

$$k=1, 2, \ldots, n\,,\ a_k x + b_k = 0.$$

برهان. چون مجموع مربعهای چند عدد هرگز منفی نیست، پس به ازای هر عدد حقیقی x،

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

واین رابطه وقتی، و فقط وقتی، تساوی است که هر جملهٔ آن صفر باشد. این نامساوی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0,$$

که در آن

$$A=\sum_{k=1}^{n} a_k^2\,,\quad B=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k,\quad C=\sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

اگر $A>0$، باقرار دادن $x=-B/A$ در نامساوی بالا رابطهٔ $B^2-AC \leqslant 0$ حاصل می‌شود، که همان نامساوی مطلوب است. در حالت $A=0$ اثبات نامساوی کاری است بسیار ساده.

---

1. Cauchy - Schwarz

تبصره. اگر $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ دوبردار n بعدی باشند، نامساوی کشی ـ شوارتز به شکل برداری زیر در می‌آید:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leqslant \|\mathbf{a}\|^2\,\|\mathbf{b}\|^2,$$

که در آن

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، و $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$ درازای $\mathbf{a}$ است.

۲۰.۱ به‌علاوهٔ بی‌نهایت ومنهای بی‌نهایت و دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافتهٔ $\mathbf{R}^*$

اکنون با اضافه‌کردن دو «نقطهٔ فرضی» به دستگاه عددهای حقیقی آن را وسعت می‌دهیم. این دو نقطه را با علامتهای $+\infty$ و $-\infty$ («به‌علاوهٔ بی‌نهایت» و «منهای بی‌نهایت») نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۴.۱ منظور از دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافتهٔ $\mathbf{R}^*$ مجموعهٔ عددهای حقیقی $\mathbf{R}$ به‌انضمام دو علامت $+\infty$ و $-\infty$ است که دارای خاصیتهای زیرین باشند:

آ) هرگاه $x \in \mathbf{R}$، آنگاه

$$x + (+\infty) = +\infty,\ x + (-\infty) = -\infty,$$
$$x - (+\infty) = -\infty,\ x - (-\infty) = +\infty,$$

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

ب) هرگاه $x > 0$، آنگاه

$$x(+\infty) = +\infty,\ x(-\infty) = -\infty.$$

ج) هرگاه $x < 0$، آنگاه

$$x(+\infty) = -\infty,\ x(-\infty) = +\infty.$$

د) $(+\infty)+(+\infty)=(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty$،

$$(-\infty)+(-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

ه) هرگاه $x \in \mathbf{R}$، آنگاه $-\infty < x < +\infty$.

نمادگذاری. مجموعهٔ $\mathbf{R}$ را با $]-\infty, +\infty[$ ، و مجموعهٔ $\mathbf{R}^*$ را با $[-\infty, +\infty]$ نشان می‌دهیم. نقطه های $\mathbf{R}$ را «متناهی» نامند تا از دو نقطهٔ «نامتناهی» $+\infty$ و $-\infty$ تمیز داده شوند.

بکار گرفتن علامتهای $+\infty$ و $-\infty$ صرفاً برای سهولت است. مثلاً، هرگاه $+\infty$ را سوپرمم هرمجموعه از عددهای حقیقی از بالا بی‌کران تعریف کنیم، آنگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbf{R}$ سوپرممی در $\mathbf{R}^*$ دارد. با این تعریف، اگر مجموعه‌ای از بالا کراندار باشد، سوپرمم متناهی، و اگر از بالا بی‌کران باشد، سوپرمم نامتناهی خواهد داشت. به‌نحو مشابه، $-\infty$ را مساوی اینفیمم هر مجموعه از عددهای‌حقیقی از پائین بی‌کران تعریف می‌کنیم. دراین صورت، هر زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbf{R}$ دارای اینفیممی است در $\mathbf{R}^*$.

برای انجام کارهائی در مبحث حدها، که بعداً خواهدآمد، جای آن است که اصطلاحهای زیرین را نیز معرفی نمائیم.

تعریف ۲۵.۱ هر بازهٔ باز مانند $]a, +\infty[$ یک همسایگی $+\infty$، یا یک‌گوی به‌مرکز $+\infty$، نامیده می‌شود. هر بازهٔ باز مانند $]-\infty, a[$ را یک همسایگی $-\infty$، یا یک گوی به‌مرکز $-\infty$، نامند.

۲۱.۱ عددهای مختلط

بنابر اصلهای موضوع حاکم بر رابطهٔ $<$، مربع یك عدد حقیقی هیچ گاه منفی نیست. از این روی، مثلاً، معادلهٔ درجهٔ دوم سادهٔ $x^2 = -1$ جوابی در مجموعهٔ عددهای حقیقی ندارد. برای تأمین جواب این‌گونه معادلات نوع جدیدی ازعددها، به‌نام عددهای مختلط، ابداع شده است. با ابداع عددهای مختلط، معادلات جبری کلی به‌شکل

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0,$$

که در آنها ضریبهای a_0 ، a_1 ، . . . ، a_n عددهای حقیقی دلخواهند، دارای جواب خواهند بود. (این مطلب به‌نام قضیهٔ اساسی جبر معروف است.)

اینك عددهای مختلط را تعریف نموده آنها را بتفصیل مورد بحث قرار می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱ منظور از یك عدد مختلط جفت مرتبی است از عددهای حقیقی، مانند (x_1, x_2). اولین عضو، یعنی x_1، قسمت حقیقی، و دومین عضو، یعنی x_2، قسمت موهومی عدد مختلط نامیده می‌شود. دو عدد مختلط $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ را وقتی، و فقط وقتی، متساوی گوئیم که $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$.

در این صورت می‌نویسیم $y = x$. مجموع $x + y$ و حاصل ضرب xy را با رابطه‌های زیرین تعریف می‌کنیم:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad xy = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

تبصره. مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط به $\mathbf{C}$ نشان داده خواهد شد.

قضیهٔ ۲۷.۱ عملهای جمع و ضرب، که در بالا تعریف شده‌اند، در قانونهای تعویضپذیری، شرکتپذیری، و پخشپذیری صدق می‌کنند.

برهان. فقط قانون پخشپذیری را ثابت می‌کنیم؛ اثبات قانونهای دیگر آسانتر است. هرگاه $x = (x_1, x_2)$، $y = (y_1, y_2)$، و $z = (z_1, z_2)$، آنگاه

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (x_1, x_2)(y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_1 z_1 - x_2 y_2 - x_2 z_2, x_1 y_2 + x_1 z_2 \\ &\qquad + x_2 y_1 + x_2 z_1) \\ &= (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &\qquad + (x_1 z_1 - x_2 z_2, x_1 z_2 + x_2 z_1) \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

قضیهٔ ۲۸.۱

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2), \quad (x_1, x_2)(0, 0) = (0, 0),$$
$$(x_1, x_2)(1, 0) = (x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (0, 0).$$

برهان. رابطه‌های بالا و همچنین قضیه‌های ۲۹.۱، ۳۰.۱، ۳۲.۱، و ۳۳.۱ نتیجه‌های مستقیم تعریف بالا هستند.

قضیهٔ ۲۹.۱ به ازای دو عدد مختلط مفروض $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$، عدد مختلطی مانند z هست بقسمی که $y = x + z$. در حقیقت،

$$z = (y_1 - x_1, y_2 - x_2).$$

این z را با $y - x$ نشان می‌دهیم. عدد مختلط $(-x_1, -x_2)$ با $-x$ نشان داده می‌شود.

قضیهٔ ۳۰.۱ به‌ازای هر دو عدد مختلط x و y،

$$(-x)y = x(-y) = -(xy) = (-1, 0)(xy).$$

تعریف ۳۱.۱ اگر $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ و y دو عدد مختلط باشند، تعریف می‌کنیم $x^{-1} = [x_1/(x_1^2 + x_2^2), -x_2/(x_1^2 + x_2^2)]$، و $y/x = yx^{-1}$.

قضیهٔ ۳۲.۱ اگر x و y دوعدد مختلط باشند و $x \neq (\circ, \circ)$، عدد مختلطی مانند z هست که $xz = y$، یعنی $z = yx^{-1}$.

عملهائی که برعددهای مختلط با قسمت موهومی ۰ انجام می‌گیرند بخصوص جالب توجه هستند.

قضیهٔ ۳۳.۱ $(x_1, \circ) + (y_1, \circ) = (x_1 + y_1, \circ)$،

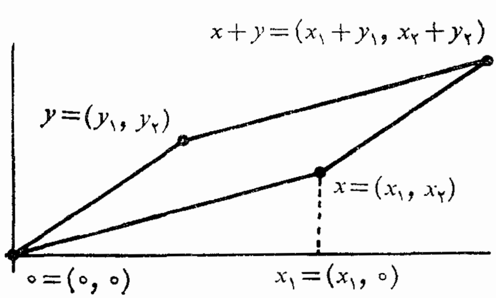
$$(x_1, \circ)(y_1, \circ) = (x_1 y_1, \circ),$$

اگر $y_1 \neq \circ$، $(x_1, \circ)/(y_1, \circ) = (x_1/y_1, \circ)$.

تبصره. از قضیهٔ ۳۳.۱ معلوم می‌شود که برای انجام عملهای حسابی برعددهای مختلطی که قسمت موهومی آنها صفر باشدکافی است این عملها را فقط بر قسمتهای حقیقی آنها انجام داد. بنابراین، عددهای مختلط به‌شکل $(x, \circ)$ دارای خاصیتهای حسابی عددهای حقیقی هستند. بدین دلیل، روا است که دستگاه عددهای حقیقی را حالت خاصی ازدستگاه عددهای مختلط انگاشته، عدد مختلط $(x, \circ)$ را همان عدد حقیقی x بگیریم. بنابراین، می‌نویسیم $(x, \circ) = x$. در حالت خاص، $(\circ, \circ) = \circ$ و $(1, \circ) = 1$.

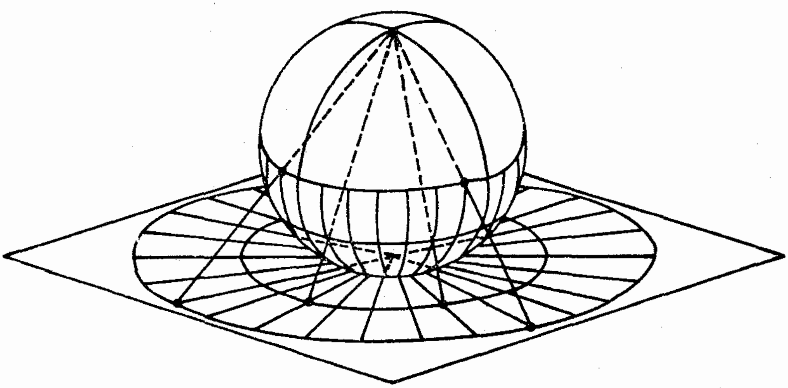
۲۲.۱ نمایش هندسی عددهای مختلط

همان‌طورکه عددهای حقیقی به‌صورت هندسی به‌وسیلهٔ نقاط بر یك خط نمایش داده می‌شوند، عددهای مختلط را نیز می‌توان به‌وسیلهٔ نقاط در یك صفحه نشان داد. عدد مختلط $x = (x_1, x_2)$ را می‌توان به‌عنوان «نقطه»ای با مختصات (x_1, x_2) درنظر گرفت. با چنین فرضی، تعریف جمع عددهای مختلط همان قانون متوازی‌الاضلاع در مورد جمع دو بردار در صفحه خواهد بود. (ر. ك. شکل ۲.۱).



شکل ۲.۱

اندیشهٔ بیان عددهای مختلط به طریق هندسی به‌وسیلهٔ نقاط بر یك صفحه درسال ۱۷۹۹ توسط گاوس[1] در رساله‌اش ارائه گردید. همین عمل، مستقلاً، به‌وسیلهٔ آرگان[2] در سال ۱۸۰۶ انجام شد. گاوس بعداً اصطلاح تاحدی نامناسب «عدد مختلط» را ابداع کرد. تعبیرهای هندسی دیگری نیز برای عددهای مختلط وجود دارند. مثلاً، به‌جای بکار بردن نقاط صفحه، می‌توان نقاط سطحهای دیگری را بکار گرفت. ریمان[3] دریافت که مخصوصاً نقاط کره برای این منظور مفیدند. نقاط کره به مرکز قطب شمال روی صفحهٔ مماس بر کره در قطب جنوب تصویر می‌شوند. بنابراین، هر نقطهٔ صفحه متناظر است با نقطهٔ معینی ازکره. غیر از قطب شمال، هر نقطهٔ دیگرکره فقط متناظر با یك نقطه از صفحه خواهد بود. این تناظر را تصویر جسمنما می‌نامیم. (ر. ك. شکل ۱.۳۰.)



شکل ۱.۳۰

۱.۳۲ یکهٔ موهومی

اغلب، برای سهولت، عدد مختلط (x_1, x_2) را به‌عنوان برداری دوبعدی بامؤلفه‌های x_1 و x_2 در نظر می‌گیریم. در این صورت، جمع دو عدد مختلط براساس تعریف ۱.۲۶، همان جمع مؤلفه به‌مؤلفهٔ دو بردار خواهد بود. عدد مختلط $(1, 0) = 1$ نقش بردار یکه در امتداد افقی را دارد. ذیلاً مشابه این بردار را در امتداد قائم معرفی می‌نمائیم.

تعریف ۱.۳۴ عدد مختلط $(0, 1)$ را با i نشان داده آن را یکهٔ موهومی می‌نامیم.

---

1. Gauss 2. Argand 3. Riemann

قضیهٔ ۳۵.۱ هر عدد مختلط $x = (x_1, x_2)$ را می‌توان به شکل $x = x_1 + ix_2$ نمایش داد.

برهان. $x_1 = (x_1, 0)$ ، $ix_2 = (0, 1)(x_2, 0) = (0, x_2)$،

$$x_1 + ix_2 = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2).$$

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که عدد مختلط i جواب معادلهٔ $x^2 = -1$ می‌باشد.

قضیهٔ ۳۶.۱ $i^2 = -1$.

برهان. $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

۲۴.۱ قدر مطلق یك عدد مختلط

حال مفهوم قدر مطلق را به‌دستگاه عددهای مختلط وسعت می‌دهیم.

تعریف ۳۷.۱ اگر $x = (x_1, x_2)$، کالبد، یا قدر مطلق، x عددی است حقیقی و نامنفی. این عدد با $|x|$ نشان داده شده با رابطهٔ

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

تعریف می‌شود.

قضیهٔ ۳۸.۱

یکم) $|(0, 0)| = 0$، و اگر $x \neq 0$، $|x| > 0$.

دوم) $|xy| = |x|\,|y|$.

سوم) اگر $y \neq 0$، $|x/y| = |x|/|y|$.

چهارم) $|(x_1, 0)| = |x_1|$.

برهان. گزاره‌های (یکم) و (چهارم) بآسانی ثابت می‌شوند. برای اثبات (دوم)، می‌نویسیم

$$x = x_1 + ix_2 \text{ و } y = y_1 + iy_2،$$

پس

$$xy = x_1y_1 - x_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

گزارهٔ (دوم) از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} |xy|^2 &= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = |x|^2\,|y|^2. \end{aligned}$$

معادلهٔ (سوم را از (دوم) با نوشتن عبارت (دوم) به شکل $|x|=|y|\,|x/y|$ می‌توان نتیجه گرفت.

از جنبهٔ هندسی، $|x|$ نمایشگر درازای پاره خط واصل بین مبدأ و نقطهٔ x است. به‌طور کلی، $|x-y|$ مساوی فاصلهٔ بین دو نقطهٔ x و y می‌باشد. با در نظرگرفتن این تعبیر هندسی، قضیهٔ زیر بیان می‌کند که درازای یک ضلع هر مثلث از مجموع درازاهای دو ضلع دیگر کوچکتر است.

قضیهٔ ۳۹.۱ هرگاه x و y دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$|x+y|\leqslant|x|+|y| \quad \text{(نامساوی مثلثی)}.$$

اثبات به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۲۵.۱ ترتیب ناپذیری عددهای مختلط

تاکنون رابطه‌ای به شکل $x<y$ بین دو عدد مختلط دلخواه x و y تعریف نکرده‌ایم، به‌دلیل آن که ممکن نیست که در دستگاه عددهای مختلط برای $<$ تعریفی قائل شد که واجد همهٔ خاصیتهای اصول‌موضوع ۶ تا ۸ باشد. برای مصورساختن این مطلب، فرض کنیم قادر به‌تعریف رابطه‌ای مانند $<$ باشیم که دراصلهای موضوع ۶، ۷، و ۸ صدق کند. در این صورت، چون $i\neq 0$، بنابر اصل موضوع ۶، باید $0<i$ یا $i<0$. اگر $0<i$ انگاشته شود، با انتخاب $x=y=i$ از اصل موضوع ۸ نتیجه می‌گیریم که $0<i^2$، یا $0<-1$. با توجه به‌اصل موضوع ۷، عدد ۱ را به دو طرف نامساوی اخیر اضافه می‌کنیم، نتیجه می‌شود که $1<0$. از سوی دیگر، با بکار بردن اصل موضوع ۸ درمورد نامساوی $0<-1$، خواهیم داشت $0<1$. بنابراین هم $1<0$ و هم $0<1$، که بنابراصل موضوع ۶ چنین وضعی ناممکن است. از این روی، فرض $0<i$ منجر به تناقض می‌شود. [چرا نامساوی $0<-1$ قبلاً یک تناقض نبود؟] با بیانی مشابه می‌توان نامساوی $i<0$ را باطل کرد. بنابراین، عددهای مختلط را نمی‌توان بقسمی مرتب نمود که در اصلهای موضوع ۶، ۷، و ۸ صدق کنند.

۲۶.۱ عددهای نمائی مختلط

تابع نمائی e^x (x حقیقی) پیشتر ذکر شده است. حال می‌خواهیم e^z را به‌ازای z های مختلط بقسمی تعریف کنیم که خاصیتهای عمدهٔ تابع نمائی حقیقی را حفظ کند. خاصیتهای اصلی e^x، وقتی که x حقیقی باشد، عبارتند از قانون نماها، یعنی $e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$ و رابطهٔ $e^0=1$. e^z را به‌ازای z های مختلط چنان تعریف

می‌کنیم که این خاصیتها را حفظ کند و نیز، وقتی که z حقیقی باشد، e^z تحـویل به تابع نمائی معمولی گردد.

هرگاه بنویسیم $z=x+iy$ (x و y حقیقی)، آنگاه برای برقـرار بودن قانون نماها لازم می‌آید که $e^{x+iy}=e^x e^{iy}$. بنابراین، فقط باقی می‌ماند کـه e^{iy} را تعـریف کنیم.

تعریف ۴۰.۱ اگـر $z=x+iy$ ، $e^z=e^{x+iy}$ را مساوی بـا عـدد مختلط $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ تعریف می‌کنیم.

بنابراین تعریف[1]، وقتی که z حقیقـی باشد (یعنی، $y=0$)، e^z همان تابع نمائی حقیقی است. در زیر ثابت می‌شود که قانون نماها برای e^z نیز برقرار است.

قضیهٔ ۴۱.۱ هرگاه $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}.$$

برهان.

$$e^{z_1}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1),\quad e^{z_2}=e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2),$$

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1}e^{x_2}[\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2 + i(\cos y_1\sin y_2+\sin y_1\cos y_2)].$$

چون x_1 و x_2 هر دو حقیقی هستند، پس $e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$. همچنین

$$\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2=\cos(y_1+y_2)$$

و

---

۱. دلایل متعدد برای موجه بودن معادلهٔ $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ وجود دارند. مثلاً، فرض کنیم که $e^{iy}=f(y)+ig(y)$، و منظور پیدا کردن تابعهای حقیقی f و g باشد بقسمی که قواعد متداول تابعهای نمائی حقیقی در مـورد تابعهای نمائی مختلط نیز برقرار باشند. اگر فرض کنیم که $(e^{iy})'=ie^{iy}$، با مشتقگیری صوری خواهیم داشت $e^{iy}=g'(y)-if'(y)$. با مقایسهٔ مقـدارهای e^{iy} از دو رابطـه، مـلاحظه می‌شود که f و g بایـد در معادلـه های $f(y)=g'(y)$ و $f'(y)=-g(y)$ صدق کنند. با حذف g بین این دو معادله نتیجه می‌شود کـه $f(y)=-f''(y)$. چون می‌خواهیم $e^0=1$، پس بـایـد $f(0)=1$ و $f'(0)=0$. از اینجا نتیجـه می‌شود که $f(y)=\cos y$ و $g(y)=-f'(y)=\sin y$. البته بحث بـالا چیزی را ثابت نمـی‌کند، ولـی قـویاً این فکـر را القـا می‌کند کـه تعـریف $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ تعریفی است مناسب.

$$\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2 = \sin (y_1 + y_2),$$

پس

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1 + x_2} [\cos (y_1 + y_2) + i \sin (y_1 + y_2)] = e^{z_1 + z_2}.$$

۲۷.۱ خاصیتهای دیگر عددهای نمائی مختلط

در قضیه‌های زیر z، z_1، و z_2 عددهای مختلط هستند.

قضیهٔ ۴۲.۱ e^z هیچ‌گاه صفر نیست.

برهان. چون $e^z e^{-z} = e^0 = 1$، پس e^z نمی‌تواند صفر باشد.

قضیهٔ ۴۳.۱ هرگاه x حقیقی باشد، آنگاه $|e^{ix}| = 1$.

برهان. $|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$، و $|e^{ix}| > 0$.

قضیهٔ ۴۴.۱ $e^z = 1$ وقتی، و فقط وقتی، که z مضرب صحیحی از $2\pi i$ باشد.

برهان. هرگاه به‌ازای عدد صحیحی مانند n داشته باشیم $z = 2\pi i n$، آنگاه

$$e^z = \cos (2\pi n) + i \sin (2\pi n) = 1.$$

برعکس، فرض کنیم که $e^z = 1$. از این فرض نتیجه می‌شود کـه $e^x \cos y = 1$ و $e^x \sin y = 0$. چـون $e^x \neq 0$، باید داشته باشیم $\sin y = 0$، یعنی به‌ازای عدد صحیحی‌مانند k، $y = k\pi$. ولی $\cos (k\pi) = (-1)^k$. چون $e^x \cos (k\pi) = 1$، پس $e^x = (-1)^k$. از این کـه $e^x > 0$ معلـوم می‌شود کـه k بایـد زوج باشد. بنابراین $e^x = 1$، و درنتیجه $x = 0$. پس قضیه باثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۴۵.۱ $e^{z_1} = e^{z_2}$ وقتی، و فقط وقتی، که به‌ازای عدد صحیحی مـانند n داشته باشیم $z_1 - z_2 = 2\pi i n$.

برهان. $e^{z_1} = e^{z_2}$ وقتی، و فقط وقتی، که $e^{z_1 - z_2} = 1$.

۲۸.۱ شناسهٔ یک عدد مختلط

اگر نقطـهٔ $z = (x, y) = x + iy$ با مختصات قطبی r و θ نشان داده شده بـاشد، می‌توان نوشت $x = r\cos \theta$ و $y = r \sin \theta$. بنابراین

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}.$$

دو عدد r و θ یک z منحصر بفرد مشخص می‌سازند. متقابلاً، عـدد مثبت r به‌وسیلهٔ z مشخص مـی‌شود و منحصر بفرد است؛ درحقیقت، $r = |z|$. امـا، z زاویهٔ θ را

برحسب مضربی از 2π معین می‌کند. تعدادی نامتناهی مقدار برای θ وجود دارد که همه در معادله‌های $x = |z| \cos\theta$ و $y = |z| \sin\theta$ صدق می‌کنند، و البته تفاضل هردو مقدار θ مضربی از 2π است. هریک ازاین مقادیر θ شناسهٔ z نامیده می‌شود، ولی یکی از این مقدارها را انتخاب نموده و آن را شناسهٔ عمدهٔ z می‌نامیم.

تعریف ۴۶.۱ فرض کنیم که $z = x + iy$ عدد مختلط ناصفری باشد. عدد حقیقی منحصر بفرد θ را که در شرطهای

$$x = |z| \cos\theta,\ y = |z| \sin\theta,\ -\pi < \theta \leqslant +\pi$$

صدق کند شناسهٔ عمدهٔ z نامیده با $\theta = \arg(z)$ نشان می‌دهیم.

از بحث بالا قضیهٔ زیر بی‌درنگ نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۴۷.۱ هرعدد مختلط $z \neq 0$ را می‌توان به‌شکل $z = re^{i\theta}$ نشان داد، که درآن $r = |z|$ و $\theta = \arg(z) + 2\pi n$ (n هرعدد صحیحی می‌تواند باشد).

تبصره. این روش نمایش عددهای مختلط، مخصوصاً وقتی که با ضرب و تقسیم این عددها سروکار داشته باشیم، بسیار مفید است، زیرا

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{و} \quad \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

قضیهٔ ۴۸.۱ هرگاه $z_1 z_2 \neq 0$، آنگاه

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2),$$

که در آن

$$n(z_1, z_2) = \begin{cases} 0 \ ، & \text{اگر}\ -\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leqslant +\pi \\ +1 \ ، & \text{اگر}\ -2\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leqslant -\pi \\ -1 \ ، & \text{اگر}\ \pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leqslant 2\pi \end{cases}.$$

برهان. می‌نویسیم $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ و $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$، که در آنها

$$\theta_1 = \arg(z_1) \ \text{و}\ \theta_2 = \arg(z_2).$$

در این صورت $z_1 z_2 = |z_1 z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. چون

$$-\pi < \theta_1 \leqslant +\pi \ \text{و}\ -\pi < \theta_2 \leqslant +\pi،$$

خواهیم داشت $-2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leqslant 2\pi$. بنابراین، عدد صحیحی مانند n هست بقسمی که $-\pi < \theta_1 + \theta_2 + 2n\pi \leqslant \pi$. این n همان عدد صحیح $n(z_1, z_2)$ مذکور در قضیه است، و به‌ازای این n، $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi n$. پس

حکم ثابت است.

۲۹.۱ توانهای صحیح و ریشه‌های اعداد مختلط

تعریف ۴۹.۱ اگر z عددی مختلط و n عدد صحیح مفروضی باشند، توان nام z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z^{\circ}=\text{۱} \text{ ، و اگر } n \geqslant \circ \text{ ، } z^{n+\text{۱}}=z^n z \text{ ،}$$

$$\text{اگر } z \neq \circ \text{ و } n > \circ \text{ ، } z^{-n} = (z^{-\text{۱}})^n.$$

قضیهٔ ۵۰.۱ را، که بیان کنندهٔ قانونهای متداول توانهاست، می‌توان به کمک استقرای ریاضی ثابت کرد. اثبات به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۵۰.۱ اگر m و n دو عدد صحیح مفروضی باشند، به‌ازای $z \neq \circ$

$$z^n z^m = z^{n+m} \text{ و } (z_\text{۱} z_\text{۲})^n = z^n_\text{۱} z^n_\text{۲}.$$

قضیهٔ ۵۱.۱ هرگاه $z \neq \circ$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه درست n عدد مختلط متمایز مانند $z_\circ$ ، $z_\text{۱}$ ، ... ، $z_{n-\text{۱}}$ (به نام ریشه‌های nام z) وجود دارند بقسمی‌که

$$\text{به‌ازای هر } k = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots, n-\text{۱} \text{ ، } z^n_k = z.$$

بعلاوه، این ریشه‌ها از دستورهای زیرین بدست می‌آیند:

$$z_k = Re^{i\phi_k} \text{ ، که در آن } R = |z|^{\text{۱}/n} \text{ ، و}$$

$$\Phi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{\text{۲}\pi k}{n} \quad (k = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots, n-\text{۱}).$$

تبصره. n ریشهٔ nام z به فاصله‌های مساوی بر دایره‌ای به شعاع $R = |z|^{\text{۱}/n}$ و به مرکز مبدأ واقعند.

برهان. n عدد مختلط $Re^{i\phi_k}$ ، $\circ \leqslant k \leqslant n-\text{۱}$ ، همه از یکدیگر متمایزند و هر یک ریشهٔ nام z می‌باشد، زیرا

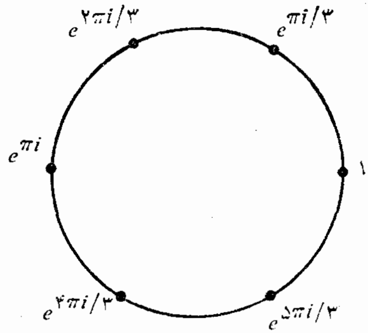
$$(Re^{i\phi_k})^n = R^n e^{in\phi_k} = |z| e^{i[\arg(z)+\text{۲}\pi k]} = z.$$

حال باید نشان دهیم که z ریشهٔ nام دیگری ندارد. فرض کنیم $w = Ae^{i\alpha}$ عدد مختلطی باشد و به‌ازای آن داشته باشیم $w^n = z$. در این صورت $|z| = |w|^n$ ، و در نتیجه $A^n = |z|$ ، یعنی $A = |z|^{\text{۱}/n}$. بنابراین، $w^n = z$ را می‌توان به صورت $e^{in\alpha} = e^{i[\arg(z)]}$ نوشت، و این امر ایجاب می‌کند که عدد صحیحی مانند

k وجود داشته باشد بقسمی که $n\alpha - \arg(z) = ۲\pi k$. بنابراین

$$\alpha = \frac{[\arg(z) + ۲\pi k]}{n}.$$

اما وقتی که k همهٔ مقدارهای صحیح را بخود بگیرد، w فقط مقدارهای متمایز $z_۰$، . . . ، $z_{n-۱}$ را بخود خواهد گرفت. (ر. ک. شکل ۴.۱.)



شکل ۴.۱

۳۰.۱ لگاریتمهای مختلط

بنا بر قضیهٔ ۴۲.۱، e^z هرگز صفر نیست. حال می‌خواهیم ببینیم که e^z چه مقدارهای دیگری غیر از ۰ را بخود نمی‌گیرد. قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که e^z مساوی هر عدد جز صفر می‌تواند بود.

قضیهٔ ۵۲.۱ هرگاه z عددی مختلط و جز صفر باشد، آنگاه عدد مختلطی مانند w هست بقسمی که $e^w = z$. یکی از این w ها عدد مختلط

$$\log|z| + i\arg(z)$$

است، و هر wی دیگری به شکل

$$\log|z| + i\arg(z) + ۲n\pi i$$

است، که در آن n عددی صحیح است.

برهان. چون $e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^{\log|z|} e^{i\arg(z)} = |z| e^{i\arg(z)} = z$ ، پس $w = \log|z| + i\arg(z)$ جوابی است برای معادلهٔ $e^w = z$. اما هرگاه $w_۱$ جواب دیگری برای این معادله باشد، آنگاه $e^w = e^{w_۱}$، و درنتیجه $w - w_۱ = ۲n\pi i$.

تعریف ۵۳.۱ فرض کنیم $z \neq ۰$ عدد مختلط مفروضی باشد. هرگاه w عدد مختلطی باشد بقسمی که $e^w = z$ ، آنگاه w را یک لگاریتم z می‌نامیم. مقدار بخصوص

$$w = \log|z| + i\arg(z)$$

را لگاریتم عمدهٔ z نامیده، برای این w می‌نویسیم

$$w = \operatorname{Log} z.$$

چند مثال

۱. چون $|i| = ۱$ و $\arg(i) = \pi/۲$، پس $\operatorname{Log}(i) = i\pi/۲$.

۲. چون $|-i| = ۱$ و $\arg(-i) = -\pi/۲$، پس $\operatorname{Log}(-i) = -i\pi/۲$.

۳. چون $|-۱| = ۱$ و $\arg(-۱) = \pi$، پس $\operatorname{Log}(-۱) = i\pi$.

۴. اگر $x > ۰$، $\operatorname{Log}(x) = \log x$، زیرا $|x| = x$ و $\arg(x) = ۰$.

۵. چون $|۱+i| = \sqrt{۲}$ و $\arg(۱+i) = \pi/۴$، پس

$$\operatorname{Log}(۱+i) = \log\sqrt{۲} + i\pi/۴.$$

قضیهٔ ۵۴.۱ هرگاه $z_۱ z_۲ \neq ۰$، آنگاه

$$\operatorname{Log}(z_۱ z_۲) = \operatorname{Log} z_۱ + \operatorname{Log} z_۲ + ۲\pi i n(z_۱, z_۲),$$

که در آن $n(z_۱, z_۲)$ عدد صحیحی است که در قضیهٔ ۴۸۰۱ تعریف شده است.

برهان.

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z_۱ z_۲) &= \log|z_۱ z_۲| + i\arg(z_۱ z_۲)\\ &= \log|z_۱| + \log|z_۲| + i[\arg(z_۱) + \arg(z_۲) + ۲\pi n(z_۱, z_۲)].\end{aligned}$$

۳۱.۱ توانهای مختلط

اکنون می‌توان، با استفاده از لگاریتمهای مختلط، توانهای مختلط عددهای مختلط را تعریف کرد.

تعریف ۵۵.۱ اگر $z \neq ۰$، به‌ازای هر عدد مختلط w تعریف می‌کنیم

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z}.$$

چند مثال

۱. $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(i\pi/۲)} = e^{-\pi/۲}$.

۲. $(-۱)^i = e^{i \operatorname{Log}(-۱)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$.

۳. هرگاه n عددی صحیح باشد، آنگاه

$$z^{n+۱} = e^{(n+۱)\operatorname{Log} z} = e^{n \operatorname{Log} z} e^{\operatorname{Log} z} = z^n z,$$

از این روی تعریف ۵۵.۱ با تعریف ۴۹.۱ تعارضی نخواهد داشت.

دو قضیهٔ زیرین قواعد محاسبه با توانهای مختلط را بدست می‌دهند:

قضیهٔ ۵۶.۱ اگر $z \neq 0$، $z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1 + w_2}$.

برهان. $z^{w_1 + w_2} = e^{(w_1 + w_2)\operatorname{Log} z} = e^{w_1 \operatorname{Log} z} e^{w_2 \operatorname{Log} z} = z^{w_1} z^{w_2}$.

قضیهٔ ۵۷.۱ هرگاه $z_1 z_2 \neq 0$، آنگاه

$$(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w e^{2\pi i w n(z_1, z_2)},$$

که در آن $n(z_1, z_2)$ عدد صحیحی است که در قضیهٔ ۴۸.۱ تعریف شده است.

برهان. $(z_1 z_2)^w = e^{w \operatorname{Log}(z_1 z_2)} = e^{w [\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2)]}$.

۳۲.۱ سینوسها وکسینوسهای مختلط

تعریف ۵۸.۱ به‌ازای هرعدد مختلط مفروض z، تعریف می‌کنیم

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

تبصره. وقتی که z عدد حقیقی باشد، رابطه‌های بالا با تعریف ۴۰.۱ تعارضی ندارند.

قضیهٔ ۵۹.۱ هرگاه $z = x + iy$، آنگاه

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$
$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

برهان.

$$\begin{aligned} 2\cos z &= e^{iz} + e^{-iz} \\ &= e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x) \\ &= \cos x (e^{y} + e^{-y}) - i \sin x (e^{y} - e^{-y}) \\ &= 2 \cos x \cosh y - 2i \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

برهان رابطهٔ $\sin z$ شبیه به‌برهان بالا است.

خاصیتهای دیگر سینوسها و کسینوسها در تمرینها داده شده‌اند.

۳۳.۱ بی‌نهایت و صفحهٔ مختلط وسعت یافتهٔ C^*

اکنون دستگاه عددهای مختلط را با افزودن یک نقطهٔ فرضی وسعت می‌دهیم. این نقطهٔ فرضی با علامت ∞ نشان داده می‌شود.

تعریف ۶۰.۱ منظور از دستگاه عددهای مختلط وسعت یافتهٔ C^* یعنی صفحهٔ مختلط

C به‌انضمام علامت ∞ که دارای خاصیتهای زیرین باشد:

آ) هرگاه $z \in C$، آنگاه $z + \infty = z - \infty = \infty$ و $z/\infty = 0$؛

ب) هرگاه $z \in C$ ولی $z \neq 0$، آنگاه $z(\infty) = \infty$ و $z/0 = \infty$؛

ج) $\infty + \infty = (\infty)(\infty) = \infty$.

تعریف ۶۱.۱ هرمجموعه در C به‌شکل $\{z \mid |z| > r \geqslant 0\}$ را یک همسایگی ∞، یا یک گوی به مرکز ∞ می‌نامند.

در توسیع R دو علامت $+\infty$ و $-\infty$ به R اضافه شدند حال آن که برای توسیع C فقط یک علامت ∞ بکار رفت. این عمل ممکن است برای خواننده تعجب‌آور باشد. دلیل این امر این است که عددهای حقیقی را می‌توان با رابطهٔ $>$ مرتب کرد ولی عددهای مختلط ترتیب‌پذیر نیستند. برای آن که بعضی از خاصیتهای اعداد حقیقی که با رابطهٔ $>$ بیان شده‌اند در توسیع این دستگاه بی‌استثنا برقرار باشند، دو علامت $+\infty$ و $-\infty$، که مانند بالا تعریف شوند، ضروری است. مثلاً، در مورد سوپرمم، قبلاً گفته شد که هرمجموعهٔ ناتهی R^* سوپرمم دارد.

در C مناسبتر آن است که فقط یک نقطهٔ فرضی اضافه شود. برای تأیید این مطلب تصویر جسمنما را یادآور می‌شویم. این تصویر تناظری یک به‌یک بین نقاط صفحهٔ مختلط و نقاط روی کره، غیر از قطب شمال، ایجاد می‌کند. برای از بین بردن این استثنا در مورد قطب شمال، این نقطه را به‌عنوان نمایش هندسی نقطهٔ فرضی ∞ در نظر می‌گیریم. درنتیجه، تناظری یک به‌یک بین صفحهٔ مختلط وسعت‌یافتهٔ C^* و تمام کره ایجاد خواهد شد. از جنبهٔ هندسی واضح است که چنانچه قطب جنوب را برمبدأ صفحهٔ مختلط منطبق کنیم، ملاحظه می‌شود که قسمت برونی دایره‌ای «بزرگ» در صفحهٔ مختلط در تصویر جسمنما متناظر است با عرقچین کروی «کوچکی» حول قطب شمال. این مطلب دلیل تعریف همسایگی بی‌نهایت را با یک نامساوی به‌شکل $|z| > r$ به‌طور وضوح مصور می‌سازد.

تمرین

عددهای صحیح

۱.۱ ثابت کنید بزرگترین عدد اول وجود ندارد (اقلیدس راه اثباتی از این مسأله را می‌دانست.)

۲.۱ اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، اتحاد جبری زیر را ثابت کنید:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

۳.۱ اگر $2^n - 1$ اول باشد، ثابت کنید n اول است. عدد اولی به‌شکل $2^p - 1$ را، که درآن p اول است، عدد اول مرسن[1] نامند.

۴.۱ اگر $2^n + 1$ اول باشد، ثابت کنید n به‌صورت توانی از ۲ است. عدد اولی به شکل $2^{2^m} + 1$ را عدد اول فرما[2] نامند. راهنمائی. از تمرین ۲.۱ استفاده کنید.

۵.۱ عددهای فیبوناتچی[3] ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ... به‌وسیلهٔ دستور بازگشتی $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ با $x_1 = x_2 = 1$ تعریف‌می‌شوند. ثابت کنید که $(x_n, x_{n+1}) = 1$ و $x_n = (a^n - b^n)/(a-b)$، که درآن a و b ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - x - 1 = 0$ می باشند.

۶.۱ ثابت کنید هرمجموعهٔ ناتهی از عددهای صحیح مثبت حاوی کوچکترین عضو است. این نتیجه را اصل خوش‌ترتیبی می نامند.

عددهای گویا وگنگ

۷.۱ عدد گویائی بیابید که بسط اعشاری‌آن $0{,}3344444\ldots$ باشد.

۸.۱ ثابت کنید که بسط اعشاری x وقتی، و فقط وقتی، ازیک رقم به‌بعد رقمهای آن ۰ (یا ۹) خواهند بود که x عدد گویائی باشد که مخرجش به‌شکل $2^n 5^m$ باشد، که درآن m و n عددهائی صحیح و نامنفی باشند.

۹.۱ ثابت کنید $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ گنگ است.

۱۰.۱ اگر a، b، c، و d گویا باشند و x گنگ، ثابت‌کنیدکه $(ax+b)/(cx+d)$ عموماً گنگ است. این عدد چه موقع گویا است؟

۱۱.۱ فرض کنید عدد حقیقی $x > 0$ داده شده باشد. ثابت کنید عددی گنگ بین ۰ و x وجود دارد.

۱۲.۱ اگر $a/b < c/d$ و $b > 0$ و $d > 0$، ثابت کنید که $(a+c)/(b+d)$ بین a/b و c/d قرار دارد.

۱۳.۱ فرض کنید a و b عددهای صحیح و مثبتی باشند. ثابت کنید که $\sqrt{2}$ همواره بین دو کسر a/b و $(a+2b)/(a+b)$ واقع است. کدام یک از این دو کسر به $\sqrt{2}$ نزدیکتر است؟

۱۴.۱ ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$، عدد $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ گنگ است.

---

1. Mersenne 2. Fermat 3. Fibonacci

۱۵.۱ فرض کنید عدد حقیقی x و عدد صحیح $N > ۱$ داده شده باشند. ثابت کنید عددهای صحیحی مانند h و k وجود دارند بقسمی که $۰ < k \leqslant N$ و $|kx - h| < ۱/N$. راهنمائی. $N + ۱$ عدد $tx - [tx]$ را به ازای $t = ۰, ۱, \ldots, N$ در نظر گرفته، نشان دهید بین این عددها دوعدد وجود دارند که تفاضل آنها حداکثر $۱/N$ است.

۱۶.۱ اگر x گنگ باشد، ثابت کنید تعدادی نامتناهی عدد گویا مانند h/k وجود دارند که $k > ۰$ و $|x - h/k| < ۱/k^۲$. راهنمائی. فرض کنید تعدادی متناهی از این عددها مانند $h_۱/k_۱, \ldots, h_r/k_r$ وجود داشته باشند. حال اگر δ مینیمم عددهای $|x - h_i/k_i|$ باشد، با فرض $N > ۱/\delta$ در تمرین ۱۵.۱ تناقضی بدست آورید.

۱۷.۱ فرض کنید x عددی گویا و مثبت به‌شکل

$$x = \sum_{k=۱}^{n} \frac{a_k}{k!}$$

باشد، که درآن هر a_k عددی صحیح و نامنفی بوده، به‌ازای $k \geqslant ۲$، $a_k \leqslant k - ۱$، و $a_n > ۰$. همچنین $[x]$ بزرگترین عدد صحیح در x باشد. ثابت کنید که $a_۱ = [x]$، به‌ازای $k = ۲, \ldots, n$، $a_k = [k!\, x] - k\,[(k-۱)!\, x]$، و n کوچکترین عدد صحیحی است که به‌ازای‌آن $n!\, x$ عددی صحیح می‌باشد. متقابلاً، نشان دهید که هرعدد گویای مثبت مانند x را به‌یک، و فقط به‌یک، طریق می‌توان به‌شکل بالا نشان داد.

کرانهای بالائی

۱۸.۱ نشان دهید که sup و inf یک‌مجموعه، در صورت وجود، منحصر بفردند.

۱۹.۱ sup و inf هریک از مجموعه‌های اعداد حقیقی زیرین را بیابید:

آ) همهٔ عددها به‌شکل $۲^{-p} + ۳^{-q} + ۵^{-r}$، که درآن p، q، و r همهٔ عددهای صحیح مثبت را بخود می‌گیرند.

ب) $S = \{x \mid ۳x^۲ - ۱۰x + ۳ < ۰\}$.

ج) $S = \{x \mid (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < ۰\}$، که در آن $a < b < c < d$.

۲۰.۱ خاصیت مقایسه‌ای برای سوپرممها (مذکور در قضیهٔ ۱۶.۱) را ثابت کنید.

۲۱.۱ فرض کنید A و B دو مجموعه ازعددهای مثبت باشند که از بالاکراندارند، و $a = \sup A$ و $b = \sup B$. همچنین C مجموعهٔ همهٔ حاصل‌ضربها به‌شکل xy باشد، که درآن $x \in A$ و $y \in B$. ثابت کنید که $ab = \sup C$.

۲۲.۱ $x > 0$ و عدد صحیح $k \geqslant 2$ داده شده‌اند. فرض کنید a_0 بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x باشد، و با فرض این که a_0، a_1، . . . ، a_{n-1} تعریف شده باشند، a_n را مساوی بزرگترین جواب صحیح نامساوی زیر اختیار کنید:

$$a_0 + \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \cdots + \frac{a_n}{k^n} \leqslant x.$$

آ) ثابت کنید به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots$، $0 \leqslant a_i \leqslant k - 1$.

ب) فرض کنید $r_n = a_0 + a_1 k^{-1} + a_2 k^{-2} + \ldots a_n k^{-n}$، و نشان دهید که x مساوی سوپرمم مجموعهٔ عددهای گویای r_1، r_2، . . . است.

تبصره. در حالت $k = 10$، عددهای صحیح a_0، a_1، a_2، . . . رقمهای نمایش اعشاری x می‌باشند. در حالت کلی این عددها ارقام یک نمایش x در مقیاس k خواهند بود.

نامساویها

۲۳.۱ اتحاد لاگرانژ[1] برای عددهای حقیقی را ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

نامساوی کشی ـ شوارتز را می‌توان از این اتحاد نتیجه گرفت.

۲۴.۱ ثابت کنید به‌ازای عددهای حقیقی دلخواه a_k، b_k، و c_k، نامساوی زیر برقرار است:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right).$$

۲۵.۱ نامساوی مینکوفسکی[2] را ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

اگر $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$، ملاحظه می‌شود که نامساوی بالا همان نامساوی مثلثی $||\mathbf{a} + \mathbf{b}|| \leqslant ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$ برای بردارهای n-بعدی است. در این‌جا

$$||\mathbf{a}|| = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}.$$

۲۶.۱ اگر $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ و $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$، ثابت کنید که

1. Lagrange 2. Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

راهنمائی. $\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}(a_k - a_j)(b_k - b_j) \geqslant 0$.

عددهای مختلط

۲۷.۱ عددهای مختلط زیرین را به‌شکل $a + bi$ درآورید:

آ) $(1+i)^3$ ، ب) $(2+3i)/(3-4i)$،

ج) $i^5 + i^{16}$ ، د) $\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-8})$.

۲۸.۱ در هر یک از حالتهای زیر، همهٔ x و y های حقیقی را که در رابطهٔ داده شده صدق می‌کنند بیابید.

آ) $x+iy = |x-iy|$ ، ب) $x+iy=(x-iy)^2$،

ج) $\sum_{k=1}^{100} i^k = x+iy$.

۲۹.۱ بنابر تعریف، مزدوج مختلط $z=x+iy$ (x و y حقیقی) عدد مختلط $\bar{z}=x-iy$ است. ثابت کنید که:

آ) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ ، ب) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$ ، (ج) $z\bar{z}=|z|^2$،

د) $z+\bar{z} =$ (دو برابر قسمت حقیقی z)،

ه) $(z-\bar{z})/i =$ (دو برابر قسمت موهومی z).

۳۰.۱ هر یک از مجموعه‌هائی از عددهای مختلط را که در هر یک از شرطهای زیرین صدق کند به صورت هندسی توصیف کنید:

آ) $|z|=1$ ، ب) $|z|<1$ ، ج) $|z|\leqslant 1$،

د) $z+\bar{z}=1$ ، ه) $z-\bar{z}=i$ ، و) $\bar{z}+z=|z|^2$.

۳۱.۱ z_1 و z_2 و z_3 سه عدد مختلط مفروض می‌باشند بقسمی‌که

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ و } z_1+z_2+z_3=0.$$

نشان دهید که این سه عدد رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌باشند که در دایرهٔ یکه به مرکز مبدأ محاط شده است.

۳۲.۱ اگر a و b عددهای مختلطی باشند، ثابت کنید که

آ) $|a-b|^2 \leqslant (1+|a|^2)(1+|b|^2)$.

ب) هرگاه $a\neq 0$، آنگاه وقتی، وفقط وقتی، $|a+b|=|a|+|b|$ که b/a حقیقی و نامنفی باشد.

۱.۳۳ اگر a و b عددهائی مختلط باشند، ثابت کنید وقتی، وفقط وقتی، رابطهٔ

$$|a-b| = |1-\bar{a}b|$$

برقرار است که $|a| = 1$ یا $|b| = 1$. برای چه مقدارهائی از a و b نامساوی $|a-b| < |1-\bar{a}b|$ معتبر است؟

۱.۳۴ اگر a و c دو عدد پایای حقیقی باشند و b عددی مختلط باشد، نشان دهید که معادلهٔ

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0 \quad (a \neq 0,\ z = x + iy)$$

نمایشگر دایره‌ای است در صفحهٔ xy.

۱.۳۵ تعریف تانژانت معکوس را یادآوری می‌کنیم: اگر t عدد حقیقی مفروضی باشد، $\tan^{-1}(t)$ عبارت است از عدد حقیقی منحصر بفرد θ که در دو شرط زیر صدق کند:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2} \quad , \quad \tan\theta = t.$$

اگر $z = x + iy$، نشان دهید که

آ) اگر $x > 0$، $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$،

ب) اگر $x < 0$ و $y \geqslant 0$، $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$،

ج) اگر $x < 0$ و $y < 0$، $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$،

د) اگر $x = 0$ و $y > 0$، $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$؛

و اگر $x = 0$ و $y < 0$، $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

۱.۳۶ رابطهٔ «ترتیبنمای» $<$ را در عددهای مختلط به صورت زیر تعریف می‌کنیم: گوئیم $z_1 < z_2$ در صورتی که

یکم) $|z_1| < |z_2|$

یا

دوم) $|z_1| = |z_2|$ و $\arg(z_1) < \arg(z_2)$.

کدام از اصلهای موضوع ۶، ۷، ۸، ۹ در مورد این رابطه صادق است؟

۱.۳۷ کدام از اصلهای موضوع ۶، ۷، ۸، ۹ در مورد ترتیبنمای $<$ که به صورت

زیرین تعریف شود صادق است؟ می‌گوئیم $(x_۱, y_۱) < (x_۲, y_۲)$ وقتی که
یکم) $x_۱ < x_۲$ یا دوم) $x_۱ = x_۲$ و $y_۱ < y_۲$.

۳۸.۱ قضیه‌ای، مشابه قضیهٔ ۴۸.۱، که در آن رابطه‌ای مقدار $\arg(z_۱/z_۲)$ را برحسب $\arg(z_۱)$ و $\arg(z_۲)$ بدست دهد، بیان و ثابت کنید.

۳۹.۱ قضیه‌ای، مشابه قضیهٔ ۵۴.۱، که در آن رابطه‌ای مقدار $\operatorname{Log}(z_۱/z_۲)$ را برحسب $\operatorname{Log}(z_۱)$ و $\operatorname{Log}(z_۲)$ بدست دهد، بیان و ثابت کنید.

۴۰.۱ ثابت کنید که ریشه‌های nام ۱ (که ریشه‌های nام واحد نیز گفته می‌شوند) عبارتند از α، $\alpha^۲$، . . . ، α^n، که در آنها $\alpha = e^{۲\pi i/n}$. همچنین نشان دهید که هرریشهٔ nام واحد جز ۱ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{n-۱} = ۰.$$

۴۱.۱ آ) ثابت کنید به‌ازای هر عدد مختلط $z \neq ۰$، $|z^i| < e^\pi$.
ب) ثابت کنید عدد پایائی مانند $M > ۰$ وجود ندارد که به‌ازای هر z مختلط، $|\cos z| < M$.

۴۲.۱ اگر $w = u + iv$ (u و v حقیقی)، نشان دهید که

$$z^w = e^{u \log|z| - v \arg(z)} e^{i[v \log|z| + u \arg(z)]}.$$

۴۳.۱ آ) ثابت کنید به‌ازای عدد صحیحی مانند n،

$$\operatorname{Log}(z^w) = w \operatorname{Log} z + ۲\pi i n.$$

ب) ثابت کنید به‌ازای عدد صحیحی مانند n،

$$(z^w)^\alpha = z^{w\alpha} e^{۲\pi i n \alpha}.$$

۴۴.۱ یکم) اگر θ و a عددهائی حقیقی باشند و $-\pi < \theta \leqslant +\pi$، ثابت کنید که

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^a = \cos(a\theta) + i\sin(a\theta).$$

دوم) با فرض $\theta = -\pi$ و $a = ۱/۲$ در (یکم)، نشان دهید که قید $-\pi < \theta \leqslant +\pi$، درحالت کلی، برای برقراری رابطهٔ مذکور در (یکم) ضروری است.
سوم) اگر a عددی صحیح باشد، نشان دهید که دستور مذکور در (یکم) بدون هیچ قیدی بر θ برقرار است. در این حالت، مطلب مذکور در (یکم) به نام قضیهٔ دموآور[1] معروف است.

۴۵.۱ با بکار بردن قضیهٔ دموآور (تمرین ۴۴.۱) اتحادهای مثلثاتی زیر را نتیجه

1. De Moivre

بگیرید: به‌ازای هر عدد حقیقی θ،

$$\sin ۳\theta = ۳ \cos^۲ \theta \sin \theta - \sin^۳\theta,$$
$$\cos ۳\theta = \cos^۳\theta - ۳ \cos \theta \sin^۲\theta.$$

آیا رابطه‌های بالا به‌ازای θ های مختلط نیز معتبرند؟

۴۶.۱ با تعریف $\tan z = (\sin z)/(\cos z)$ نشان دهید که به‌ازای $z = x + iy$،

$$\tan z = \frac{\sin ۲x + i \sinh ۲y}{\cos ۲x + \cosh ۲y}.$$

۴۷.۱ فرض کنید w عدد مختلط مفروضی باشد. اگر $w \neq \pm ۱$، نشان دهید که دو مقدار برای $z = x + iy$ وجود دارند که در شرطهای $\cos z = w$ و $-\pi < x \leqslant \pi$ صدق می‌کنند. این مقدارها را برای حالتهای $w = i$ و $w = ۲$ بیابید.

۴۸.۱ اتحاد لاگرانژ برای عددهای مختلط را ثابت کنید:

$$\left|\sum_{k=۱}^{n} a_k b_k\right|^۲ = \sum_{k=۱}^{n} |a_k|^۲ \sum_{k=۱}^{n} |b_k|^۲ - \sum_{۱\leqslant k<j\leqslant n} |a_k \bar{b}_j - a_j \bar{b}_k|^۲.$$

با بکار بردن این اتحاد، نامساوی کشی ـ شوارتز برای عددهای مختلط را نتیجه بگیرید.

۴۹.۱ آ) با متحد قرار دادن قسمتهای موهومی در دستور دموآور، ثابت کنید که

$$\sin n\theta = \sin^n \theta \left\{\binom{n}{۱} \cot^{n-۱} \theta - \binom{n}{۳} \cot^{n-۳} \theta + \binom{n}{۵} \cot^{n-۵} \theta - + \cdots\right\}.$$

ب) اگر $۰ < \theta < \pi/۲$، ثابت کنید که

$$\sin (۲m + ۱)\theta = \sin^{۲m+۱} \theta \, P_m(\cot^۲ \theta),$$

که در آن P_m چند جمله‌ای درجهٔ m زیر است:

$$P_m(x) = \binom{۲m+۱}{۱} x^m - \binom{۲m+۱}{۳} x^{m-۱} + \binom{۲m+۱}{۵} x^{m-۲} - + \cdots .$$

با استفاده از این، نشان دهید که صفرهای P_m عبارت از m نقطهٔ متمایز $x_k = \cot^۲\{\pi k/(۲m+۱)\}$ $(k = ۱, ۲, \ldots, m)$ می‌باشند.

ج) نشان دهید که مجموع صفرهای P_m مساوی مقدار زیر است:

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{\pi k}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

و مجموع مربعهای صفرهای P_m مساوی مقدار زیر می باشد:

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^4 \frac{\pi k}{2m+1} = \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.$$

تبصره. این اتحادها برای اثبات دستور های $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ و $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$ بکار می‌روند. (ر. ک. تمرینهای ۴۶.۸ و ۴۷.۸)

۵۰.۱ ثابت کنید به‌ازای هرعدد مختلط z، $z^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}(z - e^{2\pi ik/n})$. با بکار بردن این رابطه، دستور زیر را نتیجه بگیرید:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad، \quad n \geqslant 2 \quad \text{به‌ازای}$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی کـه برای کسب اطلاعـات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

1.1 Apostol, T. M., *Calculus,* Vol. 1, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1967.
1.2 Birkhoff, G., and Mac Lane, S., *A Survey of Modern Algebra,* 3rd ed. Macmillan, New York, 1965.
1.3 Cohen, L., and Ehrlich, G., *The Structure of the Real-Number System.* Van Nostrand, Princeton, 1963.
1.4 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis.* Addison – Wesley. Reading, 1966.
1.5 Hardy, G. H., *A Course of Pure Mathematics,* 10th ed. Cambridge University Press, 1952.
1.6 Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series,* Vol. 1, 3rd ed. Cambridge University Press, 1927.
1.7 Landau, E., *Foundations of Analysis*, 2nd ed. Chelsea, New York, 1960.
1.8 Robinson, A., *Non - standard Analysis.* North – Holland, Amsterdam, 1966.
1.9 Thurston, H. A., *The Number System.* Blackie, London, 1956.
1.10 Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2nd ed. Wiley, New York, 1965.

۲

برخی مفهومهای اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها

۱.۲ مقدمه

در بحث از هـر شاخهٔ ریاضیات بکار بردن نمادها و اصطلاحهای نظریهٔ مجموعه‌ها یاری دهنده است. نظریهٔمجموعه‌ها، کـه به‌وسیلهٔ بـول[1] و کانتور در نیمهٔ دوم قـرن نوزدهم توسعه یافته، تأثیری عمیق درگسترش ریاضیات در قرن بیستم داشته است. این نظریه بسیاری از انـدیشه‌هائی را که بظاهر با هم مربوط نبودند متحـد ساختـه ، و بسیاری از مفهومهای ریاضی را با روشی زیبا و اصولی به بنیادهای منطقیشان تحویل کرده است.

ما دراین‌جا نظریهٔ مجموعه‌ها را به‌روشی اصولی و منظم‌عرضه نمی‌نمائیم، وفقط به بحث در مفاهیم این نظریه که اساسیترند اکتفا می‌کنیم. برای پژوهش بیشتر،خواننده می‌تواند به کتابهای مرجع که در پایان این فصل از آنها یاد شده است مراجعه کند.

به دسته‌ای از چیزهـا که به صورت مـوجود واحـدی نـگریسته شونـد عنوان مجموعه می‌دهیم. این چیزها را عنصرها یا عضوهای مجموعـه می‌نامیم، و می‌گوئیم کـه ایـن عضوها متعلق به آن مجموعه‌اند، یا محتوا در آن مجموعه‌انـد. همچنیـن می‌گوئیم مجموعه حاوی عنصرهای خود می‌باشد، یا به‌وسیلهٔ عنصرهای خـود ساخته شده است. غالباً مجموعه‌هائی از مـوجودهای ریاضی مورد نظـر مـا هستند؛ یعنی، مجموعه‌هائی از عددها، نقطه‌ها ، تابعها، خمها، و مانند آنها. اما، چون قسمت اعظم نظریهٔ مجموعه‌ها بـه ماهیت عضوهای مجموعه بستگی ندارد، اگر بحث خـود را به

1. Boole

مجموعه‌های کلی اختصاص دهیم، مقدار زیادی از نیروی فکری بهدر نخواهد رفت. و به‌سبب همین عام بودن است که نظریهٔ مجموعه‌ها چنین تأثیری شگرف در گسترش ریاضی داشته است.

۲.۲ نمادها

مجموعه‌ها را معمولاً با حرفهای بزرگ الفبای لاتین

$$A, B, C, \ldots, X, Y, Z,$$

و عنصرها را با حرفهای کوچک a، b، c، . . . ، x، y، z نمایش می‌دهیم. وقتی می‌نویسیم $x \in S$ یعنی « x یک عنصر S است،» یا «x به S تعلق دارد.» اگر x به S تعلق نداشته باشد، می‌نویسیم $x \notin S$. گاهی مجموعه‌ها را با قرار دادن عنصرهایشان در داخل دو ابرونمایش می‌دهیم؛ مثلاً، مجموعهٔ عددهای زوج مثبت کوچکتر از ۱۰ با $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ نشان داده می‌شود. اگر S دستهٔ همهٔ چیزهائی چون x باشد که در خاصیت P صدق می‌کنند، این را به‌طور خلاصه با $S = \{x|$ در P صدق می‌کند$x\}$ نشان می‌دهیم.

از یک مجموعهٔ مفروض می‌توان مجموعه‌های جدید، که زیر مجموعه‌های آن نامیده می‌شوند، ساخت. مثلاً، مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح مثبت کوچکتر از ۱۰ و قابل قسمت بر ۴، یعنی $\{۴, ۸\}$، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ عددهای زوج کوچکتر از ۱۰ است. در حالت کلی، مجموعهٔ A را یک زیرمجموعهٔ B می‌نامیم، و می‌نویسیم $A \subseteq B$، در صورتی که هر عنصر A متعلق به B نیز باشد. اگر $A \subseteq B$، امکان این که $B \subseteq A$ نیز هست. در حقیقت، وقتی، و فقط وقتی، $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ که عنصرهای A و B یکی باشند. دراین حالت می‌گوئیم A و B متساویند، و می‌نویسیم $A = B$. اگر A و B متساوی نباشند، می‌نویسیم $A \neq B$. هرگاه $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$، آنگاه می‌گوئیم که A یک زیرمجموعهٔ حقیقی B است.

برای تسهیل کار امکان وجود مجموعه‌ای را که هیچ عنصر نداشته باشد می‌پذیریم؛ این مجموعه را مجموعهٔ تهی می‌نامیم، و قبول می‌کنیم که این مجموعه زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای باشد. برای کمک در تصور بهتر مجموعه، خواننده می‌تواند یک مجموعه را به‌عنوان جعبه‌ای تجسم کند که حاوی چیزهائی است که این چیزها عنصرهای آن مجموعه‌اند. در این صورت، مجموعهٔ تهی جعبه‌ای است تهی. مجموعهٔ تهی را با علامت $\varnothing$ نشان می‌دهیم.

۳.۲ جفتهای مرتب

فرض کنیم مجموعه‌ای مرکب از دو عنصر a و b؛ یعنی، مجموعهٔ $\{a, b\}$، را

داشته باشیم. چون در تعریف تساوی مجموعه‌ها ترتیب عنصرها اهمیت ندارد، این مجموعه مساوی مجموعهٔ $\{b, a\}$ است. اما، گاهی نیز لازم است مجموعه‌هائی با دو عنصر در نظر بگیریم که در آنها ترتیب اهمیت داشته باشد. مثلاً، در هندسهٔ تحلیلی صفحه، مختصات (x, y) یک نقطه نمایشگر جفت مرتبی از عددها است. نقطهٔ (۴ ,۳) غیر از نقطهٔ (۳ ,۴) است، حال آن که مجموعهٔ {۴ ,۳} همان مجموعهٔ {۳ ,۴} می‌باشد. مجموعه‌ای که فقط دارای دو عنصر a و b بوده در آن ترتیب برای ما اهمیت داشته باشد، عنصرهای آن را در کمانکها جای می‌دهیم، یعنی آن را با (a, b) نشان می دهیم. در این صورت، a عنصر اول و b عنصر دوم آن نامیده می‌شوند. مفهوم جفت مرتب (a, b) را می‌توان صرفاً به کمک مفهوم مجموعه تعریف کرد. یک چنین تعریف در زیر داده شده است:

تعریف ۱.۲ $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

بنابراین‌تعریف، (a, b) مجموعه‌ای است حاوی دوعنصر $\{a\}$ و $\{a, b\}$. با بکار بردن این تعریف، می‌توان قضیهٔ زیرین را ثابت کرد:

قضیهٔ ۲.۲ $(a, b) = (c, d)$ وقتی، و فقط وقتی، که $a = c$ و $b = d$.

این قضیه نشان می‌دهد که تعریف ۱.۲ تعریفی «معقول» برای جفت مرتب است، معقول از این جهت که در آن چیز a از چیز b متمایز شده است. اثبات قضیهٔ ۲.۲ تمرینی آموزنده برای خواننده می‌باشد. (ر. ک. تمرین ۱.۲.)

۴.۲ حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه

تعریف ۳.۲ اگر A و B دو مجموعهٔ مفروضی باشند، مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب مانند (a, b)، که درآن $a \in A$ و $b \in B$، را حاصل‌ضرب دکارتی A و B می‌نامیم، و با $A \times B$ نشان می‌دهیم.

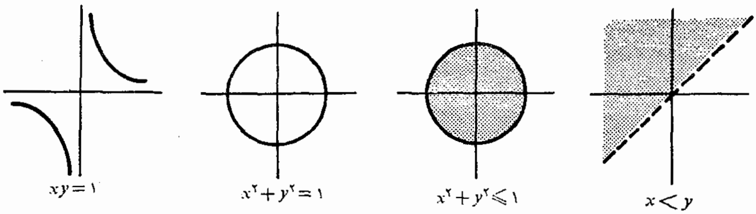
مثال. هرگاه $\mathbf{R}$ مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی باشد، آنگاه $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ مساوی مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط خواهد بود.

۵.۲ رابطه‌ها وتابعها

فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند. جفت مرتب (x, y) را می‌توان به‌عنوان نمایش مختصات قائم یک نقطه در صفحهٔ xy (یا یک عدد مختلط) تصور کرد. ما مکرر به‌عبارتهائی نظیر عبارتهای زیر برمی‌خوریم:

(آ) $xy = ۱,\ x^۲ + y^۲ = ۱,\ x^۲ + y^۲ \leqslant ۱,\ x < y$.

هر یک از عبارتهـای بالا مجموعهٔ مشخصی از جفتهـای مرتب عددهـای حقیقی را معین می‌کنند، یعنی مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتبی مانند (x, y) که در آن عبارت صدق می‌نمایند. هر یک از این مجموعه‌ها را یک رابطهٔ مسطح، و مجموعـهٔ متناظر آن متشکل از نقطه‌های رسم شده در صفحهٔ xy را نمودار آن رابطه مـی‌نامیم. در شکل ۱.۲ نمودارهای روابط توصیف شده در (آ) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۲

می‌توان مفهوم رابطه را آنچنان به طور عمومی تنظیم کرد که x و y در جفتهای مرتب آن چیزهای دلخواه بوده لزوماً عدد حقیقی نباشند.

تعریف ۴.۲ هر مجموعه از جفتهای مرتب را یک رابطه می‌نامیم.

اگر S یک رابطه باشد، مجموعهٔ همهٔ عنصرهائی چـون x که عنصر اول جفتهای مرتب (x, y) در S قرار می‌گیرند قلمرو S نامیده، با $\mathcal{D}(S)$ نشان داده مـی شود. مجموعهٔ عنصرهای دوم مانند y را برد S می‌نامند، و با $\mathcal{R}(S)$ نشان می‌دهند.

اولین مثال در شکل ۱.۲ نمـونهٔ بخصوصی است از رابطـه‌ها که تابـع نامیده می‌شوند.

تعریف ۵.۲ یك تابع مانند F مجموعه‌ای است از جفتهای مرتب (x, y)، که در آن عنصرهای اول هیچ دو جفت مرتب یکی نیستند. یعنی، هرگاه $(x, y) \in F$ و $(x, z) \in F$، آنگاه $y = z$.

از تعریف تابع نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x در قلمرو F، فقط یک عنصر مانند y هست بقسمی که $(x, y) \in F$. معمولاً این y را مقدار F در x می‌نامیم، و بـرای آن که نشان دهیم جفت (x, y) در F است به جای $(x, y) \in F$ می‌نویسیم

$$y = F(x).$$

به جای توصیف تابع F به صورت جفتهـای مرتب آن، معمولاً ترجیح می‌دهیم که نخست قلمرو F را مشخص کرده، سپس نشان دهیم که به‌ازای هر x در قلمروآن،

چگونه مقدار $F(x)$ بدست می‌آید. در این مورد، قضیه‌ای بیان می‌کنیم و اثبات آن را به‌عنوان تمرین به خواننده وا می‌گذاریم.

قضیهٔ ۶.۲ دو تابع F و G وقتی، و فقط وقتی، متساویند که
آ) $\mathscr{D}(F) = \mathscr{D}(G)$ (F و G دارای یك قلمرو باشند)؛ و
ب) به‌ازای هر x در $\mathscr{D}(F)$، داشته باشیم $F(x) = G(x)$.

۶.۲ اصطلاحاتی دیگر دربارهٔ تابعها

وقتی که $\mathscr{D}(F)$، یعنی قلمرو F، زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}$ باشد، F یک تابع یك متغیر حقیقی نامیده می‌شود. هرگاه $\mathscr{D}(F)$ زیرمجموعهٔ $\mathbf{C}$، یعنی دستگاه عددهای مختلط، باشد، آنگاه F را یک تابع یك متغیر مختلط می‌نامیم.

هرگاه $\mathscr{D}(F)$ زیرمجموعهٔ حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ باشد، آنگاه F تابع دو متغیر نامیده می‌شود. در این حالت، به‌جای $F((a, b))$ می‌نویسیم $F(a, b)$. یک تابع دو متغیر حقیقی تابعی است که قلمرو آن زیرمجموعهٔ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ است.

اگر S زیرمجموعهٔ $\mathscr{D}(F)$ باشد، می‌گوئیم F بر S تعریف شده است. در این حالت، مجموعهٔ همهٔ $F(x)$هائی را، که درآن $x \in S$، نقش S با F نامیده به $F(S)$ نشان می‌دهیم. هرگاه T مجموعه‌ای حاوی $F(S)$ باشد، آنگاه F را یک نگاشت از S به T نیز می‌نامند. این مطلب غالباً بدین صورت نشان داده می‌شود:

$$F : S \rightarrow T.$$

اگر $F(S) = T$، گوئیم نگاشت F بروی T است. گاهی یک نگاشت از S در خودش را یک تبدیل می‌نامند.

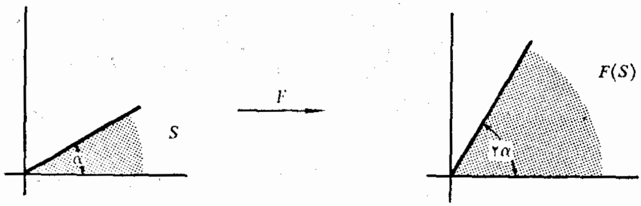
مثلاً، تابع یک متغیر مختلط F را، که با رابطهٔ $F(z) = z^{۲}$ تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. اگر S مجموعهٔ z هائی باشد که $۰ \leqslant \arg(z) \leqslant \alpha \leqslant \pi/۲$، این تابع قطاع S از صفحهٔ مختلط را بروی قطاع $F(S)$، که با نامساویهای $۰ \leqslant \arg[F(z)] \leqslant ۲\alpha$ مشخص می‌شود، می‌نگارد. (ر.ک. شکل ۲.۲.)

اگر دو تابع F و G دررابطهٔ شمول $G \subseteq F$ صدق کنند، می‌گوئیم G یک تحدید F، یا F یک توسیع G است. در حالت خاص، هرگاه S یک زیرمجموعهٔ $\mathscr{D}(F)$ باشد و G با معادلهٔ زیر تعریف شده باشد:

$$G(x) = F(x) \text{ ، } \quad \text{به‌ازای هر } x \text{ در } S$$

آنگاه G را تحدید F به S می‌نامیم. تابع G عبارت است از مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب مانند $(x, F(x))$ که در آن $x \in S$. قلمرو این تابع S و برد آن $F(S)$

می‌باشند.



شکل ۲.۲

۷.۲ تابعهای یک به یک و معکوسهای آنها

تعریف ۷.۲ فرض کنیم تابع F بر S تعریف شده باشد. می‌گوئیم F بر S یک به‌یک است وقتی، و فقط وقتی، که به‌ازای هر x و y در S،

تساوی $F(x) = F(y)$ تساوی $x = y$ را ایجاب کند.

به‌عبارت دیگر، یک تابع درصورتی بر S یک به‌یک است که به‌ازای هردوعضو متمایز از S، مقدارهای این تابع دراین دو عضو متمایز باشند. این تابعها را انژکتیو نیز می‌نامند. تابعهای یک به یک به دلیل داشتن معکوس (که هم اکنون خواهیم دید) اهمیت دارند. اما، قبل از تعریف معکوس یک تابع، بهتر است برای آسان کردن کار مفهومی کلیتر، یعنی عکس یک رابطه، را معرفی کنیم.

تعریف ۸.۲ اگر S رابطهٔ مفروضی باشد، رابطهٔ جدید

$$\breve{S} = \{(a, b) \mid (b, a) \in S\}$$

را عکس S می‌نامیم.

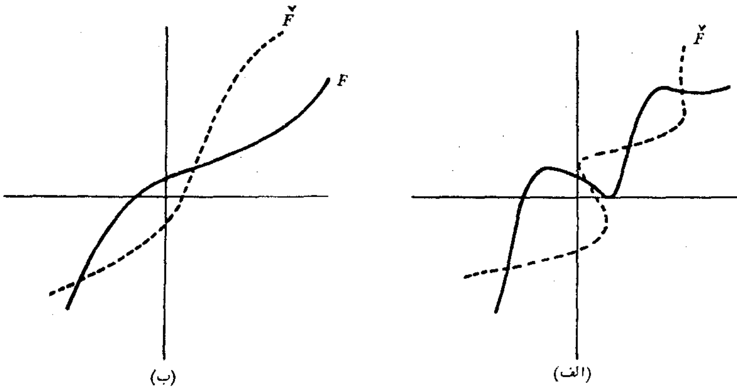
بنابراین، جفت مرتب (a, b) وقتی، و فقط وقتی، متعلق به $\breve{S}$ است که جفت (b, a) در S باشد. در حالتی که S یک رابطهٔ مسطح باشد، به طور ساده می‌توان گفت که نمودار $\breve{S}$ منعکس نمودار S نسبت به خط $y = x$ است. عکس رابطهٔ تعریف شده با $x < y$ رابطه‌ای است که با $y < x$ تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۲ فرض کنیم رابطهٔ F یک تابع باشد. عکس F، یعنی $\breve{F}$، را که ممکن است تابع باشد یا نباشد، در نظر می‌گیریم. هرگاه $\breve{F}$ نیز تابع باشد، آنگاه $\breve{F}$ را معکوس F می‌نامیم و با نماد F^{-1} نشان می‌دهیم.

شکل ۳.۲ (الف) تابعی مانند F را مصور می‌سازد که عکس آن، یعنی $\breve{F}$، تابع

نیست. در شکل ۳.۲ (ب)، F و عکس آن هر دو تابع می‌باشند.

بنابر قضیهٔ زیرین، هر تابع که بر قلمرو خود یک به یک باشد همواره معکوس دارد.



شکل ۳.۲

قضیهٔ ۱۰.۲ هرگاه تابع F برقلمرو خود یک به‌یک باشد، آنگاه $\check{F}$ نیز یک تابع است.

برهان. برای آن که نشان دهیم $\check{F}$ یک تابع است، باید ثابت کنیم که هرگاه $(x, y) \in \check{F}$ و $(x, z) \in \check{F}$، آنگاه $y = z$. اما از $(x, y) \in \check{F}$ داریم $(y, x) \in F$؛ یعنی، $x = F(y)$. بهمین نحو، $(x, z) \in \check{F}$ یعنی که $x = F(z)$. پس $F(y) = F(z)$ و، چون بنا به‌فرض F یک به‌یک است، از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که $y = z$. بنابراین، $\check{F}$ یک تابع می‌باشد.

تبصره. از بحث بالا معلوم می‌شود که هرگاه F بر یک زیرمجموعهٔ $\mathcal{D}(F)$ مانند S یک به‌یک باشد، آنگاه تحدید F به S معکوس دارد.

۸.۲ تابعهای مرکب

تعریف ۱۱.۲ اگر دو تابع F و G داده شده باشند بقسمی که $\mathcal{R}(F) \subseteq \mathcal{D}(G)$، می‌توان تابع جدید $G \circ F$، یعنی ترکیب G و F، را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، تشکیل داد: به‌ازای هر x در قلمرو F، قرار می‌دهیم

$$(G \circ F)(x) = G[F(x)].$$

چون $\mathscr{R}(F) \subseteq \mathscr{D}(G)$، پس عنصر $F(x)$ در قلمرو G است، و در نتیجه $G[F(x)]$ معنی دارد. در حالت کلی، رابطهٔ $G \circ F = F \circ G$ برقرار نیست. در حقیقت، $F \circ G$ ممکن است با معنی نباشد مگر وقتی که برد G محتوا در قلمرو F باشد. در هرحال، قانون شرکتپذیری

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F,$$

به‌شرط با معنی بودن دو طرف رابطهٔ بالا، همواره برقرار است. (اثبات این قانون تمرین جالبی برای خواننده است. ر. ک. تمرین ۲۰۴.)

۹.۲ دنباله‌ها

از جمله مثالهای مهمی از تابعها آنهائی را می‌توان شمرد که برزیرمجموعه‌های مجموعهٔ عددهای صحیح تعریف شده‌اند.

تعریف ۱۲.۲ منظور از یک دنبالهٔ متناهی n جمله‌ای تابعی مانند F است که قلمرو آن مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ باشد.

برد F عبارت است از مجموعهٔ $\{F(۱), F(۲), F(۳), \ldots, F(n)\}$، که معمولاً به‌صورت $\{F_۱, F_۲, F_۳, \ldots, F_n\}$ نموده می‌شود. عنصرهای برد دنباله را جمله‌های دنباله می‌نامیم، و، البته، جمله‌های یک دنباله می‌توانند چیزهای دلخواه باشند.

تعریف ۱۳.۲ منظور از یک دنبالهٔ نامتناهی تابعی مانند F است که قلمرو آن مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح مثبت، یعنی $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$، باشد. برد F، یعنی مجموعهٔ $\{F(۱), F(۲), F(۳), \ldots\}$، به‌صورت $\{F_۱, F_۲, F_۳, \ldots\}$ نیزنوشته می‌شود، و مقدار تابع به‌ازای n، یعنی F_n، را جملهٔ nم دنباله می‌نامیم.

برای اختصار، گاهی نماد $\{F_n\}$ را برای نمایش دنبالهٔ نامتناهی که جملهٔ nم آن F_n است بکار می‌بریم.

فرض کنیم که $s = \{s_n\}$ دنباله‌ای نامتناهی باشد، و k تابعی باشد که قلمروآن مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت، و بردآن یک زیرمجموعهٔ مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت باشد. ونیز فرض می‌کنیم که k «ترتیب را حفظ کند»، یعنی،

اگر $m < n$، $k(m) < k(n)$.

در این صورت، تابع مرکب $s \circ k$ به‌ازای همهٔ عددهای صحیح $n \geqslant ۱$ تعریف

شده است، و به‌ازای هرچنین nی،

$$(s \circ k)(n) = s_{k(n)}.$$

یک چنین تابع مرکبی را یک زیردنبالهٔ s می‌نامیم. دراین مورد نیز، محض اختصار، غالباً نماد $\{s_{k(n)}\}$ یا $\{s_{k_n}\}$ را بـرای نمایش زیـردنبالـهٔ $\{s_n\}$، کـه جملهٔ nام آن $s_{k(n)}$ است، بکار می بریم.

مثال. فرض می‌کنیم کـه $s = \{1/n\}$، و k با رابطهٔ $k(n) = 2^n$ تعریف شده باشد. در این صورت $s \circ k = \{1/2^n\}$.

۱۰.۲ مجموعه‌های متشابه (همعدد)

تعریف ۱۴.۲ دو مجموعهٔ A و B را وقتی، وفقط وقتی، متشابه، یـا همعدد، می‌نامیم که تابعی یک به‌یک مانند F با قلمرو A و برد B وجود داشته باشد. در این صورت، می‌نویسیم $A \sim B$.

همچنین می‌گوئیم کـه F تناظری یک به‌یک بین مجموعه‌های A و B ایجاد می‌کند. واضح است که هرمجموعه مانند A باخودش متشابه است (دراین‌جا F را تابع «همانـی» اختیار مـی‌کنیم، یعنی به‌ازای هر x در A، $F(x) = x$). بعلاوه، هـرگاه $A \sim B$، آنگاه $B \sim A$، زیرا هرگاه تابع یک بـه‌یک F، A را متشابه B کند، آنگاه F^{-1} مجموعهٔ B را متشابه A خواهد کرد. همچنین، هرگاه $A \sim B$ و $B \sim C$، آنگاه $A \sim C$. (اثبات این مطلب به‌عهدهٔ خواننده است.)

۱۱.۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ S را متناهی نامیم و گوئیم حاوی n عنصر است در صورتی که

$$S \sim \{1, 2, \ldots, n\}.$$

عدد صحیح n را عـدد اصلی S نامیم. بسادگی مـی‌توان ثابت کـرد کـه هـرگاه $\{1, 2, \ldots, n\} \sim \{1, 2, \ldots, m\}$، آنگاه $m = n$. بنابراین، عـدد اصلی یک مجموعهٔ متناهـی عدد معینی است. مجموعهٔ تهی را نیز متناهی در نظر گـرفته، عدد اصلی آن را ۰ تعریف می‌کنیم.

مجموعه‌هائی کـه متناهی نباشند نامتناهی نامیده می‌شوند. اختلاف اصلی بین ایـن دو دسته از مجموعه‌ها این است کـه یک مجموعـهٔ نامتناهی باید با یکی از زیرمجموعه‌های حقیقی‌خود متشابه باشد، حال آن که یک مجموعهٔ متناهی نمی‌تواند متشابه به هیچ یک از زیرمجموعه‌های حقیقی خود باشد. (ر. ک. تمرین ۱۳.۲.) مثلاً،

مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$، یعنی مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح مثبت، با مجموعهٔ توانهای ۲، یعنی $\{۲, ۴, ۸, ۱۶, \ldots\}$ که یک زیرمجموعهٔ حقیقی $\mathbf{Z}^+$ است، متشابه می‌باشد. تابع یک به یک F که این دو مجموعه را متشابه می‌کند به‌صورت زیر است: به‌ازای هر x در $\mathbf{Z}^+$، $F(x) = ۲^x$.

۱۲.۲ مجموعه‌های شمارش‌پذیر و شمارش‌ناپذیر

مجموعهٔ S را نامتناهی شمارشپذیرنامیم در صورتی که S با مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح مثبت همعدد باشد؛ یعنی، داشته باشیم

$$S \sim \{۱, ۲, ۳, \ldots\}.$$

در این حالت تابعی چون f وجود دارد که تناظری یک به‌یک بین عددهای صحیح مثبت و عنصرهای S ایجاد می‌نماید؛ از این روی، مجموعهٔ S را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$S = \{f(۱), f(۲), f(۳), \ldots\}.$$

غالباً از زیرنویس استفاده می‌کنیم و به‌جای $f(k)$ نماد a_k (یا نمادی مشابه به a_k) را بکار برده می‌نویسیم $S = \{a_۱, a_۲, a_۳, \ldots\}$. مطلب مهم در این‌جا این است که به‌کمک تناظر f می‌توان عددهای صحیح مثبت‌را به‌عنوان «برچسب» برای عنصرهای S بکار برد. می‌گوئیم عدد اصلی یک مجموعهٔ نامتناهی شمارشپذیر مساوی $\aleph_0$ (بخوانید: الف صفر) است.

تعریف ۱۵.۲ مجموعهٔ S را شمارشپذیر نامیم درصورتی که متناهی یا نامتناهی شمارشپذیر باشد. مجموعه‌ای که شمارشپذیر نباشد شمارش‌ناپذیر نامیده می‌شود.

گاهی به‌جای شمارشپذیر و شمارش ناپذیر اصطلاحهای شمارا و ناشمارا بکار می‌روند.

قضیهٔ ۱۶.۲ هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ شمارشپذیر مجموعه‌ای است شمارشپذیر.

برهان. فرض کنیم که S مجموعه‌ای شمارشپذیر باشد و $A \subseteq S$. اگر A متناهی باشد، حکم ثابت است، پس A را نامتناهی فرض می‌کنیم (در نتیجه S نیز نامتناهی خواهد بود). فرض کنیم $s = \{s_n\}$ دنباله‌ای نامتناهی با جمله‌های متمایز باشد بقسمی که

$$S = \{s_۱, s_۲, \ldots\}.$$

تابعی چون k را برعددهای صحیح مثبت به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$k(1)$ را مساوی کوچکترین عدد صحیح مثبت m می‌گیریم بقسمی که $s_m \in A$. اگر $k(1)$، $k(2)$، . . .، و $k(n-1)$ تعریف شده فرض شوند، $k(n)$ را کوچکترین عدد صحیح مثبت $m > k(n-1)$ می‌انگاریم بقسمی که $s_m \in A$. k ترتیب را حفظ می‌کند، یعنی: $m > n$ ایجاب می‌کند که $k(m) > k(n)$. تابع مرکب $s \circ k$ را تشکیل می‌دهیم. قلمرو $s \circ k$ مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت، و بردآن A می‌باشد. بعلاوه، $s \circ k$ یک به‌یک است، زیرا

$$s[k(n)] = s[k(m)]$$

ایجاب می‌کند که

$$s_{k(n)} = s_{k(m)},$$

که از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که $k(n) = k(m)$، و این ایجاب می‌کندکه $n = m$، و بدین ترتیب قضیه باثبات می‌رسد.

۱۳.۲ شمارش‌ناپذیری دستگاه عددهای حقیقی

بنا بر قضیهٔ زیرین، مجموعه‌هائی نامتناهی وجود دارند که شمارشپذیر نیستند.

قضیهٔ ۱۷.۲ **مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی شمارش‌ناپذیر است.**

برهان. کافی است نشان دهیم که مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی مانند x که $0 < x < 1$ شمارش‌ناپذیراست. گوئیم اگر این مجموعه شمارشپذیر باشد، باید دنباله‌ای مانند $s = \{s_n\}$ وجود داشته باشد بقسمی که جمله‌های‌آن تمام بازه را تشکیل دهند. با ساختن عددی حقیقی در این بازه که غیر از هریک از جمله‌های دنبالهٔ یاد شده باشد، نشان می‌دهیم که وجود چنین دنباله‌ای غیرممکن است. برای این کار هریک از s_nها را به‌صورت بسط اعشاری نامتناهی آن می‌نویسیم:

$$s_n = 0/u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3}\cdots,$$

که درآن هر $u_{n,i}$ مساوی ۰، ۱، . . .، یا ۹ می‌باشد. عدد حقیقی y را با بسط اعشاری

$$y = 0/v_1v_2v_3\cdots$$

در نظر می‌گیریم، که در آن

$$v_n = \begin{cases} 1 \text{،} & u_{n,n} \neq 1 \quad \text{اگر} \\ 2 \text{،} & u_{n,n} = 1 \quad \text{اگر} \end{cases}.$$

چون y با s_1 در اولین رقم بسط اعشاری خود، و با s_2 در دومین رقم، . . .، و با

s_n در n مین رقم بسط اعشاری خود متفاوت است، پس هیچ یک از جمله‌های دنبالهٔ $\{s_n\}$ نمی‌تواند مساوی y باشد. (v_n ها را طوری اختیار کرده‌ایم که هیچ‌وقت s_n مثلاً مساوی ۰٫۱۹۹۹... و y مساوی ۰٫۲۰۰۰... نشود.) چون $۰ < y < ۱$، پس قضیه برقرار است.

قضیهٔ ۱۸.۲ فرض کنیم Z^+ مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح مثبت باشد. در این صورت، حاصل‌ضرب دکارتی $Z^+ \times Z^+$ شمارشپذیر است.

برهان. تابع f را بر $Z^+ \times Z^+$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر}\quad (m, n) \in Z^+ \times Z^+ ،\ f(m, n) = ۲^m ۳^n.$$

در این صورت، f بر $Z^+ \times Z^+$ یک به‌یک است و بردآن یک زیرمجموعهٔ Z^+ می‌باشد.

۱۴.۲ جبر مجموعه‌ای

اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو مجموعهٔ مفروضی باشند، اجتماع $A_۱$ و $A_۲$ را با نماد $A_۱ \cup A_۲$ نشان داده به صورت زیرین تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۹.۲ $A_۱ \cup A_۲$ مجموعهٔ آن عنصرهائی است که یا متعلق به $A_۱$ یا متعلق به $A_۲$ و یا متعلق به هر دو باشند.

به‌عبارت دیگر، $A_۱ \cup A_۲$ مجموعهٔ همهٔ عنصرهائی است که دست‌کم به یکی از دو مجموعهٔ $A_۱$ و $A_۲$ تعلق دارند. چون در این تعریف ترتیب عضوها اهمیت ندارد، پس $A_۲ \cup A_۱$ مساوی $A_۱ \cup A_۲$ است؛ یعنی، جمع مجموعه‌ای تعویضپذیر است. همچنین این‌تعریف به صورتی است که جمع مجموعه‌ای شرکتپذیر نیز هست:

$$A_۱ \cup (A_۲ \cup A_۳) = (A_۱ \cup A_۲) \cup A_۳.$$

تعریف اجتماع دومجموعه‌را می‌توان به‌هردستهٔ متناهی یا نامتناهی ازمجموعه‌ها وسعت داد:

تعریف ۲۰.۲ هرگاه F دستهٔ دلخواهی از مجموعه‌ها باشد، آنگاه اجتماع همهٔ مجموعه‌های موجود در F عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عنصرهائی که دست کم به یکی از مجموعه‌های در F تعلق دارد. این مجموعه را با نماد

$$\bigcup_{A \in F} A$$

نشان می‌دهیم.

اگـر F دسته‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد، یعنی $F = \{A_1, \ldots, A_n\}$، می‌نویسیم

$$\bigcup_{A\in F} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

در صورتی‌کـه F دسته‌ای شمارشپذیـر باشد، یعنی $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$، می‌نویسیم

$$\bigcup_{A\in F} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots.$$

تعریف ۲۱.۲ اگر F دستهٔ دلخواهی از مجموعه‌ها باشد، اشتراک همهٔ مجموعه‌هـای موجود در F عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عنصرهائی که متعلق به هریک از مجموعه‌های در F می‌باشند. این مجموعه را بانماد

$$\bigcap_{A\in F} A$$

نشان می‌دهیم.

اشتراک دومجموعهٔ A_1 و A_2 با نماد $A_1 \cap A_2$ نشان داده می‌شود، وعبارت است از مجموعهٔ همهٔ عنصرهائی که به هر دو مجموعه تعلق دارند. هرگاه A_1 و A_2 عنصر مشترکی نداشته باشند، آنگاه $A_1 \cap A_2$ مجموعهٔ تهی است. در این صورت گوئیم A_1 و A_2 از هم جدا می‌باشند. اگـر F دسته‌ای متناهی (مانند بالا) باشد، می‌نویسیم

$$\bigcap_{A\in F} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

و اگر F دسته‌ای شمارشپذیر باشد، می‌نویسیم

$$\bigcap_{A\in F} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots.$$

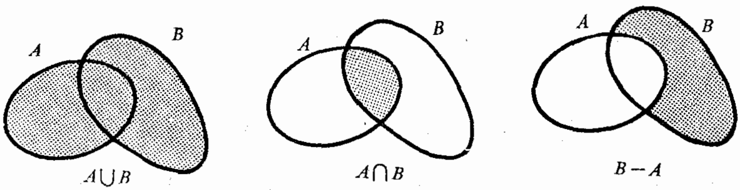
اگر مجموعه‌های موجـود در دستهٔ F عنصر مشترک نداشته باشند، اشتراک آنهـا مجموعهٔ تهی است. البته باید توجه داشت که، اجتماع و اشتراک مجموعه‌های‌عضو F وقتی هم که F شمارشپذیر نیست معنی دارند. با توجه به نحوهٔ تعریف اجتماع و اشتراک، مـلاحظه می‌شود که قانونهای تعویضپذیـری و شرکتپذیری در مورد آنها بخودی خود برقرارند.

تعریف ۲۲.۲ متمم A نسبت به B با $B - A$ نشان داده مـی‌شود، و بـه صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$B - A = \{x \mid x \notin A \text{ اما } x \in B\}.$$

دیده می‌شود که وقتی $B \subseteq A$، $A = (B - A) - B$. همچنین، اگر $B \cap A$ تهی باشد، $B - A = B$.

مفهومهای اجتماع، اشتراک، و متمم در شکل ۴.۲ مصور شده‌اند.



شکل ۴.۲

قضیهٔ ۲۳.۲ فرض کنیم F دسته‌ای از مجموعه‌ها باشد. در این صورت، به‌ازای هر مجموعه مانند B،

$$B - \bigcup_{A \in F} A = \bigcap_{A \in F} (B - A),$$

و

$$B - \bigcap_{A \in F} A = \bigcup_{A \in F} (B - A).$$

برهان. قرار می‌دهیم $S = \bigcup_{A \in F} A$ و $T = \bigcap_{A \in F} (B - A)$. هرگاه $x \in B - S$، آنگاه $x \in B$، ولی $x \notin S$. از این روی، x در هیچ یک از مجموعه‌های عضو F مانند A نیست؛ پس، به‌ازای هر A در F، $x \in B - A$. از این نتیجه می‌شود که $x \in T$، بنابراین $B - S \subseteq T$. با تکرار استدلال بالا در جهت عکس، رابطهٔ $T \subseteq B - S$ بدست می‌آید. پس $B - S = T$. با برهانی مشابه استدلال بالا می‌توان عبارت دوم قضیه را ثابت کرد.

۱۵.۲ دسته‌های شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر

تعریف ۲۴.۲ هرگاه F دسته‌ای ازمجموعه‌ها باشد بقسمی که هردو مجموعهٔ متمایز در F از هم جدا باشند، آنگاه گوئیم F دسته‌ای است از مجموعه‌های از هم جدا.

قضیهٔ ۲۵.۲ هرگاه F دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های از هم جدا باشد، مثلاً، $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$، بقسمی که هرمجموعهٔ A_n شمارشپذیر باشد، آنگاه اجتماع $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ نیز شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم $A_n = \{a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n}, \ldots\}$، $n = 1, 2, \ldots$، و $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. در این صورت، هر عنصر S مانند x دست‌کم به یکی از

مجموعه‌ها در F تعلق دارد. پس، به‌ازای جفت مرتبی از عددهای صحیح مانند (m, n)، $x = a_{m,n}$. چون F دسته‌ای از مجموعه‌های از هم جدا است، جفت (m, n) به‌وسیلهٔ x به طور منحصر بفردی مشخص می‌شود. از این روی تابع f، که به‌صورت زیر تعریف شده است: اگر $x \in S$ و $x = a_{m,n}$، $f(x) = (m, n)$، دارای قلمرو S است. چون برد $f(S)$ زیرمجموعهٔ $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ می‌باشد ($\mathbf{Z}^+$ مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت است)، پس $f(S)$ شمارشپذیر است. اما f یک به‌یک است، و در نتیجه $S \sim f(S)$، یعنی S نیز شمارشپذیر است.

قضیهٔ ۲۶.۲ هرگاه $F = \{ A_۱, A_۲, \ldots \}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌ها باشد، و هرگاه $G = \{ B_۱, B_۲, \ldots \}$ انگاشته شود که در آن $B_۱ = A_۱$، و به‌ازای $n > ۱$،

$$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,$$

آنگاه G دسته‌ای از مجموعه‌های از هم جدا است، و

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

برهان. هر B_n طوری ساخته شده است که عنصر مشترکی با B های پیش از آن، یعنی $B_۱$، $B_۲$، . . . ، و B_{n-1}، ندارد. پس G دسته‌ای از مجموعه‌های از هم جدا است. فرض‌کنیم $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ و $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. نشان خواهیم داد که $A = B$. برای این کار، ابتدا می‌گوئیم هرگاه $x \in A$، آنگاه به‌ازای مقداری از k، $x \in A_k$. هرگاه n کوچکترین این مقدارهای k باشد، آنگاه $x \in A_n$ ولی $x \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$، یعنی $x \in B_n$، در نتیجه $x \in B$. پس $A \subseteq B$. برعکس، هرگاه $x \in B$، آنگاه به‌ازای یک مقدار n، $x \in B_n$. بنا براین، به‌ازای این مقدار n، $x \in A_n$. پس $x \in A$ و ازاین نتیجه می‌شود که $B \subseteq A$.

با استفاده از قضیه‌های ۲۵.۲ و ۲۶.۲ بی‌درنگ قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۲۷.۲ هرگاه F دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر باشد، آنگاه اجتماع همهٔ مجموعه‌های موجود در F نیز مجموعه‌ای شمارشپذیر است.

مثال ۱ مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا، یعنی $\mathbf{Q}$، شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم A_n مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای مثبتی باشد که مخرج آنها n است. در این صورت، مجموعهٔ همهٔ عددهای‌گویای مثبت مساوی $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ خواهد

بود. از این مطلب نتیجه می‌شود که Q شمارشپذیر است، زیرا هر A_n شمارشپذیر است.

مثال ۲ هرگاه S مجموعهٔ همهٔ بازه‌ها با نقطه‌های انتهائی گویا باشد، آنگاه S شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم که $\{x_۱, x_۲, \ldots\}$ مجموعهٔ عددهای گویا، و A_n مجموعهٔ همهٔ بازه‌هائی باشد که نقطهٔ انتهائی چپ آنها x_n و نقطهٔ انتهائی راست آنها عددهائی گویا باشند. در این صورت، A_n شمارشپذیر است و $S = \bigcup_{k=۱}^{\infty} A_k$.

تمرین

۱.۲ قضیهٔ ۲.۲ را ثابت کنید. راهنمائی. $(a, b) = (c, d)$ یعنی $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.
حال به‌تعریف تساوی مجموعه‌ها متوسل شوید.

۲.۲ فرض کنیم S رابطه‌ای و $\mathscr{D}(S)$ قلمرو آن باشد. رابطهٔ S را

یکم) انعکاسی نامیم در صورتی‌که $a \in \mathscr{D}(S)$ ایجاب کند که $(a, a) \in S$؛
دوم) تقارنی نامیم درصورتی که $(a, b) \in S$ ایجاب کند که $(b, a) \in S$؛
سوم) متعدی نامیم در صورتی که $(a, b) \in S$ و $(b, c) \in S$ ایجاب کنند که $(a, c) \in S$.

رابطه‌ای که تقارنی، انعکاسی، و متعدی باشد یک رابطهٔ هم‌ارزی نامیده می‌شود. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ جفتهائی از عددهای حقیقی مانند (x, y) باشد که در یکی از رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

آ) $x \leqslant y$، ب) $x < y$،
ج) $x < |y|$، د) $x^۲ + y^۲ = ۱$،
ه) $x^۲ + y^۲ < ۰$، و) $x^۲ + x = y^۲ + y$.

معین کنید هر S کدام یک از خاصیتهای بالا را دارا است.

۳.۲ تابعهای F و G زیرین به‌ازای هر عدد حقیقی x، با معادله‌هائی داده شده‌اند. در هر حالت که تابع مرکب $G \circ F$ را بتوان تشکیل داد، قلمرو $G \circ F$ و دستور (یا دستورهائی) برای $(G \circ F)(x)$ را معین کنید.

آ) $F(x) = ۱ - x$ ، $G(x) = x^۲ + ۲x$.

ب) $F(x) = x + ۵$ ، $G(۰) = ۱$،
و اگر $x \neq ۰$ ، $G(x) = |x|/x$.

ج)
$$F(x) = \begin{cases} ۲x & \text{اگر } ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}،$$

$$G(x) = \begin{cases} x^۲ & \text{اگر } ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

اگر $G(x)$ و $G[F(x)]$ به صورتهای زیر داده شده باشند، $F(x)$ را بیابید:

د) $G(x) = x^۳$ ، $G[F(x)] = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱$.

ه) $G(x) = ۳ + x + x^۲$ ، $G[F(x)] = x^۲ - ۳x + ۵$.

۴.۲ سه تابع F، G، و H داده شده‌اند. چه قیدهائی را باید برقلمروهای این‌تابعها گذارد تا چهار تابع مرکب زیرین معنی داشته باشند؟

$$G \circ F, \qquad H \circ G, \qquad H \circ (G \circ F), \qquad (H \circ G) \circ F.$$

اگر فرض کنیم که $H \circ (G \circ F)$ و $(H \circ G) \circ F$ را بتوان تعریف کرد، قانون شرکتپذیری را ثابت کنید:

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

۵.۲ اتحادهای نظریهٔ مجموعه‌ای زیرین را در مورد اجتماع و اشتراک ثابت کنید:

آ) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$،
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

ب) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

ج) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

د) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

ه) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

و) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

ز) $(A - B) \cup B = A$ وقتی، و فقط وقتی، که $B \subseteq A$.

۶.۲ فرض کنید که $f : S \to T$ یک تابع باشد. اگر A و B دو زیرمجموعهٔ دلخواه S باشند، ثابت کنید که

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ و $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

این رابطه‌ها را برای اجتماع و اشتراک تعدادی دلخواه مجموعه تعمیم دهید.

۷.۲ فرض کنید که $f : S \to T$ یک تابع باشد. اگر $Y \subseteq T$، بزرگترین زیرمجموعهٔ S را که با f در Y نگاشته می‌شود به $f^{-1}(Y)$ نشان می‌دهیم. یعنی،

$$f^{-1}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y \text{ و } x \in S\}.$$

مجموعهٔ $f^{-1}(Y)$ را نقش معکوس Y با f می‌نامیم. رابطه‌های زیرین را برای زیرمجموعه‌های دلخواه S مانند X و دلخواه T مانند Y ثابت کنید.

آ) $X \subseteq f^{-1}[f(X)]$، ب) $f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y$،

ج) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$،

د) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$،

ه) $f^{-1}(T - Y) = S - f^{-1}(Y)$.

و) قسمتهای (ج) و (د) را در مورد اجتماع و اشتراک تعداد دلخواهی مجموعه تعمیم دهید.

۸.۲ با مراجعه به تمرین ۷.۲، ثابت کنید که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ T مانند Y، رابطهٔ $f[f^{-1}(Y)] = Y$ وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که $T = f(S)$.

۹.۲ فرض کنید $f : S \to T$ یک تابع باشد. ثابت کنید که گزاره‌های زیرین با یکدیگر هم‌ارزند.

آ) f بر S یک به یک است.

ب) به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ S مانند A و B،

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

ج) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ S مانند A، $f^{-1}[f(A)] = A$.

د) به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ از هم‌جدای S مانند A و B، نقشهای $f(A)$ و $f(B)$ از هم‌جدا می‌باشند.

ه) به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ S مانند A و B که $B \subseteq A$، این رابطه برقرار است:

$$f(A - B) = f(A) - f(B).$$

۱۰.۲ ثابت کنید هرگاه $A \sim B$ و $B \sim C$، آنگاه $A \sim C$.

۱۱.۲ اگر $\{1, 2, \ldots, n\} \sim \{1, 2, \ldots, m\}$، ثابت کنید که $m = n$.

۱۲.۲ اگر S مجموعه‌ای نامتناهی باشد، ثابت کنید که S حاوی یک زیرمجموعهٔ

نامتناهی شمارشپذیر است. راهنمائی. عنصری مانند a_1 در S اختیار کنید و سپس $S-\{a_1\}$ را در نظر بگیرید.

۱۳.۲ ثابت کنید هر مجموعهٔ نامتناهی مانند S حاوی زیرمجموعه‌ای حقیقی ومتشابه با خود آن است.

۱۴.۲ اگر A مجموعه‌ای شمارشپذیر، و B مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر باشد، ثابت کنید که $B-A$ با B متشابه است.

۱۵.۲ یک عدد حقیقی را جبری نامیم وقتی که این عدد عبارت باشد از ریشهٔ معادله‌ای جبری مانند $f(x)=0$، که درآن $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ یک چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح است. ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایها با ضریبهای صحیح شمارشپذیر است، و نتیجه بگیرید که مجموعهٔ عددهای جبری نیز شمارشپذیر است.

۱۶.۲ فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی مرکب از n عنصر، و T دستهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S باشد. نشان دهیدکه T مجموعه‌ای متناهی است و تعداد عنصرهای آن را بیابید.

۱۷.۲ فرض کنید $\mathbf{R}$ مجموعهٔ عددهای حقیقی، و S مجموعهٔ همهٔ تابعهای حقیقی با قلمرو $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که S و $\mathbf{R}$ همعدد نیستند. راهنمائی. فرض کنید که $S\sim\mathbf{R}$ و f تابعی یک به یک باشد بقسمی که $f(\mathbf{R})=S$. اگر $a\in\mathbf{R}$، فرض کنید $g_a=f(a)$ آن تابع حقیقی در S باشد که متناظر با عدد حقیقی a است. حال تابع h را با معادلهٔ $h(x)=1+g_x(x)$، $x\in\mathbf{R}$، تعریف کرده، نشان دهید که $h\notin S$.

۱۸.۲ فرض کنید S دستهٔ همهٔ دنباله‌هائی باشد که جمله‌های آنها منحصراً عددهای ۰ و ۱ باشند. نشان دهید که S شمارش‌ناپذیر است.

۱۹.۲ نشان دهید که مجموعه‌های زیر شمارشپذیر هستند:

آ) مجموعهٔ دایره‌ها در صفحهٔ مختلط که شعاع آنها و مختصات مرکز آنها گویا باشند.

ب) هر دسته از بازه‌های از هم‌جدا با درازای مثبت.

۲۰.۲ فرض کنید f تابعی باشد حقیقی که به‌ازای هر x در بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ تعریف شده باشد. همچنین عددی مثبت مانند M با خاصیت زیر وجود داشته باشد: به‌ازای هر تعداد متناهی از نقطه‌ها مانند x_1، x_2، ... x_n در بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$، داشته باشیم

$$|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M.$$

فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ x هائی در $0\leqslant x\leqslant 1$ باشد که به‌ازای آنها

$f(x) \neq 0$. ثابت کنید که S شمارشپذیر است.

۲۱.۲ در زیر «ثابت» شده است که مجموعهٔ همهٔ بازه‌ها با درازای مثبت شمارشپذیر است. ایراد این «اثبات» را پیدا کنید.

فرض می‌کنیم $\{x_1, x_2, \ldots\}$ مجموعـهٔ شمارشپذیر عددهای گـویا باشد، و I بازه‌ای با درازای مثبت باشد. دراین صورت، I حاوی تعدادی نامتناهی از نقطه‌های گویای x_n است، اما در بین این عددهای گـویا یکی وجود دارد که زیرنویس آن از همه کوچکتر است. تابع F را چنین تعریف می‌کنیم: اگـر در بازهٔ I، n کوچکترین زیرنویسی باشد که $x_n \in I$، قـرار می‌دهیم $F(I) = n$. این تابع تناظری یک به‌ـ یک بین مجموعهٔ همهٔ بازه‌ها و یک زیرمجموعهٔ عددهای صحیح مثبت ایجاد خواهد کرد. بنابراین، مجموعهٔ همهٔ بازه‌ها شمارشپذیر است.

۲۲.۲ فرض کنید S دستهٔ همهٔ زیرمجمـوعه‌های مجمـوعهٔ مفروض T باشد. همچنین $f: S \to \mathbf{R}$ تابعی حقیقی باشد که بر S تعریف شده است. تابـع f را یک تابع جمعپذیر نامیم درصورتی که به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ ازهم جدای T مانند A و B، داشته باشیم $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$. اگر f جمعپذیر باشد، ثابت کنیـد به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ T مانند A و B، این رابطه‌ها برقرارند:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B - A)$$

و

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

۲۳.۲ درمراجعه به‌تمرین ۲۲.۲، فرض کنید که f جمعپذیر بوده و همچنین، به‌ازای دو زیرمجموعهٔ بخصوص T مانند A و B، رابطه‌های زیرین برقرار باشند:

$$f(A \cup B) = f(A') + f(B') - f(A')f(B'),$$
$$f(A \cap B) = f(A)f(B), \quad f(A) + f(B) \neq f(T),$$

که در آنها $A' = T - A$ و $B' = T - B$. ثابت کنید که این رابطه‌ها $f(T)$ را مشخص می‌کنند، و مقدار $f(T)$ را محاسبه کنید.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

2.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Functions*. Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.

2.2 Fraenkel, A., *Abstract Set Theory*, 3rd ed. North – Holland, Amsterdam, 1965.

2.3 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison – Wesley, Reading, 1966.

2.4 Halmos, P. R., *Naive Set Theory*. Van Nostrand, New York, 1960.

2.5 Kamke, E., *Theory of Sets*. F. Bagemihl, translator. Dover, New York, 1950.

2.6 Kaplansky, I., *Set Theory and Metric Spaces*. Allyn and Bacon, Boston, 1972.

2.7 Rotman, B., and Kneebone, G. T., *The Theory of Sets and Transfinite Numbers*. Elsevier, New York, 1968.

۳

مبانی توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای

۱.۳ مقدمه

در قسمت بـزرگـی از فصل پیشین با مجموعه‌هـای «مجـرد» سروکار داشتیم؛ یعنی، مجموعه‌هائی که عضوهایشان چیزهای دلخواه بودند. در این فصل مجموعه‌های خاص عـددهای حقیقی، عـددهای مختلط و، به طور کلیتر، مجموعه‌هائی در فضاهای بـا بعد بالاتر مورد نظرمان خواهد بود.

بـرای مطالعه در چنین زمینـه‌ای بکار بـردن اصطلاحـات هندسی مناسب و مشکل گشا است. بـدین‌ترتیب، از مجموعه‌های نقاط بـر خط حقیقی، مجموعه‌هـای نقاط در صفحه، یا مجموعه‌های نقاط در فضاهائی با بعد بالاتر سخن خواهیم گفت. بعداً در این کتاب به‌بررسی تابعهائی خواهیم پرداخت که بـر مجموعه‌هائی از نقاط تعریف شده‌اند، و لازم می‌بینیم که قبل ازآغاز مطالعهٔ تابعها با بعضی از مجموعه‌های نقطه‌ای اساسی، مانند مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، و مجموعه‌های فشرده آشنا شویم. مبحثی که دربارهٔ این چنین مجموعه‌ها مطالعه مـی‌کند توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای نامیده می‌شود.

۲.۳ فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$

یک نقطه در فضای دو بعدی عبارت است از جفت مـرتبی از عددهای حقیقی مانند (x_1, x_2). بهمین‌نحو، یک نقطه در فضای سه بعدی سه‌تائی مـرتبی از عـددهای حقیقی است مانند (x_1, x_2, x_3). بنابرایـن، مـی‌توان nتائی مـرتبی از عـددهای

حقیقی مانند $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را به‌عنوان نقطه‌ای در فضای n بعدی در نظر گرفت.

تعریف ۱.۳ فرض کنیم $n > 0$ عددی صحیح باشد. مجموعهٔ مرتبی از n عدد حقیقی مانند $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را یک نقطهٔ n بعدی یا یک بردار با n مؤلفه می‌نامیم. در چاپ، نقطه‌ها یا بردارها معمولاً با حروف سیاه نشان داده می‌شوند؛ مثلاً،

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{یا} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

عدد x_k را مختص k ام نقطهٔ $\mathbf{x}$، یا مؤلفهٔ kام بردار $\mathbf{x}$ می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های n بعدی را فضای اقلیدسی n بعدی یا فقط فضای n بعدی نامیده، با نماد $\mathbf{R}^n$ نشان می‌دهیم.

ممکن است برای خواننده این سؤال مطرح شود که‌آیا اصولاً برای بحث در بارهٔ فضاهای با بعد بیشتر از ۳ مزیتی می‌توان قائل شد؟ در عمل دیده شده است که بسیاری از موارد پیچیده را می‌توان به‌کمک فضاهای n بعدی ساده‌تر فهمید. شاید خوانندهٔ کتاب آن‌قدر با آنالیز برداری سه‌بعدی آشنا باشد که بتواند مزیت نشان‌دادن معادله‌های حرکت یک دستگاه با سه درجهٔ آزادی به‌صورت یک معادلهٔ برداری را بر ارائهٔ آنها به‌صورت سه معادلهٔ اسکالر تشخیص دهد. این‌گونه مزیت برای دستگاهی که n درجهٔ آزادی داشته باشد متصور است.

برتری دیگر مطالعهٔ فضاهای n بعدی، با n به‌معنی اعم، این است که ما یکجا با بسیاری از خاصیتهای مشترک فضاهای یک بعدی، دو بعدی، سه بعدی، و یا بعدهای بیشتر، یعنی خاصیتهائی که از بعدپذیری فضا مستقل باشند، سروکار خواهیم داشت.

فضاهای با بعد بالاتر به‌طور طبیعی در زمینه‌هائی مانند نسبیت و مکانیک آماری و مکانیک کوانتمی مورد استعمال دارند. در واقع، در مکانیک کوانتمی حتی فضاهای با بعد نامتناهی نیز بکار گرفته می‌شوند.

عملهای جبری برنقطه‌های n بعدی بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

تعریف ۲.۳ فرض کنیم که $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ در $\mathbf{R}^n$ باشند. تعریف می‌کنیم:

آ) تساوی:

$\mathbf{x} = \mathbf{y}$ وقتی، و فقط وقتی، که $x_1 = y_1$، ...، $x_n = y_n$.

ب) مجموع:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_۱ + y_۱, \ldots, x_n + y_n).$$

ج) ضرب در عددهای حقیقی (اسکالرها):

$$a\mathbf{x} = (ax_۱, \ldots, ax_n) \qquad (\text{عددی است حقیقی } a).$$

د) تفاضل:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-۱)\mathbf{y}.$$

ه) بردار صفر یا مبدأ:

$$\mathbf{o} = (o, \ldots, o).$$

و) حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب نقطه‌ای:

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \sum_{k=۱}^{n} x_k y_k.$$

ز) هنج یا درازا:

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}.\mathbf{x})^{۱/۲} = \left(\sum_{k=۱}^{n} x_k^۲\right)^{۱/۲}.$$

هنج $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ را فاصلهٔ بین $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ می‌نامیم.

تبصره. به‌اصطلاح جبر خطی، $\mathbf{R}^n$ مثالی است از یک فضای خطی.

قضیهٔ ۳.۳ فرض کنیم که $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نقطه‌هائی در $\mathbf{R}^n$ باشند. در این صورت:

آ) $\|\mathbf{x}\| \geqslant o$، و $\|\mathbf{x}\| = o$ وقتی، و فقط وقتی، که $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

ب) به‌ازای هرعدد حقیقی مانند a، $\|a\mathbf{x}\| = |a|\,\|\mathbf{x}\|$.

ج) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

د) $|\mathbf{x}.\mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ (نامساوی کشی‌ـشوارتز).

ه) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (نامساوی مثلثی).

برهان. گزاره‌های (آ)، (ب)، و (ج) بی‌فاصله از تعریف نتیجه می‌شوند، و نامساوی کشی‌ـشوارتز نیز درقضیهٔ ۲۳.۱ ثابت شده است. گزارهٔ (ه) از (د) نتیجه می‌شود زیرا

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^۲ &= \sum_{k=۱}^{n} (x_k + y_k)^۲ = \sum_{k=۱}^{n} (x_k^۲ + ۲x_k y_k + y_k^۲)\\ &= \|\mathbf{x}\|^۲ + ۲\mathbf{x}.\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^۲ \leqslant \|\mathbf{x}\|^۲ + ۲\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^۲\\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^۲.\end{aligned}$$

تبصره. گاهی نامساوی مثلثی به‌شکل زیرین نوشته می‌شود:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|.$$

این رابطه از (ﻫ) این‌طور بدست می‌آید که درآن به جای $\mathbf{x}$، $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ و به‌جای $\mathbf{y}$، $\mathbf{y}-\mathbf{z}$ قرار دهیم. و نیز داریم

$$\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

تعریف ۴.۳ بردار مختصات یکهٔ $\mathbf{u}_k$ در $\mathbf{R}^n$ برداری است که مؤلفهٔ k ام آن ۱ و بقیهٔ مؤلفه‌های آن صفر باشند. بنابراین،

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{u}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

هرگاه $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$،

آنگاه $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$ و $x_1 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1$، $x_2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_2$، $\ldots$، $x_n = \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_n$. بردارهای $\mathbf{u}_1$، $\ldots$، $\mathbf{u}_n$ بردارهای پایه نیز نامیده می‌شوند.

۳.۳ گویهای باز و مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^n$

فرض کنیم که $\mathbf{a}$ نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$، و r عدد مثبت مفروضی باشد. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هائی مانند $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$ که

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < r$$

را یک گوی n بعدی باز به شعاع r و به مرکز $\mathbf{a}$ می‌نامیم. این مجموعه را با نماد $B(\mathbf{a})$ یا $B(\mathbf{a}; r)$ نشان می‌دهیم.

گوی $B(\mathbf{a}; r)$ عبارت است ازمجموعهٔ همهٔ نقطه‌هائی که فاصلهٔ‌آنها تا $\mathbf{a}$ از r کمتر است. این در $\mathbf{R}^1$ صرفاً بازهٔ بازی است به مرکز $\mathbf{a}$. این گوی در $\mathbf{R}^2$ یک گردهٔ مستدیر است، و در $\mathbf{R}^3$ کرهٔ جامدی است که مرکز آن $\mathbf{a}$ و شعاع آن r هستند.

۵.۳ تعریف نقطهٔ درونی. فرض کنیم S یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ باشد، و $\mathbf{a} \in S$. $\mathbf{a}$ را یك نقطهٔ درونی S می‌نامیم در صورتی که یك گوی n بعدی باز به مرکز $\mathbf{a}$ وجود داشته باشد بقسمی که هر نقطهٔ این گوی عضو S باشد.

با بیان دیگر می‌توان گفت که، هر نقطهٔ درونی S مانند $\mathbf{a}$ را می‌توان با یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a}) \subseteq S$ احاطه کرد. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های درونی S را درون S نامیده با نماد $\operatorname{int} S$ نشان می‌دهیم. گاهی هرمجموعه را که حاوی گویی به

مرکز $\mathbf{a}$ باشد یک همسایگی $\mathbf{a}$ می‌نامیم.

۶.۳ تعریف مجموعهٔ باز. مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را باز می‌نامیم در صورتی که هر نقطهٔ S یك نقطهٔ درونی باشد.

تبصره. مجموعهٔ S وقتی، و فقطوقتی، باز است که $S = \text{int}\, S$. (ر. ک. تمرین ۹.۳.)

چند مثال. در $\mathbf{R}^1$ ساده‌ترین‌نوع مجموعهٔ باز ناتهی بازهٔ باز است. اجتماع دو یا چند بازهٔ باز نیز مجموعه‌ای است باز. بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ مجموعه‌ای باز نیست، زیرا نقطه‌های انتهائی a و b نقطه‌های درونی بازه نیستند.

مثالهائی از مجموعه‌های باز در صفحه عبارتند از: درون یک گرده؛ حاصل‌ضرب دکارتی دو بازهٔ باز یک بعدی. باید توجه داشت که، اگر یک بازهٔ باز در $\mathbf{R}^1$ به‌عنوان یک زیرمجموعهٔ صفحه در نظر گرفته شود، دیگر باز نخواهد بود. در حقیقت، هیچ زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^1$ (بجز مجموعهٔ تهی) در $\mathbf{R}^2$ باز نیست، زیرا یک چنین مجموعه‌ای نمی‌تواند حاوی یک گوی ۲ بعدی باشد.

در $\mathbf{R}^n$ مجموعهٔ تهی باز است (چرا ؟)، همچنین تمام فضا، یعنی $\mathbf{R}^n$، نیز باز می‌باشد. هر گوی n بعدی باز مجموعهٔ بازی است در $\mathbf{R}^n$. حاصل ضرب دکارتی n بازهٔ باز یک بعدی $]a_1, b_1[$ ، . . . ، $]a_n, b_n[$ ، یعنی

$$]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[,$$

مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^n$ است. این مجموعه را یک بازهٔ باز n بعدی می‌نامیم. با فرض $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$، بازهٔ باز n بعدی بالا را به‌صورت $]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$ نشان می‌دهیم.

دو قضیهٔ زیرین نشان می‌دهند که چگونه با تعدادی مجموعهٔ باز مفروض در $\mathbf{R}^n$ می‌توان مجموعه‌های باز دیگری ساخت.

قضیهٔ ۷.۳ اجتماع هر دسته از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای است باز.

برهان. فرض کنیم F دسته‌ای از مجموعه‌های باز، و S اجتماع آنها باشد، یعنی $S = \bigcup_{A \in F} A$. همچنین $\mathbf{x} \in S$. در این صورت، $\mathbf{x}$ دست‌کم باید به یکی از مجموعه‌ها در F تعلق داشته باشد، مثلاً $\mathbf{x} \in A$. چون A باز است، یک گوی n-بعدی باز مانند $B(\mathbf{x})$ هست بقسمی که $B(\mathbf{x}) \subseteq A$. اما $A \subseteq S$، پس $B(\mathbf{x}) \subseteq S$، و در نتیجه $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ درونی S است. چون هر نقطهٔ S یک نقطهٔ درونی است، پس S باز خواهد بود.

ضیهٔ ۸.۳ اشتراك دسته‌ای متناهی از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای است باز.

برهان. قرار می‌دهیم $S = \bigcap_{k=1}^{m} A_k$، که در آن هر A_k باز باشد. فرض کنیم که $\mathbf{x} \in S$. (اگر S تهی باشد، چیزی برای اثبات نداریم.) در این صورت، به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, m$، $\mathbf{x} \in A_k$، و در نتیجه گوییی باز و n بعدی مانند $B(\mathbf{x}; r_k)$ هست که $B(\mathbf{x}; r_k) \subseteq A_k$. فرض کنیم که r مینیمم عددهای مثبت r_1، r_2، ...، r_m باشد. دراین صورت $S \supseteq B(\mathbf{x}; r) \ni \mathbf{x}$. یعنی، $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ درونی است، پس S باز می‌باشد.

بنابراین، دیده می‌شود که با تعدادی مجموعه‌های باز داده شده می‌توان، با اجتماع تعدادی دلخواه یا اشتراک تعدادی متناهی ازآنها، مجموعه‌های باز جدیدی ساخت. از سوی دیگر، باید توجه داشت که اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های باز همیشه باز نیست. مثلاً، اشتراک همهٔ بازه‌های باز به‌شکل $]-1/n, 1/n[$، که درآن $n = 1, 2, \ldots$، مجموعه‌ای است که فقط از ۰ تشکیل شده است.

۴.۳ نهاد مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^1$

در $\mathbf{R}^1$، اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های باز از هم جدا مجموعه‌ای است باز، و شایان توجه است که هر مجموعهٔ باز ناتهی در $\mathbf{R}^1$ را می‌توان از این راه بدست آورد. این بخش به برهانی از این مطلب اختصاص دارد.

ابتدا مفهوم بازهٔ مؤلف را معرفی می‌کنیم.

۹.۳ تعریف بازهٔ مؤلف. فرض کنیم S یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^1$ باشد. بازهٔ باز I (که ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد) را یك بازهٔ مؤلف S نامیم در صورتی که $I \subseteq S$، و بازهٔ باز دیگری مانند $J \neq I$ وجود نداشته باشد که $I \subseteq J \subseteq S$.

با بیان دیگر می‌توان گفت که، یک بازهٔ مؤلف S زیرمجموعهٔ حقیقی هیچ بازهٔ باز دیگری که محتوا در S باشد نیست.

قضیهٔ ۱۰.۳ هر نقطه از مجموعهٔ باز ناتهی S به یکی، و فقط به یکی، از بازه‌های مؤلف S تعلق دارد.

برهان. فرض کنیم که $x \in S$. در این صورت، x در بازهٔ بازی مانند I است که $I \subseteq S$. بازه‌هائی از این‌گونه بسیارند. اما «بزرگترین» آنها بازهٔ مؤلف مطلوب است. می‌توان ثابت کرد که هرگاه $I_x =]\,a(x), b(x)\,[$ بزرگترین این بازه‌ها باشد، آنگاه

$$a(x) = \inf \{a \mid]\,a, x\,[\subseteq S\}, \qquad b(x) = \sup \{b \mid]\,x, b\,[\subseteq S\}.$$

در اینجا ممکن است $a(x)$ مساوی $-\infty$، و $b(x)$ مساوی $+\infty$ باشد. واضح

است که بازهٔ بازی مانند J با خاصیت $I_x \subseteq J \subseteq S$ وجود ندارد، پس I_x یک بازهٔ مؤلف S است که حاوی نقطهٔ x می‌باشد. هرگاه J_x بازهٔ مؤلف دیگر S حاوی x باشد، آنگاه اجتماع $J_x \cup I_x$ بازه‌ای است باز که محتوا در S و حاوی هردوی I_x و J_x می‌باشد. در نتیجه، از تعریف بازهٔ مؤلف معلوم می‌شود که

$$I_x \cup J_x = I_x \text{ و } I_x \cup J_x = J_x\text{، پس } I_x = J_x.$$

قضیهٔ ۱۱.۳ (قضیهٔ نمایش برای مجموعه‌های باز بر خط حقیقی). هرمجموعهٔ بازناتهی مانند S در $\mathbf{R}^1$ مساوی اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های مؤلف از هم جدای S می‌باشد.

برهان. اگر $x \in S$، فرض می‌کنیم که I_x آن بازهٔ مؤلف S باشد که حاوی x است. واضح است که اجتماع همهٔ I_xها مساوی S است. هرگاه دو تا از این بازه‌ها، مثلاً I_x و I_y، نقطهٔ مشترکی داشته باشند، آنگاه اجتماع $I_x \cup I_y$ بازهٔ بازی است محتوا در S و حاوی I_x و I_y. پس $I_x \cup I_y = I_x$ و $I_x \cup I_y = I_y$، درنتیجه $I_x = I_y$. بنابراین، I_xها یک دستهٔ از هم‌جدا تشکیل می‌دهند.

حال باقی می‌ماند ثابت کنیم که آنها تشکیل یک دستهٔ شمارشپذیر می‌دهند. برای این منظور، فرض کنیم که $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ مجموعهٔ شمارشپذیر عددهای گویا باشد. در هر بازهٔ مؤلف مانند I_x تعدادی نامتناهی x_n وجود دارد، اما بین این x_nها فقط یکی زیرنویسش از همه کوچکتر است. اکنون تابع F را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر n کوچکترین زیرنویسی باشد که $x_n \in I_x$، قرار می‌دهیم $F(I_x) = n$.
این تابع یک به‌یک است، زیرا تساوی $F(I_x) = F(I_y) = n$ ایجاب می‌کند که x_n در I_x و I_y باشد، و از این نتیجه می‌شود که $I_x = I_y$. بنابراین، F تناظری یک به‌یک بین بازه‌های I_x و یک زیرمجموعهٔ عددهای صحیح مثبت ایجاد می‌کند، و برهان قضیه تمام خواهد بود.

تبصره. نمایش S به‌صورت بالا منحصر بفرد است. در حقیقت، هرگاه S به‌صورت اجتماع تعدادی بازهٔ باز از هم جدا باشد، آنگاه این بازه‌ها باید بازه‌های مؤلف S باشند. این مطلب بی‌درنگ از قضیهٔ ۳. ۱۰ نتیجه می‌شود.

هرگاه S یک بازهٔ باز باشد،آنگاه نمایش S فقط حاوی یک بازهٔ مؤلف، یعنی خود S، خواهد بود. بنابراین، یک بازهٔ باز در $\mathbf{R}^1$ را نمی‌توان به صورت اجتماع دو مجموعهٔ بازناتهی و از هم جدا نشان داد. این خاصیت را به این صورت نیز توصیف می‌کنند که یک بازهٔ بازهمبند است. در بخش ۱۶.۴، مفهوم همبندی

مجموعه‌ها در $\mathbf{R}^n$ بیشتر مورد بحث واقع خواهد شد.

۵.۳ مجموعه‌های بسته

۱۲.۳ تعریف مجموعهٔ بسته. مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را بسته می‌گوئیم در صورتی که متمم آن، یعنی $\mathbf{R}^n - S$، باز باشد.

چند مثال. بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ در $\mathbf{R}^1$ مجموعه‌ای است بسته. حاصل ضرب دکارتی n بازهٔ بستهٔ یک بعدی، یعنی

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

مجموعه‌ای است بسته در $\mathbf{R}^n$، که آن را یک بازهٔ بستهٔ n بعدی $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ می‌نامیم.

قضیهٔ زیرین، که نتیجه‌ای است از قضیه‌های ۷.۳ و ۸.۳، نشان می‌دهد که چگونه از تعدادی مجموعهٔ بستهٔ مفروض می‌توان مجموعه‌های بستهٔ دیگری ساخت.

قضیهٔ ۱۳.۳ اجتماع دسته‌ای متناهی از مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای است بسته، و اشتراک هر دستهٔ دلخواه از مجموعه‌های بسته هم مجموعه‌ای است بسته.

رابطهٔ دیگری بین مجموعه‌های باز و بسته در قضیهٔ آتی توصیف شده است.

قضیهٔ ۱۴.۳ هرگاه A باز، و B بسته باشد، آنگاه $A - B$ باز، و $B - A$ بسته است.

برهان. تنها کافی است توجه کنیم که $A - B = A \cap (\mathbf{R}^n - B)$، یعنی $A - B$ به‌صورت اشتراک دومجموعهٔ باز است. همچنین $B - A = B \cap (\mathbf{R}^n - A)$، یعنی $B - A$ به‌صورت اشتراک دومجموعهٔ بسته می‌باشد.

۶.۳ نقطه‌های چسبیده. نقطه‌های انباشتگی

مجموعه‌های بسته را نیز می‌توان برحسب نقطه‌های چسبیده و نقطه‌های انباشتگی توصیف کرد.

۱۵.۳ تعریف نقطهٔ چسبیده. فرض کنیم S یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$، و $\mathbf{x}$ نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ باشد، و $\mathbf{x}$ لزوماً در S نباشد. در این صورت، $\mathbf{x}$ را چسبیده به S نامیم در صورتی که هر گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ دست کم حاوی یك نقطه از S باشد.

چند مثال

۱. هرگاه $\mathbf{x} \in S$، آنگاه چون هرگوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ حاوی $\mathbf{x}$ است، پس $\mathbf{x}$ چسبیده به S خواهد بود.

۲. هرگاه S یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ باشد که از بالا کراندار است، آنگاه $\sup S$ چسبیده به S خواهد بود.

برخی نقاط چسبیده به Sاند زیرا هرگوی مانند $B(\mathbf{x})$ حاوی نقطه‌هائی در S است که متمایز از $\mathbf{x}$ هستند. این چنین نقطه‌ها را نقطه‌های انباشتگی می‌نامیم.

۱۶.۳ تعریف نقطهٔ انباشتگی. هرگاه $S \subseteq \mathbf{R}^n$ و $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$، آنگاه $\mathbf{x}$ را یک نقطهٔ انباشتگی S می‌نامیم در صورتی که هرگوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ حاوی دست‌کم یک نقطهٔ S متمایز از $\mathbf{x}$ باشد.

با بیان دیگر می‌توان گفت که، $\mathbf{x}$ وقتی، و فقط وقتی، یک نقطهٔ انباشتگی S است که $\mathbf{x}$ چسبیده به $S - \{\mathbf{x}\}$ باشد. هرگاه $\mathbf{x} \in S$ ولی $\mathbf{x}$ نقطهٔ انباشتگی S نباشد، آنگاه $\mathbf{x}$ را یک نقطهٔ تنهای S می‌نامیم.

چند مثال

۱. ۰ یک نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ عددهائی به‌شکل $۱/n$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ است.
۲. هرعدد حقیقی نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ عددهای گویا است.
۳. هر نقطهٔ بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ نقطهٔ انباشتگی بازهٔ باز $]a, b[$ است.

قضیهٔ ۱۷.۳ هرگاه $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ انباشتگی S باشد، آنگاه هرگوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S خواهد بود.

برهان. فرض کنیم که چنین نباشد؛ یعنی، یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ وجود داشته باشد بقسمی که حاوی تنها تعدادی متناهی نقطهٔ S متمایز از $\mathbf{x}$، مانند $\mathbf{a}_۱$، $\mathbf{a}_۲$، $\ldots$، $\mathbf{a}_m$، باشد. هرگاه r مینیمم عددهای مثبت

$$||\mathbf{x} - \mathbf{a}_۱||, \qquad ||\mathbf{x} - \mathbf{a}_۲||, \qquad \ldots, \qquad ||\mathbf{x} - \mathbf{a}_m||$$

باشد، آنگاه $B(\mathbf{x}; r/۲)$ گویی است n بعدی حول $\mathbf{x}$ که حاوی هیچ نقطهٔ S متمایز از $\mathbf{x}$ نیست، و این خلاف فرض قضیه است.

از قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود که، خصوصاً، یک مجموعه نمی‌تواند دارای نقطهٔ انباشتگی باشد مگر آن که اول حاوی تعدادی نامتناهی نقطه باشد. اما، عکس این مطلب عموماً درست نیست. مثلاً، مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت، یعنی $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$، مجموعه‌ای است نامتناهی بدون نقطهٔ انباشتگی. در یکی از بخشهای آتی نشان خواهیم داد که مجموعه‌های نامتناهی محتوا در یک گوی n بعدی همواره نقطهٔ انباشتگی دارند. این مطلب نتیجهٔ مهمی است که به نام قضیهٔ بولتزانو ــ وایراشتراس[1]

1. Bolzano—Weierstrass

معروف است.

۷.۳ مجموعه‌های بسته و نقطه‌های چسبیده

متمم یک مجموعهٔ باز را بنا برتعریف مجموعه‌ای بسته نامیدیم. قضیهٔ زیرمجموعه‌های بسته را بطریقی دیگر توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۱۸.۳ مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ وقتی، و فقط وقتی، بسته است که حاوی همهٔ نقطه‌های چسبیدهٔ خود باشد.

برهان. فرض کنیم که S بسته، و $\mathbf{x}$ چسبیده به S باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\mathbf{x} \in S$. فرض می‌کنیم $\mathbf{x} \notin S$ و تناقضی بدست می‌آوریم. هرگاه $\mathbf{x} \notin S$، آنگاه $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - S$ و، چون $\mathbf{R}^n - S$ بازاست، گویی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ جزء $\mathbf{R}^n - S$ وجود دارد. پس $B(\mathbf{x})$ حاوی نقطه‌ای از S نیست، و این متناقض این است که $\mathbf{x}$ چسبیده به S می‌باشد.

برای اثبات عکس مطلب بالا، فرض می‌کنیم S حاوی همهٔ نقطه‌های چسبیدهٔ خود باشد، و نشان می‌دهیم که S بسته است. فرض می‌کنیم که $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - S$. در این صورت $\mathbf{x} \notin S$، پس $\mathbf{x}$ چسبیده به S نیست. ازاین روی، گویی مانند $B(\mathbf{x})$ هست که اشتراکش با S تهی است، پس $B(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{R}^n - S$. بنابراین $\mathbf{R}^n - S$ باز است، و در نتیجه S بسته خواهد بود.

۱۹.۳ تعریف بست. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های چسبیدهٔ مجموعهٔ S را بست S نامیم و با نماد $\bar{S}$ نشان می‌دهیم.

چون هر نقطهٔ S چسبیده به S است، پس همواره $S \subseteq \bar{S}$. از قضیهٔ ۱۸.۳ برمی‌آید که رابطهٔ شمول مخالف آن، یعنی $\bar{S} \subseteq S$، وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که S بسته باشد. بنابراین:

قضیهٔ ۲۰.۳ مجموعهٔ S وقتی، و فقط وقتی، بسته است که $S = \bar{S}$.

۲۱.۳ تعریف مجموعهٔ مشتق. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های انباشتگی مجموعهٔ S را مجموعهٔ مشتق S نامیده بانماد S' نشان می‌دهیم.

واضح است که به‌ازای هر مجموعه مانند S، $\bar{S} = S \cup S'$. از این روی، بنا برقضیهٔ ۲۰.۳، S وقتی، و فقط وقتی، بسته است که $S' \subseteq S$. این مطلب با بیان دیگر به صورت قضیهٔ زیر در می‌آید:

قضیهٔ ۲۲.۳ مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ وقتی، و فقط وقتی، بسته است که حاوی همهٔ نقطه‌های انباشتگی خود باشد.

۸.۳ قضیهٔ بولتزانو ـ وایراشتراس

۲۳.۳ تعریف مجموعهٔ کراندار. مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را کراندار گوئیم درصورتی که به‌ازای عددی مانند $r > ۰$ و نقطه‌ای مانند $\mathbf{a}$ در $\mathbf{R}^n$، این مجموعه کاملاً در گوی n بعدی $B(a; r)$ قرار گیرد.

قضیهٔ ۲۴.۳ (بولتزانو ـ وایراشتراس). هرگاه مجموعهٔ کراندار S در $\mathbf{R}^n$ حاوی تعدادی نامتناهی نقطه باشد، آنگاه S دست‌کم یك نقطهٔ انباشتگی در $\mathbf{R}^n$ دارد.

برهان. برای آماده کردن زمینه‌ای برای اثبات، ابتدا قضیه را برای $\mathbf{R}^۱$ ثابت می‌کنیم. گوئیم چون S کراندار است، پس S جزء بازه‌ای مانند $[-a, a]$ است. دست کم یکی از دو زیربازهٔ $[-a, ۰]$ یا $[۰, a]$ حاوی یک زیرمجموعهٔ نامتناهی S است. یک چنین زیربازه را $[a_۱, b_۱]$ می‌نامیم. $[a_۱, b_۱]$ را به دوبازهٔ متساوی تقسیم نموده، بازه‌ای مانند $[a_۲, b_۲]$ بدست می آوریم که حاوی یک زیرمجموعهٔ نامتناهی S باشد، و عمل را همچنان ادامه می‌دهیم. در نتیجه، دسته‌ای شمارشپذیر بازه بدست خواهدآمد که درازای n مین آنها، یعنی $[a_n, b_n]$، مساوی $a/۲^{n-۱}$ است. واضح است که sup نقطه های انتهائی چپ بازه‌ها، یعنی a_nها، باید مساوی inf نقطه‌های انتهائی راست، یعنی b_nها، باشد. [چرا این دو متساویند؟] فرض کنیم این مقدار مشترک x باشد. x یک نقطهٔ انباشتگی S است، زیرا اگر r عدد مثبتی باشد، بمجردی که n به قدر کافی بزرگ شود که $b_n - a_n < r/۲$، بازهٔ $[a_n, b_n]$ محتوا در $B(x; r)$ خواهد بود. بازهٔ $B(x; r)$ حاوی نقطه‌ای از S متمایز با x است، و در نتیجه x نقطهٔ انباشتگی S می‌باشد. پس، قضیه در مورد $\mathbf{R}^۱$ برقرار است. (توجه کنید که نقطهٔ انباشتگی x ممکن است متعلق به S باشد یا نباشد.)

اکنون اندیشه‌هائی را که درمورد $\mathbf{R}^۱$ بکاربردیم وسعت می‌دهیم تا قضیه‌را در مورد $\mathbf{R}^n$ $(n > ۱)$ ثابت کنیم. (می‌توان با مراجعه به شکل ۱.۳ نحوهٔ اثبات قضیه را در $\mathbf{R}^۲$ تجسم نمود.)

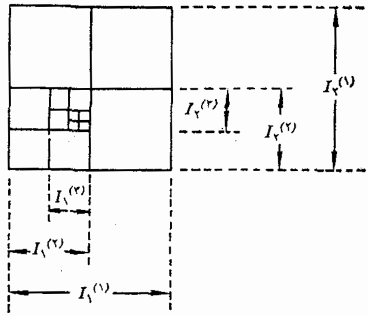
چون S کراندار است، S در یک گوی n بعدی مانند $B(۰; a)$ $(a > ۰)$ واقع است، بنابراین جزء بازهٔ n بعدی $J_۱$، که با نامساویهای زیرین‌تعریف می‌شود

$$-a \leqslant x_k \leqslant a \quad (k = ۱, ۲, \ldots, n),$$

نیز هست. در این‌جا $J_۱$ عبارت است از حاصل ضرب دکارتی

$$J_۱ = I_۱^{(۱)} \times I_۲^{(۱)} \times \cdots \times I_n^{(۱)};$$

یعنی، مجموعهٔ نقطه‌هائی مانند $(x_۱, \ldots, x_n)$ است، که در آن $x_k \in I_k^{(۱)}$، و



شکل ۱.۳

هر $I_k^{(1)}$ بازهٔ یک بعدی $-a \leqslant x_k \leqslant a$ می‌باشد. هر بازهٔ $I_k^{(1)}$ را می‌توان به دو زیربازهٔ $I_{k,1}^{(1)}$ و $I_{k,2}^{(1)}$ تقسیم کرد، که با نامساویهای زیرین تعریف شوند:

$$I_{k,1}^{(1)} : -a \leqslant x_k \leqslant 0 \quad ; \quad I_{k,2}^{(1)} : 0 \leqslant x_k \leqslant a \, .$$

حال، همهٔ حاصل ضربهای دکارتی ممکن به شکل

$$I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,k_n}^{(1)} \tag{آ}$$

را، که در آن هر k_i مساوی ۱ یا ۲ باشد، در نظر می‌گیریم. تعداد این نوع حاصل‌ضربها دقیقاً 2^n تا می‌باشد. البته هریک از این حاصل‌ضربها بازه‌ای n بعدی است. اجتماع این 2^n بازه همان بازهٔ اولی J_1 است که حاوی S بود. از این روی، دست‌کم یکی از این 2^n بازه در (آ) باید حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S باشد. یکی از این گونه بازه‌ها را J_2 می‌نامیم. J_2 را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$J_2 = I_1^{(2)} \times I_2^{(2)} \times \cdots \times I_n^{(2)},$$

که در آن هر $I_k^{(2)}$ یکی از زیربازه‌های $I_k^{(1)}$ است که درازایش مساوی a است. اکنون عملی را که در مورد J_1 انجام دادیم برای J_2 تکرار می‌کنیم، یعنی با تقسیم هر بازهٔ $I_k^{(2)}$ به دو قسمت متساوی، به بازه‌ای n بعدی مانند J_3 دست می‌یابیم که حاوی یک زیرمجموعهٔ نامتناهی S است. اگر این عمل را بهمین نحو تکرار کنیم، دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی مانند J_1 ، J_2 ، J_3 ، . . . بدست خواهد آمد، که درآن بازهٔ mم، یعنی J_m، حاوی یک زیرمجموعهٔ نامتناهی S است، ومی‌توان آن را به شکل زیرین نشان داد:

$J_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$، که در آن $I_k^{(m)} \subseteq I_k^{(1)}$.
اگر بنویسیم

$$I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}],$$

داریم

$$b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

بنابراین، به‌ازای هر مقدار ثابت k، sup همهٔ نقطه‌های انتهائی چپ، یعنی $a_k^{(m)}$ ها $(m = 1, 2, \ldots)$، باید مساوی inf همهٔ نقطه‌های انتهائی راست، یعنی $b_k^{(m)}$ ها $(m = 1, 2, \ldots)$ باشد. فرض می‌کنیم t_k مقدار مشترک این دو باشد. حال ثابت می‌کنیم که $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ یک نقطهٔ انباشتگی S است. برای پی بردن به این مطلب، بازه‌ای n بعدی مانند $B(\mathbf{t}; r)$ را اختیار می‌کنیم. البته، نقطهٔ $\mathbf{t}$ به همهٔ بازه‌های J_1 ، J_2 ، . . . ، که در بالا ساخته شدند، تعلق دارد، و وقتی m چنان باشد که $a/2^{m-2} < r/2$، این همسایگی شامل J_m است. اما چون J_m حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S است، پس $B(\mathbf{t}; r)$ نیز حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S خواهد بود. یعنی $\mathbf{t}$ نقطهٔ انباشتگی S می‌باشد.

۹.۳ قضیهٔ اشتراکی کانتور

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ بولتزانو ــ وایراشتراس، قضیهٔ اشتراکی کانتور را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۲۵.۳ فرض کنیم که $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های ناتهی در $\mathbf{R}^n$ باشند بقسمی که:

یکم) $Q_{k+1} \subseteq Q_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$؛
دوم) هر Q_k بسته، و Q_1 کراندار باشد.

دراین صورت اشتراک $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ بسته و ناتهی است.

برهان. قرارمی‌دهیم $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. در این صورت، بنا برقضیهٔ ۱۳.۳، S بسته است. برای آن‌که نشان دهیم S ناتهی است، نقطه‌ای را مانند $\mathbf{x}$ در S نشان می‌دهیم. می‌توان فرض کرد که هر Q_k حاوی تعدادی نامتناهی نقطه باشد؛ زیرا که جز در این‌صورت اثبات قضیه واضح است. حال دستهٔ نقطه‌های متمایز

$$A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\},$$

که در آن $\mathbf{x}_k \in Q_k$، را تشکیل می‌دهیم. چون A مجموعه‌ای است نامتناهی و محتوا

درمجموعهٔ کراندار Q_1، پس A نقطهٔ انباشتگی مانند $\mathbf{x}$ دارد. با اثبات این که به‌ازای هر k، $\mathbf{x} \in Q_k$، نشان می‌دهیم که $\mathbf{x} \in S$. چون هر Q_k بسته است، کافی است نشان دهیم که $\mathbf{x}$ نقطهٔ انباشتگی هر Q_k است. چون هرهمسایگی $\mathbf{x}$ حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از A است، وچون همهٔ نقطه‌های A جز (احتمالاً) تعدادی متناهی از آنها متعلق به Q_k هستند، پس هر همسایگی $\mathbf{x}$ نیز حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از Q_k خواهد بود. بنابراین، $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ انباشتگی Q_k است و حکم برقرار است.

۱۰.۳ قضیهٔ پوششی لیندلف[1]

در این بخش مفهوم پوشش یک مجموعه را معرفی، و قضیهٔ پوششی لیندلف راثابت می‌کنیم. فایدهٔ این مفهوم بعداً معلوم خواهد شد.

۲۶.۳ تعریف پوشش. دسته‌ای از مجموعه‌ها مانند F را یک پوشش مجموعهٔ مفروض S نامیم در صورتی که $S \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. همچنین می‌گوئیم که دستهٔ F مجموعهٔ S را می‌پوشاند. هرگاه F دسته‌ای از مجموعه‌های باز باشد، آنگاه F یک پوشش باز S نامیده می‌شود.

چند مثال

۱. دستهٔ همهٔ بازه‌ها به‌شکل $2/n < x < 1/n$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ یک پوشش باز بازهٔ $0 < x < 1$ است. این مثالی است از یک پوشش شمارشپذیر.

۲. خط حقیقی $\mathbf{R}^1$ با دستهٔ همهٔ بازه‌های باز $]a, b[$ پوشیده می‌شود. این پوشش شمارشپذیر نیست. ولی، حاوی یک پوشش شمارشپذیر $\mathbf{R}^1$ است؛ یعنی، همهٔ بازه‌ها به شکل $]n, n+2[$، که در آن n همهٔ عددهای صحیح را بخود بگیرد، یک پوشش شمارشپذیر $\mathbf{R}^1$ خواهد بود.

۳. فرض می‌کنیم که $S = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$. دستهٔ F مرکب از همهٔ گرده‌های مستدیر به مرکز (x, x) و شعاع x، که در آن $x > 0$، یک پوشش S است. این پوشش شمارشپذیر نیست. ولی، حاوی یک پوشش شمارشپذیر S می‌باشد؛ یعنی، دستهٔ همهٔ گرده‌های عضو F که به‌ازای x های گویا حاصل می‌شوند یک پوشش شمارشپذیر S خواهد بود. (ر. ک. تمرین ۱۸.۳.)

بنا بر قضیهٔ پوششی لیندلف، هر پوشش باز مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ حاوی یک زیر دستهٔ شمارشپذیری است که آن نیز S را می‌پوشاند. برای اثبات این قضیه از نتیجهٔ مقدماتی زیر استفاده خواهیم کرد:

---
1. Lindelof

قضیهٔ ۲۷.۳ فرض کنیم که $G = \{A_1, A_2, \ldots\}$ عبارت باشد از دستهٔ شمارشپذیر همهٔ گویهای n بعدی که شعاعشان و نیز مختصات مرکزشان گویا باشند. همچنین $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ و S مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^n$ حاوی $\mathbf{x}$ باشد. در این صورت، دست کم یکی از گویهای n بعدی در G حاوی $\mathbf{x}$ است و محتوا در S می‌باشد. یعنی،

$$\text{به‌ازای بعضی از } A_k \text{ ها در } G\text{، } \mathbf{x} \in A_k \subseteq S.$$

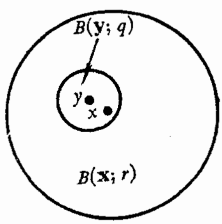
برهان. بنا برقضیهٔ ۲۷.۲، دستهٔ G شمارشپذیر است. هرگاه $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ و S مجموعهٔ بازی حاوی $\mathbf{x}$ باشد، آنگاه گویی n بعدی مانند $B(\mathbf{x}; r) \subseteq S$ وجود دارد. نقطه‌ای مانند $\mathbf{y}$ در S «نزدیک» $\mathbf{x}$ بقسمی خواهیم یافت که مختصات $\mathbf{y}$ همه گویا باشند. سپس با استفاده از این نقطه به‌عنوان مرکز، یک همسایگی در G جزء $B(\mathbf{x}; r)$ را بقسمی می‌یابیم که حاوی $\mathbf{x}$ باشد. برای این منظور می‌نویسیم

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

و فرض می کنیم به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$، y_k عدد گویائی باشد بقسمی که $|y_k - x_k| < r/(4n)$. در این صورت،

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leqslant |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| < \frac{r}{4}.$$

حال، فرض کنیم q عدد گویائی باشد بقسمی که $r/4 < q < r/2$. دراین‌صورت، $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}; q)$ و $B(\mathbf{y}; q) \subseteq B(\mathbf{x}; r) \subseteq S$. اما $B(\mathbf{y}; q) \in G$، و در نتیجه حکم ثابت است. (برای حالت $\mathbf{R}^2$، ر. ک. شکل ۲.۳.)



شکل ۲.۳

قضیهٔ ۲۸.۳ (قضیهٔ پوششی لیندلف). فرض کنیم که $A \subseteq \mathbf{R}^n$ و F یك پوشش باز A باشد. در این صورت، یک زیردستهٔ شمارشپذیر F هست که آن نیز A را می‌پوشاند.

برهان. فرض کنیم که $G = \{A_1, A_2, \ldots\}$ دستهٔ شمارشپذیر همهٔ گویهای n-بعدی باشد که مختصات مرکز و شعاعشان گویا می‌باشند. به کمک G یک زیردستهٔ شمارشپذیر F را بقسمی استخراج می‌کنیم که A را بپوشاند.

بدین منظور، فرض می‌کنیم که $\mathbf{x} \in A$. دراین صورت، مجموعهٔ بازی مانند S در F هست بقسمی که $\mathbf{x} \in S$. با توجه به قضیهٔ ۲۷.۳ معلوم می‌شود که یک گوی n-بعدی مانند A_k در G هست بقسمی که $\mathbf{x} \in A_k \subseteq S$. البته، متناظر هر S تعدادی نامتناهی ازاین A_kها وجود دارند. اما، ما فقط یکی از اینها، مثلاً آن که زیرنویسش از همه کوچکتر است، انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم این کوچکترین زیرنویس $m = m(\mathbf{x})$ باشد. در این صورت داریم $\mathbf{x} \in A_{m(\mathbf{x})} \subseteq S$. وقتی $\mathbf{x}$ روی همهٔ عنصرهای A تغییر کند، مجموعهٔ همهٔ گویهای n بعدی $A_{m(\mathbf{x})}$ دسته‌ای است شمارشپذیر از مجموعه‌های باز که A را می‌پوشانند. برای بدست آوردن یک زیردستهٔ شمارشپذیر F که‌آن نیز A را بپوشاند، کافی‌است به‌هرمجموعهٔ $A_{k(\mathbf{x})}$ یکی از مجموعه‌های در F مانند S را که حاوی $A_{k(\mathbf{x})}$ است مربوط کنیم. با این، برهان قضیه تمام می‌شود.

۱۱.۳ قضیهٔ پوششی هاینه ـ بورل[1]

بنا بر قضیهٔ پوششی لیندلف، از هر پوشش باز مجموعهٔ دلخواه A در $\mathbf{R}^n$ می‌توان پوششی شمارشپذیر برای A استخراج کرد. قضیهٔ هاینه ـ بورل می‌گوید که اگر، علاوه‌براین، بدانیم که A بسته و کراندار است، می‌توان این پوشش استخراج شده را به یک پوشش متناهی تحویل کرد. در اثبات قضیهٔ هاینه ـ بورل از قضیهٔاشتراکی کانتور استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۲۹.۳ (هاینه ـ بورل). فرض کنیم F یك پوشش باز مجموعهٔ بسته و کراندار A در $\mathbf{R}^n$ باشد. در این صورت، یك زیر دستهٔ متناهی F نیز A را می‌پوشاند.

برهان. بنا بر قضیهٔ ۲۸.۳ ، یک زیردستهٔ شمارشپذیر F، مانند $\{I_1, I_2, \ldots\}$، A را می‌پوشاند. به‌ازای $m \geqslant 1$، اجتماع متناهی

$$S_m = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$$

را در نظر می‌گیریم. چون هر S_m اجتماع تعدادی مجموعهٔ باز است، خود نیز باز خواهد بود. نشان می‌دهیم که به‌ازای مقداری از m، S_m مجموعهٔ A را می‌پوشاند.

برای این منظور، مجموعهٔ $\mathbf{R}^n - S_m$ را، که بسته است، در نظر می‌گیریم. دستهٔ

1. Heine-Borel

شمارشپذیر $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ از مجموعه‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $Q_1 = A$، و به‌ازای $m > 1$،

$$Q_m = A \cap (\mathbf{R}^n - S_m).$$

یعنی، Q_m عبارت است از مجموعهٔ آن نقطه‌هائی از A که در خارج S_m قرار دارند. هرگاه بتوانیم نشان دهیم که به‌ازای مقداری از m مجموعهٔ Q_m تهی است، آنگاه ثابت کرده‌ایم که به‌ازای این مقدار m هیچ نقطهٔ A خارج S_m نیست؛ با بیان دیگر می‌توان گفت که، نشان داده‌ایم که یکی از S_mها مجموعهٔ A را می‌پوشاند.

Q_mها دارای خاصیتهای زیرند: چون Q_m اشتراک مجموعهٔ بستهٔ A و مجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}^n - S_m$ است، پس هر Q_m بسته است. چون S_mها صعودیند، پس Q_mها نزولی می‌باشند؛ یعنی $Q_{m+1} \subseteq Q_m$. از این که هر Q_m زیرمجموعهٔ A است معلوم می‌شود که همهٔ Q_m ها کراندارند. بنابراین، اگر هیچ یک از Q_m ها تهی نباشد، می‌توان قضیهٔ اشتراکی کانتور را بکار برده نتیجه گرفت که اشتراک $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ نیز تهی نیست. یعنی، نقطه‌ای در A وجود دارد که درهمهٔ Q_mها، و در نتیجه درخارج همهٔ S_m ها است. اما چنین وضعی ممکن نیست، زیرا $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. بنابراین، بعضی از Q_m ها باید تهی باشند، و برهان تمام است.

۱۲.۳ فشردگی در $\mathbf{R}^n$

هم‌اکنون ملاحظه شد که هرگاه مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ بسته و کراندار باشد، آنگاه هرپوشش باز S را می‌توان به‌یک پوشش متناهی تحویل کرد. طبیعی است جستجو کنیم که‌آیا، غیر از مجموعه‌هائی که بسته و کراندارند، مجموعه‌های دیگری وجود دارند که دارای خاصیت یاد شده باشند؟ یک چنین مجموعه‌هائی را فشرده خواهیم نامید.

۳۰.۳ تعریف مجموعهٔ فشرده. مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را وقتی، و فقط وقتی، فشرده نامیم که هرپوشش باز S حاوی یک زیرپوشش متناهی باشد؛ یعنی، زیردسته‌ای متناهی که آن نیز S را بپوشاند.

بنا برقضیهٔ هاینه ـ بورل، هرمجموعهٔ بسته و کراندار در $\mathbf{R}^n$ فشرده است. اکنون عکس این نتیجه را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۳۱.۳ فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ باشد. در این صورت سه گزارهٔ زیرین هم‌ارز یکدیگرند:

آ) S فشرده است؛

ب) S بسته و کراندار است؛
ج) هرزیرمجموعهٔ نامتناهی S دارای نقطهٔ انباشتگی در S می‌باشد.

برهان. همان طور که در بالا اشاره شد، (آ) از (ب) نتیجه می‌شود. اگر ثابت کنیم که (ب) از (آ)، (ج) از (ب)، و (ب) از (ج) نتیجه می‌شوند، هرسه گزارهٔ بالا هم‌ارز خواهند بود.

فرض کنیم (آ) برقرار باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که S کراندار است. نقطه‌ای مانند $\mathbf{p}$ در S اختیار می‌کنیم. دستهٔ گویهای n بعدی $B(\mathbf{p}; k)$، $k = ۱, ۲, \ldots$، یک پوشش باز S است. چون S فشرده است، پس یک زیردستهٔ متناهی‌آن نیز S را می‌پوشاند و در نتیجه S کراندار است.

اکنون ثابت می‌کنیم که S بسته است. فرض‌کنیم S بسته نباشد. دراین‌صورت، S یک نقطهٔ انباشتگی مانند $\mathbf{y}$ دارد بقسمی که $\mathbf{y} \notin S$. اگر $\mathbf{x} \in S$، قرار می‌دهیم $r_{\mathbf{x}} = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||/۲$. چون $\mathbf{y} \notin S$، پس هر $r_{\mathbf{x}}$ مثبت است و دستهٔ

$$\{B(\mathbf{x}; r_{\mathbf{x}}) \mid \mathbf{x} \in S\}$$

یک پوشش باز S خواهد بود. با توجه به‌فشردگی S، معلوم می‌شود که تعدادی متناهی از این همسایگیها S را می‌پوشانند، مثلاً

$$S \subseteq \bigcup_{k=۱}^{p} B(\mathbf{x}_k; r_k).$$

فرض کنیم که r مینیمم شعاعهای $r_۱$، $r_۲$، ...، r_p باشد. در این صورت، بسادگی ثابت می‌شود که گوی $B(\mathbf{y}; r)$ نقطهٔ مشترکی با هیچ یک از گویهای $B(\mathbf{x}_k; r_k)$ ندارد. در واقع، هرگاه $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}; r)$، آنگاه $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| < r \leqslant r_k$، و با توجه به‌نامساوی مثلثی، داریم $||\mathbf{y} - \mathbf{x}_k|| \leqslant ||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| + ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||$، پس

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|| \geqslant ||\mathbf{y} - \mathbf{x}_k|| - ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = ۲r_k - ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| > r_k.$$

از این روی $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{x}_k; r_k)$. بنابراین $S \cap B(\mathbf{y}; r)$ تهی است، و این ناقض‌آن است که $\mathbf{y}$ نقطهٔ انباشتگی S باشد. این تناقض نشان می‌دهد که S بسته است، و درنتیجه (ب) از (آ) نتیجه می‌شود.

فرض کنیم (ب) برقرار باشد. در این حالت (ج) را می‌توان بی‌درنگ نتیجه گرفت، زیرا هرگاه T یک زیرمجموعهٔ نامتناهی S باشد، آنگاه T کراندار است (چون S کراندار است)، و در نتیجه، با توجه به‌قضیهٔ بولتزانو-وایراشتراس، T یک نقطهٔ انباشتگی مانند $\mathbf{x}$ دارد. $\mathbf{x}$ نقطهٔ انباشتگی S نیز هست. چون S بسته است، پس $\mathbf{x} \in S$. بنابراین، (ب) حکم (ج) را ایجاب می‌کند.

فرض کنیم (ج) برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که (ب) نیز برقرار است. گوئیم هرگاه S بی‌کران باشد، آنگاه به‌ازای هر $m > 0$، نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}_m$ در S هست بقسمی که $\|\mathbf{x}_m\| > m$. دستهٔ $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ یک زیرمجموعهٔ نامتناهی S می‌باشد. پس T، بنابر (ج)، دارای یک نقطهٔ انباشتگی مانند $\mathbf{y}$ در S خواهد بود. اما به‌ازای $m > 1 + \|\mathbf{y}\|$، داریم

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{x}_m\| - \|\mathbf{y}\| > m - \|\mathbf{y}\| > 1,$$

و این ناقض آن است که $\mathbf{y}$ نقطهٔ انباشتگی T باشد. این ثابت می‌کند که S کراندار است.

برای اتمام برهان باید نشان داد که S بسته است. فرض کنیم که $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ انباشتگی S باشد. چون هرهمسایگی $\mathbf{x}$ حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S است، می‌توان با درنظرگرفتن همسایگیهای $B(\mathbf{x}; 1/k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ مجموعه‌ای شمارشپذیر از نقطه‌های متمایز، مانند $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$، محتوا در S بدست آورد، بقسمی که $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}; 1/k)$. نقطهٔ $\mathbf{x}$ نقطهٔ انباشتگی T نیز هست. چون T یک زیر مجموعهٔ نامتناهی S است، بنابر قسمت (ج)، T باید یک نقطهٔ انباشتگی در S داشته باشد. پس اگر نشان دهیم که $\mathbf{x}$ تنها نقطهٔ انباشتگی T است، قضیه اثبات شده است.

برای این کار، فرض می‌کنیم که $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. در این صورت، بنابر نامساوی مثلثی،

اگر $\mathbf{x}_k \in T$، $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_k\| + 1/k$.

اگر k_0 راآن‌قدر بزرگ اختیار کنیم که به‌ازای هر $k \geqslant k_0$، $1/k < \frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$، آخرین نامساوی بالا به‌صورت $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_k\| > \frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$ درمی‌آید. این نشان می‌دهد که اگر $r = \frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$، به‌ازای $k \geqslant k_0$، $\mathbf{x}_k \notin B(\mathbf{y}; r)$. ازاین روی، $\mathbf{y}$ نمی‌تواند یک نقطهٔ انباشتگی T باشد. پس برهان این که (ب) از (ج) نتیجه می‌شود تمام است.

۱۳.۳ فضاهای متری

برهانهای بعضی از قضیه‌های این فصل فقط به‌چند خاصیت فاصله بین نقاط بستگی دارند نه به‌این که نقطه‌ها در $\mathbf{R}^n$ هستند. با مطالعهٔ این خاصیتهای فاصله به‌طور مجرد می‌توان به‌مفهوم فضای متری دست یافت.

۳۲.۳ تعریف فضای متری. یک فضای متری عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی از

چیزها (به‌نام نقطه‌ها) مانند M به‌انضمام تابعی مانند d از $M \times M$ به $\mathbf{R}$ (به نام متر فضا)، که در چهار خاصیت زیرین به‌ازای هر x، y و z در M صدق کند:

۱. $d(x, x) = 0$.
۲. اگر $x \neq y$، $d(x, y) > 0$.
۳. $d(x, y) = d(y, x)$.
۴. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

عدد نامنفی $d(x, y)$ را فاصله از x تا y می‌توان انگاشت. با این اصطلاح، معانی شهودی خاصیتهای ۱ تا ۴ روشن مـی‌شوند. خاصیت ۴ نامساوی مثلثی نام دارد.

در تعریف فضای متری، M و d هردو نقشی دارند. بـرای تأکید این مطلب گاهی یک فضای متری را با نماد (M, d) نشان می‌دهیم.

چند مثال

۱. $M = \mathbf{R}^n$؛ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. ایـن متر را متر اقلیدسی نامند. فـرض براین است که در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$، متر همواره متـر اقلیدسی است مگر آن‌که صریحاً متر دیگری را برای‌آن یاد کرده باشیم.

۲. $M = \mathbf{C}$ (صفحهٔ مختـلط)؛ $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. $\mathbf{C}$، به‌عنوان یک فـضای متری، همـان فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^2$ است، زیـرا نقاط هردو و نیز متر هـردو یکی است.

۳. فـرض می‌کنیم M مجموعه‌ای بـاشد نـاتهی و دلخواه؛ در آن اگـر $x = y$، $d(x, y) = 0$، و اگـر $x \neq y$، $d(x, y) = 1$. این متـر را متر مجزا، و (M, d) را یک فضای متری مجزا می‌نامند.

۴. هـرگاه (M, d) یک فضـای متری، و S یک زیـرمجموعهٔ ناتهی M بـاشد، آنگـاه (S, d) نیز فضائـی است متری با همان متر یا، بـا بیانـی دقیقتر، متر فضای اخـیر تحدیـد d به $S \times S$ مـی باشد. این متر را گاهـی مـتر نسبی القـا شده به‌وسیلهٔ d بر S، و S را یک زیر فضای متری M مـی‌نامند. مثـلاً، مجموعـهٔ عددهـای گویا، یعنی $\mathbf{Q}$، با متر $d(x, y) = |x - y|$ تشکیل یک زیرفضای متری $\mathbf{R}$ را می‌دهد.

۵. $M = \mathbf{R}^2$؛ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2}$، کـه در آن $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ و $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. فضای متری (M, d) یـک زیـر فضـای

متری فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^2$ نیست، زیرا مترآن با متر اقلیدسی تفاوت دارد.

۶. $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$، یعنی دایرهٔ یکه در $\mathbf{R}^2$؛ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ مساوی درازای کمان کوچکتری است که بر دایرهٔ یکه دو نقطهٔ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را به هم وصل می‌کند.

۷. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$، یعنی کرهٔ یکه در $\mathbf{R}^3$؛ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ مساوی درازای کمان کوچکتری است که در امتداد دایرهٔ عظیمه براین کره دو نقطهٔ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را به‌هم وصل می‌کند.

۸. $M = \mathbf{R}^n$؛ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$.

۹. $M = \mathbf{R}^n$؛ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

۱۴.۳ توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای در فضاهای متری

مفهومهای اساسی توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای را می‌توان به یک فضای متری دلخواه (M, d) وسعت داد.

اگر $a \in M$، بنا برتعریف، گوی $B(a; r)$ به مرکز a و به‌شعاع $r > 0$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ xهائی در M که

$$d(x, a) < r.$$

گاهی برای تأکید این که نقطه‌های این گوی در M هستند آن را با نماد $B_M(a; r)$ نشان می‌دهیم. اگر S یک زیرفضای متری M باشد، گوی $B_S(a; r)$ عبارت است از اشتراک S با گوی $B_M(a; r)$.

چند مثال. درفضای اقلیدسی $\mathbf{R}^1$، گوی $B(0; 1)$ مساوی بازهٔ باز $]-1, 1[$ است. در زیرفضای متری $S = [0, 1]$، گوی $B_S(0; 1)$ بازهٔ نیمباز $[0, 1[$ خواهد بود.

تبصره. اگر متر اقلیدسی نباشد، شکل هندسی یک گوی در $\mathbf{R}^n$ لزوماً «کروی» نخواهد بود. (ر. ک. تمرین ۲۷.۳.)

فرض‌کنیم که $S \subseteq M$. نقطهٔ a در S را یک نقطهٔ درونی S نامیم درصورتی که گویی مانند $B_M(a; r)$ جزء S وجود داشته باشد. مجموعهٔ نقطه‌های درونی S را درون S نامیده با نماد $\operatorname{int} S$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ S را در M باز نامیم درصورتی که همهٔ نقطه‌های‌آن نقطه‌های درونی باشند؛ S را در M بسته نامیم در صورتی که $M - S$ در M باز باشد.

چند مثال

۱. هر گوی مانند $B_M(a; r)$ در فضای متری M در M باز است.

۲. در یک فضای متری مجـزا مانند M هر زیرمجموعهٔ آن مانند S باز است. در-واقع، اگر $x \in S$، گوی $B(x; ۱/۲)$ فقط از نقطه‌های S تشکیل می‌شود (زیرا فقط حاوی x می‌باشد)، پس S بـاز است. بنابراین، هر زیرمجمـوعهٔ M بسته هم هست!

۳. در زیر فضـای متری $S = [۰, ۱]$ از فضای اقلیـدسی $\mathbf{R}^۱$، هر بـازه به شکل $[۰, x[$ یا $]x, ۱]$، که در آن $۱ > x > ۰$، مجموعهٔ بازی در S است. این مجموعه‌ها در $\mathbf{R}^۱$ باز نخواهند بود.

مثال ۳ نشان می‌دهد که اگر S یک زیـرفضای متری M بـاشد، مجموعه‌های باز در S لزوماً در M باز نیستند. قضیهٔ زیر رابطهٔ بین مجموعه‌هـای باز در M و در S را توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۳۳.۳ فرض‌کنیم (S, d) یک زیرفضای متری (M, d)، و X یک زیرمجموعهٔ S باشد. در این صورت، مجموعهٔ X در S وقتی، و فقط وقتی، باز است که به‌ازای مجموعهٔ بازی در M مانند A داشته باشیم

$$X = A \cap S.$$

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در M باشد. قرار می‌دهیم $X = A \cap S$. هرگاه $x \in X$، آنگاه $x \in A$، پس به‌ازای عددی مانند $r > ۰$، $B_M(x; r) \subseteq A$. ازاین‌روی $B_S(x; r) = B_M(x; r) \cap S \subseteq A \cap S = X$، یعنی X در S باز است.

برعکس، فرض‌کنیم که X در S باز باشد. نشان می‌دهیم که به‌ازای مجموعهٔ بازی مانند A در M، $X = A \cap S$. برای این کار گـوئیم به‌ازای هر x در X، گویی مانند $B_S(x; r_x)$ محتوا در X وجود دارد. چون $B_S(x; r_x) = B_M(x, r_x) \cap S$، پس هرگاه قرار دهیم

$$A = \bigcup_{x \in X} B_M(x; r_x),$$

آنگاه A در M باز است، و بسادگی معلوم می‌شود که $A \cap S = X$.

قضیهٔ ۳۴.۳ فرض کنیم (S, d) یک زیرفضای متری (M, d)، و Y یک زیرمجموعهٔ S باشد. دراین صورت، Y در S وقتی، و فقط وقتی، بسته است که به‌ازای مجموعهٔ بسته‌ای در M مانند B، $Y = B \cap S$.

برهان. هرگاه به‌ازای مجموعهٔ بسته‌ای در M مانند B، $Y = B \cap S$، آنگاه $B = M - A$، که درآن A در M باز خواهد بود، پس

$$Y = S \cap B = S \cap (M - A) = S - A;$$

یعنی Y در S بسته است.

برعکس، اگر Y در S بسته باشد، قرار می‌دهیم $X = S - Y$. در این صورت X در S باز می‌باشد، پس مجموعهٔ بازی مانند A در M هست که $X = A \cap S$، و

$$Y = S - X = S - (A \cap S) = S - A$$
$$= S \cap (M - A) = S \cap B,$$

که در آن $B = M - A$ در M بسته می‌باشد. پس برهان تمام است.

فرض کنیم که $S \subseteq M$. نقطه‌ای مانند x در M را یک نقطهٔ چسبیده به S نامیم درصورتی که هرگوی مانند $B_M(x; r)$ دست‌کم حاوی یک نقطهٔ S باشد. هرگاه x چسبیده به $S - \{x\}$ باشد، آنگاه x را نقطهٔ انباشتگی S می‌نامیم. بست S، یعنی $\bar{S}$، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های چسبیده به S. همچنین مجموعهٔ مشتق S، یعنی S'، عبارت است ازمجموعهٔ همهٔ نقطه‌های انباشتگی S. بنابراین، $\bar{S} = S \cup S'$.

قضیه‌های زیرین در هرفضای متری (M, d) معتبرند، و اثبات آنها درست مانند اثباتشان در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ است. کافی است در برهانها فقط به جای فاصلهٔ اقلیدسی $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ متر $d(x, y)$ را قرار دهیم.

قضیهٔ ۳۵.۳ آ) اجتماع هر دسته از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای است باز، واشتراک دسته‌ای متناهی از مجموعه‌های باز باز است.

ب) اجتماع هر دستهٔ متناهی از مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای است بسته، واشتراک هر دسته از مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای بسته خواهد بود.

قضیهٔ ۳۶.۳ هرگاه A باز، و B بسته باشد، آنگاه $A - B$ باز و $B - A$ بسته است.

قضیهٔ ۳۷.۳ به ازای هر زیرمجموعهٔ M مانند S، گزاره‌های زیرین هم ارز یکدیگرند:

آ) S در M بسته است.

ب) S حاوی همهٔ نقطه‌های چسبیدهٔ خود است.

ج) S حاوی همهٔ نقطه‌های انباشتگی خود است.

د) $S = \bar{S}$.

مثال. فرض می‌کنیم که $M = \mathbf{Q}$، یعنی مجموعهٔ عددهای گویا، با متر اقلیدسی $\mathbf{R}^1$

باشد. دو عدد گنگ مانند a و b اختیار می‌کنیم. هرگاه S مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای موجود در بازهٔ باز $]a, b[$ باشد، آنگاه S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{Q}$ می‌باشد.

در برهانهای قضیهٔ بولتزانو ـ وایراشتراس، قضیهٔ اشتراکی کانتور، و قضیه‌های پوششی لیندلف و هاینه ـ بورل، علاوه بر خاصیتهای متری فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$، از خاصیتهای مخصوص $\mathbf{R}^n$ که معمولاً در یک فضای متری دلخواه (M, d) معتبر نیستند نیز استفاده کردیم. برای توسیع این قضیه‌ها به فضاهای متری لازم است برای M محدودیتهای بیشتری قائل شد. توسیع یکی از این قضیه‌ها در تمرین ۳۴.۳ مختصراً شرح داده شده است.

در بخش آینده فشردگی در فضاهای متری دلخواه توصیف خواهد شد.

۱۵.۳ زیرمجموعه‌های فشردهٔ یک فضای متری

فرض کنیم (M, d) یک فضای متری، و S یک زیرمجموعهٔ M باشد. دستهٔ F از زیرمجموعه‌های باز M را یک پوشش باز S نامیم در صورتی که

$$S \subseteq \bigcup_{A \in F} A.$$

یک زیرمجموعهٔ M مانند S را فشرده نامیم در صورتی که هر پوشش باز S حاوی یک زیرپوشش متناهی باشد. اگر عددی مانند $r > 0$ و نقطه‌ای مانند a در M باشند بقسمی که $S \subseteq B(a; r)$، گوئیم S کراندار است.

قضیهٔ ۳۸.۳ فرض می‌کنیم S یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ فضای متری M باشد، در این صورت:

یکم) S بسته و کراندار است.
دوم) هر زیرمجموعهٔ نامتناهی S یک نقطهٔ انباشتگی در S دارد.

برهان. برای اثبات (یکم) به برهان قضیهٔ ۳۱.۳ باز می‌گردیم، و ازآن قسمت از برهان که (ب) از (آ) نتیجه می‌شود استفاده می‌کنیم. تنها تغییر مورد نیاز این است که در سراسر این قسمت به جای فاصلهٔ اقلیدسی $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ متر $d(x, y)$ را قرار دهیم.

برای اثبات (دوم) از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض‌کنیم T یک زیرمجموعهٔ نامتناهی S باشد، و هیچ نقطه‌ای از S نقطهٔ انباشتگی T نباشد. در این‌صورت، به ازای هر x در S، گویی مانند $B(x)$ هست‌که حاوی هیچ نقطهٔ T نیست (اگر $x \notin T$)، یا فقط حاوی یک نقطهٔ T، یعنی خود x، است (اگر $x \in T$). اگر x همهٔ عضوهای

S را بخود بگیرد، مجموعهٔ گویهای $B(x)$ یک پوشش باز S خواهد بود. چون S فشرده است، یک زیردستهٔ متناهی آن S، و در نتیجه T، را می‌پوشاند. این مطلب ناقض فرض ماست، زیرا T مجموعه‌ای نامتناهی است و هر گوی حداکثر حاوی یک نقطهٔ T است.

تبصره. در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$، هر یک از خاصیتهای (یکم) و (دوم) هم‌ارز است با فشردگی (قضیهٔ ۳۱.۳). در یک فضای متری کلی، خاصیت (دوم) هم‌ارز فشردگی است (برای اثباتی از آن ر. ک. کتاب مرجع ۴.۳)، ولی خاصیت (یکم) هم‌ارز فشردگی نیست. در تمرین ۴۲.۳ مثالی از یک فضای متری M داده شده است که در آن زیرمجموعه‌هائی بسته و کراندارند ولی فشرده نیستند.

قضیهٔ ۳۹.۳ فرض کنیم X یک زیرمجموعهٔ بستهٔ فضای متری فشردهٔ M باشد، دراین صورت، X فشرده خواهد بود.

برهان. فرض کنیم F یک پوشش باز X باشد، یعنی $X \subseteq \bigcup_{A\in F} A$. نشان می‌دهیم که تعدادی متناهی از A ها X را می‌پوشانند. چون X بسته است، $M - X$ باز می‌باشد، پس $F \cup \{(M - X)\}$ یک پوشش باز M خواهد بود. چون M فشرده است، این پوشش حاوی یک زیرپوشش متناهی است، که می‌توان فرض کرد که شامل $M - X$ نیز باشد. بنابراین،

$$M \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_p \cup (M - X).$$

این زیرپوشش X را نیز می‌پوشاند و، چون $M - X$ حاوی نقطه‌ای از X نیست، می‌توان مجموعهٔ $M - X$ را از زیر پوشش حذف کرد، آنچه می‌ماند باز هم X را می‌پوشاند. پس $X \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_p$، یعنی X فشرده است.

۱۶.۳ کرانهٔ یک مجموعه

تعریف ۴۰.۳ فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ فضای متری M باشد، نقطهٔ x در M را یک نقطهٔ کرانه‌ای S نامیم درصورتی‌که هرگوی مانند $B_M(x; r)$ دست کم‌حاوی یک نقطه از S و یک نقطه از $M - S$ باشد، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های کرانه‌ای S را کرانهٔ S نامیده با نماد ∂S نشان می‌دهیم.

خواننده می‌تواند بآسانی تحقیق کند که

$$\partial S = S \cap \overline{M - S}.$$

این دستور نشان می‌دهد که ∂S در M بسته است.

مثال. در $\mathbf{R}^n$، کرانهٔ گوی $B(\mathbf{a}; r)$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ $\mathbf{x}$ هائی که $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r$. در $\mathbf{R}^1$، کرانهٔ مجموعهٔ عددهای گویا تمام $\mathbf{R}^1$ می‌باشد.

خاصیتهای دیگر فضاهای متری در تمرینها و همچنین در فصل ۴ خواهند آمد.

تمرین

مجموعه‌های باز و بسته در $\mathbf{R}^1$ و $\mathbf{R}^2$

۱.۳ ثابت کنید که یک بازهٔ باز در $\mathbf{R}^1$ مجموعه‌ای باز است، و یک بازهٔ بسته مجموعه‌ای است بسته.

۲.۳ همهٔ نقطه‌های انباشتگی مجموعه‌های زیر در $\mathbf{R}^1$ را مشخص نمائید، و در هر مورد تعیین کنید که مجموعه باز است یا بسته (یا هیچ یک).

آ) همهٔ عددهای صحیح.

ب) بازهٔ $]a, b]$.

ج) همهٔ عددهای به شکل $1/n$، $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

د) همهٔ عددهای گویا.

ه) همهٔ عددهای به شکل $2^{-n} + 5^{-m}$، $(m, n = 1, 2, \dots)$.

و) همهٔ عددهای به شکل $(-1)^n + (1/m)$، $(m, n = 1, 2, \dots)$.

ز) همهٔ عددهای به شکل $(1/n) + (1/m)$، $(m, n = 1, 2, \dots)$.

ح) همهٔ عددهای به شکل $(-1)^n/[1 + (1/n)]$، $(n = 1, 2, \dots)$.

۳.۳ حکم مذکور در تمرین ۲.۳ را در مورد مجموعه‌های زیرین در $\mathbf{R}^2$ تحقیق کنید:

آ) همهٔ عددهای مختلط z که $|z| > 1$.

ب) همهٔ عددهای مختلط z که $|z| \geqslant 1$.

ج) همهٔ عددهای مختلط به شکل

$$(1/n) + (i/m)\text{، } (m, n = 1, 2, \dots).$$

د) همهٔ نقطه‌های (x, y) که $x^2 - y^2 < 1$.

ه) همهٔ نقطه‌های (x, y) که $x > 0$.

و) همهٔ نقطه‌های (x, y) که $x \geqslant 0$.

۴.۳ ثابت کنید که هر مجموعهٔ باز ناتهی مانند S در $\mathbf{R}^1$ هم حاوی عددهائی

گویاست هم حاوی عددهائی گنگ.

۵.۳ ثابت کنید تنها مجموعه‌هـای هم باز و هم بسته در $\mathbf{R}^1$ مجموعهٔ تهی و خود $\mathbf{R}^1$ می باشند. آیا گزاره‌ای مشابه این برای $\mathbf{R}^2$ نیز درست است؟

۶.۳ ثابت کنید هرمجموعهٔ بسته در $\mathbf{R}^1$ اشتراک دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های باز می باشد.

۷.۳ ثابت کنید که یک مجموعهٔ بستهٔ کرانـدار و نـاتهی مانند S در $\mathbf{R}^1$ یا بازه‌ای است بسته، یا S را می‌توان از بازه‌ای بسته با حذف دسته‌ای از هم جدا و شمارشپذیر از بازه‌های باز، که نقطه‌های انتهائی آنها متعلق به S می باشند، بدست آورد.

مجموعه‌های باز و بسته در $\mathbf{R}^n$

۸.۳ ثابت کنید که گویهای n بعدی باز و بازه‌هـای باز n بعـدی مجموعه‌هائی باز در $\mathbf{R}^n$ می باشند.

۹.۳ ثابت کنید که درون یک مجموعه در $\mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای باز در $\mathbf{R}^n$ می باشد.

۱۰.۳ اگر $S \subseteq \mathbf{R}^n$، ثابت کنید کـه $\operatorname{int} S$ مساوی اجتمـاع همهٔ زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{R}^n$ است کـه محتوا در S باشند. این مطلب را این گـونه توصیف می‌کنند کـه می‌گویند $\operatorname{int} S$ بزرگترین زیرمجموعهٔ باز S می باشد.

۱۱.۳ اگر S و T زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^n$ باشند، ثابت کنید که

$$(\operatorname{int} S) \cap (\operatorname{int} T) = \operatorname{int} (S \cap T)$$

و

$$(\operatorname{int} S) \cup (\operatorname{int} T) \subseteq \operatorname{int} (S \cup T).$$

۱۲.۳ فرض کنید کـه S' مجمـوعهٔ مشتق و $\bar{S}$ بست مجمـوعـهٔ S در $\mathbf{R}^n$ باشند. ثابت کنید:

آ) S' در $\mathbf{R}^n$ بسته است؛ یعنی، $(S')' \subseteq S'$.

ب) هرگاه $S \subseteq T$، آنگاه $S' \subseteq T'$.

ج) $(S \cup T)' = S' \cup T'$.

د) $(\bar{S})' = S'$. ه) $\bar{S}$ در $\mathbf{R}^n$ بسته است.

و) $\bar{S}$ مساوی اشتراک همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ $\mathbf{R}^n$ است‌که حاوی S باشند. یعنی، $\bar{S}$ عبارت از کوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای است که حاوی S باشد.

۱۳.۳ فرض کنید S و T زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^n$ باشند. ثابت کنید که

$\overline{S \cap T} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T}$، و اگر S باز باشد، $S \cap \bar{T} \subseteq \overline{S \cap T}$.

تبصره. گزاره‌های مذکور در تمرینهای ۹.۳ تا ۱۳.۳ در هر فضای متری درستند.

۱۴.۳ مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را کوژ نامیم در صورتی که به‌ازای هردو نقطه مانند $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در S و هر عدد حقیقی θ که $0 < \theta < 1$، داشته باشیم

$$\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y} \in S.$$

این گزاره را در $\mathbf{R}^2$ و $\mathbf{R}^3$ تعبیر هندسی نمائید، و ثابت کنید که:

آ) هرگوی n بعدی در $\mathbf{R}^n$ کوژ است.
ب) هر بازهٔ باز n بعدی کوژ است.
ج) درون یک مجموعهٔ کوژ مجموعه‌ای است کوژ.
د) بست یک مجموعهٔ کوژ مجموعه‌ای است کوژ.

۱۵.۳ فرض کنید F دسته‌ای از مجموعه‌ها در $\mathbf{R}^n$ باشد، و قرار دهید

$$S = \bigcup_{A \in F} A \quad \text{و} \quad T = \bigcap_{A \in F} A.$$

برای هر یک از گزاره‌های زیر یا برهانی ارائه دهید یا مثالی برای نقض بیان‌کنید.

آ) هرگاه $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ انباشتگی T باشد، آنگاه $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ انباشتگی هریک از مجموعه‌های A در F هست.
ب) هرگاه $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ انباشتگی S باشد، آنگاه $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ انباشتگی دست‌کم یک مجموعه مانند A در F خواهد بود.

۱۶.۳ اگر S مجموعهٔ عددهای گویای موجود در بازهٔ $]0, 1[$ باشد، ثابت کنید که S را نمی‌توان به صورت اشتراک دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های باز درآورد. راهنمائی. بنویسید $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$، فرض کنید که $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$، که در آن هر S_k باز باشد، و دنبالهٔ $\{Q_n\}$ از بازه‌های بسته را بقسمی بسازید که $Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq S_n$ و $x_n \notin Q_n$. سپس با استفاده از قضیهٔ اشتراکی کانتور تناقضی بدست آورید.

قضیه‌های پوششی در $\mathbf{R}^n$

۱۷.۳ اگر $S \subseteq \mathbf{R}^n$، ثابت کنید که دستهٔ نقطه‌های تنهای S شمارشپذیر است.

۱۸.۳ ثابت کنید مجموعهٔ گرده‌های باز در صفحهٔ xy به مرکز (x, x) و شعاع

$x > ۰$ (x گویا)، یک پوشش شمارشپذیر مجموعهٔ $\{(x, y) | x > ۰, y > ۰\}$ می‌باشد.

۱۹.۳ دستهٔ F مرکب از بازه‌های باز به شکل

$$]۱/n, ۲/n[\text{، که در آن } n = ۲, ۳, \ldots\text{،}$$

یک پوشش باز بازهٔ باز $]۰, ۱[$ می‌باشد. بدون استفاده از قضیهٔ ۳۱.۳، ثابت کنید که هیچ زیردستهٔ متناهی F بازهٔ $]۰, ۱[$ را نمی‌پوشاند.

۲۰.۳ مجموعه‌ای مانند S مثال بزنید که بسته باشد ولی کراندار نباشد، و یک پوشش باز و شمارشپذیر مانند F بیابید که هیچ زیرمجموعهٔ متناهی آن S را نپوشاند.

۲۱.۳ مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ با این‌خاصیت داده شده است‌که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در S، گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ هست بقسمی که $B(\mathbf{x}) \cap S$ شمارشپذیر است. ثابت کنید که S شمارشپذیر است.

۲۲.۳ ثابت کنید هردسته از مجموعه‌های باز از هم‌جدا در $\mathbf{R}^n$ لزوماً شمارشپذیر است. دسته‌ای از مجموعه‌های بستهٔ از هم‌جدا مثال بزنید که شمارشپذیر نباشد.

۲۳.۳ فرض کنیم که $S \subseteq \mathbf{R}^n$. نقطهٔ $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$ را یک نقطهٔ تراکم S نامیم در‌صورتی که به‌ازای هر گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$، $B(\mathbf{x}) \cap S$ شمارشپذیر نباشد. ثابت کنید هرگاه S شمارشپذیر نباشد،آنگاه S نقطهٔ تراکمی مانند $\mathbf{x}$ در خود دارد.

۲۴.۳ فرض کنید $S \subseteq \mathbf{R}^n$ و S شمارشپذیر نباشد. همچنین T مجموعهٔ نقطه‌های تراکم S باشد. ثابت کنید:

آ) $S - T$ شمارشپذیر است، ب) $S \cap T$ شمارشپذیر نیست،

ج) T مجموعه‌ای است بسته، د) T حاوی هیچ‌نقطهٔ تنها نیست.

توجه کنید که تمرین ۲۳.۳ حالت خاصی از قسمت (ب) این تمرین است.

۲۵.۳ مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را کامل گوئیم در صورتی که $S = S'$، یعنی اگر S بسته بوده حاوی هیچ نقطهٔ تنهائی نباشد. ثابت کنید هر مجموعهٔ بستهٔ شمارش‌ناپذیر مانند F در $\mathbf{R}^n$ را می‌توان به شکل $F = A \cup B$ درآورد، که در آن A کامل، و B شمارشپذیر باشد (قضیهٔ کانتور ـ بندیکسون)[1]. راهنمائی. از تمرین ۲۴.۳ استفاده کنید.

1. Cantor - Bendixon

فضاهای متری

۲۶.۳ در فضای متری (M, d)، ثابت کنید که مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و تمام فضای M هم باز و هم بسته‌اند.

۲۷.۳ در $\mathbf{R}^n$ دو متر زیر را در نظر بگیرید:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|, \qquad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

در هر یک از فضاهای متری زیرین، ثابت کنید که گوی $B(\mathbf{a}; r)$ دارای این شکلهای هندسی است:

آ) در $(\mathbf{R}^2, d_1)$ مربعی است که ضلعهایش موازی محورهای مختصات می‌باشند.

ب) در $(\mathbf{R}^2, d_2)$ مربعی است که قطرهایش موازی محورها هستند.

ج) در $(\mathbf{R}^3, d_1)$ یک مکعب است.

د) در $(\mathbf{R}^3, d_2)$ یک هشت وجهی است.

۲۸.۳ فرض کنید d_1 و d_2 مترهای مذکور در تمرین ۲۷.۳ باشند و $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ متر اقلیدسی متداول باشد. نامساویهای زیرین‌را به‌ازای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در $\mathbf{R}^n$ ثابت کنید:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

و

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \sqrt{n}\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant n d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

۲۹.۳ اگر (M, d) یک فضای متری باشد، تعریف کنید

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

ثابت کنید که d' نیز یک متر برای M می‌باشد. توجه کنید که به‌ازای هر x و y در M، $0 \leqslant d'(x, y) < 1$.

۳۰.۳ ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ متناهی یک فضای متری بسته است.

۳۱.۳ در فضای متری (M, d)، گوی بسته به شعاع $r > 0$ حول نقطهٔ a در M عبارت است از مجموعهٔ $\bar{B}(a; r) = \{x \mid d(x, a) \leqslant r\}$.

آ) ثابت کنید که $\bar{B}(a; r)$ مجموعه‌ای بسته است.

ب) یک فضای متری بقسمی بیابید که در آن $\bar{B}(a; r)$ بست گوی باز $B(a; r)$ نباشد.

۳۲.۳ در فضای متری M، هرگاه $A \subseteq S \subseteq \overline{A}$، که در آن $\overline{A}$ بست A است، آنگاه گوئیم A در S چگال است. مثلاً، مجموعهٔ عددهای گویا، یعنی $\mathbf{Q}$، در $\mathbf{R}$ چگال است. اگر A در S، و S در T چگال باشد، ثابت کنید که A در T چگال است.

۳۳.۳ به تمرین ۳۲.۳ باز می‌گردیم. فضای متری M را جدائی پذیر نامیم در-صورتی که M زیرمجموعهٔ شمارشپذیری چون A داشته باشد که در M چگال باشد. مثلاً، $\mathbf{R}$ جدائی پذیر است زیرا مجموعهٔ عددهای گویای $\mathbf{Q}$ یک زیرمجموعهٔ چگال و شمارشپذیر $\mathbf{R}$ می‌باشد. ثابت کنید هر فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^k$ جدائی پذیر است.

۳۴.۳ به‌تمرین ۳۳.۳ باز می‌گردیم. ثابت‌کنید قضیهٔ پوششی لیندلف (قضیهٔ ۲۸.۳) در هر فضای متری جدائی پذیر معتبر است.

۳۵.۳ به تمرین ۳۲.۳ بازمی‌گردیم. اگر A در S چگال، و B در S باز باشد، ثابت کنید که $B \subseteq \overline{A \cap B}$. راهنمائی. از تمرین ۱۳.۳ استفاده کنید.

۳۶.۳ به تمرین ۳۲.۳ باز می‌گردیم. اگر A و B هردو در S چگال باشند و B در S باز باشد، ثابت کنید که $A \cap B$ در S چگال است.

۳۷.۳ (S_1, d_1) و (S_2, d_2) دوفضای متری مفروضی می‌باشند. به‌وسیلهٔ d_1 و d_2 می‌توان به راههای مختلف برای حاصل ضرب دکارتی $S_1 \times S_2$ متری مانند ρ ساخت. مثلاً اگر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در $S_1 \times S_2$ باشند، قرار می‌دهیم $\rho(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. ثابت کنید که ρ متری برای $S_1 \times S_2$ است. مثالهای دیگری از این نوع بسازید.

زیرمجموعه‌های فشردهٔ یك فضای متری

هر یک از گزاره‌های زیر را برای فضای متری دلخواه (M, d) و زیرمجموعه‌های M مانند S و T ثابت کنید:

۳۸.۳ فرض کنید که $S \subseteq T \subseteq M$. در این صورت، S در (M, d) وقتی، و فقط وقتی، فشرده است که S در زیرفضای متری (T, d) فشرده باشد.

۳۹.۳ هرگاه S بسته، و T فشرده باشد، آنگاه $S \cap T$ فشرده است.

۴۰.۳ اشتراک هر دستهٔ دلخواه از زیرمجموعه‌های فشردهٔ M مجموعه‌ای است فشرده.

۴۱.۳ اجتماع تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های فشردهٔ M فشرده است.

۴۲.۳ فضای متری $\mathbf{Q}$ (عددهای گویا) را با متر اقلیدسی $\mathbf{R}$ در نظر بگیرید. فرض

کنید کـه S عبارت باشد از عددهای گـویای بازهٔ باز $]a, b[$، کـه درآن a و b گنگ باشند. دراین صورت، S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ کـراندار $\mathbf{Q}$ است کـه فشرده نیست.

خاصیتهای گوناگون درون وکرانهٔ مجموعه‌ها

اگر A و B دو زیرمجموعهٔ دلخواه فضای متری M باشند، ثابت کنید که:

۴۳.۳ $\text{int}\, A = M - \overline{M - A}$.

۴۴.۳ $\text{int}\,(M - A) = M - \bar{A}$.

۴۵.۳ $\text{int}\,(\text{int}\, A) = \text{int}\, A$.

۴۶.۳ آ) $\text{int}\,(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (\text{int}\, A_i)$، که در آن هر $A_i \subseteq M$.

ب) اگر F دسته‌ای نامتناهی از زیرمجموعه‌های M باشد،

$$\text{int}\,(\bigcap_{A\in F} A) \subseteq \bigcap_{A\in F} (\text{int}\, A).$$

ج) مثالی بزنید که به‌ازای آن در (ب) تساوی برقرار نباشد.

۴۷.۳ آ) $\bigcup_{A\in F} (\text{int}\, A) \subseteq \text{int}(\bigcup_{A\in F} A)$.

ب) دستهٔ F را طوری بسازید کـه متناهی بوده بـه‌ازای آن در (آ) تساوی برقرار نباشد.

۴۸.۳ آ) اگر A در M باز یا بسته باشد، $\text{int}\,(\partial A) = \varnothing$.

ب) مثالی بزنید که به‌ازای آن $\text{int}\,(\partial A) = M$.

۴۹.۳ هرگاه $\text{int}\, A = \text{int}\, B = \varnothing$ و A در M بسته باشد، آنگاه

$$\text{int}\,(A \cup B) = \varnothing.$$

۵۰.۳ مثالی بزنید که درآن $\text{int}\, A = \text{int}\, B = \varnothing$ ولی $\text{int}\,(A \cup B) = M$.

۵۱.۳ $\partial A = \bar{A} \cap \overline{M - A}$ و $\partial A = \partial(M - A)$.

۵۲.۳ هرگاه $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$، آنگاه $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

فهرست چندکتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان بـه آنها مراجعه کرد.

3.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Functions*. Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.

3.2 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison-Wesley, Reading, 1966.

3.3 Kaplansky, I., *Set Theory and Metric Spaces*. Allyn and Bacon, Boston, 1972.

3.4 Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1963.

۴

حدها و پیوستگی

۱.۴ مقدمه

خواننده پیشتر درحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با مفهوم حد آشنا شده است. در حقیقت، معمولاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال نوعهای متفاوتی از حد عرضه می‌شوند. مثلاً، حد دنباله‌ای از عددهای حقیقی مانند $\{x_n\}$، که به‌صورت

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A،$$

نشان داده می‌شود، یعنی به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی صحیح مانند N هست بقسمی که

هرگاه $n \geqslant N$، آنگاه $|x_n - A| < \varepsilon$.

عمل تعیین حد در بالا این معنی شهودی را تداعی می‌کند که، اگر n به‌قدر کافی بزرگ اختیار شود، x_n را می‌توان به‌قدر کافی به A نزدیک کرد. نوع دیگری از حد عبارت است از حد تابع. این حد را با نماد

$$\lim_{x\to p} f(x) = A$$

نشان می‌دهیم، و منظور ازآن این است که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی دیگر مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که

هرگاه $0 < |x - p| < \delta$، آنگاه $|f(x) - A| < \varepsilon$.

حد بالا این فکر را القا می‌کند که، اگر x به‌قدر کافی نزدیک p اختیار شود، $f(x)$

به‌قدر کافی نزدیک A خواهد بود.

کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال در مسأله‌های هندسی و فیزیکی در فضای ۳ بعدی، و همچنین در تابعهای چند متغیره، ضرورت توسیع این مفهومها به $\mathbf{R}^n$ را ایجاب می‌کنند. از این مرحله می‌توان گامی فراتر نهاد و مفهوم حد را درمحدودهٔ فضاهای متری، که کلیتر است، تعریف کرد. این کار، با زدودن قیدهای غیر لازم، نظریهٔ حدها را ساده‌تر می‌کند و در عین حال تقریباً همهٔ مظاهر مهم مورد نیاز آنالیز ریاضی را فرا می‌گیرد.

نخست حدود دنباله‌هائی از نقطه‌ها در یک فضای متری، و سپس حدود تابعها و مفهوم پیوستگی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲.۴ دنباله‌های همگرا در یك فضای متری

تعریف ۱.۴ دنبالهٔ $\{x_n\}$ از نقطه‌ها در فضای متری (S, d) را همگرا نامیم در-صورتی که نقطه‌ای مانند p در S با خاصیت زیرین وجود داشته باشد:

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی صحیح مانند N باشد بقسمی که

هرگاه $n \geqslant N$، آنگاه $d(x_n, p) < \varepsilon$.

همچنین‌گوئیم که $\{x_n\}$ همگرا به p است ومی‌نویسیم وقتی‌که $n \to \infty$، $x_n \to p$، یا فقط می‌نویسیم $x_n \to p$. اگر چنین pای در S نباشد، دنبالهٔ $\{x_n\}$ را واگرا نامیم.

تبصره. از تعریف همگرائی نتیجه می‌شود که

وقتی، و فقط وقتی، $x_n \to p$ که $d(x_n, p) \to 0$.

همگرائی دنبالهٔ $\{d(x_n, p)\}$ به ۰ در فضای متری اقلیدسی $\mathbf{R}^1$ صورت می‌گیرد.

چند مثال

۱. در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^1$، دنبالهٔ $\{x_n\}$ را صعودی نامیم در صورتی که به‌ازای هر n، $x_n \leqslant x_{n+1}$. هرگاه دنباله‌ای صعودی از بالا کراندار باشد (یعنی، عددی مانند $M > 0$ باشد بقسمی که به‌ازای هر n، $x_n \leqslant M$)، آنگاه $\{x_n\}$ به‌سوپرمم برد خود، یعنی $\sup \{x_1, x_2, \ldots\}$ همگرا است. بهمین نحو، $\{x_n\}$ را نزولی نامیم در صورتی که به‌ازای هر n، $x_n \leqslant x_{n+1}$. هر دنبالهٔ نزولی‌که از پائین کراندار باشد به‌اینفیمم برد خود همگرا است. مثلاً، $\{1/n\}$ به ۰ همگرا است.

۲. هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هائی حقیقی و همگرا به ۰ باشند، آنگاه

$\{a_n + b_n\}$ نیز بــه ۰ همگرا است. هرگــاه به‌ازای هر n، $0 \leqslant c_n \leqslant a_n$ و $\{a_n\}$ بــه ۰ همگــرا باشد، آنگاه $\{c_n\}$ نیــز به ۰ همگرا خــواهد بود. ایــن خــاصیتهای ابتدائی دنباله‌ها در $\mathbf{R}^1$ برای ساده کردن برهــان بعضی از قضیه‌های مربوط به‌حدها در فضاهای متری کلی بکار می‌روند.

۳. درصفحهٔ مختلط $\mathbf{C}$، قــرار می‌دهیم $z_n = 1 + n^{-2} + (2 - 1/n)i$. در این صورت، $\{z_n\}$ به $1 + 2i$ همگرا است زیرا وقتی که $n \to \infty$،

$$d(z_n, 1 + 2i)^2 = |z_n - (1 + 2i)|^2 = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \to 0,$$

پس $d(z_n, 1 + 2i) \to 0$.

قضیهٔ ۲.۴ دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای متری (S, d) حداکثر می‌تواند بـه‌یک نقطه در S همگرا باشد.

برهان. فــرض کنیم که $x_n \to p$ و $x_n \to q$. ثابت مــی‌کنیم کــه $p = q$. از نامساوی مثلثی داریم

$$0 \leqslant d(p, q) \leqslant d(p, x_n) + d(x_n, q).$$

چون $d(p, x_n) \to 0$ و $d(x_n, q) \to 0$، پس $d(p, q) = 0$، یعنی $p = q$.

اگــر دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا باشد، نقطهٔ منحصر بفردی را کــه این دنباله بــه آن همگرا است حد دنباله نامیده با نماد $\lim x_n$ یا $\lim_{n\to\infty} x_n$ نشان می‌دهیم.

مثال. درفضای اقلیدسی $\mathbf{R}^1$ داریم $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. همین دنباله در زیرفضای متری $T =]0, 1]$ همگرا نیست زیرا تنها نقطه‌ای که می‌تواند حد این دنباله باشد ۰ است و $0 \notin T$. این مثال نشان می‌دهد که همگرائی یا واگرائی یک دنبالــه در یک فضا نه تنها به‌مترآن بلکه به‌مجموعهٔ زمینهٔ فضا نیز بستگی خواهد داشت.

قضیهٔ ۳.۴ درفضای متری (S, d)، فرض می‌کنیم که $x_n \to p$ و $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ برد $\{x_n\}$ باشد. در این صورت:

آ) T کراندار است.

ب) p یک نقطهٔ چسبیدهٔ T است.

برهان. آ) فرض کنیم که N عــدد صحیح متناظر $\varepsilon = 1$ در تعــریف همگرائــی باشد. در این صورت به‌ازای هر $n \geqslant N$، x_n در گــوی $B(p; 1)$ قراردارد. پس هرگاه

$$r = 1 + \max\{d(p, x_1), \dots, d(p, x_{N-1})\},$$

آنگاه هر نقطه در T در گوی $B(p; r)$ قرار دارد. بنابراین T کراندار خواهد بود.

ب) چون هرگوی مانند $B(p; \varepsilon)$ حاوی نقطه‌ای از T است، پس p یک نقطهٔ چسبیدهٔ T می‌باشد.

تبصره. اگر T نامتناهی باشد، هرگوی مانند $B(p; \varepsilon)$ حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از T است، پس p یک نقطهٔ انباشتگی T خواهد بود.

قضیهٔ زیر عکس قسمت (ب) در قضیهٔ بالا است.

قضیهٔ ۴.۴ (S, d) یک فضای متری و زیرمجموعهٔ $T \subseteq S$ مفروضند. هرگاه نقطهٔ p در S یک نقطهٔ چسبیدهٔ T باشد، آنگاه دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از نقطه‌های T هست که به p همگرا است.

برهان. به‌ازای هرعدد صحیح $n \geqslant 1$، نقطه‌ای مانند x_n در T هست بقسمی که $d(p, x_n) \leqslant 1/n$. پس $d(p, x_n) \to 0$، در نتیجه $x_n \to p$.

قضیهٔ ۵.۴ در فضای متری (S, d)، دنبالهٔ $\{x_n\}$ وقتی، و فقط وقتی، به p همگرا است که هر زیردنبالهٔ آن مانند $\{x_{k(n)}\}$ به p همگرا باشد.

برهان. فرض کنیم که $x_n \to p$. یک زیردنبالهٔ دلخواه آن مانند $\{x_{k(n)}\}$ را در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی صحیح مانند N هست بقسمی که به‌ازای هر $n \geqslant N$، داریم $d(x_n, p) < \varepsilon$. چون $\{x_{k(n)}\}$ یک زیردنباله است، پس عددی صحیح مانند M هست بقسمی که به‌ازای هر $n \geqslant M$، $k(n) \geqslant N$. از این روی، از $n \geqslant M$ نتیجه می‌شود که $d(x_{k(n)}, p) < \varepsilon$، یعنی $x_{k(n)} \to p$. برقراری عکس گزارهٔ بالا واضح است زیرا $\{x_n\}$ یک زیردنبالهٔ خود می‌باشد.

۳.۴ دنباله‌های کشی

اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌حدی چون p همگرا باشد، جمله های آن باید سرانجام به p، و درنتیجه به‌یکدیگر، نزدیک شوند. این خاصیت به‌طور صوریتر در قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

قضیهٔ ۶.۴ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا در فضای متری (S, d) باشد. در این صورت، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی صحیح مانند N هست بقسمی که

هرگاه $n \geqslant N$ و $m \geqslant N$، آنگاه $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

برهان. قرار می‌دهیم $p = \lim x_n$. به‌ازای $\varepsilon > ۰$ داده شده، فرض‌کنیم N بقسمی باشد که به‌ازای هر $N \geqslant n$، $d(x_n, p) < \varepsilon/۲$. دراین صورت، هرگاه $m \geqslant N$، آنگاه $d(x_m, p) < \varepsilon/۲$. حال اگر $n \geqslant N$ و $m \geqslant N$، از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, p) + d(p, x_m) < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

۷.۴ تعریف دنبالهٔ‌کشی. دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای متری (S, d) را یک دنبالهٔ کشی نامیم در صورتی که این دنباله در شرط زیرین (به‌نام شرط کشی) صدق کند:

به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی صحیح مانند N باشد بقسمی که

هرگاه $n \geqslant N$ و $m \geqslant N$، آنگاه $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

بنا بر قضیهٔ ۶.۴، هر دنبالهٔ همگرا یک دنبالهٔ کشی است. عکس این مطلب در هرفضای متری درست نیست. مثلاً، دنبالهٔ $\{۱/n\}$ یک دنبالهٔ کشی در فضای $T =]۰, ۱]$ (زیرفضای اقلیدسی $\mathbf{R}^۱$) می‌باشد، ولی این دنباله در T همگرا نیست. اما، عکس قضیهٔ ۶.۴ در هرفضای اقلیدسی $\mathbf{R}^k$ درست است.

قضیهٔ ۸.۴ در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^k$ هردنبالهٔ‌کشی همگرا است.

برهان. فرض کنیم که $\{\mathbf{x}_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathbf{R}^k$، و $T = \{\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \ldots\}$ برد این دنباله باشد. هرگاه T متناهی باشد، آنگاه همهٔ جمله‌های $\{\mathbf{x}_n\}$، بجز تعدادی متناهی، با هم متساویند، و در نتیجه $\{\mathbf{x}_n\}$ به‌این مقدار مشترک همگرا است.

حال فرض‌کنیم T نامتناهی باشد. با استفاده از قضیهٔ بولتزانو ـ وایراشتراس، نشان می‌دهیم که T یک نقطهٔ انباشتگی مانند $\mathbf{p}$ دارد، وسپس ثابت می‌کنیم که $\{\mathbf{x}_n\}$ به $\mathbf{p}$ همگرا است. ابتدا لازم است بدانیم که T کراندار است. این‌مطلب ازشرط‌کشی نتیجه می‌شود. در حقیقت، وقتی که $\varepsilon = ۱$، عددی مانند N وجود دارد بقسمی که اگر $n \geqslant N$، $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_N\| < ۱$. یعنی، به‌ازای هر $n \geqslant N$، نقطهٔ $\mathbf{x}_n$ درگویی به شعاع ۱ و به مرکز $\mathbf{x}_N$ قرار دارد. از این روی، اگر M ماکزیمم عددهای $\|\mathbf{x}_۱\|$، . . . ، و $\|\mathbf{x}_N\|$ باشد، T جزءگویی به‌شعاع $M + ۱$ حول ۰ خواهد بود. بنا براین، چون T مجموعه‌ای نامتناهی و کراندار است، (بنا بر قضیهٔ بولتزانو ـ وایراشتراس) یک نقطهٔ انباشتگی مانند $\mathbf{p}$ در $\mathbf{R}^k$ دارد. حال نشان می‌دهیم که $\{\mathbf{x}_n\}$ به $\mathbf{p}$ همگرا است.

اگر $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد، عددی مانند N هست بقسمی که هرگاه $n \geqslant N$ و $m \geqslant N$، آنگاه $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon/۲$. گوی $B(\mathbf{p}; \varepsilon/۲)$ حاوی نقطه‌ای مانند

$\mathbf{x}_m$ است، که در آن $m \geqslant N$. از این روی اگر $n \geqslant N$،

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}\| \leqslant \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| + \|\mathbf{x}_m - \mathbf{p}\| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon,$$

یعنی $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{p}$، و برهان تمام است.

چند مثال

۱. قضیهٔ ۸.۴ غالباً برای اثبات همگرائی دنباله‌ای که حد آن از پیش دانسته نیست بکار می‌رود، مثلاً، دنبالهٔ زیرین را در $\mathbf{R}^۱$ در نظر می‌گیریم:

$$x_n = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}.$$

اگر $N \leqslant n < m$، (با گرفتن جمله‌های متوالی x_m و x_n با هم) نتیجه می‌شود که

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{۱}{n+۱} - \frac{۱}{n+۲} + \ldots \pm \frac{۱}{m}\right| < \frac{۱}{n} \leqslant \frac{۱}{N},$$

پس اگر $N > ۱/\varepsilon$، خواهیم داشت $|x_m - x_n| < \varepsilon$. بنابراین، $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است، و در نتیجه به‌حدی همگرا خواهد بود. می‌توان نشان داد (ر. ک. تمرین ۸.۱۸) که این حد مساوی $\log ۲$ است، و این چیزی است که خیلی آسان بدست نمی‌آید.

۲. $\{a_n\}$ دنباله‌ای است حقیقی بقسمی که به‌ازای هر $n \geqslant ۱$،

$$|a_{n+۲} - a_{n+۱}| \leqslant \frac{۱}{۲}|a_{n+۱} - a_n|.$$

بی‌دانستن حد $\{a_n\}$، می‌توانیم ثابت کنیم که $\{a_n\}$ همگراست. برای این کار قرار می‌دهیم $b_n = |a_{n+۱} - a_n|$. در این صورت $۰ \leqslant b_{n+۱} \leqslant b_n/۲$، پس به‌استقرا داریم $b_{n+۱} \leqslant b_۱/۲^n$. بنابراین $b_n \to ۰$. همچنین اگر $m > n$، خواهیم داشت

$$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-۱}(a_{k+۱} - a_k);$$

پس

$$|a_m - a_n| \leqslant \sum_{k=n}^{m-۱} b_k \leqslant b_n\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{۲^{m-۱-n}}\right) < ۲b_n.$$

از ایــن نتیجه مــی‌شود کــه $\{a_n\}$ یک دنبــالهٔ کشی است، و در نتیجه همگــرا است.

۴.۴ فضاهای متری تام

تعریف ۹.۴ فضای متری (S, d) را تام گوئیم درصورتی که هردنبالهٔ کشی در S دراین فضا همگرا باشد. یک زیرمجموعهٔ S مانند T را تام نامیم در صورتــی کــه زیرفضای متری (T, d) تام باشد.

مثال ۱ هرفضای اقلیدسی $\mathbf{R}^k$ تام است (قضیهٔ ۸.۴). خصوصاً، $\mathbf{R}^۱$ تام است، ولی زیرفضای $T =]۰, ۱[$ تام نیست.

مثال ۲ فضای $\mathbf{R}^n$ با متر $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{۱\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$ تام است.

قضیهٔ زیرین مفهومهای تام بودن و فشرده بودن را به‌هم مربوط می‌کند.

قضیهٔ ۱۰.۴ هرزیرمجموعهٔ فشردهٔ فضای متری (S, d) مانند T تام است.

برهان. فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در T، و $A = \{x_۱, x_۲, \ldots\}$ برد $\{x_n\}$ باشد. هرگاه A متناهی باشد، آنگاه $\{x_n\}$ به‌یکی ازعنصرهای A همگرا است، در نتیجه $\{x_n\}$ در T همگرا است.

اگر A نامتناهی باشد، چون T فشرده است، بنـا بر قضیهٔ ۳۸.۳، A یک نقطهٔ انباشتگی مانند p در T دارد. اینک نشان می‌دهیم که $x_n \to p$. برای ایـن کـار، اگر $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، N را طوری اختیار مــی‌کنیم کــه به‌ازای $n \geqslant N$ و $m \geqslant N$، داشتــه باشیم $d(x_n, x_m) < \varepsilon/۲$. گوی $B(p; \varepsilon/۲)$ حـاوی نقطه‌ای مانند x_m است، کــه درآن $m \geqslant N$. بنابرایــن، اگر $n \geqslant N$، از نامساوی مثلثی داریم

$$d(x_n, p) \leqslant d(x_n, x_m) + d(x_m, p) < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon,$$

پس $x_n \to p$. بنابراین، هردنبالهٔ کشی در T دارای حدی در T است، یعنی T تام است.

۵.۴ حد یك تابع

در این بخش دو فضای متری (S, d_S) و (T, d_T) را در نظر مــی‌گیریم، که درآنها d_S و d_T، بترتیب، مترهای‌آن دو می‌باشند. فرض می‌کنیم A یک زیـرمجموعـهٔ S، و $f: A \to T$ تابعی از A به T باشد.

تعریف ۱۱.۴ اگر p یک نقطهٔ انباشتگی A باشد و $b \in T$، منظور از نماد

$$\lim_{x \to p} f(x) = b \qquad (۱)$$

این است که:

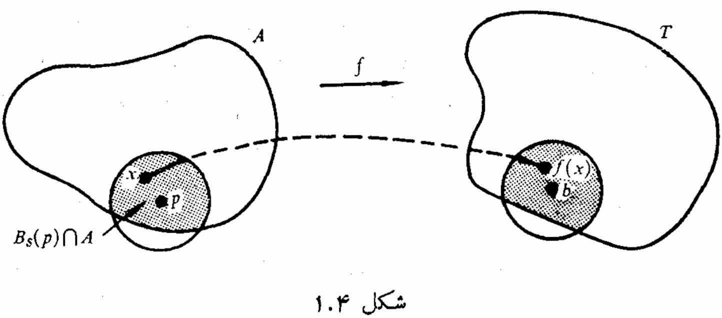
به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که

هرگاه $x \in A$، $x \neq p$، و $d_S(x, p) < \delta$، آنگاه $d_T(f(x), b) < \varepsilon$.

علامت موجود در (۱) را این طور می‌خوانیم «حد $f(x)$، وقتی که x به p بگراید، مساوی b است» یا «وقتی که x به p نزدیک شود، $f(x)$ به b نزدیک می‌شود.» گاهی این مطلب را به این صورت می‌نویسیم: وقتی که

$$x \to p, \ f(x) \to b.$$

تعریف بالا این مفهوم شهودی را بخاطر می‌آورد که « اگر x به قدر کافی نزدیک به p اختیار شود، $f(x)$ به اندازهٔ کافی به b نزدیک خواهد شد» (ر. ک. شکل ۱.۴.) برای‌آن که مطمئن باشیم که نقطه‌هائی مانند x، غیر از p، در A وجود دارند که به قدر کافی نزدیک p باشند، لازم است p نقطهٔ انباشتگی A باشد. اما لزومی ندارد که p در قلمرو f باشد، همچنین لازم نیست که b در برد f واقع گردد.



شکل ۱.۴

تبصره. تعریف بالا را می‌توان برحسب گویها نیز تنظیم کرد. به این صورت که گوئیم (۱) وقتی، وفقط وقتی، برقرار است که به‌ازای هر گوی مانند $B_T(b)$، گویی مانند $B_S(p)$ وجود داشته باشد بقسمی که $A \cap B_S(p)$ تهی نباشد، و

هرگاه $x \in B_S(p) \cap A$ و $x \neq p$، آنگاه $f(x) \in B_T(b)$.

اگر تعریف حد تابع را به این صورت تنظیم کنیم، این تعریف وقتی که p یا b (یا هر دو) در دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافتهٔ $\mathbf{R}^*$، یا در دستگاه عددهای مختلط وسعت یافتهٔ $\mathbf{C}^*$ باشند نیز معنی دارد. اما، در آنچه در زیر می‌آید، فرض این است که p و b متناهی هستند مگر آن که صریحاً نامتناهی بودن آنها را قید نمائیم.

قضیهٔ زیر حدود تابعها را به حدود دنباله‌های همگرا مربوط می‌کند.

قضیهٔ ۱۲.۴ فرض کنیم p یك نقطهٔ انباشتگی A باشد، و $b \in T$. در این صورت وقتی، و فقط وقتی،

$$\lim_{x\to p} f(x) = b \tag{۲}$$

که به‌ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ از نقطه‌ها در $A - \{p\}$ که به p همگرا باشد،

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b. \tag{۳}$$

برهان. هرگاه (۲) برقرار باشد، آنگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که

هرگاه $x \in A$ و $0 < d_S(x, p) < \delta$، آنگاه $d_T(f(x), b) < \varepsilon$. (۴)

حال دنبالهٔ دلخواهی مانند $\{x_n\}$ را در $A - \{p\}$ همگرا به p اختیار می‌کنیم. به‌ازای δی موجود در (۴)، عدد صحیحی مانند N هست بقسمی که اگر $n \geqslant N$، $d_S(x_n, p) < \delta$. بنابراین، از (۴) نتیجه می‌شود که به ازای هر $n \geqslant N$، $d_T(f(x_n), b) < \varepsilon$، و در نتیجه $\{f(x_n)\}$ به b همگرا خواهد بود. بنابراین، (۳) از (۲) نتیجه می‌شود.

برای اثبات عکس مطلب بالا، فرض می‌کنیم‌که (۳) برقرار باشد و(۲) درست نباشد. با این فرض به تناقضی می‌رسیم. هرگاه (۲) درست نباشد، آنگاه باید ε مثبتی وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر $\delta > 0$، نقطه‌ای مانند x در A (که x ممکن است به δ بستگی داشته باشد) وجود داشته باشد بقسمی که

$$0 < d_S(x, p) < \delta \quad \text{اما} \quad d_T(f(x), b) \geqslant \varepsilon. \tag{۵}$$

با انتخاب $\delta = 1/n$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از نقطه‌های $A - \{p\}$ با خاصیت زیرین بدست می‌آید:

$$0 < d_S(x_n, p) < 1/n \quad \text{ولی} \quad d_T(f(x_n), b) \geqslant \varepsilon.$$

واضح است که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به p همگرا است ولی دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ به b همگرا نیست،

و این با (۳) متناقض است.

تبصره. قضیه‌های ۱۲.۴ و ۲.۴ باهم این مطلب‌را نشان می‌دهند که، وقتی‌که $x \to p$، یک تابع نمی‌تواند دارای دو حد متفاوت باشد.

۶.۴ حدود تابعهای مختلط

فرض کنیم (S, d) یک فضای متری، و A زیرمجموعهٔ S باشد. دو تابع مختلط f و g را که بر A تعریف شده‌اند:

$$f : A \to \mathbf{C}, \quad g : A \to \mathbf{C}$$

در نظر می‌گیریم. مجموع $f + g$ عبارت است از تابعی که مقدار آن در هر نقطهٔ A مانند x عدد مختلط $f(x) + g(x)$ می‌باشد. تفاضل $f - g$، حاصل ضرب $f \cdot g$، و خارج قسمت f/g به طریق مشابه تعریف می‌شوند. باید توجه داشت که خارج قسمت f/g فقط در نقطه‌هائی چون x که $g(x) \neq 0$ تعریف می‌شود.

قاعده‌های متداول برای محاسبه با حدها در قضیهٔ زیر داده شده‌اند.

قضیهٔ ۱۳.۴ فرض کنیم f و g تابعهائی مختلط باشند که بر یك زیرمجموعهٔ فضای متری (S, d) مانند A تعریف شده باشند، همچنین p یك نقطهٔ انباشتگی A باشد، و

$$\lim_{x \to p} f(x) = a, \ \lim_{x \to p} g(x) = b.$$

در این صورت نیز داریم:

آ) $\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$،

ب) $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = ab$،

ج) اگر $b \neq 0$، $\lim_{x \to p} f(x)/g(x) = a/b$.

برهان. تنها (ب) را ثابت نموده، قسمتهای دیگررا به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. به‌ازای ε داده شده بین ۰ و ۱، فرض می‌کنیم‌که ε' نیز عددی بین ۰ و ۱ بوده که به ε بستگی دارد. نوع این بستگی بعداً توصیف خواهد شد. عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که هرگاه $x \in A$ و $d(x, p) < \delta$، آنگاه

$$|f(x) - a| < \varepsilon' \text{ و } |g(x) - b| < \varepsilon'.$$

پس

$$|f(x)| = |a + (f(x) - a)| < |a| + \varepsilon' < |a| + 1.$$

اگر بنویسیم $f(x)g(x) - ab = f(x)g(x) - bf(x) + bf(x) - ab$، داریم

$$| f(x)g(x) - ab | \leqslant | f(x) | \, | g(x) - b | + | b | \, | f(x) - a |$$
$$< (| a | + ۱)\varepsilon' + | b | \varepsilon' = \varepsilon' (| a | + | b | + ۱).$$

اگر ε' را مساوی $\varepsilon/(| a | + | b | + ۱)$ اختیار کنیم، ملاحظه می‌شود که هرگاه $x \in A$ و $d(x, p) < \delta$، آنگاه $|f(x)g(x) - ab| < \varepsilon$، یعنی (ب) برقرار است.

۷.۴ حدود تابعهای برداری

بار دیگر، فرض می‌کنیم‌که (S, d) فضائی متری، و A یک زیرمجموعهٔ S باشد. دو تابع برداری $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ راکه بر A تعریف شده‌اند ومقدارهای آنها در $\mathbf{R}^k$ می‌باشند، یعنی

$$\mathbf{f} : A \to \mathbf{R}^k, \quad \mathbf{g} : A \to \mathbf{R}^k$$

را درنظر می‌گیریم. خارج قسمتهای توابع‌برداری به‌ازای $k > ۲$ تعریف نشده‌اند، ولی می‌توان مجموع $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ و حاصل ضرب $\lambda \mathbf{f}$ (اگر λ عددی حقیقی باشد) و حاصل ضرب داخلی $\mathbf{f}.\mathbf{g}$ را، بترتیب، با دستورهای زیرین تعریف کرد:
به‌ازای هر x در A،

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), \quad (\lambda\mathbf{f})(x) = \lambda\mathbf{f}(x),$$
$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x).$$

در این صورت، قاعده‌های زیرین را برای محاسبه با حدود تابعهای برداری خواهیم داشت:

قضیهٔ ۱۴.۴ فرض کنیم p یك نقطهٔ انباشتگی A باشد و

$$\lim_{x \to p} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a}, \qquad \lim_{x \to p} \mathbf{g}(x) = \mathbf{b}.$$

در این صورت نیز داریم:

آ) $\lim_{x \to p} [\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)] = \mathbf{a} + \mathbf{b}$؛

ب) به‌ازای هر اسکالر λ، $\lim_{x \to p} \lambda\mathbf{f}(x) = \lambda\mathbf{a}$؛

ج) $\lim_{x \to p} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$؛

د) $\lim_{x \to p} \|\mathbf{f}(x)\| = \|\mathbf{a}\|$.

برهان. تنها قسمتهای (ج) و (د) را ثابت می‌کنیم. برای اثبات (ج) می‌نویسیم

$$\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=[\mathbf{f}(x)-\mathbf{a}]\cdot[\mathbf{g}(x)-\mathbf{b}]+\mathbf{a}\cdot[\mathbf{g}(x)-\mathbf{b}]+\mathbf{b}\cdot[\mathbf{f}(x)-\mathbf{a}].$$

با استفاده از نامساویهای مثلثی و کشی ـ شوارتز، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}0 &\leqslant |\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\\ &\leqslant \|\mathbf{f}(x)-\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{g}(x)-\mathbf{b}\|\\ &+\|\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{g}(x)-\mathbf{b}\|+\|\mathbf{b}\|\ \|\mathbf{f}(x)-\mathbf{a}\|.\end{aligned}$$

وقتی که $x \to p$، هر جملهٔ طرف راست نامساوی بالا به ۰ می‌گراید، پس

$$\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)\to\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

یعنی (ج) برقرار است. برای اثبات (د) به نامساوی

$$\big|\,\|\mathbf{f}(x)\|-\|\mathbf{a}\|\,\big|\leqslant\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{a}\|$$

توجه کنید.

تبصره. فرض می‌کنیم f_1، . . .، f_n، n تابع حقیقی باشند که بر A تعریف شده‌اند، و $\mathbf{f}: A \to \mathbf{R}^n$ تابع برداری باشد که با معادلهٔ زیرین تعریف شده باشد:

اگر $x \in A$، $\mathbf{f}(x)=(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$.

در این صورت، f_1، . . .، f_n را مؤلفه‌های $\mathbf{f}$ می‌نامیم، و $\mathbf{f}$ را به صورت $\mathbf{f}=(f_1, \ldots, f_n)$ نیز می‌نویسیم.

هرگاه $\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_n)$، آنگاه به‌ازای هر $r=1, 2, \ldots, n$،

$$|f_r(x)-a_r|\leqslant\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{a}\|\leqslant\sum_{r=1}^{n}|f_r(x)-a_r|.$$

این نامساویها نشان می‌دهند که $\lim_{x\to p}\mathbf{f}(x)=\mathbf{a}$ وقتی، و فقط وقتی، که به‌ازای هر r، $\lim_{x\to p}f_r(x)=a_r$.

۸.۴ تابعهای پیوسته

تعریف پیوستگی را، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آمده است، می‌توان برای تابعهائی از یک فضای متری به دیگری وسعت داد.

تعریف ۱۰.۴ فرض کنیم (S, d_S) و (T, d_T) فضاهائی متری و $f: S \to T$ تابعی از S به T باشند. تابع f را در نقطهٔ p در S پیوسته می‌نامیم در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ باشد بقسمی که

هرگاه $d_S(x, p) < \delta$، آنگاه $d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

اگر f در هر نقطه از یک زیرمجموعهٔ S مانند A پیوسته باشد، می‌گوئیم f بر A پیوسته است.

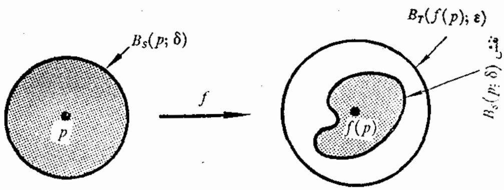
تعریف بالا این مفهوم شهودی راکه «نقطه‌های نزدیک p به‌وسیلهٔ f به نقطه‌های نزدیک $f(p)$ نگاشته می‌شوند» منعکس می‌سازد. این تعریف را نیز می‌توان برحسب گویها بیان کرد: تابع f در نقطهٔ p وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ باشد بقسمی که

$$f(B_S(p; \delta)) \subseteq B_T(f(p); \varepsilon).$$

در اینجا $B_S(p; \delta)$ گویی است در S؛ نقش آن با f باید محتوا در گوی $B_T(f(p); \varepsilon)$ در T باشد. (ر. ک. شکل ۲.۴.)

اگر p یک نقطهٔ انباشتگی S باشد، از تعریف پیوستگی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$



شکل ۲.۴

هرگاه p یک نقطهٔ تنهای S باشد (نقطه‌ای از S که نقطهٔ انباشتگی S نیست)، آنگاه هر تابع مانند f که در p تعریف شده باشد در این نقطه پیوسته است، زیرا به ازای δی به قدر کافی کوچک، فقط یک نقطه مانند x هست که در $d_S(x, p) < \delta$ صدق می‌کند (این x همان p است)، و $d_T(f(p), f(p)) = 0$.

قضیهٔ ۱۶.۴ فرض کنیم $f : S \to T$ تابعی از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T) بوده، و $p \in S$. در این صورت، f وقتی، و فقط وقتی، در p پیوسته است که به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در S که به p همگرا باشد، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ در T به $f(p)$ همگرا گردد؛ یا، به صورت علامتی، داریم

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big).$$

برهان این قضیه شبیه به‌برهان قضیهٔ ۱۲.۴ است، و به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذارمی‌شود. (این قضیه را نیزمی‌توان ازقضیهٔ ۱۲.۴ نتیجه‌گرفت، ولی باید توجه داشت که چون بعضی از جمله‌های دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌توانند مساوی p باشند، در استدلال پیچیدگی مختصری ظاهر خواهد شد.)

قضیهٔ بالا معمولاً این طور توضیح می‌شود که در مورد تابعهای پیوسته می‌توان جای علامت حد را با علامت تابع عوض‌کرد. در تعویض این دو علامت باید احتیاط نمود، زیرا گاهی دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ همگرا است در حالی که $\{x_n\}$ واگرا می‌باشد.

مثال. هرگاه در فضای متری (S, d)، $x_n \to x$ و $y_n \to y$، آنگاه

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y)$$

(تمرین ۷.۴). اگر ρ متر مذکور در تمرین ۳۷.۳ با $S_1 = S_2 = S$ باشد، می‌توان تحقیق کرد که تابع d بر فضای متری $(S \times S, \rho)$ پیوسته است.

تبصره. پیوستگی تابع f در نقطهٔ p را یک خاصیت موضعی f نامیم، زیرا این خاصیت فقط به رفتار f درنزدیکی p بستگی دارد. هرخاصیت f که مربوط به تمام قلمرو f باشد یک خاصیت کلی نامیده می‌شود. بنا براین، پیوستگی f برقلمرو خود یک خاصیت کلی است.

۹.۴ پیوستگی تابعهای مرکب

قضیهٔ ۱۷.۴ فرض کنیم (S, d_S)، (T, d_T)، و (U, d_U) فضاهائی متری باشند، همچنین $f : S \to T$ و $g : f(S) \to U$ تابعهائی باشند، و h تابع مرکب این دو باشد که بر S با معادلهٔ زیرین تعریف می‌شود:

به ازای هر x در S، $h(x) = g(f(x))$.

هرگاه f در p و g در $f(p)$ پیوسته باشند، آنگاه h در p پیوسته است.

برهان. قرار می‌دهیم $b = f(p)$. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که

هرگاه $d_T(y, b) < \delta$ ، آنگاه $d_U(g(y), g(b)) < \varepsilon$.

به ازای این δ، δ'ی هست بقسمی که

هرگاه $d_S(x, p) < \delta'$ ، آنگاه $d_T(f(x), f(p)) < \delta$.

از تلفیق دو گزارهٔ بالا با فرض $y = f(x)$، نتیجه می‌شود که

هرگاه $d_S(x, p) < \delta'$ ، آنگاه $d_U(h(x), h(p)) < \varepsilon$،

پس h در p پیوسته است.

۱۰.۴ تابعهای مختلط وتابعهای برداری پیوسته

قضیهٔ ۱۸.۴ فرض کنیم تابعهای مختلط f و g در نقطهٔ p در فضای متری (S, d) پیوسته باشند. در این صورت $f+g$، $f-g$، و $f \cdot g$ هر یک در p پیوسته خواهد بود. اگر $g(p) \neq 0$، خارج قسمت f/g نیز در p پیوسته است.

برهان. اگر p یک نقطهٔ تنهای S باشد، قضیهٔ واضح است. درحالتی که p نقطهٔ انباشتگی S باشد، این قضیه را می‌توان از قضیهٔ ۱۳.۴ نتیجه گرفت.

البته، قضیه‌ای نظیر این قضیه برای تابعهای برداری وجود دارد، و می‌توان آن را هم با همین روش و با استفاده از قضیهٔ ۱۴.۴ ثابت کرد.

قضیهٔ ۱۹.۴ فرض کنیم تابعهای $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ در نقطهٔ p در فضای متری (S, d) پیوسته، و مقدارهای $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ در $\mathbf{R}^n$ باشند. در این صورت، هریک از تابعهای زیر در p پیوسته است: مجموع $\mathbf{f}+\mathbf{g}$، حاصلضرب $\lambda\mathbf{f}$ (به ازای هر عدد حقیقی λ)، حاصلضرب داخلی $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$، و هنج $\|\mathbf{f}\|$.

قضیهٔ ۲۰.۴ فرض کنیم n تابع حقیقی f_1، . . .، f_n بر یک زیرمجموعهٔ فضای متری (S, d_S) مانند A تعریف شده باشند، و $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. در این صورت، $\mathbf{f}$ در یک نقطهٔ A مانند p وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که هر یک از تابعهای f_1، . . .، و f_n در p پیوسته باشد.

برهان. اگر p نقطهٔ تنهای A باشد، قضیه واضح است. اگر p نقطهٔ انباشتگی A باشد، می بینیم وقتی که $x \to p$، $\mathbf{f}(x) \to \mathbf{f}(p)$ وقتی، و فقط وقتی، که به ازای هر

$$k = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } f_k(x) \to f_k(p).$$

۱۱.۴ مثالهائی از تابعهای پیوسته

فرض می‌کنیم S مساوی $\mathbf{C}$، یعنی صفحهٔ مختلط، باشد. بآسانی می‌توان نشان داد که تابعهای مختلط زیرین بر $\mathbf{C}$ پیوسته‌اند:

آ) تابعهای پایا، که به ازای هر $z \in \mathbf{C}$ با $f(z) = c$ تعریف می‌شوند؛

ب) تابع همانی، که به ازای هر $z \in \mathbf{C}$ با $f(z) = z$ تعریف می‌شود.

با بکار بردن مکرر قضیهٔ ۱۸.۴ معلوم می‌شود که هرچند جمله‌ای مانند

$$f(z) = a_۰ + a_۱ z + a_۲ z^۲ + \cdots + a_n z^n,$$

که در آن a_i ها عددهائی مختلط باشند، پیوسته است.

هرگاه S یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{C}$ باشد که بر آن چند جمله‌ای f صفر نشود، آنگاه $1/f$ بر S پیوسته خواهد بود. بنابراین، تابع گویای g/f، که در آن g و f چند جمله‌ای هستند، در نقطه‌هائی از $\mathbf{C}$ که مخرج صفر نشود، پیوسته است.

تابعهای حقیقی آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، نظیر تابعهای نمائی، تابعهای مثلثاتی، و تابعهای لگاریتمی، همه در هر نقطه که تعریف شده باشند پیوسته‌اند. در نتیجهٔ پیوستگی این تابعهای مقدماتی است که برای ارزیابی بعضی از حدها می‌توان حد متغیر را به جای گذاشتن «متغیر مستقل» در تابع گذاشت، مانند

$$\lim_{x \to ۰} e^x = e^۰ = ۱.$$

پیوستگی تابعهای نمائی و تابعهای مثلثاتی مختلط نتیجه‌ای است از پیوستگی تابعهای حقیقی متناظر با آنها و قضیهٔ ۲۰.۴.

۱۲.۴ پیوستگی و نقشهای معکوس مجموعه‌های باز یا بسته

با استفاده از مفهوم نقش معکوس می‌توان تابعهای پیوسته را به دو صورت کلی مهم توصیف کرد.

۲۱.۴ تعریف نقش معکوس. فرض کنیم $f : S \to T$ تابعی باشد از مجموعهٔ S به مجموعهٔ T. اگر Y یك زیرمجموعهٔ T باشد، نقش معکوس Y با f، که با $f^{-۱}(Y)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از بزرگترین زیر مجموعهٔ S که f آن را در Y می‌نگارد؛ یعنی،

$$f^{-۱}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y \text{ و } x \in S\}.$$

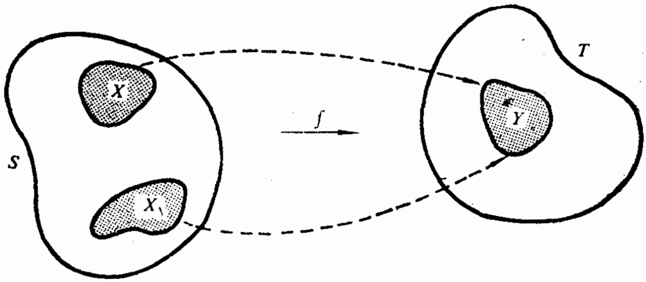
تبصره. اگر f تابع معکوس $f^{-۱}$ داشته باشد، نقش معکوس Y با f همان نقش Y با $f^{-۱}$ است، و در این حالت ابهامی در نماد $f^{-۱}(Y)$ وجود ندارند. همچنین توجه داشته باشید که اگر $A \subseteq B \subseteq T$، داریم $f^{-۱}(A) \subseteq f^{-۱}(B)$.

قضیهٔ ۲۲.۴ فرض کنیم $f : S \to T$ تابعی از S به T باشد. هرگاه $X \subseteq S$ و $Y \subseteq T$، آنگاه:

آ) از $X = f^{-۱}(Y)$ نتیجه می‌شود که $f(X) \subseteq Y$.

ب) از $Y = f(X)$ نتیجه می‌شود که $X \subseteq f^{-1}(Y)$.

اثبات قضیهٔ ۲۲.۴ تعبیرمستقیم تعریف علامتهای $f^{-1}(Y)$ و $f(X)$ است، و به خواننده واگذار می‌شود. باید توجه داشت که، درحالت کلی، نمی‌توان از $Y = f(X)$ رابطهٔ $X = f^{-1}(Y)$ را نتیجه گرفت. (ر. ک. مثال شکل ۳.۴.)



شکل ۳.۴

خاطرنشان می‌شود که گزاره‌های قضیهٔ ۲۲.۴ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y, \qquad X \subseteq f^{-1}[f(X)].$$

همچنین باید توجه داشت که به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ T مانند A و B،

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

قضیهٔ ۲۳.۴ فرض کنیم $f : S \to T$ تابعی از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T) باشد. در این صورت، f وقتی، و فقط وقتی، بر S پیوسته است که به‌ازای هر مجموعهٔ باز در T مانند Y، نقش معکوس $f^{-1}(Y)$ در S باز باشد.

برهان. فرض کنیم f بر S پیوسته، و Y در T باز باشد. نقطه‌ای مانند p در $f^{-1}(Y)$ اختیار می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که p یک نقطهٔ درونی $f^{-1}(Y)$ است. قرار می‌دهیم $y = f(p)$. چون Y باز است، $\varepsilon > 0$ ی وجود دارد بقسمی که $B_T(y; \varepsilon) \subseteq Y$. چون f در p پیوسته است، δی مثبتی وجود دارد بقسمی که $f(B_S(p; \delta)) \subseteq B_T(y; \varepsilon)$. از این روی،

$$B_S(p; \delta) \subseteq f^{-1}[f(B_S(p; \delta))] \subseteq f^{-1}[B_T(y; \varepsilon)] \subseteq f^{-1}(Y),$$

پس p یک نقطهٔ درونی $f^{-1}(Y)$ است.

برعکس، فرض می‌کنیم به‌ازای هر زیرمجموعهٔ باز در T مانند Y، $f^{-1}(Y)$ در S باز باشد. نقطه‌ای در S مانند p اختیار نموده قرار می‌دهیم $y = f(p)$. ثابت می‌کنیم که f در p پیوسته است. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، گوی $B_T(y; \varepsilon)$ در T باز است، بنابراین $f^{-1}(B_T(y; \varepsilon))$ در S باز خواهد بود.چون $p \in f^{-1}(B_T(y; \varepsilon))$، پس‌عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که $B_S(p; \delta) \subseteq f^{-1}(B_T(y; \varepsilon))$. بنابراین، $f(B_S(p; \delta)) \subseteq B_T(y; \varepsilon)$. از این روی، f در p پیوسته خواهد بود.

قضیهٔ ۲۴.۴ فرض کنیم $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T). در این صورت، f وقتی، و فقط وقتی، بر S پیوسته است که به‌ازای هر مجموعهٔ بسته در T مانند Y، نقش معکوس $f^{-1}(Y)$ در S بسته باشد.

برهان. هرگاه Y در T بسته باشد، آنگاه $T - Y$ در T باز است و

$$f^{-1}(T - Y) = S - f^{-1}(Y).$$

حال قضیهٔ ۲۳.۴ را می‌توان بکار برد.

چند مثال. نقش یک مجموعهٔ باز با یک نگاشت پیوسته لزوماً باز نیست. مثال ناقض ساده برای این مطلب تابع پایا است که تمام S را روی یک نقطه در $\mathbf{R}^1$ می‌نگارد. همچنین، نقش یک مجموعهٔ بسته با نگاشتی پیوسته لزوماً بسته نمی‌باشد. مثلاً، تابع حقیقی $f(x) = \arctan x$، $\mathbf{R}^1$ را روی بازهٔ باز $]-\pi/2, \pi/2[$ می‌نگارد.

۱۳.۴ تابعهای پیوسته برمجموعه‌های فشرده

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که نقش پیوستهٔ یک مجموعهٔ فشرده مجموعه‌ای است فشرده. این خاصیت کلی دیگری از تابعهای پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ ۲۵.۴ فرض کنیم $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T). هرگاه f بر یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ S مانند X پیوسته باشد، آنگاه نقش $f(X)$ یك زیر مجموعهٔ فشردهٔ T است؛ خصوصاً، $f(X)$ در T بسته و کراندار است.

برهان. فرض کنیم F یک پوشش باز $f(X)$ باشد، پس $f(X) \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. نشان می‌دهیم که تعدادی متناهی از A ها مجموعهٔ $f(X)$ را می‌پوشانند. چون f بر زیرفضای متری (X, d_S) پیوسته است، می‌توان قضیهٔ ۲۳.۴ را بکار برده نتیجه گرفت که هر $f^{-1}(A)$ در (X, d_S) باز است. $f^{-1}(A)$ ها تشکیل یک پوشش باز

X را می‌دهند. چون X فشرده است، تعدادی متناهی ازآنها X را می‌پوشانند، مثلاً $X \subseteq f^{-1}(A_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(A_p)$. از این روی

$$f(X) \subseteq f[f^{-1}(A_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(A_p)]$$
$$= f[f^{-1}(A_1)] \cup \ldots \cup f[f^{-1}(A_p)] \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_p ,$$

پس $f(X)$ فشرده است. به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۳۸.۳، می بینیم که $f(X)$ بسته و کراندار است.

تعریف ۲۶.۴ تابع $\mathbf{f} : S \to \mathbf{R}^k$ را بر S کراندار نامیم در صورتی که عددی مثبت مانند M باشد بقسمی که به‌ازای هر x در S، $\|\mathbf{f}(x)\| \leqslant M$.

چون $\mathbf{f}$ وقتی، و فقط وقتی، بر S کراندار است که $\mathbf{f}(S)$ یک زیرمجموعهٔ کراندار $\mathbf{R}^k$ باشد، پس می‌توان قضیهٔ زیر را از قضیهٔ ۲۵.۴ نتیجه گرفت.

قضیهٔ ۲۷.۴ فرض کنیم $\mathbf{f} : S \to \mathbf{R}^k$ تابعی باشد ازفضای متری S به‌فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^k$. هرگاه $\mathbf{f}$ بریک زیرمجموعهٔ فشردهٔ S مانند X پیوسته باشد، آنگاه $\mathbf{f}$ بر Xکراندار است.

این قضیه در مورد تابعهای حقیقی نتیجه‌های مهمی را دربر دارد. هرگاه f تابعی حقیقی، و بر X کراندار باشد، آنگاه $f(X)$ یک زیرمجموعهٔ کراندار $\mathbf{R}$ است. بنابراین، $f(X)$ دارای سوپرمم و اینفیمم خواهد بود. بعلاوه،

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ در } X،\qquad \inf f(X) \leqslant f(x) \leqslant \sup f(X).$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که اگر X فشرده باشد، تابع پیوستهٔ f عملاً مقدارهای $\inf f(X)$ و $\sup f(X)$ را خواهد گرفت.

قضیهٔ ۲۸.۴ فرض‌کنیم‌که $f : S \to \mathbf{R}$ تابعی باشد حقیقی از فضای متری S به‌فضای اقلیدسی $\mathbf{R}$. همچنین f بر یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ S مانند X پیوسته باشد. در این صورت، نقطه‌هائی مانند p و q در X وجود دارند بقسمی که

$$f(p) = \inf f(X) \qquad \text{و} \qquad f(q) = \sup f(X).$$

تبصره. چون به‌ازای هر x در X، $f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q)$، بنابراین عددهای $f(p)$ و $f(q)$ را، بترتیب، مقدارهای مینیمم و ماکزیمم مطلق یا کلی f بر X می‌نامیم.

برهان. بنابرقضیهٔ ۲۵.۴، $f(X)$ یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار $\mathbf{R}$ است. قرار می‌دهیم $m = \inf f(X)$. در این صورت، m چسبیده به $f(X)$ است و، چون

$f(X)$ بسته‌است، $m \in f(X)$. بنا براین، به‌ازای نقطه‌ای مانند p در X، $m = f(p)$. بهمین‌نحو،، معلوم می‌شود که نقطه‌ای مانند q در X هست که $f(q) = \sup f(X)$.

قضیهٔ ۲۹.۴ فرض کنیم که $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به‌فضای متری دیگر (T, d_T). همچنین f بر S یک به‌یک باشد، یعنی f^{-1} وجود داشته باشد. هرگاه S فشرده، و f بر S پیوسته باشد، آنگاه f^{-1} بر $f(S)$ پیوسته خواهد بود.

برهان. با توجه به‌قضیهٔ ۲۴.۴ (درمورد f^{-1})، کافی است نشان دهیم که به‌ازای هرمجموعهٔ بسته مانند X در S، نقش $f(X)$ در T بسته است. (توجه داشته باشید که $f(X)$ نقش معکوس X با f^{-1} می‌باشد.) چون X بسته، و S فشرده است، پس X (بنا برقضیهٔ ۳۹.۳) فشرده است. بنا براین، $f(X)$ (بنا بر قضیهٔ ۲۵.۴) فشرده خواهد بود، و در نتیجه $f(X)$ (بنا برقضیهٔ ۳۸.۳) بسته است، و اثبات بدین‌ترتیب تمام می‌شود.

مثال. این مثال نشان می‌دهد که فشردگی S در قضیهٔ ۲۹.۴ فرضی لازم است. فرض کنیم که $S = [0, 1[$ با متر متداول $\mathbf{R}^1$ باشد، و تابع مختلط f را درنظر می‌گیریم که با رابطهٔ زیرین تعریف می‌شود:

$$\text{به‌ازای } 0 \leqslant x < 1, \quad f(x) = e^{2\pi i x}.$$

f نگاشت پیوسته‌ای است یک به‌یک از بازهٔ نیمباز $[0, 1[$ روی دایرهٔ یکهٔ $|z| = 1$ در صفحهٔ مختلط. اما، f^{-1} در نقطهٔ $f(0)$ پیوسته نیست. مثلاً، اگر $x_n = 1 - 1/n$، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ به $f(0)$ همگرا است ولی $\{x_n\}$ در S همگرا نیست.

۱۴.۴ نگاشتهای توپولوژیك (همانسانیها)

تعریف ۳۰.۴ فرض کنیم که $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T). همچنین f بر S یک به‌یک باشد، پس تابع معکوس f^{-1} وجود دارد. هرگاه f بر S و f^{-1} بر $f(S)$ پیوسته باشند، آنگاه f را یک نگاشت **توپولوژیک** یا یک **همانسانی** می‌نامیم، و می‌گوئیم که فضاهای متری (S, d_S) و $(f(S), d_T)$ همانسان هستند.

هرگاه f یک همانسانی باشد، آنگاه f^{-1} نیز چنین است. قضیهٔ ۲۳.۴ نشان می‌دهد که یک همانسانی زیرمجموعه‌های باز S را روی زیر مجموعه‌های باز $f(S)$ می‌نگارد. همچنین زیرمجموعه‌های بستهٔ S را نیز روی زیر مجموعه‌های بستهٔ

$f(S)$ می‌نگارد.

هرخاصیت یک مجموعه که با هر نگاشت توپولوژیک محفوظ بماند یک خاصیت توپولوژیک نامیده می‌شود. بنابراین، خاصیتهای باز، بسته، یا فشرده بودن خاصیتهای توپولوژیک می‌باشند.

نوع مهمی از همانسانی یکمتری است. یکمتری تابعی است مانند $f:S\to T$ که بر S یک به‌یک است و متر را حفظ می‌کند؛ یعنی،

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ و } y \text{ در } S،\quad d_T(f(x), f(y)) = d_S(x, y).$$

اگر یک یکمتری از (S, d_S) به $(f(S), d_T)$ وجود داشته باشد، این دو فضای متری را یکمتر نامند.

نگاشتهای توپولوژیک مخصوصاً درنظریهٔ خمهای فضائی اهمیت دارند.مثلاً، یک کمان ساده نقش توپولوژیک یک بازه است، و یک خم بستهٔ ساده نقش توپولوژیک یک دایره می‌باشد.

۱۵.۴ قضیهٔ بولتزانو

این بخش به‌قضیهٔ مشهوری از بولتزانو اختصاص داده شده است. این قضیه دربارهٔ یک خاصیت کلی تابعهای پیوستهٔ حقیقی بر بازه‌های فشرده مانند $[a, b]$ در $\mathbf{R}$ می‌باشد. اگر نمودار f در a در بالای محور x و در b در پایین این محور قرار گیرد، بنا به‌قضیهٔ بولتزانو، نمودار f باید در جائی بین این دو نقطه از محور x بگذرد. اثبات ما برای این قضیه مبتنی است بر یک خاصیت موضعی از تابعهای پیوسته به نام خاصیت محفوظ ماندن علامت.

قضیهٔ ۳۱.۴ فرض کنیم f بر بازه‌ای مانند S در $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد. همچنین f در نقطهٔ c در S پیوسته باشد و $f(c) \neq 0$. دراین صورت، یک گوی یک بعدی مانند $B(c; \delta)$ هست بقسمی که $f(x)$ در $B(c; \delta) \cap S$ دارای علامت $f(c)$ می‌باشد.

برهان. فرض کنیم‌که $f(c) > 0$. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، δی مثبتی هست بقسمی‌که

$$\text{هرگاه } x \in B(c; \delta) \cap S،\quad \text{آنگاه}\quad f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

δی متناظر $\varepsilon = f(c)/2$ (این ε مثبت است) را اختیار می‌کنیم. در این صورت،

$$\text{هرگاه } x \in B(c; \delta) \cap S،\quad \text{آنگاه}\quad \frac{1}{2} f(c) < f(x) < \frac{3}{2} f(c).$$

پس در $B(c; \delta) \cap S$، $f(x)$ همان‌علامت $f(c)$ را دارد.اثبات‌برای حالت $f(c) < 0$ به‌همین‌گونه است، جزآن که در این حالت ε را مساوی $-\frac{1}{2} f(c)$ اختیار می‌کنیم.

قضیهٔ ۳۲.۴ (بولتزانو). فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ در $\mathbf{R}$ پیوسته باشد. همچنین $f(a)$ و $f(b)$ ناهمعلامت باشند؛ یعنی،

$$f(a)\, f(b) < 0.$$

در این صورت، دست کم یک نقطه مانند c در بازهٔ باز $]a, b[$ هست بقسمی که $f(c) = 0$.

برهان. برای روشن بودن وضع، فرض می‌کنیم که $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$. قرار می‌دهیم

$$A = \{x \mid x \in [a, b] \text{ و } f(x) \geqslant 0\}.$$

در این صورت، A ناتهی است زیرا که $a \in A$، و A از بالا به b کراندار می‌باشد. فرض کنیم که $c = \sup A$. در این صورت $a < c < b$. ثابت می‌کنیم که $f(c) = 0$.

اگر $f(c) \neq 0$، گویی یک بعدی مانند $B(c; \delta)$ وجود دارد که در آن f همان علامت $f(c)$ را دارد. اگر $f(c) > 0$، نقطه‌هائی‌مانند $x > c$ وجود دارند که درآنها $f(x) > 0$، و این با تعریف c متناقض است. هرگاه $f(c) < 0$، آنگاه $c - \delta/2$ یک کران بالائی برای A است، و این نیز با تعریف c متناقض می‌باشد. بنابراین باید $f(c) = 0$.

از قضیهٔ بولتزانو بسادگی می‌توان قضیهٔ مقدار میانی برای تابعهای پیوسته را نتیجه گرفت.

قضیهٔ ۳۳.۴ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر بازهٔ فشردهٔ S در $\mathbf{R}$ پیوسته باشد. همچنین فرض می‌کنیم دو نقطه مانند α و β $(\alpha < \beta)$ در S وجود داشته باشند بقسمی که $f(\alpha) \neq f(\beta)$. در این صورت، f هرمقدار بین $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ را در بازهٔ $]\alpha, \beta[$ بخود می‌گیرد.

برهان. فرض می‌کنیم k عددی بین $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ باشد. تابع g را بر $[\alpha, \beta]$ با معادلهٔ $g(x) = f(x) - k$ تعریف نموده، سپس قضیهٔ بولتزانو را در مورد g بکار می‌بریم.

از قضیهٔ مقدار میانی و قضیهٔ ۲۸.۴ نتیجه می‌شود که، نقش پیوستهٔ یک بازهٔ فشرده مانند S با تابعی حقیقی بازه‌ای است فشرده، یعنی، این نقش همان

$$[\inf f(S), \sup f(S)]$$

است. (اگر f بر S تابع پایائی باشد، بازهٔ بالا یک بازهٔ تبه شده می‌باشد.) دربخش

آینده این خاصیت به‌محدودهٔ کلیتر فضاهای متری وسعت داده خواهد شد.

۱۶.۴ همبندی

در این بخش مفهوم همبندی و رابطهٔ‌آن با پیوستگی توصیف می‌شود.

تعریف ۳۴.۴ فضای‌متری S را ناهمبند نامیم در صورتی که $S = A \cup B$، که در آن A و B دو مجموعهٔ ناتهی باز و ازهم جدا در S باشند. اگر S ناهمبند نباشد، گوئیم که S همبند است.

تبصره. یک زیرمجموعهٔ فضای متری S مانند X را همبند نامیم در صورتی که، وقتی آن را به‌عنوان زیرفضای متری S در نظر بگیریم، یک فضای متری همبند باشد.

چند مثال

۱. فضای متری $S = \mathbf{R} - \{0\}$ با متر اقلیدسی متداول ناهمبند است، زیرا این فضا عبارت است از اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی و باز و از هم جدا. این دو مجموعه عبارتند از مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت و مجموعهٔ عددهای حقیقی منفی.

۲. هر بازهٔ باز در $\mathbf{R}$ همبند است. این مطلب در بخش ۴.۳ به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۱.۳ ثابت شد.

۳. مجموعهٔ عددهای گویا، یعنی $\mathbf{Q}$، اگر به‌عنوان زیر فضای متری فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^1$ در نظر گرفته شود، ناهمبند خواهد بود. در حقیقت، $\mathbf{Q} = A \cup B$، که در آن A عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای کوچکتر از $\sqrt{2}$، و B مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای بزرگتر از $\sqrt{2}$ می‌باشد. بهمین طریق، معلوم می‌شود که هرگوی در $\mathbf{Q}$ ناهمبند است.

۴. هر فضای متری S حاوی زیرمجموعه‌های همبند ناتهی است. در واقع، به‌ازای هر نقطه مانند p در S، مجموعهٔ $\{p\}$ همبند است.

برای‌آن که مفهوم همبندی را با پیوستگی مربوط کنیم مفهوم تابع دو مقداری را معرفی می‌نمائیم.

تعریف ۳۵.۴ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر فضای متری S پیوسته باشد. f را بر S یک تابع دومقداری نامیم در صورتی که $f(S) \subseteq \{0, 1\}$.

با بیان دیگر می‌توان گفت که، یک تابع دو مقداری تابعی است پیوسته که تنها مقدارهای ممکن‌آن ۰ و ۱ می‌باشند. اگر فضای متری $T = \{0, 1\}$ دارای متر

مجزا باشد، می‌توان تابع دو مقداری f را به‌عنوان تابعی پیوسته از فضای متری S به فضای متری T درنظر گرفت. یادآوری می‌کنیم که هر زیر مجموعهٔ یک فضای، متری مجزا مانند T در T هم باز است و هم بسته.

قضیهٔ ۳۶.۴ فضای متری S وقتی، و فقط وقتی، همبند است که هر تابع دو مقداری بر S تابعی پایا باشد.

برهان. فرض می‌کنیم S همبند، و f تابعی دو مقداری بر S باشد. باید نشان دهیم که f تابع پایائی است. قرار می‌دهیم $A = f^{-1}(\{0\})$ و $B = f^{-1}(\{1\})$، یعنی نقشهای معکوس زیرمجموعه‌های $\{0\}$ و $\{1\}$. چون $\{0\}$ و $\{1\}$ زیرمجموعه‌های باز فضای متری مجزای $\{0, 1\}$ هستند، پس A و B هردو در S بازند. از این روی، $S = A \cup B$، که درآن A و B مجموعه های باز ازهم جدا می‌باشند. اما چون S همبند است، یا A تهی است و $B = S$، یا B تهی است و $A = S$. در هرحالت، f بر S تابع پایائی است.

بر عکس، فرض می‌کنیم که S ناهمبند باشد. پس $S = A \cup B$، که در آن A و B دو زیر مجموعهٔ باز نا تهی و ازهم جدای S می‌باشند. تابعی دو مقداری بر S را نشان می‌دهیم که پایا نباشد. فرض می‌کنیم

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } x \in A، \\ 1 & \text{اگر } x \in B، \end{cases}$$

چون A و B ناتهی هستند، f هر دو مقدار ۰ و ۱ را می‌گیرد، پس f پایا نیست. همچنین، f بر S پیوسته است، زیرا نقش معکوس هر زیرمجموعهٔ باز $\{0, 1\}$ در S باز است.

در زیر نشان می‌دهیم که نقش پیوستهٔ یک مجموعهٔ همبند مجموعه‌ای است همبند.

قضیهٔ ۳۷.۴ فرض کنیم $f: S \to M$ تابعی باشد از فضای متری S به فضای متری دیگر M. همچنین X یک زیرمجموعهٔ همبند S باشد. هرگاه f بر X پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ یک زیرمجموعهٔ همبند M خواهد بود.

برهان. فرض کنیم g تابعی دو مقداری بر $f(X)$ باشد. نشان می‌دهیم که g پایا است. تابع مرکب h را، که بر X با معادلهٔ $h(x) = g(f(x))$ تعریف می‌شود، درنظر می‌گیریم. در این صورت، h بر X پیوسته است، و تنها می‌تواند مقدارهای ۰ و ۱ را بگیرد، پس h تابعی است دو مقداری بر X. چون X همبند است، h بر X تابع پایائی است، و ازاین نتیجه می‌شود که g بر $f(X)$ پایا می‌باشد. بنابراین،

$f(X)$ همبند خواهد بود.

مثال. چون هر بازه مانند X در $\mathbf{R}^1$ همبند است، پس هر نقش پیوستهٔ $f(X)$ همبند می‌باشد. اگر f تابعی حقیقی باشد، نقش $f(X)$ بازهٔ دیگری خواهد بود. اگر مقدارهای f در $\mathbf{R}^n$ باشند، نقش $f(X)$ را یک خم در $\mathbf{R}^n$ می‌نامیم. بنابراین، هر خم در $\mathbf{R}^n$ همبند است.

قضیهٔ زیرین، که توسیع قضیهٔ بولتزانو است، نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۳۷.۴.

قضیهٔ ۳۸.۴ (قضیهٔ مقدار میانی برای تابعهای پیوستهٔ حقیقی). فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر یک زیر مجموعهٔ همبند $\mathbf{R}^n$ مانند S پیوسته باشد. هرگاه f دو مقدار مختلف، مثلاً a و b، در S را بگیرد، آنگاه به ازای هر عدد حقیقی مانند c بین a و b، نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}$ در S هست بقسمی که $f(\mathbf{x}) = c$.

برهان. نقش $f(S)$ یک زیرمجموعهٔ همبند $\mathbf{R}^1$ است. ازاین روی، $f(S)$ بازه‌ای است حاوی a و b (ر. ک. تمرین ۳۸.۴). هرگاه مقداری مانند c بین a و b در $f(S)$ نباشد، آنگاه $f(S)$ ناهمبند خواهد بود.

۱۷.۴ مؤلفه‌های یک فضای متری

در این بخش نشان می‌دهیم که هر فضای متری S را می‌توان به طور منحصر بفرد به صورت اجتماع «قطعات» همبندی به نام مؤلفه بیان کرد. ابتدا قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۳۹.۴ فرض کنیم F دسته‌ای از زیرمجموعه‌های همبند فضای متری S باشد بقسمی که اشتراک $T = \bigcap_{A\in F} A$ تهی نباشد. در این صورت، اجتماع $U = \bigcup_{A\in F} A$ همبند است.

برهان. چون $T \neq \varnothing$، نقطه‌ای مانند t در T وجود دارد. فرض می‌کنیم f تابعی دو مقداری بر U باشد. با اثبات این که به‌ازای هر x در U، $f(x)=f(t)$، نشان می‌دهیم که f بر U تابعی پایا است. هرگاه $x \in U$، آنگاه به ازای Aای در F، $x \in A$. چون A همبند است، f بر A پایاست و، چون $t \in A$، پس

$$f(x) = f(t).$$

هر نقطه در فضای متری S مانند x دست‌کم به یکی از زیرمجموعه‌های همبند S مثلاً $\{x\}$، تعلق دارد. بنا بر قضیهٔ ۳۹.۴، اجتماع همهٔ زیرمجموعه‌های همبند حاوی x نیز همبند است. این اجتماع را یک مؤلفهٔ S می‌نامیم، و به $U(x)$ نشان می‌دهیم.

بنا براین، $U(x)$ بزرگترین زیرمجموعهٔ همبند S است که حاوی x می‌باشد.

قضیهٔ ۴۰.۴ هر نقطه از فضای متری S فقط به یکی از مؤلفه‌های S تعلق دارد. با بیان دیگر می‌توان گفت که، مؤلفه‌های S دسته‌ای را تشکیل می‌دهند از مجموعه‌هائی ازهم جدا که اجتماعشان مساوی S است.

برهان. دو مؤلفهٔ متمایز نمی‌توانند حاوی نقطه‌ای مانند x باشند؛ زیرا در غیر این صورت (بنا بر قضیهٔ ۳۹.۴) اجتماع آنها مجموعه‌ای همبند و حاوی x است و از آن دو مؤلفه بزرگتر می‌باشد.

۱۸.۴ همبندی کمانوار

در این بخش به توصیف خاصیت خاصی به نام همبندی کمانوار می‌پردازیم. بعضی از مجموعه‌های همبند (نه همهٔ آنها) در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ دارای این خاصیت می‌باشند.

تعریف ۴۱.۴ مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را همبند کمانوار نامیم درصورتی که، به ازای هر دو نقطه مانند $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در S، تابعی پیوسته مانند $\mathbf{f} : [\text{۰}, \text{۱}] \to S$ وجود داشته باشد بقسمی که

$$\mathbf{f}(\text{۰}) = \mathbf{a} \quad \text{و} \quad \mathbf{f}(\text{۱}) = \mathbf{b}.$$

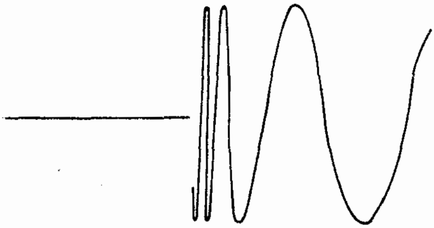
تبصره. یک چنین تابع را یک گذر از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ می‌نامیم. اگر $\mathbf{f}(\text{۰}) \neq \mathbf{f}(\text{۱})$، گوئیم نقش $[\text{۰}, \text{۱}]$ با $\mathbf{f}$ کمانی است که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را به هم وصل می‌کند. بنا براین، S همبند کمانوار است در صورتی که هر دو نقطهٔ متمایز در S را بتوان با کمانی در S به هم وصل کرد. مجموعه‌های همبند کمانوار را همبند گذروار نیز می‌نامند. اگر به ازای $\text{۰} \leqslant t \leqslant \text{۱}$، $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{b} + (\text{۱} - t)\mathbf{a}$، خمی که $\mathbf{a}$ را به $\mathbf{b}$ وصل می‌کند یک پاره خط نامیده می‌شود.

چند مثال

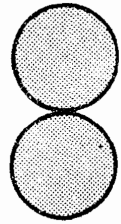
۱. هر مجموعهٔ کوژ در $\mathbf{R}^n$ همبند کمانوار است، زیرا هر پاره خطی که دو نقطهٔ یک چنین مجموعه‌ای را به هم وصل کند در آن قرار دارد. مخصوصاً، هرگوی n بعدی همبند کمانوار است.

۲. مجموعه‌ای که در شکل ۴.۴ نشان داده شده است (یعنی اجتماع دو گردهٔ بستهٔ مماس برهم) همبند کمانوار است.

۳. مجموعه‌ای که در شکل ۵.۴ می‌بینید عبارت است از آن نقطه‌هائی که بر خم



شکل ۵.۴



شکل ۴.۴

توصیف شده با $y = \sin(1/x)$، $0 < x \leqslant 1$، قراردارند، به‌انضمام نقاط پـاره خـط افقی $-1 \leqslant x \leqslant 0$. این مجمـوعـه همبند است ولـی همبند کمانوار نیست (تمرین ۴۶.۴).

قضیهٔ زیرین مفهوم همبندی کمانوار را با همبندی مربوط می‌سازد.

قضیهٔ ۴۲.۴ هر مجموعهٔ همبند کمانوار مانند S در $\mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای همبند است.

برهان. فرض می‌کنیم g تابعی دو مقـداری بر S باشد. ثابت می کنیم که g بر S تابعی است پایا. نقطه‌ای مـانند $\mathbf{a}$ در S اختیار می‌کنیم. اگـر $\mathbf{x} \in S$، $\mathbf{a}$ را به $\mathbf{x}$ با کمانی مانند Γ در S وصل می‌نمائیم. چـون Γ همبند است، g بر Γ پایـا می‌باشد، پس $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a})$. ولی، چون $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ دلخـواه S است، پس g بر S تابع پایائی است. بنابراین، S همبند می‌باشد.

قبلاً دیدیم که مجموعه‌های همبندی هستند که همبند کمـانوار نمی‌باشند. اما، این دو مفهوم برای مجموعه‌های باز هم‌ارز یکدیگرند.

قضیهٔ ۴۳.۴ هر مجموعهٔ همبند باز در $\mathbf{R}^n$ همبند کمانوار است.

برهان. فرض می‌کنیم S مجموعـه‌ای همبند و بـاز در $\mathbf{R}^n$ باشد، و $\mathbf{x} \in S$. نشان می‌دهیم‌که $\mathbf{x}$ را می‌توان به هر نقطه در S مانند $\mathbf{y}$ به وسیلهٔ کمانی در S وصل نمود. فرض می‌کنیم A زیرمجموعهٔ نقطه‌هائی از S باشد که می‌توان آنهـا را به $\mathbf{x}$ وصل نمود، و قرار می‌دهیـم $B = S - A$. در این صـورت، $S = A \cup B$، و A و B ازهم جدا هستند. نشان می‌دهیم که A و B هر دو در $\mathbf{R}^n$ بازند.

فرض کنیم که $\mathbf{a} \in A$ و $\mathbf{a}$ را با کمانی مـانند Γ در S به $\mathbf{x}$ وصل می‌کنیم. چون $\mathbf{a} \in S$ و S باز است، گویی n بعدی مانند $B(\mathbf{a})$ جزء S وجود دارد. هر نقطه مانند $\mathbf{y}$ در $B(\mathbf{a})$ را می‌توان با پاره خطی (در S) به $\mathbf{a}$، و سپس به $\mathbf{x}$ بـا Γ وصل نمود.

بنا براین، اگر $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a})$، $\mathbf{y} \in A$. یعنی، $B(\mathbf{a}) \subseteq A$، و در نتیجه A باز است.

برای این که ببینیم B نیز باز است، فرض می‌کنیم که $\mathbf{b} \in B$. در این صورت، چون S باز است، گویی n بعدی مانند $B(\mathbf{b})$ جزء S وجود دارد. اما اگر نقطه‌ای مانند $\mathbf{y}$ در $B(\mathbf{b})$ را بتوان با کمانی، مثلاً Γ'، در S به $\mathbf{x}$ وصل‌کرد، خود $\mathbf{b}$ را نیز می‌توان با کمانی به $\mathbf{x}$ وصل نمود (نخست $\mathbf{b}$ را با پاره خطی در $B(\mathbf{b})$ به $\mathbf{y}$ وصل می‌کنیم و سپس از کمان Γ' استفاده می‌نمائیم). اما چون $\mathbf{b} \notin A$، هیچ نقطهٔ $B(\mathbf{b})$ نمی‌تواند در A باشد. یعنی، $B(\mathbf{b}) \subseteq B$، پس B باز است.

بنا براین، تجزیهٔ $S = A \cup B$ وجود دارد، که در آن A و B در $\mathbf{R}^n$ مجموعه‌هائی باز و از هم جدا هستند. بعلاوه، چون $\mathbf{x} \in A$، A تهی نیست. چون S همبند است، پس B باید تهی باشد، یعنی $A = S$. اکنون همبند کمانوار بودن A واضح است، زیرا هر دو نقطهٔ آن را می‌توان براحتی با کمانی به هم وصل نمود. برای این کار کافی است هر یک را با کمانی به $\mathbf{x}$ وصل‌کرد. بنا براین، S همبند کمانوار است، و برهان تمام است.

تبصره. گذر $\mathbf{f} : [0, 1] \to S$ را چند ضلعی نامیم اگر نقش $[0, 1]$ با $\mathbf{f}$ عبارت باشد از اجتماع تعدادی متناهی پاره خط. همان استدلالی که برای اثبات قضیهٔ ۴۳.۴ بکار رفت نیز نشان می‌دهد که هر مجموعهٔ همبند باز در $\mathbf{R}^n$ چند ضلعی‌وار همبند است. یعنی، هر دو نقطه از این مجموعه را می‌توان با یک کمان چند ضلعی در داخل مجموعه به هم وصل نمود.

قضیهٔ ۴۴.۴ هر مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^n$ مانند S را می‌توان به یک، و فقط به یک، طریق به صورت اجتماع تعدادی شمارشپذیر از مجموعه‌های همبند باز و از هم جدا بیان کرد.

برهان. از قضیهٔ ۴۰.۴ معلوم می‌شود که، مؤلفه‌های S تشکیل دسته‌ای از مجموعه‌های ازهم جدا می‌دهند که اجتماع آن مساوی S است. هر مؤلفهٔ S مانند T باز است، زیرا هرگاه $\mathbf{x} \in T$، آنگاه گویی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ محتوا در S وجود دارد. چون $B(\mathbf{x})$ همبند است، پس $B(\mathbf{x}) \subseteq T$، یعنی T باز خواهد بود. با توجه به قضیهٔ لیندلف (قضیهٔ ۲۸.۳)، نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های S تشکیل دسته‌ای شمارشپذیر می‌دهند، و بنا بر قضیهٔ ۴۰.۴، تجزیهٔ S به مؤلفه‌هایش منحصر بفرد می‌باشد.

تعریف ۴۵.۴ یک مجموعه در $\mathbf{R}^n$ را یک ناحیه نامیم در صورتی که مساوی اجتماع مجموعه‌ای همبند و باز با بعضی، یا هیچ، یا همهٔ نقطه‌های کرانه‌ای آن باشد.

یک ناحیه را باز نامیم در صورتی که شامل هیچ نقطهٔ کرانه‌ای نباشد. اگر ناحیه‌ای همهٔ نقطه‌های کرانه‌ای خود را دربر داشته باشد، آن را بسته می‌خوانیم.

تبصره. بعضی از نویسندگان، مخصوصاً در صفحهٔ مختلط، به جای اصطلاح ناحیهٔ باز اصطلاح قلمرو را بکار می‌برند.

۱۹.۴ پیوستگی یکشکل

فرض می‌کنیم f تابعی باشد برفضای متری (S, d_S) به فضای متری‌دیگر (T, d_T)، و نیز فرض می‌کنیم که f بر یک زیرمجموعهٔ S مانند A پیوسته باشد. در این صورت، به ازای نقطهٔ p داده شده در A و هرعدد $\varepsilon > ۰$، عددی مانند $\delta > ۰$ (وابسته به p و ε) هست بقسمی که هرگاه $x \in A$ و

$$d_S(x, p) < \delta \text{، آنگاه } d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

عموماً نمی‌توان انتظار داشت که به ازای ε ثابتی، مقدارهای δ برای همهٔ نقاط p در A یکی باشند. ممکن است در حالتی این خاصیت برقرار باشد. اگر چنین باشد، می‌گوئیم که f بر A پیوستهٔ یکشکل است.

تعریف ۴۶.۴ فرض کنیم که $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T). دراین صورت، می‌گوئیم که f بر یک زیرمجموعهٔ S مانند A پیوستهٔ یکشکل است در صورتی که شرط زیرین برقرار باشد:

به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، یک مقدار مثبت δ (فقط تابع ε) وجود داشته باشد بقسمی که هرگاه $x \in A$، $p \in A$، و

$$d_S(x, p) < \delta \text{، آنگاه } d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon. \quad (۶)$$

برای تأکید در تفاوت بین پیوستگی بر A و پیوستگی یکشکل بر A، مثالهای زیرین از تابعهای حقیقی را درنظر می‌گیریم.

چند مثال

۱. به ازای $x > ۰$، قرار می‌دهیم $f(x) = ۱/x$، و فرض می‌کنیم که $A =]۰, ۱]$. این تابع بر A پیوسته است ولی براین‌مجموعه پیوستهٔ یکشکل نیست. برای اثبات این مطلب، ε را مساوی ۱۰ اختیار می‌کنیم، و فرض می‌کنیم متناظر آن بتوان δای بین ۰ و ۱ اختیار کرد که در شرط تعریف پیوستگی یکشکل‌صدق‌کند. با انتخاب $x = \delta$ و $p = \delta/۱۱$، داریم $|x - p| < \delta$ و

$$| f(x) - f(p) | = \frac{۱۱}{\delta} - \frac{۱}{\delta} = \frac{۱۰}{\delta} > ۱۰ .$$

از این روی، به ازای این دو نقطه، همـواره $| f(x) - f(p) | > ۱۰$، و این با تعریف پیوستگی یکشکل تناقض دارد.

۲. اگـر $x \in \mathbf{R}^۱$، قـرار می‌دهیم $f(x) = x^۲$، و مانند بالا فـرض می‌کنیم کـه $A =]۰, ۱]$. این تابع بر A پیوستهٔ یکشکل است. برای اثبات آن، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} | f(x) - f(p) | &= | x^۲ - p^۲ | \\ &= | (x - p)(x + p) | < ۲ | x - p |. \end{aligned}$$

هـرگاه $| x - p | < \delta$، آنگاه $| f(x) - f(p) | < ۲\delta$. از این روی، چنانچـه ε داده شده باشد، کافـی است δ را مساوی $\varepsilon/۲$ اختیار کنیـم. با این انتخاب، به ازای هر x و p که $| x - p | < \delta$، خواهیم داشت

$$| f(x) - f(p) | < \varepsilon.$$

این مطلب نشان می‌دهد که f بر A پیوستهٔ یکشکل است.

تابع مثال ۲ بر $\mathbf{R}^۱$ پیوستهٔ یکشکل نیست. اثبات این مطلب تمـرین آموزنده‌ای خواهد بود.

۲۰.۴ پیوستگی یکشکل و مجموعه‌های فشرده

از پیوستگـی یکشکل بر A پیوستگـی بر A نتیجـه می‌شود. (تحقیق این مطلب به خواننده واگذار می‌شود.) اگر A فشرده باشد، عـکس این مطلب نیز درست است.

قضیهٔ ۴۷.۴ (هاینه). فرض کنیم $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T). همچنین A یک زیرمجمـوعهٔ فشردهٔ S، و f بـر A پیوسته باشد. در این صورت، f بر A پیوستهٔ یکشکل است.

برهان. فرض کنیم که $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. در این صورت، به ازای هر نقطه مانند a در A، گویی مـانند $B_S(a; r)$ هست که شعاع آن r بـه a بستگی داشته، و همچنین،

هرگاه $x \in B_S(a; r) \cap A$، آنگاه $d_T(f(x), f(a)) < \varepsilon/۲$.

دستهٔ همهٔ گویهائی مانند $B_S(a; r/۲)$ با شعاع $r/۲$ را در نظر می‌گیریم. این‌گویها

A را می‌پوشانند و، چون A فشرده است، تعدادی متناهی از آنها نیز A را می‌پوشانند، مثلاً

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_S\left(a_k; \frac{r_k}{2}\right).$$

در هر یک از گویهای $B(a_k; r_k)$، که شعاعشان دوبرابر شعاع گویهای قبلی است، داریم

هرگاه $x \in B_S(a_k; r_k) \cap A$، آنگاه $d_T(f(x), f(a_k)) < \varepsilon/2$.

فرض می‌کنیم که δ مینیمم عددهای $r_1/2$، . . . ، $r_m/2$ باشد. نشان می‌دهیم که این δ متناظر است با ε در تعریف پیوستگی یکشکل.

برای این منظور، دو نقطه مانند x و p را در A بقسمی اختیار می‌کنیم که $d_S(x, p) < \delta$. بنا بربحث بالا، گویی‌مانند $B_S(a_k; r_k/2)$ وجود دارد که حاوی نقطهٔ x باشد، پس

$$d_T(f(x), f(a_k)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

از نامساوی مثلثی نتیجه می‌گیریم که

$$d_S(p, a_k) \leqslant d_S(p, x) + d_S(x, a_k) < \delta + \frac{r_k}{2} \leqslant \frac{r_k}{2} + \frac{r_k}{2} = r_k.$$

بنابراین، $p \in B_S(a_k; r_k) \cap S$، پس نامساوی $d_T(f(p), f(a_k)) < \varepsilon/2$ نیز برقرار است. چون بار دیگر از نامساوی مثلثی استفاده کنیم، حاصل می‌شود

$$d_T(f(x), f(p)) \leqslant d_T(f(x), f(a_k)) + d_T(f(a_k), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

و بدین ترتیب اثبات تمام می‌شود.

۴.۲۱ قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای انقباضها

فرض کنیم $f : S \to S$ تابعی باشد از فضای متری (S, d) در خودش. نقطهٔ p در S را یک نقطهٔ ثابت f می‌نامیم درصورتی که $f(p) = p$. تابع f را یک انقباض S نامیم در صورتی که عددی مثبت مانند $\alpha < 1$ (به نام پایای انقباض) وجود داشته باشد بقسمی که

به ازای هر x و y در S، $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$. (۷)

واضح است که یک انقباض هر فضای متری S بر این فضا پیوستهٔ یکشکل می‌باشد.

قضیهٔ ۴.۴۸ (قضیهٔ نقطهٔ ثابت). هر انقباض فضای متری تام S مانند f دارای نقطهٔ ثابت منحصر بفردی مانند p است.

برهان. اگر p و p' دو نقطهٔ ثابت f باشند، از (۷) نتیجه می‌گیریم که $d(p, p') \leqslant \alpha d(p, p')$، پس $d(p, p') = 0$ و $p = p'$.

بنابراین، f حداکثر یک نقطهٔ ثابت دارد.

برای اثبات این که f چنین نقطه‌ای دارد، یک نقطهٔ دلخواه مانند x را در S اختیار نموده، دنبالهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$x, f(x), f(f(x)), \cdots$$

یعنی، به استقرا دنبالهٔ $\{p_n\}$ را به صورت زیرین تعریف می‌کنیم:

$$p_0 = x, \; p_{n+1} = f(p_n), \; n = 0, 1, 2, \cdots.$$

ثابت می‌کنیم که $\{p_n\}$ به یک نقطهٔ ثابت f همگرا است. ابتدا نشان می‌دهیم که $\{p_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است. از (۷) بر می‌آید که

$$d(p_{n+1}, p_n) = d(f(p_n), f(p_{n-1})) \leqslant \alpha d(p_n, p_{n-1}),$$

پس، به استقرا، خواهیم داشت

$$d(p_{n+1}, p_n) \leqslant \alpha^n d(p_1, p_0) = c\alpha^n,$$

که در آن $c = d(p_1, p_0)$. با استفاده از نامساوی مثلثی، به ازای $m > n$، داریم

$$d(p_m, p_n) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} d(p_{k+1}, p_k) \leqslant c \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k = c\,\frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} < \frac{c}{1-\alpha}\alpha^n.$$

چون وقتی که $n \to \infty$، $\alpha^n \to 0$، نامساوی بالا نشان می‌دهد که $\{p_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است. اما S تام است، پس نقطه‌ای مانند p در S هست بقسمی که $p_n \to p$. حال، با توجه به پیوستگی f، نتیجه می‌گیریم که

$$f(p) = f(\lim_{n\to\infty} p_n) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = p,$$

پس p یک نقطهٔ ثابت f است، و برهان قضیه تمام خواهد بود.

بسیاری از قضیه‌های وجودی مهم در آنالیز نتیجه‌های ساده‌ای از قضیهٔ نقطهٔ ثابت

می‌باشند. در این مورد مثالهائی در تمرینهای ۳۶.۷ و ۳۷.۷ داده شده‌اند. کتاب مرجع ۴.۴ کاربردهائی از قضیهٔ نقطهٔ ثابت را در آنالیز عددی نشان می‌دهد.

۲۲.۴ ناپیوستگیهای توابع حقیقی

تا پایان این فصل به خاصیتهای مخصوص تابعهای حقیقی که بر زیر بازه‌های $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند اختصاص دارد.

فرض می‌کنیم f بر بازهٔ $]a, b[$ تعریف شده باشد، و $c \in [a, b[$. اگر وقتی‌که با مقدارهای بزرگتر از c، $x \to c$ داشته باشیم $f(x) \to A$، می‌گوئیم A حد دست راستی f در c است، و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to c+} f(x) = A.$$

حد دست راستی A را با نماد $f(c+)$ نیز نشان می‌دهیم. این مطلب با اصطلاحهای ε و δ بدین معنی است که به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند δ هست بقسمی که هرگاه $c < x < c + \delta < b$، آنگاه $|f(x) - f(c+)| < \varepsilon$.

توجه داشته باشید که لازم نیست f در خود c تعریف شده باشد. اگر f در c تعریف شده باشد و $f(c+) = f(c)$، می‌گوئیم که f از راست در c پیوسته است.

اگر $c \in]a, b]$، حدهای دست چپی و پیوستگی از چپ در c را می‌توان به همین نحو تعریف کرد.

هرگاه $a < c < b$، آنگاه f در c وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که

$$f(c) = f(c+) = f(c-).$$

اگر f در c پیوسته نباشد، گوئیم c یک ناپیوستگی f است. در این حالت یکی از شرطهای زیرین برقرار است:

آ) $f(c+)$ یا $f(c-)$ وجود ندارد؛
ب) $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو وجود دارند ولی با یکدیگر متساوی نیستند؛
ج) $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو وجود دارند و

$$f(c+) = f(c-) \neq f(c).$$

در حالت (ج)، نقطهٔ c یک ناپیوستگی رفع شدنی نامیده می‌شود، زیرا با تعریف مجدد f در c و انتخاب مقدار $f(c+) = f(c-)$ در c برای f می‌توان این ناپیوستگی را از بین برد. در حالتهای (آ) و (ب)، c را یک ناپیوستگی رفع-

ناشدنی می‌نامند زیرا این ناپیوستگی با تعریف مجدد f در c رفع شدنی نیست.

تعریف ۴۹.۴ فرض کنیم f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشد. هرگاه c یک نقطهٔ درونی $[a, b]$ باشد و $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو وجود داشته باشند، آنگاه

آ) $f(c) - f(c-)$ را جهش دست چپی f در c،

ب) $f(c+) - f(c)$ را جهش دست راستی f در c،

ج) $f(c+) - f(c-)$ را جهش f در c می‌نامیم.

هرگاه یکی از سه عدد بالا صفر نباشد، آنگاه می‌گوئیم که c یک ناپیوستگی جهشی f است.

در مورد نقطه‌های انتهائی a و b، تنها جهشهای یکطرفی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی جهش دست راستی در a، $f(a+) - f(a)$، و جهش دست چپی در b، $f(b) - f(b-)$.

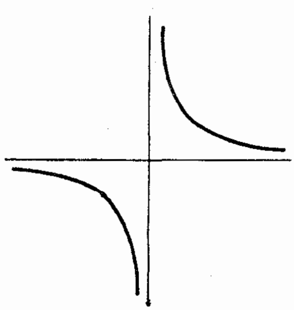
چند مثال

۱. تابع f چنین تعریف شده است که $f(\circ) = A$، و اگر $x \neq \circ$، $f(x) = x/|x|$. بدون توجه به مقدار A، f در $\circ$ یک ناپیوستگی جهشی دارد. در اینجا $f(\circ+) = ۱$ و $f(\circ-) = -۱$. (ر. ک. شکل ۶.۴.)

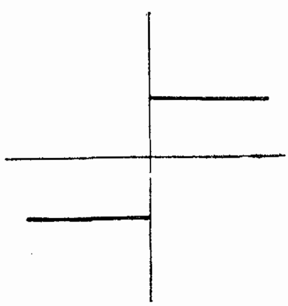
۲. تابع f چنین تعریف شده است که $f(\circ) = \circ$، و اگر $x \neq \circ$، $f(x) = ۱$. f در $\circ$ یک ناپیوستگی جهشی رفع شدنی دارد. در این حالت

$$f(\circ+) = f(\circ-) = ۱.$$

۳. تابع f چنین تعریف شده است که $f(\circ) = A$، و اگر $x \neq \circ$،



شکل ۷.۴

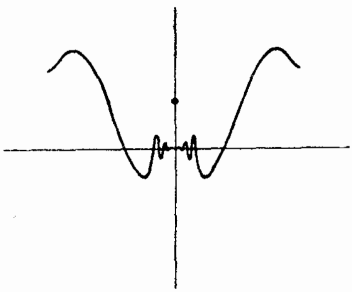


شکل ۶.۴

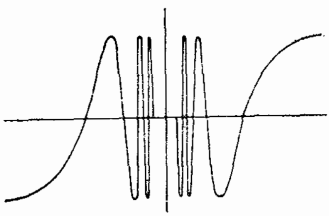
$f(x) = 1/x$. f یک ناپیوستگی رفع ناشدنی در ۰ دارد. در این حالت نه $f(0+)$ وجود دارد نه $f(0-)$. (ر. ک. شکل ۷.۴.)

۴. تابع f چنین تعریف شده است که $f(0) = A$، و اگر $x \neq 0$، $f(x) = \sin(1/x)$. f یک ناپیوستگی رفع ناشدنی در ۰ دارد، زیرا نه $f(0+)$ وجود دارد و نه $f(0-)$. (ر. ک. شکل ۸.۴.)

۵. تابع f چنین تعریف شده است که $f(0) = 1$، و اگر $x \neq 0$، $f(x) = x\sin(1/x)$. f یک ناپیوستگی جهشی رفع شدنی در ۰ دارد، زیرا $f(0+) = f(0-) = 0$. (ر. ک. شکل ۹.۴.)



شکل ۹.۴



شکل ۸.۴

۲۳.۴ تابعهای یکنوا

تعریف ۵۰.۴ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر یك زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند S تعریف شده باشد. f را بر S صعودی (یا نانزولی) نامیم درصورتی که به‌ازای هردو نقطه مانند x و y در S،

$$x < y \quad \text{رابطهٔ} \quad f(x) \leqslant f(y) \quad \text{را ایجاب کند.}$$

هرگاه از $x < y$ رابطهٔ $f(x) < f(y)$ نتیجه شود، آنگاه می‌گوئیم که f بر S صعودی اکید است. (تابعهای نزولی به همین نحو تعریف می‌شوند.) اگر تابعی بر مجموعهٔ S صعودی یا نزولی باشد، گوئیم این تابع بر S یکنوا است.

هرگاه f تابعی صعودی باشد، آنگاه f ــ نزولی است. به‌دلیل این واقعیت ساده، در بسیاری از مواقع که با تابعهای یکنوا سروکار داریم، کافی است فقط فرض کنیم که تابعها صعودیند.

ثابت می‌کنیم که هر تابع یکنوا بر یک بازهٔ فشرده، همواره بر این بازه حد دست راستی و حد دست چپی متناهی دارد. از این روی، باید ناپیوستگیهای آن (در صورت وجود) از نوع ناپیوستگی جهشی باشند.

قضیهٔ ۵۱.۴ هرگاه f بر $[a,b]$ صعودی باشد، آنگاه به‌ازای هر c در $]a,b[$، $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو وجود دارند و

$$f(c-) \leqslant f(c) \leqslant f(c+).$$

در نقطه‌های انتهائی

$$f(a) \leqslant f(a+) \quad \text{و} \quad f(b-) \leqslant f(b).$$

برهان. قرار می‌دهیم $A = \{f(x) \mid a < x < c\}$. چون f صعودی است، این مجموعه از بالا به $f(c)$ کراندار می‌باشد. فرض می‌کنیم که $\alpha = \sup A$. در این صورت، $\alpha \leqslant f(c)$ و ثابت می‌کنیم که $f(c-)$ وجود دارد و مساوی α است.

برای این کار باید نشان داد که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مثبت مانند δ هست بقسمی که

هرگاه $c - \delta < x < c$، آنگاه $| f(x) - \alpha | < \varepsilon$.

اما چون $\alpha = \sup A$، عنصری مانند $f(x_1)$ در A هست بقسمی که

$$\alpha - \varepsilon < f(x_1) \leqslant \alpha.$$

چون f صعودی است، به‌ازای هر x در $]x_1, c[$، نیزداریم $\alpha - \varepsilon < f(x) \leqslant \alpha$، و درنتیجه $| f(x) - \alpha | < \varepsilon$. بنابراین، عدد $\delta = c - x_1$ را می‌توان به‌عنوان δی متناظر ε اختیار کرد. (بهمین نحو، می‌توان نشان داد که $f(c+)$ وجود دارد و از $f(c)$ کمتر نیست، و برای نقطه‌های انتهائی لازم است در اثبات بالا تغییرات مختصری داده شود.)

البته، قضیه‌ای نظیر قضیهٔ بالا برای تابعهای نزولی وجود دارد، که خواننده می‌تواند آن را برای خویش تنظیم نماید.

قضیهٔ ۵۲.۴ فرض کنیم که f بر مجموعهٔ S در $\mathbf{R}$ صعودی اکید باشد. در این صورت، f^{-1} وجود دارد و آن نیز بر $f(S)$ صعودی اکید است.

برهان. چون f صعودی اکید است، پس f بر S یک به یک است، بنابراین f^{-1} وجود دارد. برای مشاهدهٔ این که f^{-1} صعودی اکید است، فرض می‌کنیم که y_1 و y_2 دو نقطه در $f(S)$ باشند و $y_1 < y_2$. قرار می‌دهیم $x_1 = f^{-1}(y_1)$ و

$x_2 = f^{-1}(y_2)$. نامساوی $x_1 \geqslant x_2$ نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا اگر چنین باشد، نامساوی $y_1 \geqslant y_2$ نیز برقرار خواهد بود. پس تنها حالت ممکن

$$x_1 < x_2,$$

و این یعنی که f^{-1} صعودی اکید است.

حال، بنا بر قضیه‌های ۵۲.۴ و ۲۹.۴، داریم:

قضیهٔ ۵۳.۴ فرض کنیم f بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ صعودی اکید و پیوسته باشد. در این صورت، f^{-1} نیز بر بازهٔ $[f(a), f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید خواهد بود.

تبصره. از قضیهٔ ۵۳.۴ معلوم می‌شود که هر تابع پیوسته و صعودی اکید یک نگاشت توپولوژیک است. برعکس، هر نگاشت توپولوژیک بازهٔ $[a, b]$ روی بازهٔ $[c, d]$ باید یک تابع یکنوای اکید باشد. تحقیق این مطلب تمرینی آموزنده برای خواننده خواهد بود (تمرین ۶۲.۴).

تمرین

حدود دنباله‌ها

۱.۴ هر یک از گزاره‌های زیرین را دربارهٔ دنباله‌ها در $\mathbf{C}$ ثابت کنید.

آ) اگر $|z| < 1$، $z^n \to 0$؛ و اگر $|z| > 1$، $\{z^n\}$ واگرا خواهد بود.

ب) هرگاه $z_n \to 0$ و $\{c_n\}$ کراندار باشد، آنگاه $c_n z_n \to 0$.

ج) به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، $z^n/n! \to 0$.

د) هرگاه $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$، آنگاه $a_n \to 0$.

۲.۴ اگر به‌ازای هر $n \geqslant 1$، $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$، نشان دهید که

$$a_n \to (a_1 + 2a_2)/3.$$

راهنمائی. $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$.

۳.۴ اگر $0 < x_1 < 1$، و به‌ازای هر $n \geqslant 1$، $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$، ثابت کنید که $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی است و دارای حد صفر است. همچنین ثابت کنید که $x_{n+1}/x_n \to 1/2$.

۴.۴ دو دنباله از عددهای صحیح مثبت مانند $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف کنید: قرار دهید $a_1 = b_1 = 1$، و به‌ازای $n \geqslant 2$، a_n و b_n را از متحد قرار دادن قسمتهای گویا و گنگ معادلهٔ زیرین بدست آورید:

$$a_n + b_n\sqrt{۲} = (a_{n-۱} + b_{n-۱}\sqrt{۲})^۲.$$

ثابت کنید که به‌ازای $n \geqslant ۲$، $a_n^۲ - ۲b_n^۲ = ۱$. از این نتیجه بگیرید که با مقادیر بزرگتراز $\sqrt{۲}$، $a_n/b_n \to \sqrt{۲}$، و با مقادیر کوچکتر از $\sqrt{۲}$، $۲b_n/a_n \to \sqrt{۲}$.

۵.۴ به‌ازای $n \geqslant ۱$، دنبالهٔ حقیقی $\{x_n\}$ در معادلهٔ $۷x_{n+۱} = x_n^۳ + ۶$ صدق می‌کند. اگر $x_۱ = ۱/۲$، ثابت کنید که این دنباله صعودی است و حد آن را بیابید. اگر $x_۱ = ۳/۲$ یا $x_۱ = ۵/۲$، چه خواهد شد؟

۶.۴ اگر به‌ازای هر $n \geqslant ۱$، $|a_n| < ۲$ و

$$|a_{n+۲} - a_{n+۱}| \leqslant \frac{۱}{۸}|a_{n+۱}^۲ - a_n^۲|,$$

ثابت کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا است.

۷.۴ در فضای متری (S, d)، فرض کنید که $x_n \to x$ و $y_n \to y$. ثابت کنید که $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

۸.۴ ثابت کنید که در فضای متری فشردهٔ (S, d)، هر دنباله در S دارای زیر-دنباله‌ای است که در S همگرا است. از این خاصیت فشردگی S نیز نتیجه می‌شود ولی لازم نیست آن را ثابت کنید. (برای اثباتی از این مطلب، ر. ک. به‌کتاب مرجع ۲.۴ یا ۳.۴.)

۹.۴ فرض کنید A زیرمجموعهٔ فضای متری S باشد. اگر A تام باشد، ثابت کنید A بسته است. در حالتی که S تام باشد، ثابت کنید که عکس مطلب بالا نیز برقرار خواهد بود.

حدود تابعها

تبصره. از تمرین ۱۰.۴ تا ۲۸.۴ همهٔ تابعها حقیقی هستند.

۱۰.۴ فرض کنید f بر بازهٔ باز $]a, b[$ تعریف شده باشد، و $x \in]a, b[$. دو گزارهٔ زیرین را در نظر بگیرید:

آ) $\lim_{h\to ۰} |f(x+h) - f(x)| = ۰$؛

ب) $\lim_{h\to ۰} |f(x+h) - f(x-h)| = ۰$.

ثابت کنید که همواره می‌توان (ب) را از (آ) نتیجه گرفت، و مثالی بیابید که به‌ازای آن (ب) برقرار باشد ولی (آ) نباشد.

۱۱.۴ فرض کنید f بر $\mathbf{R}^۲$ تعریف شده باشد. اگر

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

و حدهای یک بعدی $\lim_{x\to a} f(x, y)$ و $\lim_{y\to b} f(x, y)$ هر دو وجود داشته باشند، ثابت کنید که

$$\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)] = \lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x, y)] = L.$$

حال تابعهای f تعریف شده بر $\mathbf{R}^۲$ را به صورتهای زیر در نظر می‌گیریم:

آ) اگر $(x, y) \neq (۰, ۰)$، $f(x, y) = \dfrac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲}$، و $f(۰, ۰) = ۰$.

ب) اگر $(x, y) \neq (۰, ۰)$،

$$f(x, y) = \frac{(xy)^۲}{(xy)^۲ + (x-y)^۲}$$، و $f(۰, ۰) = ۰$.

ج) اگر $x \neq ۰$، $f(x, y) = \dfrac{۱}{x}\sin(xy)$، و $f(۰, y) = y$.

د)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x + y)\sin(۱/x)\sin(۱/y) & \text{اگر } x \neq ۰ \text{ و } y \neq ۰ \\ ۰ & \text{اگر } x = ۰ \text{ یا } y = ۰ \end{cases}$$

ه)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y} & \text{اگر } \tan x \neq \tan y \\ \cos^۳ x & \text{اگر } \tan x = \tan y \end{cases}$$

در هر یک از مثالهای بالا، معین کنید کدام یک از حدهای زیرین وجود دارد، و مقدار هر یک از این حدها را که وجود دارد ارزیابی کنید:

$$\lim_{x\to ۰}[\lim_{y\to ۰} f(x, y)]; \qquad \lim_{y\to ۰}[\lim_{x\to ۰} f(x, y)]; \qquad \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x, y).$$

۱۲.۴ اگر $x \in [۰, ۱]$، ثابت کنید که حد زیرین،

$$\lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty} \cos^{۲n}(m!\,\pi x)],$$

وجود دارد، و مقدار آن، برحسب آن که x گنگ یا گویا باشد، مساوی ۰ یا ۱ خواهد بود.

پیوستگی تابعهای حقیقی

۱۳.۴ فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و به‌ازای هر x گویا، $f(x) = 0$. ثابت کنید به‌ازای هر x در $[a, b]$، $f(x) = 0$.

۱۴.۴ فرض کنید تابع f در نقطهٔ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ در $\mathbf{R}^n$ پیوسته باشد. a_2، a_3، ...، و a_n را ثابت نگهداشته، تابع جدید یک متغیر حقیقی g را با معادلهٔ زیرین تعریف کنید:

$$g(x) = f(x, a_2, \ldots, a_n).$$

ثابت کنید g در نقطهٔ $x = a_1$ پیوسته است. (این مطلب گاهی به این صورت بیان می‌شود که می‌گویند: یك تابع پیوستهٔ n متغیره، برحسب هر یك از متغیرها، جداگانه، پیوسته است.)

۱۵.۴ با ذکر مثالی، نشان دهید که عکس گزارهٔ مذکور در تمرین ۱۴.۴ درحالت کلی درست نیست.

۱۶.۴ فرض کنید f، g، و h بر $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

اگر x گنگ باشد، $f(x) = g(x) = h(x) = 0$؛
اگر x گویا باشد، $f(x) = 1$ و $g(x) = x$؛

اگر x گویا، و به صورت m/n (m و n نسبت به هم اولند) باشد، $h(x) = 1/n$؛ و $h(0) = 1$.
ثابت کنید که f در هیچ نقطهٔ $[0, 1]$ پیوسته نیست، g فقط در $x = 0$، و h فقط در نقطه‌های گنگ در $[0, 1]$ پیوسته است.

۱۷.۴ به‌ازای هر x در $[0, 1]$، اگر x گویا باشد، قرار دهید $f(x) = x$، و اگر x گنگ باشد، قرار دهید $f(x) = 1 - x$. ثابت کنید که:

آ) به‌ازای هر x در $[0, 1]$، $f(f(x)) = x$.
ب) به‌ازای هر x در $[0, 1]$، $f(x) + f(1 - x) = 1$.
ج) f فقط در نقطهٔ $x = 1/2$ پیوسته است.
د) f هر مقدار بین ۰ و ۱ را می‌گیرد.
ه) به ازای هر x و y در $[0, 1]$، $f(x + y) - f(x) - f(y)$ گویا است.

۱۸.۴ فرض کنید f تابعی باشد که بر $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد، و دست کم در یک نقطهٔ $\mathbf{R}$ مانند x_0 پیوسته باشد. همچنین به ازای هر x و y در $\mathbf{R}$، f در معادلهٔ زیرین صدق کند:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

ثابت کنید عدد پایائی مانند a هست بقسمی که به ازای هر x ، $f(x) = ax$.

۱۹.۴ فرض کنید که f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و تابع g را به صورت زیرین تعریف کنید: $g(a) = f(a)$ و، به ازای هر x که $a < x \leqslant b$، $g(x)$ مساوی مقدار ماکزیمم f در زیربازهٔ $[a, x]$ باشد. نشان دهید که g بر $[a, b]$ پیوسته است.

۲۰.۴ فرض کنید که f_1، . . . ، f_m، m تابع حقیقی باشند که بر مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده‌اند. همچنین هر f_k در نقطهٔ $\mathbf{a}$ در S پیوسته باشد. تابع جدید f را به صورت زیر تعریف کنید: به ازای هر $\mathbf{x}$ در S، $f(\mathbf{x})$ مساوی ماکزیمم m عدد $f_1(\mathbf{x})$، . . . ، و $f_m(\mathbf{x})$ باشد. در پیوستگی f در نقطهٔ $\mathbf{a}$ بحث کنید.

۲۱.۴ فرض کنید تابع $f : S \to \mathbf{R}$ بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^n$ پیوسته باشد. همچنین $\mathbf{p} \in S$، و $f(\mathbf{p}) > 0$. ثابت کنید که گویی n بعدی مانند $B(\mathbf{p}; r)$ هست بقسمی که به ازای هر $\mathbf{x}$ در این گوی، $f(\mathbf{x}) > 0$.

۲۲.۴ فرض کنید تابع f بر مجموعهٔ بستهٔ S در $\mathbf{R}$ تعریف شده و پیوسته باشد. قرار دهید

$$A = \{x \mid f(x) = 0 \text{ و } x \in S\}.$$

ثابت کنید که A یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}$ می‌باشد.

۲۳.۴ به ازای تابع مفروض $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، دومجموعهٔ A و B را در $\mathbf{R}^2$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$A = \{(x, y) \mid y < f(x)\}, \ B = \{(x, y) \mid y > f(x)\}.$$

ثابت کنید f بر $\mathbf{R}$ وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که A و B هر دو زیر-مجموعه‌های باز $\mathbf{R}^2$ باشند.

۲۴.۴ فرض کنید f بر بازهٔ فشردهٔ S در $\mathbf{R}$ تعریف شده و بر آن کراندار باشد. اگر $T \subseteq S$، عدد

$$\Omega_f(T) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x \in T, y \in T\}$$

را نوسان (یا پیما)ی f بر T می‌نامند. اگر $x \in S$، بنا بر تعریف، نوسان f در x مساوی عدد زیرین است:

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0+} \Omega_f(B(x; h) \cap S).$$

ثابت کنید این حد همواره وجود دارد، و $\omega_f(x) = 0$ وقتی، و فقط وقتی، که f در x پیوسته باشد.

۲۵.۴ فرض کنید f بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد. همچنین f در x_1 و x_2 ماکزیمم موضعی داشته باشد. نشان دهیدکه باید نقطهٔ سومی بین x_1 و x_2 باشد که f در این نقطه دارای مینیمم موضعی باشد.

تبصره. منظور از این که f در x_1 ماکزیمم موضعی دارد این است که گویی یک بعدی مانند $B(x_1)$ هست بقسمی که به ازای هر x در $B(x_1) \cap [a, b]$، $f(x) \leqslant f(x_1)$. مینیمم موضعی به نحو مشابه تعریف می‌شود.

۲۶.۴ فرض کنید تابع حقیقی f بر بازهٔ $[0, 1]$ پیوسته، و دارای خاصیت زیرین باشد: به ازای هرعدد حقیقی مانند y، یا این که نقطه‌ای مانند x در $[0, 1]$ نباشدکه به ازای آن $f(x) = y$، یا فقط یک x در $[0, 1]$ با این خاصیت وجود داشته باشد. ثابت کنید که f بر $[0, 1]$ یکنوای اکید است.

۲۷.۴ فرض کنید تابع f بر $[0, 1]$ تعریف شده، و دارای خاصیت زیرین باشد: به ازای هر عدد حقیقی مانند y، یا نقطه‌ای مانند x در $[0, 1]$ نباشد که به ازای آن $f(x) = y$، یا فقط دو مقدار برای x در $[0, 1]$ باشد که به ازای آنها $f(x) = y$.

آ) ثابت کنید که f نمی‌تواند بر $[0, 1]$ پیوسته باشد.
ب) تابع f را بقسمی بسازید که دارای خاصیت یاد شده باشد.
ج) ثابت کنید هر تابع دارای خاصیت یاد شده تعدادی نامتناهی ناپیوستگی بر $[0, 1]$ دارد.

۲۸.۴ در هر یک از حالتهای زیرین، تابعی مانند f ارائه دهید که بر S پیوسته باشد و $f(S) = T$، یا توضیح دهید چرا یک چنین تابعی نمی‌تواند وجود داشته باشد:

آ) $S =]0, 1[$، $T =]0, 1]$.
ب) $S =]0, 1[$، $T =]0, 1[\cup]1, 2[$.

ج) $S = \mathbf{R}^1$، $T =$ مجموعهٔ عددهای گویا.

د) $S = [0, 1] \cup [2, 3]$، $T = \{0, 1\}$.

ه) $S = [0, 1] \times [0, 1]$، $T = \mathbf{R}^2$.

و) $S = [0, 1] \times [0, 1]$، $T =]0, 1[\times]0, 1[$.

ز) $S =]0, 1[\times]0, 1[$، $T = \mathbf{R}^2$.

پیوستگی در فضاهای متری

از تمرین ۲۹.۴ تا ۳۳.۴، فرض بر این است که $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T).

۲۹.۴ ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که به ازای هر زیرمجموعهٔ T مانند B، $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(B)$.

۳۰.۴ ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که به ازای هر زیرمجموعهٔ S مانند A، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۳۱.۴ ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ S پیوسته باشد. راهنمائی. اگر $x_n \to p$ در S، مجموعهٔ $\{p, x_1, x_2, \ldots\}$ فشرده خواهد بود.

۳۲.۴ تابع $f : S \to T$ را یک نگاشت بسته بر S نامند درصورتی که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ S مانند A، نقش $f(A)$ در T بسته باشد. ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته و بسته است که به ازای هر زیرمجموعهٔ S مانند A،

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

۳۳.۴ تابعی پیوسته مانند f و دنباله‌ای کشی مانند $\{x_n\}$ در فضائی متری چون S بقسمی بیابید که $\{f(x_n)\}$ یک دنبالهٔ کشی در T نباشد.

۳۴.۴ ثابت کنید بازهٔ $]-1, 1[$ در $\mathbf{R}^1$ با $\mathbf{R}^1$ همانسان است. این مطلب نشان می‌دهد که نه کراندار بودن و نه تام بودن، هیچ یک، خاصیت توپولوژیک نیست.

۳۵.۴ در بخش ۷.۹، تابعی مانند f ذکر شده است که بر $[0, 1]$ پیوسته است و $f([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$. ثابت کنید که یک چنین تابعهائی نمی‌توانند بر $[0, 1]$ یک به یک باشند.

همبندی

۳۶.۴ ثابت کنید فضای متری S وقتی، و فقط وقتی، ناهمبند است که S زیر-

مجموعه‌ای ناتهی مانند A داشته باشد با این خاصیت که $A \neq S$، و A در S هم باز و هم بسته باشد.

۳۷.۴ ثابت کنید فضای متری S وقتی، و فقط وقتی، همبند است که تنها زیرمجموعه‌های S که در S هم باز و هم بسته‌اند مجموعهٔ تهی و خود S باشند.

۳۸.۴ ثابت کنید تنها زیرمجموعه‌های همبند $\mathbf{R}$ عبارتند از (آ) مجموعهٔ تهی، (ب) مجموعه‌های مرکب ازیک نقطه، و (ج) بازه‌ها (باز، بسته، نیمباز، یا نامتناهی).

۳۹.۴ فرض کنید X یک زیر مجموعهٔ همبند فضای متری S باشد. همچنین Y یک زیرمجموعهٔ S باشد بقسمی که $X \subseteq Y \subseteq \bar{X}$، که درآن $\bar{X}$ بست X می‌باشد. ثابت کنید که Y نیز همبند است. با توجه به حالت خاصی از این مطلب، معلوم می‌شود که اگر X همبند باشد، $\bar{X}$ نیز همبند خواهد بود.

۴۰.۴ اگر x نقطه‌ای در فضای متری S، و $U(x)$ مؤلفه‌ای از S حاوی x باشد، ثابت کنید که $U(x)$ در S بسته است.

۴۱.۴ فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}$ باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۱.۳، S مساوی اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های باز ازهم جدا در $\mathbf{R}$ خواهد بود. ثابت کنید که هر یک از این بازه‌های باز یک مؤلفهٔ زیرفضای متری S است. توضیح دهید که چرا این مطلب با تمرین ۴۰.۴ متناقض نیست.

۴۲.۴ مجموعهٔ فشردهٔ S در $\mathbf{R}^m$ با خاصیت زیرین داده شده است: به ازای هر دو نقطه مانند $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در S و هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ای متناهی از نقطه‌ها در S مانند $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ وجود دارد بقسمی که $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ و $\mathbf{x}_n = \mathbf{b}$ و، به ازای

$$k = 1, 2, \ldots, n \text{، } \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \varepsilon.$$

همبندی S را اثبات یا رد کنید.

۴۳.۴ ثابت کنید که فضای متری S وقتی، و فقط وقتی، همبند است که هر زیرمجموعهٔ ناتهی و حقیقی S کرانهٔ ناتهی داشته باشد.

۴۴.۴ ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ کوژ $\mathbf{R}^n$ همبند است.

۴۵.۴ فرض کنید تابع $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ یک به یک، و بر $\mathbf{R}^n$ پیوسته باشد. اگر A در $\mathbf{R}^n$ باز و ناهمبند باشد، ثابت کنید که $\mathbf{f}(A)$ در $\mathbf{f}(\mathbf{R}^n)$ باز و ناهمبند خواهد بود.

۴۶.۴ فرض کنید که

$$A = \{(x, y) \mid ۰ < x \leqslant ۱,\ y = \sin ۱/x\},$$
$$B = \{(x, y) \mid y = ۰,\ -۱ \leqslant x \leqslant ۰\}$$ ، و $S = A \cup B$.

ثابت کنید که S همبند است ولی همبند کمانوار نیست. (ر. ک. شکل ۵.۴، بخش ۱۸.۴.)

۴۷.۴ فرض کنید $F = \{F_۱, F_۲, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های فشرده و همبند در $\mathbf{R}^n$ باشد بقسمی که به ازای هر $k \geqslant ۱$، $F_{k+۱} \subseteq F_k$. ثابت کنید که اشتراک $\bigcap_{k=۱}^{\infty} F_k$ همبند و بسته است.

۴۸.۴ فرض کنید S مجموعه‌ای همبند و باز در $\mathbf{R}^n$ باشد. همچنین T یک مؤلفهٔ $\mathbf{R}^n - S$ باشد. ثابت کنید که $\mathbf{R}^n - T$ همبند است.

۴۹.۴ فرض کنید (S, d) یک فضای متری همبند باشد ولی کراندار نباشد. ثابت کنید به ازای هر a در S و هر $r > ۰$، مجموعهٔ $\{x \mid d(x, a) = r\}$ ناتهی است.

پیوستگی یکشکل

۵۰.۴ ثابت کنید تابعی که بر S پیوستهٔ یکشکل باشد، براین مجموعه پیوسته نیز هست.

۵۱.۴ اگر به ازای هر x در $\mathbf{R}$، $f(x) = x^۲$، ثابت کنید f بر $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکشکل نیست.

۵۲.۴ فرض کنید f بر مجموعهٔ کراندار S در $\mathbf{R}^n$ پیوستهٔ یکشکل باشد. ثابت کنید که f بر S باید کراندار باشد.

۵۳.۴ فرض کنید $\mathbf{f}$ تابعی باشد که بر مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد، و $\mathbf{f}(S) \subseteq \mathbf{R}^m$. همچنین $\mathbf{g}$ بر $\mathbf{f}(S)$ تعریف شده، مقدارهای آن در $\mathbf{R}^k$ باشند. تابع مرکب $\mathbf{h}$ را این طور تعریف کنید: اگر $\mathbf{x} \in S$، $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$. اگر $\mathbf{f}$ بر S و $\mathbf{g}$ بر $\mathbf{f}(S)$ پیوستهٔ یکشکل باشند، ثابت کنید که $\mathbf{h}$ نیز بر S پیوستهٔ یکشکل است.

۵۴.۴ فرض کنید $f : S \to T$ بر S پیوستهٔ یکشکل باشد، که در آن S و T فضاهائی متری می‌باشند. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در S باشد، ثابت کنید که $\{f(x_n)\}$ در T دنباله‌ای کشی خواهد بود. (این مطلب را با تمرین ۳۳.۴ مقایسه کنید.)

۵۵.۴ فرض کنید $f : S \to T$ تابعی باشد از فضای متری S به فضای متری

دیگر T. همچنین f بر یک زیر مجموعهٔ S مانند A پیوستهٔ یکشکل، و T تام باشد. ثابت کنید که f دارای توسیع منحصر بفردی بـه $\bar{A}$ است که بر این مجموعه پیوستهٔ یکشکل است.

۵۶.۴ فـرض کنید در فضای متری (S, d)، A یک زیـرمجموعهٔ ناتهی S باشد. $f_A : S \to \mathbf{R}$ را با معادلهٔ زیرین تعریف می‌کنیم: به ازای هر x در S،

$$f_A(x) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

عدد $f_A(x)$ را فاصلهٔ از x تا A می‌نامیم.

آ) ثابت کنید که f_A بر S پیوستهٔ یکشکل است.

ب) ثابت کنید که $\bar{A} = \{x \mid f_A(x) = ۰ \text{ و } x \in S\}$.

۵۷.۴ در فضای متری (S, d)، فـرض کنید که A و B دو زیرمجموعـهٔ بسته و از هم جدای S باشند. ثابت کنید که دو زیرمجموعهٔ بـاز از هم جدای S مانند U و V وجود دارند بقسمی که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$. راهنمائی. فرض کنید

$$g(x) = f_A(x) - f_B(x),$$

که در آن $f_A(x)$ در تمرین ۵۶.۴ تعریف شده است. حال دو مجموعهٔ

$$g^{-۱}(]۰, +\infty[) \text{ و } g^{-۱}(]-\infty, ۰[)$$

را در نظر بگیرید.

ناپیوستگیها

۵۸.۴ تابعهـای f بر $\mathbf{R}^۱$ با معادله‌های زیـرین تعریف شده‌انـد. در هر مـورد ناپیوستگیها و نوع آنها را مشخص کنید.

آ) اگر $x \neq ۰$، $f(x) = (\sin x)/x$، و $f(۰) = ۰$.

ب) اگر $x \neq ۰$، $f(x) = e^{۱/x}$، و $f(۰) = ۰$.

ج) اگر $x \neq ۰$، $f(x) = e^{۱/x} + \sin(۱/x)$، و $f(۰) = ۰$.

د) اگر $x \neq ۰$، $f(x) = ۱/(۱ - e^{۱/x})$، و $f(۰) = ۰$.

۵۹.۴ نقاطی در $\mathbf{R}^۲$ رامشخص کنید که هر یک از تابعهای تمرین ۱۱.۴ در آنها پیوسته نباشد.

تابعهای یکنوا

۶۰.۴ فـرض کنید f بر بازهٔ باز $]a, b[$ تعریف شده باشد، و بـه ازای هر نقطهٔ

درونی $]a, b[$ مانند x، گویی یک بعدی مانند $B(x)$ باشد که در آن f صعودی باشد. ثابت کنید که f در سراسر $]a, b[$ صعودی است.

۶۱.۴ فرض کنید f بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، و همچنین f در هیچ یک از نقطه‌های درونی این بازه ماکزیمم یا مینیمم موضعی نداشته باشد. (ر. ک. تبصرهٔ بعد از تمرین ۲۵.۴) ثابت کنید که f باید بر $[a, b]$ یکنوا باشد.

۶۲.۴ اگر f بر بازهٔ $[a, b]$ یک به یک و پیوسته باشد، ثابت کنید که f باید بر $[a, b]$ یکنوای اکید باشد. یعنی، ثابت کنید که هرنگاشت توپولوژیک از $[a, b]$ روی بازهٔ $[c, d]$ باید یکنوای اکید باشد.

۶۳.۴ فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ صعودی باشد. همچنین n نقطهٔ x_1، . . . ، و x_n در درون این بازهٔ $[a, b]$ بقسمی باشند که

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b.$$

آ) نشان دهید که

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k +) - f(x_k -)] \leqslant f(b -) - f(a +).$$

ب) از قسمت (آ) نتیجه بگیرید که مجموعهٔ ناپیوستگیهای f شمارشپذیر است.

ج) ثابت کنید که f در هر زیر بازهٔ باز $[a, b]$ دارای نقطهٔ پیوستگی است.

۶۴.۴ تابع f را بقسمی بیابید که بر مجموعه‌ای مانند S در $\mathbf{R}$ تعریف شده و صعودی اکید باشد، ولی f^{-1} بر $f(S)$ پیوسته نباشد.

۶۵.۴ فرض کنید f بر یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند S صعودی اکید باشد. همچنین نقش $f(S)$ یکی از خاصیتهای زیرین را داشته باشد: (آ) $f(S)$ باز باشد؛ (ب) $f(S)$ همبند باشد؛ (ج) $f(S)$ بسته باشد. در این صورت، ثابت کنید که f باید بر S پیوسته باشد.

فضاهای متری و نقطه‌های ثابت

۶۶.۴ فرض کنیم $B(S)$ مجموعهٔ همهٔ تابعهای حقیقی باشد که بر مجموعهٔ ناتهی S تعریف شده و کراندار باشند. اگر $f \in B(S)$، قرار می‌دهیم

$$\| f \| = \sup_{x \in S} | f(x) |.$$

عدد $\| f \|$ را «هنج سوپرمم» f می‌نامیم.

آ) ثابت کنید دستور $d(f, g) = \| f - g \|$ متر d را بر $B(S)$ تعریف می‌کند.

ب) ثابت کنید فضای متری $(B(S), d)$ تام است. راهنمائی. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای کشی در $B(S)$ باشد، نشان دهید که $\{f_n(x)\}$، به ازای هر x در S، دنباله‌ای کشی از عددهای حقیقی است.

۶۷.۴ به تمرین ۶۶.۴ باز می‌گردیم. فرض کنید که $C(S)$ آن زیرمجموعهٔ $B(S)$ باشد که مرکب است از همهٔ تابعهائی که بر S پیوسته و کراندارند. (اینک S یک فضای متری است.)

آ) ثابت کنید که $C(S)$ یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $B(S)$ است.

ب) ثابت کنید که زیرفضای متری $C(S)$ تام است.

۶۸.۴ در این تمرین نمادهای مذکور در برهان قضیهٔ نقطهٔ ثابت (قضیهٔ ۴۸.۴) را بکار می بریم.

آ) ثابت کنید که $d(p, p_n) \leqslant d(x, f(x))\alpha^n/(1 - \alpha)$.

این نامساوی، که در کارهای عددی مفید است، فاصله از p_n تا نقطهٔ ثابت p را تخمین می‌زند. مثالی برای آن در قسمت (ب) داده شده است.

ب) فرض کنید که $f(x) = \frac{1}{2}(x+2/x)$ و $S = [1, \infty[$. ثابت کنید که f یک انقباض S است با پایای انقباض $\alpha = 1/2$ و نقطهٔ ثابت $p=\sqrt{2}$. دنبالهٔ $\{p_n\}$ را، که از $x = p_0 = 1$ شروع می‌شود، تشکیل دهید و نشان دهید که

$$|p_n - \sqrt{2}| \leqslant 2^{-n}.$$

۶۹.۴ با ذکر مثالهائی ناقض، نشان دهید که قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای انقباضها در هر یک از دو مورد زیر لزوماً برقرار نیست: (آ) فضای متری زمینه تام نباشد، یا (ب) اگر α پایای انقباض باشد، $\alpha \geqslant 1$.

۷۰.۴ فرض‌کنید $f : S \to S$ تابعی باشد از فضای متری تام (S, d) درخودش. همچنین دنباله‌ای حقیقی مانند $\{\alpha_n\}$ همگرا به 0 وجود داشته باشد، بقسمی که به‌ازای هر $n \geqslant 1$ و هر x و y در S، $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \alpha_n d(x, y)$، که در آن f^n مساوی تکرار nم f باشد؛ یعنی،

$f^1(x) = f(x)$، و به ازای $n \geqslant 1$، $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

ثابت کنید که f دارای نقطهٔ ثابت منحصر بفردی است. راهنمائی. به ازای m

مناسبی، قضیهٔ نقطهٔ ثابت را برای f^m بکار برید.

۷۱.۴ فرض کنید $f: S \to S$ تابعی باشد از فضای متری (S, d) در خودش بقسمی که هرگاه $x \neq y$، آنگاه

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

آ) ثابت کنید f حداکثر دارای یک نقطهٔ ثابت است، و مثالی بزنید که در آن یک چنین fی نقطهٔ ثابت نداشته باشد.

ب) اگر S فشرده باشد، ثابت کنید که f درست یک نقطهٔ ثابت دارد.
راهنمائی. نشان دهیدکه $g(x) = d(x, f(x))$ بر S به مینیمم خود می‌رسد.

ج) مثالی بزنید که در آن S فشرده باشد و f یک انقباض نباشد.

۷۲.۴ فرض کنید که f در شرط تمرین ۷۱.۴ صدق کند. اگر $x \in S$، قرار دهید $p_0 = x$، $p_{n+1} = f(p_n)$، و به ازای $n \geqslant 0$، $c_n = d(p_n, p_{n+1})$.

آ) ثابت کنید که $\{c_n\}$ دنباله‌ای نزولی است،و فرض کنید که $c = \lim c_n$.

ب) فرض کنید یک زیردنباله مانند $\{p_{k(n)}\}$ وجود داشته باشد که به نقطهٔ q در S همگرا باشد. ثابت کنید که

$$c = d(q, f(q)) = d(f(q), f[f(q)]).$$

از این جا نتیجه بگیرید که q یک نقطهٔ ثابت f است و $p_n \to q$.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

4.1 Boas, R. P., A *Primer of Real Functions*. Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.

4.2 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison - Wesley, Reading, 1966.

4.3 Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1963.

4.4 Todd, J., *Survey of Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1962.

۵
مشتقها

۱.۵ مقدمه

در ایـن فصل بحث ما دربارهٔ مشتق است کـه مفهوم اصلی حساب دیفرانسیل شمرده می‌شود. دو مسألهٔ متفاوت، یکی مسألهٔ فیزیکی پیدا کردن سرعت لحظه‌ای یک جسم متحرک، و دیگری مسألهٔ هندسی تعیین خط مماس بر یک خم در یک نقطهٔ داده شده، هردو به‌طور کاملاً طبیعی به‌مفهوم مشتق منجر می‌شوند. در این‌جا، ما بـه کاربردهای مشتق در مکانیک و هندسه تـوجهی نـداریم، و به‌جای‌آن فقط به‌بررسی خاصیتهای عمومی مشتقها می‌پردازیم.

در ایـن فصل ما اساساً مشتق تـابعهای یک متغیر حقیقی، مخصوصاً تـابعهای حقیقی تعریف شده بر بازه‌هائی در $\mathbf{R}$، را مطالعه مـی‌کنیم. همچنین باختصار دربارهٔ مشتق تابعهای برداری از یک متغیر حقیقی و مشتقهای جزئـی بحث مـی‌نمائیم، زیرا برای مطالعهٔ این مطالب احتیاجی به‌مفهومهای جدید نیست. خواننده لزوماً با قسمت بزرگی از این مطالب در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آشنا شده است. بحث مفصلتری از نظریـهٔ مشتق برای تـابعهای چنـد متغیره مستلـزم تغییرات مهمی است و در فصل ۱۲ به‌آن پرداخته خواهد شد.

در قسمت آخـر ایـن فصل بحثی است دربارهٔ مشتق تابعهـای مختلط از یک متغیر مختلط.

۲.۵ تعریف مشتق

هرگاه f بر بازهٔ باز $]a, b[$ تعریف شده باشد، آنگاه می‌توان به‌ازای هر دو نقطهٔ

متمایز x و c در $]a, b[$ خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

را تشکیل داد. c را ثابت نگه می‌داریم و سپس وقتی که $c \to x$، رفتار این‌کسر را مطالعه می‌کنیم.

تعریف ۱.۵ فرض کنیم f بر بازهٔ باز $]a, b[$ تعریف شده باشد، و $c \in]a, b[$. در این صورت، اگر حد

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

وجود داشته باشد، گوئیم f در نقطهٔ c مشتقپذیر است. حد بالا را با $f'(c)$ نشان می‌دهیم و آن را مشتق f در c می‌نامیم.

این عمل حدگیری تابع جدیدی مانند f' را بوجود می‌آورد. قلمرو این تابع مجموعهٔ نقطه‌هائی در $]a, b[$ است که در آنها f مشتقپذیر باشد. f' مشتق اول f نامیده می‌شود. بهمین‌طریق، به‌ازای $n = ۲, ۳, \ldots$، مشتق nم f را با $f^{(n)}$ نشان می‌دهیم و آن را مساوی مشتق اول $f^{(n-۱)}$ تعریف می‌کنیم. (بنابراین تعریف، ما در صورتی $f^{(n)}$ را درنظر می‌گیریم که قبلاً $f^{(n-۱)}$ بر بازهٔ بازی تعریف شده باشد.) خواننده احتمالاً با نمادهای دیگر مذکور در زیر، یا مشابه‌آنها، آشنا هست:

$$f'(c) = Df(c) = \frac{df}{dx}(c) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}$$ [که در تساوی‌آخر $y = f(x)$].

گاهی خود تابع f را با $f^{(۰)}$ نشان می‌دهیم. عملی که با آن f' از f بدست می‌آید به‌نام مشتقگیری معروف است.

۳.۵ مشتقها و پیوستگی

به کمک قضیهٔ زیرین بعضی از قضیه‌های دربارهٔ مشتقها را می‌توان به قضیه‌هائی در-بارهٔ پیوستگی تحویل کرد.

قضیهٔ ۲.۵ هرگاه f بر $]a, b[$ تعریف شده باشد و در نقطهٔ c در این بازه **مشتقپذیر** باشد، آنگاه تابعی مانند f^* (وابسته به f و c) وجود دارد بقسمی که در c **پیوسته** است و در معادلهٔ زیرین صدق می‌کند: به‌ازای هر x در $]a, b[$،

$$f(x) - f(c) = (x - c)\, f^*(x), \qquad (۱)$$

که در آن $f'(c) = f^*(c)$. برعکس، هرگاه تابعی چون f^* باشد، که در c پیوسته بوده، در (۱) صدق کند، آنگاه f در c مشتقپذیر است و $f'(c) = f^*(c)$.

برهان. اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، تابع f^* را بر $]a, b[$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر } x \neq c \quad , \quad f^*(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{، و } f^*(c) = f'(c).$$

در این صورت، f^* در c پیوسته است، ومعادلهٔ (۱) به‌ازای هر x در $]a, b[$ برقرار خواهد بود.

برعکس، هرگاه به‌ازای تابعی چون f^* که در c پیوسته است معادلهٔ (۱) برقرار باشد، آنگاه، با تقسیم دو طرف معادلهٔ (۱) بر $x - c$، و فرض این که $x \to c$، ملاحظه می‌کنیم که $f'(c)$ وجود دارد و مساوی است با $f^*(c)$.

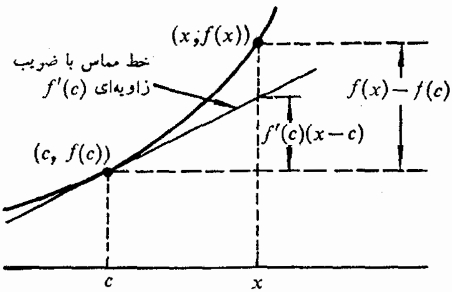
از معادلهٔ (۱) بی‌درنگ نتیجهٔ زیر بدست می‌آید:

قضیهٔ ۳.۵ هرگاه f در c مشتقپذیر باشد، آنگاه f در c پیوسته است.

برهان. در معادلهٔ (۱)، فرض کنید که $x \to c$.

تبصره. معادلهٔ (۱) دارای تعبیری هندسی است. به‌کمک این تعبیر می‌توان معنی آن را دریافت. چون f^* در c پیوسته است، پس وقتی که x نزدیک c باشد، $f^*(x)$ تقریباً مساوی $f'(c) = f^*(c)$ خواهد بود. حال اگر در (۱) به‌جای $f^*(x)$ مقدار $f'(c)$ را قرار دهیم، معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c),$$



شکل ۱.۵

که وقتی $x - c$ کوچک است، به‌طور تقریبی درست خواهد بود. با بیان دیگر می‌توان گفت که، هرگاه f در c مشتقپذیر باشد، آنگاه f در نزدیکی c تابعی است تقریباً خطی. (ر. ک. شکل ۱.۵.) این خاصیت هندسی تابعها مکرر در حساب دیفرانسیل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴.۵ جبر مشتقها

قضیهٔ زیرین دستورهای متداول برای مشتقگیری از مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، و خارج قسمت دو تابع را بدست می‌دهد.

قضیهٔ ۴.۵ فرض کنیم f و g بر $]a, b[$ تعریف شده باشند و در نقطهٔ c از این بازه مشتقپذیر باشند. در این صورت، $f + g$، $f - g$، و $f \cdot g$ نیز در c مشتقپذیرند. اگر $g(c) \neq 0$، f/g نیز در c مشتقپذیر است.

مشتقهای توابع بالا در c با دستورهای زیرین مشخص می‌شوند:

آ) $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$،

ب) $(f \cdot g)'(c) = f(c)\, g'(c) + f'(c)\, g(c)$،

ج) اگر $g(c) \neq 0$، $(f/g)'(c) = \dfrac{g(c)\, f'(c) - f(c)\, g'(c)}{g(c)^2}$.

برهان. (ب) را ثابت می‌کنیم. با استفاده ازقضیهٔ ۲.۵، می‌نویسیم

$$f(x) = f(c) + (x - c)f^*(x), \qquad g(x) = g(c) + (x - c)g^*(x).$$

بنابراین،

$$f(x)\, g(x) - f(c)g(c) = (x - c)\, [f(c)g^*(x) + f^*(x)\, g(c)] + (x - c)^2\, f^*(x)\, g^*(x).$$

با تقسیم دو طرف رابطهٔ بالا بر $x - c$ و فرض این که $x \to c$، قسمت (ب) نتیجه می‌شود. اثبات گزاره‌های دیگر مشابه اثبات بالا است.

از تعریف مشتق بی‌درنگ نتیجه می‌شود که هرگاه f بر $]a, b[$ پایا باشد، آنگاه $f' = 0$ بر $]a, b[$است. همچنین، هرگاه $f(x) = x$، آنگاه به‌ازای هر x، $f'(x) = 1$. هرگاه به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند n قرار دهیم $f(x) = x^n$، آنگاه با بکاربردن مکرر قضیهٔ ۴.۵ معلوم می‌شود که به‌ازای هر x، $f'(x) = nx^{n-1}$. حال اگر بار دیگر قضیهٔ ۴.۵ را بکار بریم، ملاحظه می‌شود که هرچند جمله‌ای

همه‌جا در $\mathbf{R}$ مشتق دارد، همچنین هر تابع گویا در هر نقطه که تعریف شده باشد دارای مشتق خواهد بود.

۵.۵ قاعدهٔ زنجیره‌ای

نتیجه‌ای عمیقتر از نتیجه‌های بالا قاعدهٔ باصطلاح زنجیره‌ای است که برای مشتقگیری از تابعهای مرکب بکار می‌رود.

قضیهٔ ۵.۵ (قاعدهٔ زنجیره‌ای). فرض کنیم f بربازهٔ باز S، و g بر $f(S)$ تعریف شده باشد. تابع مرکب $g\circ f$ را بر S که با معادلهٔ زیرین تعریف می‌شود درنظرمی‌گیریم:

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)].$$

همچنین فرض می‌کنیم نقطه‌ای در S مانند c وجود داشته باشد بقسمی که $f(c)$ یک نقطهٔ درونی $f(S)$ باشد. هرگاه f در c و g در $f(c)$ مشتقپذیر باشند، آنگاه $g\circ f$ نیز در c مشتقپذیر است و

$$(g\circ f)'(c) = g'[f(c)]\, f'(c).$$

برهان. با استفاده از قضیهٔ ۲.۵، می‌توان نوشت:

به ازای هر x در S، $f(x) - f(c) = (x-c)f^*(x)$،

که در آن f^* در c پیوسته است و $f^*(c) = f'(c)$. بهمین طریق، معلوم می‌شود که به ازای هر y در یک زیربازهٔ باز $f(S)$ مانند T حاوی $f(c)$، داریم

$$g(y) - g[f(c)] = [y - f(c)]g^*(y).$$

در اینجا g^* در $f(c)$ پیوسته است و $g^*[f(c)] = g'[f(c)]$.

حال اگر x در S بقسمی اختیار شود که $y = f(x) \in T$، خواهیم داشت

$$(۲)\quad \begin{aligned} g[f(x)] - g[f(c)] &= [f(x) - f(c)]g^*[f(x)] \\ &= (x-c)f^*(x)g^*[f(x)]. \end{aligned}$$

با توجه به قضیهٔ پیوستگی در مورد تابعهای مرکب، معلوم می‌شود که وقتی که $x \to c$، $g^*[f(x)] \to g^*[f(c)] = g'[f(c)]$.

بنابراین، اگر دو طرف رابطهٔ (۲) را بر $x - c$ تقسیم کنیم و سپس فرض کنیم که $x \to c$، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to c} \frac{g[f(x)] - g[f(c)]}{x - c} = g'[f(c)]f'(c),$$

و این همان رابطهٔ مطلوب می‌باشد.

۶.۵ مشتقهای یکطرفی و مشتقهای نامتناهی

تاکنون، منظور از اینکه f در c مشتق دارد این بود که c درون بازه‌ای بود که f بر آن تعریف شده بود، و حدی که $f'(c)$ مساوی آن تعریف می‌شد متناهی بود. برای راحتی می‌توان مفهوم مشتق را بقسمی وسعت داد که در نقطه‌های انتهائی بازه‌ها نیز با معنی باشد. همچنین مایلیم مشتقهای نامتناهی داشته باشیم، و آن را بقسمی تعریف کنیم که تعبیر هندسی متداول مشتق به‌عنوان ضریب زاویه‌ای خط مماس وقتی که خط مماس به صورت عمودی است نیز معتبر باشد. در چنین حالت، نمی‌توان ثابت کرد که f در c پیوسته است. از این جهت، ما پیوستگی f در c را به طور صریح می‌پذیریم.

تعریف ۶.۵ فرض کنیم f بربازهٔ بستهٔ S تعریف شده باشد، و در نقطهٔ c در S پیوسته باشد. اگر حد دست راستی

$$\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

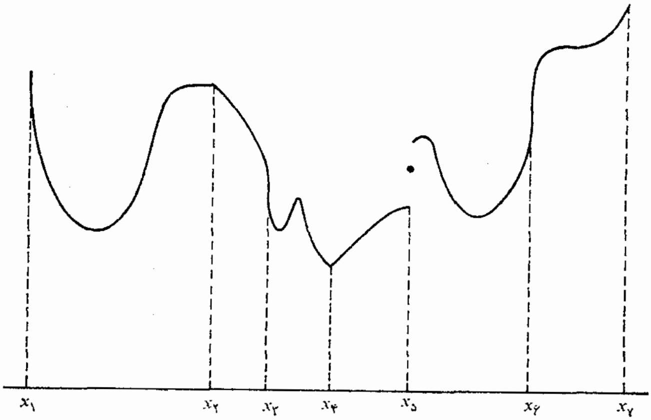
وجود داشته باشد، می‌گوئیم که f در c مشتق دست راستی دارد. این حد ممکن‌است متناهی، $+\infty$، یا $-\infty$ باشد. حد بالا را با $f'_+(c)$ نشان می‌دهیم. مشتق دست چپی f در c را با $f'_-(c)$ نشان می‌دهیم و به طریق‌مشابه به تعریف می‌کنیم. بعلاوه، هرگاه c یک نقطهٔ درونی S باشد، و مشتقهای دست راستی و چپی f در c هر دو مساوی $+\infty$ باشند، آنگاه گوئیم که f در c مشتق $f'(c) = +\infty$ دارد. ($f'(c) = -\infty$ به نحو مشابه به تعریف می‌شود.)

واضح است که f در نقطهٔ درونی c وقتی، و فقط وقتی، مشتق (متناهی یا نامتناهی) دارد که $f'_+(c) = f'_-(c)$، که در این صورت

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c).$$

شکل ۲.۵ بعضی از این مفهومها را مصور می‌سازد. در نقطهٔ x_1 داریم $f'_+(x_1) = -\infty$. در x_2 مشتق دست چپی مساوی ۰، و مشتق دست راستی ۱ — است. همچنین،

$f'(x_3) = -\infty$، $f'_-(x_4) = -1$، $f'_+(x_4) = +1$، $f'(x_6) = +\infty$،
$f'_-(x_7) = 2$. f در x_5 هیچ یک از انواع مشتقهای یاد شده را ندارد، زیرا f در این نقطه پیوسته نیست.



شکل ۲.۵

۷.۵ توابع با مشتقهای ناصفر

قضیهٔ ۷.۰ فرض کنیم f بر بازهٔ باز $]a, b[$ تعریف شده باشد، همچنین بـه ازای نقطه‌ای مـانند c در $]a, b[$، داشته باشیم $f'(c) > 0$ یـا $f'(c) = +\infty$. در این‌صورت، یک گوی یک بعدی مانند $B(c) \subseteq]a, b[$ هست بقسمی‌که در آن

اگر $x > c$، $f(x) > f(c)$، و اگر $x < c$، $f(x) < f(c)$.

برهان. اگر $f'(c)$ متناهی و مثبت باشد، می‌توان نوشت

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x),$$

که در آن f^* در c پیوسته است و $f^*(c) = f'(c) > 0$. بنا برخاصیت محفوظ ماندن علامت تابعهای پیوسته، گویی یک بعدی مـانند $B(c) \subseteq]a, b[$ هست که درآن $f^*(x)$ همان علامت $f^*(c)$ را دارد، و این بدان معنی‌است که $f(x) - f(c)$ همان علامت $x - c$ را در این‌گوی خواهد داشت.

اگر $f'(c) = +\infty$، گویی یک بعدی مانند $B(c)$ هست که در آن

هرگاه $x \neq c$، آنگاه $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 1$.

در این گوی دوباره خارج قسمت مثبت است و نتیجه مانند قبل بدست می‌آید.

البتـه قضیـه‌ای شبیه بـه قضیهٔ ۷.۵ بـرای حـالت $f'(c) < 0$ یـا

$f'(c) = -\infty$، که در آن c یک نقطهٔ درونی $]a, b[$ است، برقرار می‌باشد.

۸.۵ مشتقهای صفر واکسترممهای موضعی

تعریف ۸.۵ فرض‌کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر یک زیرمجموعهٔ فضای متری M مانند S تعریف شده باشد، و $a \in S$. در این صورت، گوئیم f در a ماکزیمم موضعی دارد در صورتی که گویی مانند $B(a)$ وجود داشته‌باشد بقسمی که

به ازای هر x در $S \cap B(a)$، $f(x) \leqslant f(a)$.

هرگاه به ازای هر x در $S \cap B(a)$ داشته باشیم $f(x) \geqslant f(a)$، آنگاه گوئیم که f در a مینیمم موضعی دارد.

تبصره. ماکزیمم موضعی f در a همان ماکزیمم مطلق f بر زیرمجموعهٔ $S \cap B(a)$ است. هرگاه f در a ماکزیمم مطلق داشته باشد، آنگاه a ماکزیمم موضعی نیز هست. اما، f ممکن است در چند نقطه از S ماکزیمم موضعی داشته باشد ولی بر تمام مجموعهٔ S دارای ماکزیمم مطلق نباشد.

قضیهٔ زیرین رابطهٔ بین مشتقهای صفر و اکسترممها (ماکزیممها یا مینیممها)ی موضعی در نقطه‌های درونی را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۹.۵ فرض کنیم f بر بازهٔ باز $]a, b[$ تعریف شده باشد، و در یک نقطهٔ درونی $]a, b[$ مانند c دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی‌باشد. هرگاه f در c مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد، آنگاه $f'(c)$ باید مساوی صفر باشد.

برهان. هرگاه $f'(c)$ مثبت یا $+\infty$ باشد، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۷.۵، f نمی‌تواند در c اکسترمم موضعی داشته باشد. با استدلالی مشابه، معلوم می‌شود که $f'(c)$ نمی‌تواند منفی یا $-\infty$ باشد. اما، چون مشتق f در c وجود دارد، پس باید

$$f'(c) = 0.$$

عکس قضیهٔ ۹.۵ درست نیست، یعنی، در حالت کلی، فقط شرط $f'(c) = 0$ کافی برای اکسترمم داشتن f در c نیست. در حقیقت، ممکن است ماکزیمم یا مینیمم هیچ یک وجود نداشته باشد. این مطلب را می‌توان با مثال $f(x) = x^3$ و $c = 0$ تحقیق کرد. در این حالت، $f'(0) = 0$ اما f در هر همسایگی 0 صعودی است.

بعلاوه، لازم است تأکید کنیم که ممکن است $f'(c)$ صفر نباشد ولی f در c اکسترمم موضعی داشته باشد. مثلاً $f(x) = |x|$ در $x = 0$ مینیمم دارد ولی اصولاً این تابع در 0 دارای مشتق نیست. در قضیهٔ ۹.۵ فرض شده است‌که f در c

دارای مشتق (متناهی یا نامتناهی) باشد. همچنین در این قضیه فرض شده است که c یک نقطهٔ درونی $]a, b[$ باشد. در مثال $f(x) = x$، که در آن $a \leqslant x \leqslant b$، f ماکزیمم و مینیمم خود را در نقطه‌های انتهائی بازه مـی‌گیرد ولی $f'(x)$ در $[a, b]$ هرگز صفر نیست.

۹.۵ قضیهٔ رل[1]

از نظر هندسی واضح است که اگر یک خم به قدر کافی «همـوار» باشد و در دو نقطهٔ انتهائی بازهٔ $[a, b]$ از محور x بگذرد، این خم باید «نقطهٔ برگشتی» بین a و b داشته باشد. بیان دقیق این مطلب به نام قضیهٔ رل معروف است.

قضیهٔ ۱۰.۵ (رل). فرض کنیم f در هـر نقطـهٔ بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق (متناهـی یا نامتناهی) داشته بـاشد. همچنین f در هـر دو نقطهٔ انتهـائی a و b پیوسته باشد. اگر $f(a) = f(b)$، دست‌کم یک نقطهٔ درونی مانند c هست که درآن $f'(c) = 0$.

برهان. فرض می‌کنیم کـه f' در هیچ نقطـهٔ $]a, b[$ صفر نباشد. از این فرض به تناقضی می‌رسیم. چون f بر مجموعهٔ فشردهٔ $[a, b]$ پیوسته است، پس f جائی در $[a, b]$ به ماکزیمم خود، یعنی M، و جائی به مینیمم خود، یعنی m مـی‌رسد. f در نقطه‌ای درونی اکسترمم ندارد (زیرا در صورت داشتن، f' در آن نقطه صفر خواهـد بود)، پس f هم ماکزیمم و هم مینیمم خود را در نقطه‌های انتهائی $[a, b]$ احـراز خواهد کرد. چون $f(a) = f(b)$، پس $m = M$، و در نتیجه f بر $[a, b]$ تابع پایائی است. این نتیجه ناقض آن فـرض است کـه f' در هیچ نقطـهٔ $]a, b[$ صفر نباشد. بنابراین نقطه‌ای مانند c در $]a, b[$ هست که در آن $f'(c) = 0$.

۱۰.۵ قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقها

قضیهٔ ۱۱.۵ (قضیهٔ مقدار میانگین). فرض کنیم f تابعی باشد که در هـر نقطهٔ بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد. همچنین f در نقطه‌های انتهائی a و b پیـوسته نیز بـاشد. در این صورت، نقطـه‌ای مانند c در $]a, b[$ هست کـه به ازای آن

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

تعبیر هندسی قضیهٔ بالا این است که یک خم به قدر کافی هموار بین دو نقطهٔ A و B دارای مماسی است که ضریب زاویه‌ای آن مساوی ضریب زاویه‌ای وتر AB

---

1. Rolle

می باشد. قضیهٔ ۱۱.۵ را از یک قضیهٔ کلیتری بدست می‌آوریم، که مستلزم دو تابع f و g است و نسبت به آنها حالت تقارن دارد.

قضیهٔ ۱۲.۵ (قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته). فرض کنیم دوتابع f و g در هر نقطهٔ بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشند. بعلاوه، این دو تابع در نقطه‌های انتهائی a و b پیوسته باشند. همچنین در هیچ نقطهٔ درونی $]a, b[$، مانند x، $f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو نامتناهی نباشند. در این صورت، نقطه‌ای درونی مانند c وجود دارد که به ازای آن

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

تبصره. در این قضیه اگر $g(x)$ را مساوی x فرض کنیم، قضیهٔ ۱۱.۵ بدست می‌آید.

برهان. قرار می‌دهیم

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

در این‌صورت، ملاحظه می‌شود که اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو متناهی باشند، $h'(x)$ نیز متناهی است، و اگر فقط یکی از دو مشتق $f'(x)$ و $g'(x)$ نامتناهی باشد، $h'(x)$ نامتناهی خواهد بود. (بنا بر فرض قضیه، هیچگاه $f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو نامتناهی نیستند.) همچنین، h در نقطه‌های انتهائی بازه پیوسته است، و

$$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b).$$

پس، بنا بر قضیهٔ رل، نقطه‌ای درونی مانند c هست که بـه ازای آن $h'(c) = 0$، و از این حکم ثابت می‌شود.

تبصره. مقتضی است که خواننده با درنظر گرفتن خمی در صفحهٔ xy کـه معادله‌های پرمائی آن عبـارت باشند از $x = g(t)$، $y = f(t)$، $a \leqslant t \leqslant b$، قضیهٔ ۱۲.۵ را تعبیر هندسی کند.

می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین را بقسمی وسعت داد که لزومی به پیوستگی f و g در نقطه‌های انتهائی بازه نباشد.

قضیهٔ ۱۳.۵ فرض کنیم دو تـابع f و g در هر نقطـهٔ $]a, b[$ مشتـق (متناهـی یا نامتنـاهـی) داشته بـاشند. همچنین حدهـای $f(a+)$، $g(a+)$، $f(b-)$، و $g(b-)$ وجود داشته باشند و متناهـی باشند. بعلاوه، در هر نقطـهٔ درونی مانند x، $f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو نامتناهـی نباشند. در این صورت، نقطـه‌ای درونی مـانند c هست که به ازای آن

$$f'(c)[g(b-) - g(a+)] = g'(c)[f(b-) - f(a+)].$$

برهان. تابعهای جدید F و G را بر $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $x \in]a, b[$، $F(x) = f(x)$ و $G(x) = g(x)$؛

$$F(a) = f(a+), G(a) = g(a+), F(b) = f(b-), G(b) = g(b-).$$

در این صورت، F و G بر $[a, b]$ پیوسته‌اند، و برای اثبات قضیه می‌توان قضیهٔ ۱۲.۵ را در مورد F و G بکار برد.

قضیهٔ زیرین بی‌درنگ از قضیهٔ مقدار میانگین نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۱۴.۵ فرض کنیم f در هر نقطهٔ بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد. همچنین f در نقطه‌های انتهائی a و b پیوسته باشد.

آ) هرگاه f' در بازهٔ $]a, b[$ فقط مقدارهای مثبت (متناهی یا نامتناهی) را بگیرد، آنگاه f بر $[a, b]$ صعودی اکید است؛

ب) هرگاه f' در بازهٔ $]a, b[$ فقط مقدارهای منفی (متناهی یا نامتناهی) را بگیرد، آنگاه f بر $[a, b]$ نزولی اکید است؛

ج) هرگاه f' همه‌جا در $]a, b[$ صفر باشد، آنگاه f بر $[a, b]$ تابعی است پایا.

برهان. فرض می‌کنیم x و y در $[a, b]$ باشند و $x < y$. اگر قضیهٔ مقدار میانگین را برای زیربازهٔ $[x, y]$ بکار بریم، خواهیم داشت

$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$، که در آن $c \in]x, y[$.

هر سه گزارهٔ قضیه بی‌درنگ از معادلهٔ بالا نتیجه می‌شوند.

با بکار بردن قسمت (ج) قضیهٔ ۱۴.۵ در مورد تفاضل $f - g$ خواهیم داشت:

نتیجهٔ ۱۵.۵ هرگاه f و g بر $[a, b]$ پیوسته باشند، و در هر نقطهٔ $]a, b[$ مشتقهای متناهی متساوی داشته باشند، آنگاه $f - g$ بر $[a, b]$ تابعی است پایا.

۱۱.۵ قضیهٔ مقدار میانی برای مشتقها

در قضیهٔ ۳۳.۴ ثابت شد که تابع پیوستهٔ f بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ هر مقدار بین ماکزیمم و مینیمم خود را می‌گیرد. خصوصاً، f هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را خواهد پذیرفت. حال مشابه این نتیجه را برای تابعهائی که به صورت مشتق هستند

ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۶.۵ (قضیهٔ مقدار میانی برای مشتقها). فرض کنیم f بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشد، و در هر نقطهٔ درونی این بازه مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد. همچنین، در نقطه‌های انتهائی، مشتقهای یکطرفی $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ وجود داشته ومتناهی باشند، و $f'_+(a) \neq f'_-(b)$. در این صورت، اگر c عددی حقیقی بین $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ باشد، دست‌کم یک نقطهٔ درونی مانند x هست که به ازای آن

$$f'(x) = c.$$

برهان. تابع جدید g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $x \neq a$، $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$، و $g(a) = f'_+(a)$.

تابع g بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته است. بنابر قضیهٔ مقدار میانی برای تابعهای پیوسته، g هر مقدار بین $f'_+(a)$ و $[f(b) - f(a)]/(b-a)$ را در درون بازهٔ $]a, b[$ می‌گیرد. هرگاه $x \in]a, b[$، آنگاه، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، k ای در بازهٔ $]a, x[$ هست که به‌ازای آن $g(x) = f'(k)$. بنابراین، f' هر مقدار بین $f'_+(a)$ و $[f(b) - f(a)]/(b-a)$ را در درون بازهٔ $]a, b[$ خواهد گرفت. بهمین نحو، اگر تابع h را به‌صورت زیرین تعریف کنیم:

اگر $x \neq b$، $h(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$، و $h(b) = f'_-(b)$،

با استدلالی مشابه بالا در مورد h، نتیجه می‌شود که f' هر مقدار بین

$$[f(b) - f(a)]/(b - a) \text{ و } f'_-(b)$$

را در درون بازهٔ $]a, b[$ نیز خواهد گرفت. با تلفیق این نتایج ملاحظه می‌شود که، f' هر مقدار بین $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ را دردرون بازهٔ $]a, b[$ می‌گیرد، و از این قضیه به اثبات می‌رسد.

تبصره. قضیهٔ ۱۶.۵ برای حالتی که یکی یا هر دو مشتق یکطرفی $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ نامتناهی باشند نیز معتبر است. برای اثبات قضیه در این حالت می‌توان از تابع کمکی $g(x) = f(x) - cx$، $x \in [a, b]$، استفاده نمود. جزئیات اثبات به خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ مقدار میانی نشان می‌دهد که، اگر مشتق یک تابع در بازه‌ای تغییر علامت دهد، این مشتق در نقطه‌ای از این بازه مساوی صفر خواهد بود. بنابراین، دو قسمت

(آ) و (ب) قضیهٔ ۱۴.۵ را می‌توان به صورت وسعت یافتهٔ زیر بیان کرد:

قضیهٔ ۱۷.۵ فرض کنیم f بر $]a, b[$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد، و در نقطه‌های انتهائی a و b پیوسته باشد. هرگاه به ازای هر $x \in]a, b[$ $f'(x) \neq 0$، آنگاه f بر $[a, b]$ یکنوای اکید خواهد بود.

همچنین، قضیهٔ مقدار میانی نشان می‌دهد که مشتقهای یکنوا لزوماً پیوسته‌اند.

قضیهٔ ۱۸.۵ فرض‌کنیم f' وجود داشته باشد، و بر بازهٔ باز $]a, b[$ یکنوا باشد. دراین صورت، f' بر $]a, b[$ پیوسته است.

برهان. فرض می‌کنیم f' در نقطهٔ c در $]a, b[$ ناپیوسته باشد. از این فرض به تناقض می‌رسیم. یک زیربازهٔ بستهٔ $]a,b[$ مانند $[\alpha,\beta]$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که c یک نقطهٔ درونی آن باشد. چون f' بر $[\alpha, \beta]$ یکنوا است، پس، بنا بر قضیهٔ ۵۱.۴، ناپیوستگی f' در c باید از نوع ناپیوستگی جهشی باشد. از این روی، f' نمی‌تواند هر مقدار بین $f'(\alpha)$ و $f'(\beta)$ را بپذیرد، و این با قضیهٔ مقدار میانی متناقض است.

۱۲.۵ دستور تیلور[1] با باقیمانده

همان طورکه پیشتر ذکرشد، هرگاه f در نقطهٔ c مشتقپذیر باشد، آنگاه f درمجاورت c تقریباً تابعی است خطی. یعنی، وقتی که $x - c$ کوچک باشد، معادلهٔ

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

تقریباً درست است. قضیهٔ تیلور اطلاعات بیشتری بدست می‌دهد. بنابراین قضیه، اگر f مشتق مرتبهٔ nم داشته باشد، f را می‌توان به یک چند جمله‌ای از درجهٔ $n - 1$ نزدیک نمود. همچنین، قضیهٔ تیلور عبارت مفیدی برای محاسبهٔ خطای حاصل از این تقریب بدست می‌دهد.

قضیهٔ ۱۹.۵ (تیلور). فرض کنیم f تابعی باشد که همه‌جا در بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق nم متناهی داشته باشد. همچنین $f^{(n-1)}$ بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد. بعلاوه $c \in [a, b]$. در این صورت، به ازای هر x در $[a, b]$ غیر از c، نقطه‌ای مانند x_1 بین x و c هست که به ازای آن

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - c)^n.$$

1. Taylor

قضیهٔ تیلور حالت خاصی است از نتیجه‌ای کلیتر از آن. این نتیجه در حقیقت توسیع مستقیمی است از قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته.

قضیهٔ ۲۰.۵ فرض کنیم دو تابع f و g در هر نقطهٔ بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق nم متناهی داشته باشند، همچنین مشتقهای $(n-1)$م آنها بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشند. بعلاوه $c \in [a, b]$. در این صورت، بـه ازای هـر x در $[a, b]$ غیر از c، نقطه‌ای مانند x_1 بین x و c هست بقسمی که

$$\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right]g^{(n)}(x_1)$$
$$= f^{(n)}(x_1)\left[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right].$$

تبصره. برای حالت خاصی که $g(x) = (x-c)^n$، به ازای $0 \leqslant k \leqslant n-1$ داریم $g^{(k)}(c) = 0$، و $g^{(n)}(x) = n!$. پس قضیهٔ بـالا در این حـالت به قضیهٔ تیلور تحویل می‌شود.

برهان. برای سادگی، فرض می‌کنیم که $c < b$ و $x > c$. x را ثابت نگهداشته، تابعهای جدید F و G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای هر t در $[c, x]$، قرار می‌دهیم

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

$$G(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

در این صورت، F و G بر بـازهٔ بستهٔ $[c, x]$ پیوسته‌انـد و در بازهٔ بـاز $]c, x[$ مشتقهای متناهی دارند. پس، بنا بر قضیهٔ ۱۲.۵، می‌توان نوشت $F'(x_1)[G(x) - G(c)] = G'(x_1)[F(x) - F(c)]$، که درآن $x_1 \in]c, x[$. چون $F(x) = f(x)$ و $G(x) = g(x)$، پس معادلهٔ بالا به معادلهٔ زیر تحویل می‌شود:

$$F'(x_1)[g(x) - G(c)] = G'(x_1)[f(x) - F(c)]. \qquad (\text{آ})$$

حال اگر از مجموعی که $F(t)$ به وسیلهٔ آن تعریف شده است مشتق بگیریم، با توجه به این مطلب که هر جملهٔ مجمـوع به صورت حاصلضرب است، همهٔ جمله‌ها، بجز یکی، حذف می‌شوند، و آنچه باقی می‌ماند به صورت زیرین است:

$$F'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t).$$

بهمین نحو، خواهیم داشت

$$G'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t).$$

حال اگر در رابطهٔ اخیر t را مساوی x_1 اختیار کنیم و حاصل را در رابطهٔ (آ) بگذاریم، دستوری را که در قضیه بیان شده است بدست خواهیم آورد.

۱۳.۵ مشتقهای توابع برداری

$\mathbf{f} :]a, b[\to \mathbf{R}^n$ را تابعی برداری می‌انگاریم که بر بازهٔ باز $]a, b[$ در $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد. در این صورت، $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$، که درآن هر مؤلفهٔ f_k تابعی است حقیقی که بر $]a, b[$ تعریف شده است. چنانچه هر مؤلفهٔ f_k در نقطهٔ c در $]a, b[$ مشتقپذیر باشد، می‌گوئیم که $\mathbf{f}$ در c مشتقپذیر است و مشتق $\mathbf{f}$ را در c با رابطهٔ زیرین تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{f}'(c) = (f_1'(c), \ldots, f_n'(c)).$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، $\mathbf{f}'(c)$ در نتیجهٔ مشتقگیری از هر یک از مؤلفه‌های $\mathbf{f}$ در c حاصل می‌شود. بنابراین تعریف، بسیاری از قضیه‌های مشتقگیری برای تابعهای برداری نیز معتبرند. مثلاً، هرگاه تابعهای برداری $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ و تابع حقیقی λ همه در c مشتقپذیر باشند، آنگاه مجموع $\mathbf{f} + \mathbf{g}$، حاصل ضرب $\lambda\mathbf{f}$، و حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ نیز در c مشتقپذیر هستند و داریم

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(c) &= \mathbf{f}'(c) + \mathbf{g}'(c),\\
(\lambda\mathbf{f})'(c) &= \lambda'(c)\mathbf{f}(c) + \lambda(c)\mathbf{f}'(c),\\
(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(c) &= \mathbf{f}'(c) \cdot \mathbf{g}(c) + \mathbf{f}(c) \cdot \mathbf{g}'(c).
\end{aligned}$$

رابطه‌های بالا با توجه به مؤلفه‌های توابع مورد نظر بآسانی ثابت می‌شوند. در مورد تابعهای برداری، یک قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقگیری از تابعهای مرکب نیز وجود دارد، که آن نیز به همین نحو ثابت می‌شود. هرگاه $\mathbf{f}$ تابعی برداری و u تابعی حقیقی باشند، آنگاه تابع مرکب $\mathbf{g}$، که با رابطهٔ $\mathbf{g}(x) = \mathbf{f}[u(x)]$ تعریف شود، تابعی است برداری. اگر قلمرو $\mathbf{f}$ حاوی یکی از همسایگیهای $u(c)$ باشد، و $u'(c)$ و $\mathbf{f}'[u(c)]$ هر دو وجود داشته باشند، بنا بر قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$\mathbf{g}'(c) = \mathbf{f}'[u(c)]u'(c).$$

قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۱۱.۵) برای تابعهای برداری برقرار نیست. مثلاً، هرگاه به ازای هر عدد حقیقی t، $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$، آنگاه

$$\mathbf{f}(2\pi) - \mathbf{f}(0) = 0,$$

ولی $\mathbf{f}'(t)$ هرگز صفر نیست. در واقع به‌ازای هر مقدار t، $\|\mathbf{f}'(t)\| = 1$. در فصل ۱۲ (قضیهٔ ۸.۱۲) شکل اصلاح شده‌ای از قضیهٔ مقدار میانگین برای تابعهای برداری داده می‌شود.

۱۴.۵ مشتقهای جزئی

فرض کنیم $f : S \to \mathbf{R}$ تابعی حقیقی باشد که بر مجموعهٔ باز S در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد. هرگاه دو نقطهٔ $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ در S چنان باشند که همهٔ مختصات آنها، بجز مختص kام، با هم متساوی باشند، یعنی، هرگاه به ازای $i \neq k$، $x_i = c_i$ و $x_k \neq c_k$، آنگاه می‌توان حد زیر را در نظر گرفت:

$$\lim_{x_k \to c_k} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{c})}{x_k - c_k}.$$

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق جزئی f برحسب مختص kام می‌نامند، و با یکی از نمادهای زیرین یا نمادی مشابه آنها نشان می‌دهند:

$$D_k f(\mathbf{c}), \qquad f_k(\mathbf{c}), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{c}).$$

ما نماد $D_k f(\mathbf{c})$ را بکار خواهیم برد.

این طرز عمل n تابع دیگر $D_1 f$، $D_2 f$، ...، و $D_n f$ را بوجود می‌آورد، که در نقطه‌هائی از S تعریف می‌شوند که در آنها حدهای متناظر وجود داشته باشند.

مشتقگیری جزئی حقیقتاً مفهوم تازه‌ای نیست، زیرا برای تعریف آن $f(x_1, \ldots, x_n)$ را تنها به‌عنوان تابعی از یک متغیر در نظر گرفته، متغیرهای دیگر را ثابت فرض کرده‌ایم. یعنی، هرگاه تابع g را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$g(x_k) = f(c_1, \ldots c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \ldots, c_n),$$

آنگاه $D_k f(\mathbf{c})$ همان مشتق معمولی g در c_k، یعنی $g'(c_k)$، خواهد بود. این را معمولاً به‌این‌صورت توصیف می‌کنیم که می‌گوئیم ما از f برحسب مختص kام مشتق می‌گیریم، در حالی که مختصات دیگر را ثابت فرض کرده‌ایم.

برای تعمیم یک خاصیت R^1 به R^n، خواستار آنیم که خاصیتهای مهم حالت یک بعدی محفوظ بمانند. مثلاً، در حالت یک بعدی، اگر تابعی در نقطهٔ c مشتق داشته باشد، در این نقطه پیوسته هم هست. بنابراین، مفهوم مشتق برای تابعهای چند متغیره باید بقسمی تعمیم یابد که پیوستگی آنها را ایجاب کند. مشتقهای جزئی این کار را انجام نمی‌دهند. یک تابع n متغیره ممکن است در نقطه‌ای دارای مشتقهای جزئی برحسب هر متغیر باشد ولی در این نقطه پیوسته نباشد. این‌مطلب را با مثالی از یک تابع دو متغیره مصور می‌سازیم:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{اگر } x = \circ \text{ یا } y = \circ\text{،} \\ ۱ & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

مشتقهای جزئی $D_1 f(\circ, \circ)$ و $D_2 f(\circ, \circ)$ هر دو وجود دارند. در واقع، داریم

$$D_1 f(\circ, \circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{f(x, \circ) - f(\circ, \circ)}{x - \circ} = \lim_{x\to\circ} \frac{x}{x} = ۱,$$

و، بهمین نحو، معلوم می‌شودکه $D_2 f(\circ, \circ) = ۱$. اما بسادگی معلوم می‌شودکه این تابع در $(\circ, \circ)$ پیوسته نیست.

وجود مشتقهای جزئی برحسب هر متغیر، پیوستگی جداگانه در هر متغیر را ایجاب می‌کند؛ اما، همچنان که دیدیم، موجب پیوستگی تابع برحسب همهٔ متغیرها باهم نیست. اشکال کار مشتقهای جزئی در این است که، همان طور که از تعریف آنها برمی‌آید، ما مجبوریم که در هر زمان فقط یک متغیر را در نظر بگیریم. مشتقهای جزئی درجهٔ تغییر یک تابع را در امتداد هر یک از محورهای مختصات بدست می‌دهند. مشتق مفهوم کلیتری دارد که توجه ما را به امتدادهای خاص محورهای مختصات محدود نمی‌سازد. این مفهوم در فصل ۱۲ بتفصیل مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

هدف این بخش صرفاً معرفی نمادهائی برای مشتقهای جزئی است، زیرا قبل از رسیدن به فصل ۱۲ گاهی آنها را بکار خواهیم برد.

هرگاه f بر مجموعهٔ باز S دارای مشتقهای جزئی $D_1 f$، . . . ، $D_n f$ باشد، آنگاه می‌توان مشتقهای جزئی این تابعها را نیز در نظر گرفت. مشتقهای جزئی این تابعها را مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم f می‌نامیم. مشتق جزئی $D_k f$ برحسب متغیر x_r را با نماد $D_{r,k} f$ نشان می‌دهیم. بنابراین،

$$D_{r,k} f = D_r(D_k f).$$

بهمین نحو، می‌توان مشتقهای جزئی مرتبه‌های بالاتر را تعریف نمود. نمادهای

دیگری که برای مشتقهای جزئی بکار می‌روند عبارتند از

$$D_{r,k}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_r\, \partial x_k}, \quad D_{p,q,r}f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r}.$$

۱۵.۵ مشتقگیری از تابعهای یك متغیر مختلط

در این بخش باختصار دربارهٔ مشتقهای توابع مختلط، که بر زیرمجموعه‌های صفحهٔ مختلط تعریف شده‌اند، بحث می‌نمائیم. البته، یک چنین تابعها، تابعهای برداری می‌باشند که قلمرو و برد آنها زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^2$ خواهند بود. همهٔ ملاحظات مذکور در فصل ۴ دربارهٔ حدود و پیوستگی تابعهای برداری، بخصوص، در مورد تابعهای مختلط نیز صادقند. اما، در هرحال، تفاوتی اساسی بین‌مجموعهٔ عددهای‌مختلط $\mathbf{C}$ و مجموعهٔ بردارهای n بعدی $\mathbf{R}^n$ $(n > 2)$ وجود دارد. این تفاوت در این‌جا نقش مهمی را بعهده دارد. در دستگاه عددهای مختلط چهار عمل جبری جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم وجود دارند، و این عملها در اکثر قانونهای «متداول» جبرکه برای دستگاه عددهای حقیقی برقرارند صدق می‌کنند. مخصوصاً این عددها در پنج اصل اول مذکور در فصل ۱ صدق می‌کنند. (اصل ۶ تا ۱۰ مربوط به رابطهٔ ترتیبی $>$ است، که نمی‌تواند میان عددهای مختلط وجود داشته باشد.) هر دستگاه جبری‌که در اصلهای موضوع ۱ تا ۵ صدق کند میدان نامیده می‌شود. (برای بحث مستوفی‌در بارهٔ میدانها، ر. ک.کتاب مرجع ۰.۴۰۱) در $\mathbf{R}^n$ $(n > 2)$ نمی‌توان ضرب و تقسیم را بقسمی تعریف کرد که $\mathbf{R}^n$ میدانی[1] شامل $\mathbf{C}$ گردد. اما، چون در $\mathbf{C}$ تقسیم امکان‌پذیر است، می‌توان خارج قسمت تفاضلی اساسی $[f(z) - f(c)]/(z-c)$ را، که درتعریف مشتق در $\mathbf{R}$ ازآن استفاده کردیم، تشکیل‌داد، و آنگاه واضح می‌شود که چگونه باید مشتق را در $\mathbf{C}$ تعریف نمود.

تعریف ۲۱.۵ فرض کنیم تابع مختلط f بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{C}$ تعریف شده باشد،

۱. مثلاً، اگرممکن‌بود در $\mathbf{R}^3$ ضرب چنان تعریف شود که $\mathbf{R}^3$ به صورت میدانی شامل $\mathbf{C}$ درآید، چنین استدلال می‌کردیم که به ازای هر $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^3$، بردارهای 1، $\mathbf{x}$، $\mathbf{x}^2$، $\mathbf{x}^3$ نامستقل خطی می‌باشند (ر. ك. کتاب مرجع ۱.۵، صفحهٔ ۵۵۸). از این روی، به ازای هر $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^3$، عددهائی حقیقی مانند a_0، a_1، a_2، a_3 وجود دارند که به ازای آنها $a_0 + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 + a_3\mathbf{x}^3 = 0$. اما می‌دانیم که هر چند جمله‌ای درجهٔ ۳ با ضریبهای حقیقی مساوی حاصل ضرب یك چند جمله‌ای خطی و یك چند جمله‌ای درجهٔدوم با ضریبهای حقیقی است. پس یك چند جمله‌ای درجهٔ ۳ با ضریبهای حقیقی تنها می‌تواند ریشه‌های حقیقی یا مختلط داشته باشد، و این ناقض فرض اولیه است.

و $c \in S$. در این صورت، اگر حد

$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$$

وجود داشته باشد، می‌گوئیم f در نقطهٔ c مشتقپذیر است.

با عمل حدگیری بالا، تابع مختلط جدید f' بوجود می‌آید. این تابع در نقطه‌هائی از S مانند z تعریف شده است که در آنها $f'(z)$ وجود داشته باشد. البته، به‌روشی مشابه، مشتقهای مرتبه‌های بالا، یعنی f''، f'''، . . .، تعریف می‌شوند.

حال گزاره‌های زیر را می‌توان برای تابعهای مختلط تعریف شده بر مجموعهٔ بازی مانند S درست مثل حالت حقیقی ثابت نمود.

آ) f در c مشتقپذیر است وقتی، و فقط وقتی، که تابعی مانند f^* وجود داشته باشد که در c پیوسته باشد، و به ازای هر $z \in S$،

$$f(z)-f(c)=(z-c)f^*(z),$$

که در آن $f^*(c)=f'(c)$.

تبصره. با فرض $g(z)=f^*(z)-f'(c)$، معادلهٔ مذکور در قسمت (آ) به شکل زیر در می‌آید

$$f(z)=f(c)+f'(c)(z-c)+g(z)(z-c),$$

که در آن وقتی که $z\to c$، $g(z)\to 0$. رابطهٔ بالا را دستور تیلور مرتبهٔ اول برای f می‌نامند.

ب) هرگاه f در c مشتقپذیر باشد، آنگاه f در این نقطه پیوسته است.

ج) هرگاه دو تابع f و g در نقطهٔ c مشتق داشته باشند، آنگاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، و خارج قسمت آنها نیز در c مشتق دارند، و این مشتقها با دستورهای متداول (مانند دستورهای مذکور در قضیهٔ ۴۰۵) بدست می‌آیند. در حالت f/g، فرض $g(c)\neq 0$ ضروری است.

د) قاعدهٔ زنجیره‌ای برای تابعهای مختلط معتبر است؛ یعنی، اگر قلمرو g حاوی یکی از همسایگیهای $f(c)$ باشد، و $f'(c)$ و $g'[f(c)]$ هر دو وجود داشته باشند،

$$(g\circ f)'(c)=g'[f(c)]f'(c).$$

هرگاه $f(z) = z$، آنگاه به ازای هر z در C، $f'(z) = ۱$. در صورتی که (ج) را مکرر بکار بریم، می‌بینیم که اگر $f(z) = z^n$ (n عددی است صحیح ومثبت)، $f'(z) = nz^{n-۱}$. این حکم در صورت منفی بودن n نیز برقرار است، به شرط آن که $z \neq ۰$. بنابراین، می‌توان مشتق چند جمله‌ایهای مختلط و تابعهای گویای مختلط را با همان روشهای متداول در حساب دیفرانسیل مقدماتی محاسبه کرد.

۱۶.۵ معادله‌های کشی-ریمان

اگر f تابعی مختلط از یک متغیر مختلط باشد، مقدار f را در هر نقطه می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

که در آن u و v تابعهائی حقیقی از یک متغیر مختلط می‌باشند. البته، می‌توان u و v را به عنوان تابعهائی حقیقی از دو متغیر حقیقی انگاشته f را بدین صورت نیز نشان داد:

اگر $z = x + iy$ ، $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

در هر یک از این دو حالت، می‌نویسیم $f = u + iv$ و u و v را قسمتهای حقیقی و موهومی f می‌نامیم. مثلاً، تابع نمائی مختلط f، که به‌صورت

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

تعریف می‌شود، دارای این قسمتهای حقیقی و موهومی است:

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y.$$

همچنین، هرگاه $f(z) = z^۲ = (x + iy)^۲$، آنگاه

$$u(x, y) = x^۲ - y^۲, v(x, y) = ۲xy.$$

در قضیهٔ زیرین خواهیم دید که وجود f' محدودیتهای بنسبت زیادی برای قسمتهای حقیقی و موهومی f ایجاد می‌کند.

قضیهٔ ۲۲.۵ فرض کنیم $f = u + iv$ بر مجموعهٔ باز S در C تعریف شده باشد. هرگاه در نقطه‌ای مانند c در S، $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه مشتقهای جزئی $D_۱u(c)$، $D_۲u(c)$، $D_۱v(c)$، و $D_۲v(c)$ نیز وجود دارند و داریم

$$f'(c) = D_۱u(c) + i\, D_۱v(c), \qquad (۳)$$

و

$$f'(c) = D_2 v(c) - i\, D_2 u(c). \tag{۴}$$

از رابطه‌های (۳) و (۴)، بخصوص، نتیجه می‌شود که

$D_1 u(c) = D_2 v(c)$ و $D_1 v(c) = -D_2 u(c)$.

تبصره. دومعادلهٔ اخیر به نام معادله‌های کشی - ریمان معروفند. این معادله‌ها معمولاً به شکل زیرین نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

برهان. چون $f'(c)$ وجود دارد، پس بر S تابعی مانند f^* وجود دارد بقسمی که

$$f(z) - f(c) = (z - c) f^*(z), \tag{۵}$$

که در آن f^* در c پیوسته است و $f^*(c) = f'(c)$. چنین می‌نویسیم: $z = x + iy$، $c = a + ib$، و $f^*(z) = A(z) + iB(z)$، که در آن $A(z)$ و $B(z)$ حقیقی هستند. توجه کنید که وقتی که $z \to c$، $A(z) \to A(c)$ و $B(z) \to B(c)$. حال اگر فقط در S، zهائی را اختیار کنیم که در آنها $y = b$ و قسمتهای حقیقی و موهومی (۵) را در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$u(x, b) - u(a, b) = (x - a) A(x + ib),$$
$$v(x, b) - v(a, b) = (x - a) B(x + ib).$$

با تقسیم رابطه‌های بالا بر $x - a$ و فرض $x \to a$، نتیجه می‌گیریم که

$D_1 u(c) = A(c)$ و $D_1 v(c) = B(c)$.

چون $f'(c) = A(c) + iB(c)$، پس رابطهٔ (۳) برقرار است.

بهمین طریق، با انتخاب zهائی در S که در آنها $x = a$، خواهیم داشت

$D_2 v(c) = A(c)$ و $D_2 u(c) = -B(c)$،

یعنی رابطهٔ (۴) نیز صحیح است.

در قضیهٔ زیر کاربردهائی از معادله‌های کشی–ریمان مراعات شده‌اند.

قضیهٔ ۲۳.۵ فرض کنیم $f = u + iv$ تابعی باشد که همه جا در گردهٔ باز D به مرکز (a, b) مشتق داشته باشد. هرگاه یکی از دو تابع u و v یا تابع $|f|$ [1] بر D پایا باشد، آنگاه f بر D تابعی پایا خواهد بود. همچنین، اگر به ازای هر z در

---

۱. در این‌جا مراد از $|f|$ تابعی است که مقدارش در z مساوی $|f(z)|$ است.

D، $f'(z) = 0$، f تابعی است پایا.

برهان. فرض می‌کنیم u بر D تابع پایائی باشد. در این صورت، بنا بر معادله‌های کشی ــ ریمان، D_1v و D_2v هر دو بر D مساوی صفرند. حال اگر قضیهٔ مقدار میانگین در حالت یک بعدی را دوبار بکار ببریم، نتیجه می‌گیریم که به ازای y' ی بین b و y،

$$v(x, y) - v(x, b) = (y - b)D_2v(x, y') = 0,$$

و به ازای x' ی بین a و x،

$$v(x, b) - v(a, b) = (x - a)D_1v(x', b) = 0.$$

بنابراین، به ازای هر (x, y) در D، $v(x, y) = v(a, b)$، پس v بر D تابعی است پایا. با بیانی مشابه نشان داده می‌شود که هرگاه v بر D پایا باشد، u نیز پایا است.

اکنون فرض می‌کنیم $|f|$ بر D پایا باشد. در این صورت، $|f|^2 = u^2 + v^2$ بر D پایا است. با مشتقگیری جزئی از آن خواهیم داشت

$$uD_1u + vD_1v = 0, \quad uD_2u + vD_2v = 0.$$

با توجه به معادله‌های کشی ــ ریمان، معادلهٔ دوم بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$vD_1u - uD_1v = 0.$$

از این رابطه و معادلهٔ اول بالا پس از حذف D_1v بدست می‌آوریم که $(u^2 + v^2)D_1u = 0$. هرگاه $u^2 + v^2 = 0$، آنگاه $u = v = 0$، یعنی $f = 0$. هرگاه $u^2 + v^2 \neq 0$، آنگاه $D_1u = 0$؛ پس u تابعی است پایا، بنابراین f پایا است.

بالاخره، اگر f' بر D مساوی ۰ باشد، هر دو مشتق جزئی D_1v و D_2v بر D صفر خواهند بود. حال، مانند قسمت اول برهان، می‌توان نتیجه گرفت که f بر D تابع پایائی است.

بنابر قضیهٔ ۲۲.۵، شرط لازم برای آن که تابع $f = u + iv$ در نقطهٔ c مشتق داشته باشد آن است که چهار مشتق جزئی D_1u، D_2u، D_1v، و D_2v در c وجود داشته باشند و در معادله‌های کشی ــ ریمان صدق کنند. ولی مثال زیرین نشان می‌دهد که این شرط کافی نیست.

مثال. فرض می‌کنیم u و v به صورت زیر تعریف شده باشند:

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$، $u(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$، و $u(0, 0) = 0$،

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$، $v(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$، و $v(0, 0) = 0$.

بآسانی معلوم می‌شود که

$D_1u(0, 0) = D_1v(0, 0) = 1$ و $D_2u(0, 0) = -D_2v(0, 0) = -1$.

بنابراین، معادله‌های کشی ــ ریمان در نقطهٔ $(0, 0)$ برقرارند. باوجود این، تابع $f = u + iv$ درنقطهٔ $z = 0$ مشتق ندارد. در حقیقت، به‌ازای $x = 0$ داریم

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{-y + iy}{iy} = 1 + i,$$

حال آن که به ازای $x = y$،

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{xi}{x + ix} = \frac{1 + i}{2},$$

و در نتیجه $f'(0)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

در فصل ۱۲ ثابت خواهیم کرد که برقراری معادله‌های کشی ــ ریمان درنقطهٔ c توأم با پیوسته بودن مشتقهای جزئی u و v در یکی از همسایگیهای c کافی برای وجود داشتن مشتق تابع $f = u + iv$ در c می‌باشد. برای آن که مصور سازیم که این نتیجه در عمل چگونه بکار می‌رود، مشتق تابع نمائی مختلط را بدست می‌آوریم. فرض کنیم که $f(z) = e^z = u + iv$. در این صورت،

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y,$$

و در نتیجه

$$D_1u(x, y) = e^x \cos y = D_2v(x, y),$$
$$D_2u(x, y) = -e^x \sin y = -D_1v(x, y).$$

چون این مشتقهای جزئی همه جا در $\mathbf{R}^2$ پیوسته‌اند و در معادله‌های کشی ــ ریمان صدق می‌کنند، پس z هرچه باشد $f'(z)$ وجود دارد. برای محاسبهٔ آن از قضیهٔ ۵.۲۲ استفاده می‌کنیم، داریم

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

بنابراین، مانند حالت حقیقی، مشتق تابع نمائی مختلط مساوی خود آن است.

تمرین

تابعهای حقیقی

در تمرینهای زیر، هرجا که لازم باشد، دستورهای مشتقگیری از توابع سادهٔ مثلثاتی، نمائی، و لگاریتمی دانسته فرض می‌شوند.

۱.۵ گوئیم تابع f در شرط لیپ شیتس[1] از مرتبهٔ α در نقطهٔ c صدق می‌کند وقتی که عددی مثبت مانند M (M ممکن است بستگی به c داشته باشد) و گویی یک بعدی چون $B(c)$ وجود داشته باشد بقسمی که هرگاه $x \in B(c)$ و $x \neq c$، آنگاه

$$|f(x) - f(c)| < M|x - c|^{\alpha}.$$

آ) فرض کنید f تابعی باشد که در شرط لیپ شیتس از مرتبهٔ α در نقطهٔ c صدق می‌کند. نشان دهید که اگر $\alpha > ۰$، f در c پیوسته است، و اگر $\alpha > ۱$، f در c مشتق دارد.

ب) تابعی را مثال بزنید که در نقطه‌ای مانند c در شرط لیپ شیتس از مرتبهٔ یک صدق کند ولی $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

۲.۵ در مورد هریک از حالتهای زیرین، بازه‌هائی را که f در آنها صعودی یا نزولی است معین کنید، و همچنین ماکزیممها و مینیممهای آن را (در صورت وجود) در مجموعه‌ای که f بر آن تعریف شده باشد بیابید.

آ) اگر $x \in \mathbf{R}$، $f(x) = x^{۳} + ax + b$.

ب) اگر $|x| > ۳$، $f(x) = \log(x^{۲} - ۹)$.

ج) اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$، $f(x) = x^{۲/۳}(x - ۱)^{۴}$.

د) اگر $۰ \leqslant x \leqslant \pi/۲$، و $x \neq ۰$،

$$f(x) = (\sin x)/x \text{، و } f(۰) = ۱.$$

۳.۵ چند جمله‌ای f را باکوچکترین درجهٔ ممکن‌بقسمی بیابید که به‌ازای عددهای حقیقی مفروض $x_۱ \neq x_۲$ و $a_۱$، $a_۲$، و $b_۱$، $b_۲$، داشته باشیم

$$f(x_۱) = a_۱,\ f(x_۲) = a_۲,\ f'(x_۱) = b_۱,\ f'(x_۲) = b_۲\ .$$

۴.۵ f را به صورت زیرین تعریف کنید: اگر $x \neq ۰$، $f(x) = e^{-۱/x^{۲}}$، و $f(۰) = ۰$. نشان دهید که

آ) f به ازای هر x پیوسته است.

---

1. Lipschitz

ب) $f^{(n)}$ به‌ازای هر x پیوسته است، و $f^{(n)}(0) = 0$، $(n = 1, 2, \dots)$.

۵.۵ f، g، و h را به‌صورت زیرین تعریف‌کنید: $f(0) = g(0) = h(0) = 0$،
و اگر $x \neq 0$، $f(x) = \sin(1/x)$،
$g(x) = x\sin(1/x)$، و $h(x) = x^2 \sin(1/x)$.

نشان دهید که

آ) اگر $x \neq 0$، $f'(x) = -1/x^2 \cos(1/x)$، و $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) اگر $x \neq 0$، $g'(x) = \sin(1/x) - 1/x \cos(1/x)$، و $g'(0)$ وجود ندارد.

ج) اگر $x \neq 0$، $h'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$، $h'(0) = 0$، و $\lim_{x \to 0} h'(x)$ وجود ندارد.

۶.۵ ثابت‌کنید اگر h مساوی حاصل‌ضرب دو تابع f و g باشد، مشتق nم آن از رابطهٔ زیرین بدست می‌آید:

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$ که در آن $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

این رابطه به دستور لایب نیتز[1] معروف است.

۷.۵ فرض‌کنید مشتقهای مرتبهٔ سوم تابعهای f و g به‌ازای هر x در $\mathbf{R}$ وجود داشته باشند. اگر به ازای هر x، $f(x)g(x) = 1$، برقراری رابطه‌های (آ)، (ب)، (ج)، و (د) مذکور در زیر را در نقطه‌هائی که مخرجها ناصفرند ثابت کنید:

آ) $$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0.$$

ب) $$\frac{f''(x)}{f'(x)} - 2\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g''(x)}{g'(x)} = 0.$$

ج) $$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - 3\frac{f'(x)g''(x)}{f(x)g'(x)} - 3\frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{g'''(x)}{g'(x)} = 0.$$

د) $$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2.$$

1. Leibnitz

تبصره. عبارت طرف چپ رابطهٔ (د) را مشتق شوارتزی f در x می‌نامند.

ه) نشان دهید که هرگاه

$g(x) = [af(x) + b]/[cf(x) + d]$، که در آن $ad - bc \neq 0$،

آنگاه f و g دارای مشتقهای شوارتزی متساوی می‌باشند. راهنمائی. اگر $c \neq 0$، بنویسید

$$\frac{(af + b)}{(cf + d)} = \left(\frac{a}{c}\right) + \frac{(bc - ad)}{[c(cf + d)]},$$

و سپس قسمت (د) را بکار برید.

۸.۵ فرض کنید چهار تابع f_1، f_2، g_1، و g_2 در $]a, b[$ مشتق داشته باشند. تابع F را با دترمینان زیر تعریف کنید:

اگر $x \in]a,b[$، $F(x)= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$.

آ) نشان دهید که به ازای هر x در $]a, b[$، $F'(x)$ وجود دارد و

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) \end{vmatrix}.$$

ب) نتیجهٔ کلیتری را برای دترمینانهای مرتبهٔ n بیان و اثبات کنید.

۹.۵ فرض کنیم f_1، . . . ، و f_n، n تابع معلوم باشندکه هر یک در $]a, b[$ مشتق nام داشته باشد. تابع W را، که تابع ورونسکی[1] f_1، . . . ، و f_n خوانده می‌شود، بدین صورت تعریف می‌کنیم: به ازای هر x در $]a, b[$، $W(x)$ مساوی مقدار دترمینان مرتبهٔ nی است که در سطر kام و ستون mام آن $f_m^{(k-1)}(x)$ قرار دارد، که در آن $k = 1, 2, \ldots, n$ و $m = 1, 2, \ldots, n$. [$f_m^{0}(x)$ به‌جای $f_m(x)$ نوشته شده است.]

آ) نشان دهید اگر در دترمینانی که $W(x)$ با آن تعریف می‌شود به جای آخرین سطر آن مشتقهای nام، یعنی $f_1^{(n)}(x)$، . . . ، $f_n^{(n)}(x)$، را قرار دهیم، مقدار دترمینان حاصل مساوی $W'(x)$ می‌شود.

ب) اگر n عدد پایای c_1، . . . ، c_n وجود داشته باشند بقسمی که همه صفر نباشند، و به ازای هر x در $]a, b[$ داشته باشیم

1. Wronskian

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0,$$

نشان دهید که به ازای هر x در $]a, b[$، $W(x) = 0$.

تبصره. اگر مجموعه‌ای از تابعها در رابطهٔ بالا صدق کند، گوئیم این مجموعه بر $]a, b[$ نامستقل خطی است.

ج) صفر شدن تابع ورونسکی در سراسر $]a, b[$ شرط لازم برای نامستقل خطی بودن f_1، . . .، f_n هست، ولی این شرط کافی نیست. نشان دهید که هرگاه ورونسکی دو تابع در سراسر $]a,b[$ صفر شود و یکی از این دو تابع در $]a, b[$ صفر نشود، آنگاه مجموعهٔ متشکل از این دو تابع بر $]a, b[$ نامستقل خطی خواهد بود.

قضیهٔ مقدار میانگین

۱۰.۵ فرض کنید f تابع مفروضی باشد که در هر نقطه از بازهٔ $]a, b[$ مشتق متناهی داشته باشد، و $\lim_{x\to b-} f(x) = +\infty$. ثابت کنید که $\lim_{x\to b-} f'(x)$ یا وجود ندارد یا نامتناهی است.

۱۱.۵ نشان دهید که دستور موجود در قضیهٔ مقدار میانگین را می‌توان به صورت زیرین نوشت:

$$\text{به ازای } \theta \text{ای بین ۰ و ۱،} \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h).$$

در هر یک از حالتهای زیرین θ را به‌عنوان تابعی از x و h بدست‌آورید.

آ) $f(x) = x^2$ ، ب) $f(x)=x^3$.

ج) $f(x) = e^x$ ، د) اگر $x > 0$، $f(x) = \log(x)$.

در هر مورد، با فرض $x \neq 0$ و ثابت نگهداشتن x، $\lim_{h\to 0} \theta$ را بدست آورید.

۱۲.۵ با فرض

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \text{ و } g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$$

درقضیهٔ ۲۰.۵، نشان دهید که اگر $0 < x \leqslant 1$، $f'(x)/g'(x)$ هرگز مساوی خارج قسمت $[f(1) - f(0)]/[g(1) - g(0)]$ نخواهد بود. چگونه این نتیجه را با معادلهٔ

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)},\ a<x_1<b,$$

که از قضیهٔ ۲۰.۵ به ازای $n = 1$ بدست می‌آید، سازش می‌دهید؟

۱۳.۵ درهر یک ازحالتهای خاص زیرین ازقضیهٔ ۲۰.۵، فرض‌کنید که $n = 1$، $c = a$، $x = b$، و نشان دهید که $x_1 = (a+b)/2$.

آ) $f(x) = \sin x$، $g(x) = \cos x$؛

ب) $f(x) = e^x$، $g(x) = e^{-x}$.

آیا می‌توان رده‌ای کلی از جفتهای (f, g) بقسمی یافت که همواره به ازای هر عضو این مجموعه، x_1 مساوی $(a+b)/2$ باشد، و چنین جفتهای (f, g) مذکور در (آ) و (ب) عضو آن باشند؟

۱۴.۵ فرض‌کنید f تابع مفروضی باشدکه در بازهٔ نیمباز $0 < x \leqslant 1$ تعریف شده و مشتق متناهی‌داشته باشد. همچنین به ازای هر x از این بازه، $|f'(x)| < 1$. به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، تعریف کنید $a_n = f(1/n)$، و نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد. راهنمائی. از شرط کشی استفاده کنید.

۱۵.۵ فرض کنید f درهرنقطهٔ بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق متناهی داشته باشد. همچنین در یک نقطهٔ درونی مانند c، $\lim_{x\to c} f'(x)$ وجود داشته و متناهی باشد. ثابت کنید که مقدار این حد باید مساوی $f'(c)$ باشد.

۱۶.۵ فرض کنید f بر $]a, b[$ پیوسته باشد و f'، احتمالاً جز در c، همه‌جا در $]a, b[$ متناهی باشد. اگر $\lim_{x\to c} f'(x) = A$، نشان دهید که $f'(c)$ نیز باید وجود داشته باشد و مساوی A باشد.

۱۷.۵ فرض کنید f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، و $f(0) = 0$. همچنین به ازای هر x در $]0, 1[$، $f'(x)$ متناهی باشد. تابع g را بر $]0, 1[$ با معادلهٔ $g(x) = f(x)/x$ تعریف کنید. ثابت کنید هرگاه f' بر $]0, 1[$ صعودی باشد، آنگاه g نیز بر این بازه صعودی خواهد بود.

۱۸.۵ فرض کنید f در $]a, b[$ مشتق متناهی داشته، و بر $[a, b]$ پیوسته باشد. همچنین $f(a) = f(b) = 0$. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی λ، نقطه‌ای مانند c در $]a, b[$ هست بقسمی که $f'(c) = \lambda f(c)$. راهنمائی. به‌ازای gی مناسبی که

به λ بستگی دارد، قضیهٔ رل را در مورد $g(x)f(x)$ بکار برید.

۱۹.۵ فرض کنید تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و در بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق دوم متناهی داشته باشد. همچنین پاره‌خطی که دو نقطهٔ $A = (a, f(a))$ و $B = (b, f(b))$ را به هم وصل می‌کند نمودار f را در نقطه‌ای مانند P متمایز از A و B قطع نماید. ثابت کنید به ازای cای در $]a, b[$، $f''(c) = 0$.

۲۰.۵ اگر مشتق سوم f، یعنی f'''، در $[a, b]$ وجود داشته باشد، f''' در این بازه متناهی باشد، و

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0,$$

ثابت کنید به ازای cای در $]a, b[$، $f'''(c) = 0$.

۲۱.۵ فرض‌کنید f نامنفی، و f''' در بازهٔ باز $]0, 1[$ متناهی باشد. اگر به‌ازای دست‌کم دو مقدار برای x در $]0, 1[$، $f(x) = 0$، ثابت کنید نقطه‌ای مانند c در $]0, 1[$ هست که به ازای آن $f'''(c) = 0$.

۲۲.۵ فرض کنید f در بازهٔ $]a, +\infty[$ مشتق متناهی داشته باشد.

آ) اگر وقتی که $x \to +\infty$، $f(x) \to 1$ و $f'(x) \to c$، ثابت کنید که $c = 0$.

ب) اگر وقتی که $x \to +\infty$، $f'(x) \to 1$، ثابت کنید وقتی که $x \to +\infty$، $f(x)/x \to 1$.

ج) اگر وقتی که $x \to +\infty$، $f'(x) \to 0$، ثابت کنید وقتی که $x \to +\infty$، $f(x)/x \to 0$.

۲۳.۵ فرض کنید h عدد ثابت مثبتی باشد. نشان دهیدکه تابعی مانند f نمی‌توان یافت که در هر سه شرط زیرین صدق کند: به ازای $x \geqslant 0$، $f'(x)$ وجود داشته باشد؛ $f'(0) = 0$؛ و به ازای $x > 0$، $f'(x) \geqslant h$.

۲۴.۵ اگر $h > 0$، $f'(x)$ به ازای هر x در $]a - h, a + h[$ وجود داشته باشد و متناهی باشد، و f بر $[a - h, a + h]$ پیوسته باشد، نشان دهید که:

آ) $$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h),$$

$$0 < \theta < 1;$$

ب)
$$\frac{f(a+h)-۲f(a)+f(a-h)}{h}$$
$$=f'(a+\lambda h)-f'(a-\lambda h)\,,\circ<\lambda<۱.$$

ج) اگر $f''(a)$ وجود داشته باشد، نشان دهید که

$$f''(a)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(a+h)-۲f(a)+f(a-h)}{h^{۲}}.$$

د) مثالی بیاورید که در آن حد خارج قسمت مذکـور در (ج) وجـود داشته باشد ولی $f''(a)$ وجود پیدا نکند.

۲۵.۵ فرض‌کنید f در $]a,b[$ مشتق متناهی داشته باشد، و $c\in]a,b[$. شرط ذیل را درنظر بگیرید: به ازای هر $\circ<\varepsilon$، گویی یک بعدی مانند $B(c;\delta)$ هست که‌شعاع آن δ فقط بستگی به ε دارد نه به c، بقسمی‌که هرگاه $x\in B(c;\delta)$ و $x\neq c$، آنگاه

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<\varepsilon.$$

نشان دهید که اگـر شرط بـالا در سراسر $]a,b[$ برقـرار بـاشد، f' بر این بـازه پیوسته است.

۲۶.۵ فرض کنید f در $]a,b[$ مشتق متناهی داشته باشد، و بـر $[a,b]$ پیوسته باشد، و به‌ازای هر x در $[a,b]$، $a\leqslant f(x)\leqslant b$، و به‌ازای هر x در $]a,b[$، $|f'(x)|\leqslant\alpha<۱$. ثابت کنید که f در $[a,b]$ فقط یک نقطهٔ ثابت دارد.

۲۷.۵ دو تابع مـانند f و g مثال بزنید که در $]\circ,۱[$ دارای مشتقهای متناهـی باشند و

$$\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)}{g(x)}=\circ,$$

و g چنان اختیار شده باشد کـه $g'(x)$ هرگز صفر نشود و $\lim_{x\to\circ}f'(x)/g'(x)$ وجود نداشته باشد.

۲۸.۵ قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

فرض کنید f و g دو تابع باشند کـه در $]a,b[$ مشتق nم متناهـی داشته باشند. و نیز فرض کنید به ازای نقطه‌ای درونی در $]a,b[$ مانند c،

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0,$$

و
$$g(c) = g'(c) = \cdots = g^{(n-1)}(c) = 0\text{،}$$

ولی $g^{(n)}(x)$ در $]a, b[$ هرگز صفر نباشد، نشان دهید که

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

تبصره. در این قضیه $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ در c پیوسته فرض نشده‌اند. راهنمائی. تابع F را به صورت زیر تعریف کنید:

$$F(x) = f(x) - \frac{(x-c)^{n-1} f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!},$$

تابع G را نیز مشابه F تعریف کرده، سپس قضیهٔ ۲۰.۵ را در مورد تابعهای F و G بکار برید.

۲۹.۵ نشان دهید که دستور مذکور در قضیهٔ تیلور را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{(x-c)(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1),$$

که درآن x_1 بین x و c می‌باشد. فرض‌کنید که $1 - \theta = (x - x_1)/(x - c)$. نشان دهید که $0 < \theta < 1$ و برای جملهٔ باقیمانده، شکل

$$\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-c)^n}{(n-1)!} f^{(n)}[\theta x + (1-\theta)c]$$

را، که به کشی منسوب است، نتیجه بگیرید.

راهنمائی. در برهان قضیهٔ ۲۰.۵ فرض کنید $G(t) = g(t) = t$.

تابعهای برداری

۳۰.۵ اگر تابع برداری $\mathbf{f}$ در نقطهٔ c مشتقپذیر باشد، ثابت کنید که

$$\mathbf{f}'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[\mathbf{f}(c+h) - \mathbf{f}(c)]\,.$$

برعکس، اگر این حد وجود داشته باشد، ثابت کنید که $\mathbf{f}$ در c مشتقپذیر است.

۳۱.۵ تابع برداری $\mathbf{f}$ در هر نقطهٔ $]a, b[$ مشتقپذیر است، و دارای هنج پایای

$\| f \|$ می‌باشد. ثابت کنید که $\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t) = 0$ بر $]a,b[$ است.

۳۲.۵ تابع برداری $\mathbf{f}$ هرگز بر $\mathbf{R}$ صفر نمی‌شود، و مشتق‌آن بر $\mathbf{R}$ وجود داشته و پیوسته است. اگر تابعی حقیقی مانند λ وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر t، $\mathbf{f}'(t) = \lambda(t)\mathbf{f}(t)$، ثابت کنید تابعی حقیقی و مثبت مانند u و برداری پایا چون $\mathbf{c}$ وجود دارند با این خاصیت که به ازای هر t، $\mathbf{f}(t) = u(t)\mathbf{c}$.

مشتقهای جزئی

۳۳.۵ تابع f را که بر $\mathbf{R}^2$ با دستورهای زیر تعریف شده باشد در نظر بگیرید:

$$\text{اگر } (x, y) \neq (0, 0)\text{،}\quad f(x, y)=\frac{xy}{x^2 + y^2}\text{، و } f(0, 0) = 0.$$

ثابت‌کنید به‌ازای هر (x, y) در $\mathbf{R}^2$، مشتقهای جزئی $D_1 f(x, y)$ و $D_2 f(x, y)$ وجود دارند، و مقدارهای این مشتقها را به صورت رابطه‌هائی صریح از x و y ارزیابی کنید. همچنین، نشان دهید که f در نقطهٔ $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۳۴.۵ فرض کنید تابع f بر $\mathbf{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\text{اگر } (x, y) \neq (0, 0)\text{،}\quad f(x,y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\text{، و } f(0, 0) = 0.$$

مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول و دوم f را در مبدأ (در صورت وجود) محاسبه کنید.

تابعهای مختلط

۳۵.۵ فرض کنید S یک مجموعهٔ باز در $\mathbf{C}$، و S^* مجموعهٔ همهٔ مزدوجهای مختلط نقطه‌های S باشد. اگر f بر S تعریف شده باشد، g را بر S^* با رابطهٔ زیر تعریف کنید: $g(\bar{z}) = \overline{f(z)}$، که در آن $\overline{f(z)}$ مزدوج مختلط $f(z)$ است. اگر f در c مشتقپذیر باشد، ثابت کنید که g در $\bar{c}$ مشتقپذیر است و $g'(\bar{c}) = \overline{f'(c)}$.

۳۶.۵ یکم) درهریک ازمثالهای زیر بنویسید $f=u+iv$، و $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را با دستورهائی صریح بیابید:

آ) $f(z) = \sin z$، ب) $f(z) = \cos z$،
ج) $f(z) = |z|$، د) $f(z) = \bar{z}$،
ه) $f(z) = \arg(z)\ (z \neq 0)$، و) $f(z) = \operatorname{Log} z\ (z \neq 0)$،

ز) $f(z) = e^{z^2}$، ح) $f(z) = z^\alpha$ (α مختلط است و $z \neq 0$).

(این تابعها را باید چنان تعریف کرد که در فصل ۱ تعریف شده‌اند.)

دوم) نشان دهید که u و v بـه ازای این مقـدارهای z در معادله‌های کشی ـ ریمان صدق می‌کنند: در (آ)، (ب)، (ز) به ازای هر z؛ در (ج)، (د)، (هـ) به ازای هیچ z؛ در (و)، (ح) به ازای هر z جز zهائی‌که قسمتهای حقیقی آنها نامثبت می‌باشند (در قسمت (ح)، اگر α عدد صحیح نامنفی باشد، معادله‌های کشی ـ ریمـان به ازای هر z، و اگر α عـدد صحیح منفی باشد، این معادله‌ها به ازای هر $z \neq 0$ برقرار خواهند بود.)

سوم) $f'(z)$ را در قسمتهـای (آ)، (ب)، (هـ)، (ز)، (ح)، با فـرض وجود داشتن، محاسبه کنید.

۳۷.۵ بنویسید $f = u + iv$ و فرض کنید f در هر نقطهٔ گردهٔ بازی چون D به مرکز $(0, 0)$ مشتق داشته باشد. اگر به ازای عددهائی حقیقی مانند a و b، که هردو صفر نباشند، $au^2 + bv^2$ بر D پایا باشد، ثابت کنید که f بر D تابعی است پایا.

فهرست چند کتاب بـه زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعـات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

5.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 1, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1967.
5.2 Chaundy, T. W., *The Differential Calculus*. Clarendon Press, Oxford, 1935.

٦

تابعهای با تغییر کراندار و خمهای با درازای متناهی

۱.۶ مقدمه

در فصل ۴ بعضی از خاصیتهای اساسی تابعهای یکنوا بدست آمد. در این فصل کوتاه بحث ما دربارهٔ تابعهای با تغییر کراندار یا ردهای از تابعها است که بسیار به تابعهای یکنوا مربوطند. خواهیم دید که این تابعها با خمهائی که درازی کمان آنها متناهی است (خمهای با درازای متناهی) رابطهٔ بسیار نزدیک دارند. در فصل بعد ملاحظه خواهیم کرد که تابعهای با تغییرکراندار در نظریهٔ انتگرالگیری ریمان-اشتیل یس[1] نیز نقشی برعهده دارند.

۲.۶ خاصیتهای توابع یکنوا

قضیهٔ ۱.۶ فرض کنیم f بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده، بر این بازه صعودی باشد. همچنین فرض کنیم $n+1$ نقطهٔ x_0، x_1، . . . ، و x_n بهصورت زیر اختیار شده باشند:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

در این صورت، نامساوی زیرین برقرار است:

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leqslant f(b) - f(a).$$

1. Stieltjes

برهان. نقطهٔ y_k را در بازهٔ $]x_k, x_{k+1}[$ اختیار می‌کنیم. به‌ازای $1 \leqslant k \leqslant n-1$، داریم $f(x_k+) \leqslant f(y_k)$ و $f(y_{k-1}) \leqslant f(x_k-)$، پس $f(x_k+) - f(x_k-) \leqslant f(y_k) - f(y_{k-1})$. اگر همهٔ این نامساویها را با هم جمع کنیم، مجموع طرف راست نامساوی حاصل توی هم می‌رود و مساوی $f(y_{n-1}) - f(y_0)$ می‌گردد. چون $f(y_{n-1}) - f(y_0) \leqslant f(b) - f(a)$، پس حکم قضیه ثابت است.

تفاضل $f(x_k+) - f(x_k-)$، بی‌تردید، جهش f در x_k است. بنا بر قضیهٔ پیش، به ازای هر دستهٔ متناهی نقطه مانند x_k در $]a, b[$، مجموع جهشهای f در این نقطه‌ها همواره به $f(b) - f(a)$ کراندار می‌باشد. این نتیجه را می‌توان برای اثبات قضیهٔ زیرین بکار برد.

قضیهٔ ۲.۶ هرگاه f بر $[a, b]$ یکنوا باشد، آنگاه مجموعهٔ ناپیوستگیهای f شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم f صعودی باشد، و S_m مجموعهٔ نقطه‌هائی در $]a, b[$ باشد که در آنها جهش f از $1/m$ $(m > 0)$ کمتر نباشد. اگر نقطه‌های

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$$

در S_m اختیار شوند، بنا بر قضیهٔ ۱.۶،

$$\frac{n-1}{m} \leqslant f(b) - f(a).$$

یعنی S_m باید مجموعه‌ای متناهی باشد. چون مجموعهٔ ناپیوستگیهای f در $]a, b[$ یک زیرمجموعهٔ اجتماع $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ است، پس این مجموعه شمارشپذیر خواهد بود. (در حالتی که f نزولی باشد، اثبات بالا را می‌توان در مورد $-f$ بکار برد.)

۳.۶ تابعهای با تغییر کراندار

تعریف ۳.۶ فرض کنیم $[a, b]$ بازهٔ فشرده‌ای باشد. اگر

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

مجموعهٔ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ را یک افراز $[a, b]$ می‌نامیم. بازهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ را زیربازهٔ k ام P نامیده، می‌نویسیم $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. در این صورت $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$. دستهٔ همهٔ افرازهای ممکن $[a, b]$ با نماد $\mathcal{P}[a, b]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد. اگر

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

یك افراز $[a, b]$ باشد، به‌ازای $k = 1, 2, \cdots, n$ می‌نویسیم

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$

هرگاه عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر افراز $[a, b]$،

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leqslant M,$$

آنگاه گوئیم f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

دو قضیهٔ زیرین مثالهائی از تابعهای با تغییر کراندار را بدست می‌دهند.

قضیهٔ ۵.۶ هرگاه f بر $[a, b]$ یکنوا باشد، آنگاه f بر این بازه با تغییر کراندار است.

برهان. فرض کنیم f صعودی باشد. در این صورت، به‌ازای هر افراز $[a, b]$ داریم $\Delta f_k \geqslant 0$، و در نتیجه

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

قضیهٔ ۶.۶ هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و f' در $]a, b[$ وجود داشته و کراندار باشد، یعنی هرگاه به‌ازای هر x در $]a, b[$، $|f'(x)| \leqslant A$، آنگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

برهان. بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین،

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}),$$

که در آن $t_k \in]x_{k-1}, x_k[$. از این نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f'(t_k)| \Delta x_k \leqslant A \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = A(b-a).$$

قضیهٔ ۷.۶ هرگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، یعنی هرگاه به‌ازای هر افراز $[a, b]$، $\sum |\Delta f_k| \leqslant M$، آنگاه f بر $[a, b]$ کراندار است. در واقع، به‌ازای هر x در $[a, b]$، $|f(x)| \leqslant |f(a)| + M$.

برهان. فرض می‌کنیم که $x \in]a, b[$. با استفاده از افراز مخصوص $P = \{a, x, b\}$، نتیجه می‌گیریم که

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant M.$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که $|f(x) - f(a)| \leqslant M$، یا

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + M.$$

همین نامساوی به‌ازای $x = a$ یا $x = b$ نیز برقرار هست.

چند مثال

۱. بسادگی می‌توان تابع پیوسته‌ای ساخت که با تغییر کراندار نباشد. مثلاً، تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $x \neq ۰$، $f(x) = x \cos\{\pi/(۲x)\}$، و $f(۰) = ۰$. f بر $[۰, ۱]$ پیوسته است، ولی اگر افراز

$$P = \left\{۰, \frac{۱}{۲n}, \frac{۱}{۲n-۱}, \ldots, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, ۱\right\}$$

را برای $[۰, ۱]$ در نظر بگیریم، با محاسبهٔ ساده‌ای معلوم می‌شود که

$$\sum_{k=۱}^{۲n} |\Delta f_k| = \frac{۱}{۲n} + \frac{۱}{۲n} + \frac{۱}{۲n-۲} + \frac{۱}{۲n-۲} + \cdots + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}.$$

چون رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} (۱/n)$ واگرا است، مجموعهٔ مجموعهای بالا، به‌ازای همهٔ مقدارهای n، نمی‌تواند کراندار باشد. در این مثال f' در $]۰, ۱[$ وجود دارد ولی f' بر این بازه کراندار نیست. اما، چون f' بر هر بازهٔ فشرده‌ای که حاوی مبدأ نباشد کراندار است، پس f بر یک چنین بازه‌هائی با تغییر کراندار خواهد بود.

۲. تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $x \neq ۰$، $f(x) = x^۲ \cos(۱/x)$، و $f(۰) = ۰$. f شبیه تابع مذکور در مثال ۱ است. این f بر $[۰, ۱]$ با تغییر کراندار است، زیرا f' بر $[۰, ۱]$ کراندار می‌باشد. در واقع، $f'(۰) = ۰$، و به‌ازای $x \neq ۰$، $f'(x) = \sin(۱/x) + ۲x \cos(۱/x)$. بنابراین، به‌ازای هر x در $[۰, ۱]$، $|f'(x)| \leqslant ۳$.

۳. کراندار بودن f' شرطی لازم برای با تغییر کراندار بودن f نیست. مثلاً،

فرض کنیم که $f(x) = x^{1/3}$. این تابع بر هر بازهٔ متناهی یکنوا (و درنتیجه با تغییر کراندار) است. ولی وقتی که $x \to 0$، $f'(x) \to +\infty$.

۴.۶ تغییر کل

تعریف ۸.۶ فرض کنیم f بر بازهٔ $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، و $\sum(P)$ مجموع $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$ متناظر با افراز $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ را نشان دهد. عدد

$$V_f(a, b) = \sup\{\sum(P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

را تغییر کل f بر بازهٔ $[a, b]$ می‌نامیم.

تبصره. هرجا ابهامی پیش نیاید، به‌جای $V_f(a, b)$ می‌نویسیم V_f.

چون f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است، پس V_f عددی است متناهی. همچنین، از این که همواره $\sum(P) \geqslant 0$، نتیجه می‌شود که $V_f \geqslant 0$. بعلاوه، $V_f(a, b) = 0$ وقتی، و فقط وقتی، که f بر $[a, b]$ تابع پایائی باشد.

قضیهٔ ۹.۶ فرض کنیم هریک از دو تابع f و g بر بازهٔ $[a, b]$ با تغییر کراندارباشد. در این صورت، مجموع، تفاضل، و حاصل ضرب آنها نیز با تغییر کراندار هستند. همچنین،

$$V_{f\pm g} \leqslant V_f + V_g \quad \text{و} \quad V_{f\cdot g} \leqslant AV_f + BV_g،$$

که درآن

$$A = \sup\{|g(x)| \mid x \in [a, b]\}, \quad B = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

برهان. فرض کنیم $h(x) = f(x)g(x)$. به‌ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P، داریم

$$\begin{aligned}|\Delta h_k| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &= |[f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)] \\ &\quad + [f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})]| \leqslant A|\Delta f_k| + B|\Delta g_k|.\end{aligned}$$

یعنی h با تغییر کراندار است و $V_h \leqslant AV_f + BV_g$. چون برهانهای با تغییر کراندار بودن مجموع و تفاضل ساده‌ترند، از بیان آنها در اینجا صرف‌نظر می‌شود.

تبصره. قضیهٔ بالا در مورد خارج قسمت دو تابع برقرار نیست، زیرا متقابل یک

تابع با تغییر کراندار لزوماً تابعی با تغییر کراندار نیست. مثلاً، هرگاه وقتی که $x \to x_0$، $f(x) \to 0$، آنگاه $1/f$ بر هر بازه‌ای حاوی x_0 کراندار نیست، و در نتیجه (بنا بر قضیهٔ ۷.۶)، $1/f$ نمی‌تواند برچنین بازه‌ای با تغییر کراندار باشد. برای آن که بتوان قضیهٔ ۹.۶ را به‌خارج قسمت تابعها وسعت داد، کافی است تابعهائی را که مقدارهایشان به‌طور دلخواه به‌صفر نزدیک می‌شوند مستثنا نمود.

قضیهٔ ۱۰.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. همچنین f دور از ۰ کراندار باشد؛ یعنی، عددی مثبت مانند m وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر x در $[a, b]$، $0 < m \leqslant |f(x)|$. در این صورت $g = 1/f$ نیز بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است، و $V_g \leqslant V_f/m^2$.

برهان.

$$|\Delta g_k| = \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \left|\frac{\Delta f_k}{f(x_k)f(x_{k-1})}\right| \leqslant \frac{|\Delta f_k|}{m^2}.$$

۵.۶ خاصیت جمعپذیری تغییر کل

در دوقضیهٔ اخیر بازهٔ $[a, b]$ را ثابت نگهداشته، $V_f(a, b)$ را به‌عنوان تابعی از f در نظر گرفتیم. حال اگر f را ثابت انگاشته تغییر کل را به‌عنوان تابعی از بازهٔ $[a, b]$ مورد مطالعه قرار دهیم، می‌توان خاصیت جمعپذیری زیر را ثابت نمود.

قضیهٔ ۱۱.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، و $c \in]a, b[$. در این صورت، f بر $[a, c]$ و بر $[c, b]$ با تغییر کراندار است و

$$V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که f بر $[a, c]$ و بر $[c, b]$ با تغییر کراندار است. فرض کنیم P_1 و P_2، بترتیب، افرازهای $[a, c]$ و $[c, b]$ باشند. در این صورت، $P_0 = P_1 \cup P_2$ یک افراز $[a, b]$ خواهد بود. اگر $\sum(P)$ مجموع $\sum|\Delta f_k|$ متناظر با افراز P (از بازهٔ مورد نظر) را نشان دهد، می‌توان نوشت

$$\sum(P_1) + \sum(P_2) = \sum(P_0) \leqslant V_f(a, b). \qquad (1)$$

این نامساوی نشان می‌دهد که هر مجموع $\sum(P_1)$ و $\sum(P_2)$ به $V_f(a, b)$ کراندار است، و این بدان معنی است که f بر $[a, c]$ و بر $[c, b]$ با تغییر کراندار می‌باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۵.۱، از (۱) نامساوی زیر نیز نتیجه می‌شود:

$$V_f(a, c) + V_f(c, b) \leqslant V_f(a, b).$$

برای بدست آوردن عکس نامساوی بالا، فرض می‌کنیم
$P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ و $P_0 = P \cup \{c\}$ افرازی (احتمالاً جدید) باشد که با اضافه‌کردن نقطهٔ c به P حاصل می‌گردد. هرگاه $c \in [x_{k-1}, x_k]$، آنگاه

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|,$$

و در نتیجه، $\sum(P) \leqslant \sum(P_0)$. حال گوئیم نقطه‌های P_0 در $[a, c]$ و $[c, b]$ یک افراز $[a, c]$ مانند P_1 ویک افراز $[c, b]$ مانند P_2 را بوجود می‌آورند. مجموعهای متناظر همهٔ این افرازها با رابطهٔ زیرین به هم مربوطند:

$$\sum(P) \leqslant \sum(P_0) = \sum(P_1) + \sum(P_2) \leqslant V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

بنابراین، $V_f(a, c) + V_f(c, b)$ کرانی بالائی برای هر مجموع $\sum(P)$ است. چون این عدد از کوچکترین کران بالائی کوچکتر نیست، باید داشته باشیم

$$V_f(a, b) \leqslant V_f(a, c) + V_f(c, b),$$

و برهان قضیه تمام خواهد بود.

۶.۶ تغییر کل بر $[a, x]$ به‌عنوان تابعی از x

اکنون تابع f و نقطهٔ انتهائی چپ بازه را ثابت نگهداشته، تغییر کل را به عنوان تابعی از نقطهٔ انتهائی راست مورد مطالعه قرار می‌دهیم. از خاصیت جمعپذیری نتیجه‌های مهم زیرین برای این تابع حاصل می‌شوند.

قضیهٔ ۱۲.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییرکراندار باشد. تابع V را بر $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $a < x \leqslant b$، $V(x) = V_f(a, x)$، و $V(a) = 0$. در این صورت:

یکم) V بر $[a, b]$ تابعی صعودی است.
دوم) $V - f$ بر $[a, b]$ تابعی صعودی است.

برهان. اگر $a < x < y \leqslant b$، می‌توان نوشت

$$V_f(a, y) = V_f(a, x) + V_f(x, y).$$

ازاین رابطه نتیجه می‌شود که $V(y) - V(x) = V_f(x, y) \geqslant 0$. از این روی $V(x) \leqslant V(y)$، و (یکم) برقرار است.

برای اثبات (دوم)، به ازای هر $x \in [a, b]$، قرار می‌دهیم $D(x) = V(x) - f(x)$. دراین صورت، اگر $a \leqslant x < y \leqslant b$، خواهیم داشت

$$D(y) - D(x) = V(y) - V(x) - [f(y) - f(x)]$$
$$= V_f(x, y) - [f(y) - f(x)].$$

اما از تعریف $V_f(x, y)$ معلوم می‌شود که

$$f(y) - f(x) \leqslant V_f(x, y).$$

یعنی که $D(y) - D(x) \geqslant 0$، و (دوم) برقرار خواهد بود.

تبصره. به ازای برخی از تابعهای f، تغییر کل $V_f(a, x)$ را می‌توان به صورت انتگرال بیان کرد. (ر. ک. تمرین ۲۰.۷.)

۷.۶ نمایش تابعهای با تغییرکراندار به صورت تفاضل تابعهای صعودی

وصف زیبا و سادهٔ زیرین از تابعهای با تغییر کراندار نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۱۲.۶.

قضیهٔ ۱۳.۶ فرض کنیم f بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشد. در این صورت، f بر $[a, b]$ وقتی، و فقط وقتی، با تغییر کراندار است که f را بتوان به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی نشان داد.

برهان. اگر f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، می‌توان نوشت $f = V - D$، که در آن V تابع یاد شده در قضیهٔ ۱۲.۶ است و $D = V - f$. هر دو تابع V و D بر $[a, b]$ صعودی می‌باشند.

عکس مطلب بالا بی‌درنگ از قضیه‌های ۵.۶ و ۹.۶ نتیجه می‌شود.

نمایش یک تابع با تغییر کراندار به صورت تفاضل دو تابع صعودی مطلقاً منحصر بفرد نیست. اگر رابطهٔ $f = f_1 - f_2$، که در آن f_1 و f_2 صعودی هستند، برقرار باشد، رابطهٔ $f = (f_1 + g) - (f_2 + g)$ هم، که در آن g تابع صعودی دلخواهی است، برقرار خواهد بود، و صورت اخیر نمایش تازه‌ای است از f. اگر g صعودی اکید باشد، $f_1 + g$ و $f_2 + g$ نیز چنین‌خواهند بود. بنابراین، اگر در قضیهٔ ۱۳.۶ لفظ «صعودی» را به «صعودی اکید» تبدیل کنیم باز حکم برقرار است.

۸.۶ تابعهای با تغییر کراندار پیوسته

قضیهٔ ۱۴.۶ فرض کنیم تابع f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. اگر $x \in]a, b]$، قرار می‌دهیم $V(x) = V_f(a, x)$ و $V(a) = 0$. در این صورت، هر نقطهٔ پیوستگی f نقطهٔ پیوستگی V نیز هست. و عکس قضیه هم درست است.

برهان. چون V یکنوا است، به ازای هر نقطه در $]a, b[$ مانند x حدهای دست

راستی و چپی $V(x+)$ و $V(x-)$ وجود دارند. بنابر قضیهٔ ۱۳.۶، $f(x+)$ و $f(x-)$ نیز وجود خواهند داشت.

هرگاه $a < x < y \leqslant b$، آنگاه [با توجه به تعریف $V_f(x, y)$]،

$$\circ \leqslant |f(y) - f(x)| \leqslant V(y) - V(x).$$

اگر در رابطهٔ بالا $y \to x$، می‌بینیم که

$$\circ \leqslant |f(x+) - f(x)| \leqslant V(x+) - V(x).$$

و، به نحو مشابه، $\circ \leqslant |f(x) - f(x-)| \leqslant V(x) - V(x-)$. از این نامساویها نتیجه می‌شود که هر نقطهٔ پیوستگی V نقطهٔ پیوستگی f نیز هست.

برای اثبات عکس این مطلب، فرض کنیم f در نقطهٔ c در بازهٔ $]a, b[$ پیوسته باشد. در این صورت، به ازای $\varepsilon > \circ$ داده شده، δی مثبتی هست که به‌ازای آن هرگاه $\circ < |x - c| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/۲$. به‌ازای همین ε، یک افراز $[c, b]$ مانند P نیز، مثلاً، به صورت

$$P = \{x_\circ, x_۱, \ldots, x_n\}, \qquad x_\circ = c, \quad x_n = b,$$

وجود دارد بقسمی که

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{۲} < \sum_{k=۱}^{n} |\Delta f_k|.$$

افزودن نقطه‌هائی به P موجب بالا رفتن مجموع $\sum |\Delta f_k|$ می‌شود، پس می‌توان فرض کرد که $\circ < x_۱ - x_\circ < \delta$. این بدان معنی است که

$$|\Delta f_۱| = |f(x_۱) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{۲},$$

و چون $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ یک افراز $[x_۱, b]$ است، نامساوی بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{۲} < \frac{\varepsilon}{۲} + \sum_{k=۲}^{n} |\Delta f_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲} + V_f(x_۱, b).$$

بنابراین

$$V_f(c, b) - V_f(x_۱, b) < \varepsilon.$$

اما

$$\begin{aligned} \circ \leqslant V(x_۱) - V(c) &= V_f(a, x_۱) - V_f(a, c) \\ &= V_f(c, x_۱) = V_f(c, b) - V_f(x_۱, b) < \varepsilon. \end{aligned}$$

بدین ترتیب نشان داده‌ایم که

$0 < x_1 - c < \delta$ ایجاب می‌کند که $0 \leqslant V(x_1) - V(c) < \varepsilon$.

از این رابطهٔ $V(c+) = V(c)$ ثابت می‌شود. با بیانی مشابه می‌توان ثابت کرد که $V(c-) = V(c)$. بنابراین، قضیه برای همهٔ نقطه‌های درونی $[a, b]$ برقرار است. (برای نقطه‌های انتهائی کافی است در استدلال تغییرهای مختصری داد.)

از تلفیق قضیه‌های ۱۴.۶ و ۱۳.۶ قضیهٔ زیر حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۱۵.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت، وقتی، و فقط وقتی، f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است که آن را بتوان به صورت تفاضل دوتابع پیوستهٔ صعودی نشان داد.

تبصره. اگر در قضیهٔ بالا لفظ «صعودی» را به «صعودی اکید» تبدیل کنیم، قضیه بازهم برقرار خواهد بود.

بنابر قضیهٔ ۱۳.۶، ناپیوستگیهای یک تابع با تغییرکراندار (در صورت وجود) البته باید از نوع ناپیوستگیهای جهشی باشند. بعلاوه، بنابر قضیهٔ ۲.۶، ناپیوستگیهای چنین تابعی تشکیل مجموعه‌ای شمارشپذیر می‌دهند.

۹.۶ خمها و گذرها

فرض کنیم $\mathbf{f}: [a, b] \to \mathbf{R}^n$ تابعی باشد برداری، که بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ در $\mathbf{R}$ پیوسته باشد. وقتی t عضوهای $[a, b]$ را بخود بگیرد، $\mathbf{f}(t)$ها مجموعه‌ای از نقطه‌های $\mathbf{R}^n$ را رسم می‌کنند. این مجموعه را نمودار $\mathbf{f}$ یا خمی‌که به‌وسیلهٔ $\mathbf{f}$ توصیف شده است می‌نامند. چون هر خم نقش پیوستهٔ بازه‌ای فشرده است، پس هر خم یک زیرمجموعهٔ فشرده و همبند $\mathbf{R}^n$ می‌باشد. در این‌جا خود $\mathbf{f}$ یک گذر نامیده می‌شود.

غالباً تصور این که یک خم به‌وسیلهٔ تغییر مکان نقطهٔ متحرکی رسم می‌شود مشگل گشا است. بازهٔ $[a, b]$ به صورت یک بازهٔ زمان انگاشته می‌شود، و بردار $\mathbf{f}(t)$ وضع نقطهٔ متحرک را در لحظهٔ t نشان می‌دهد. در این تعبیر، تابع $\mathbf{f}$ خودش حرکت نامیده می‌شود.

گذرهای مختلف می‌توانند خم واحدی را مشخص کنند. مثلاً، هر یک از دو تابع مختلط

$$f(t) = e^{2\pi i t}, \quad g(t) = e^{-2\pi i t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را معین می‌کنند، اما جهتهای حرکت که به‌وسیلهٔ این دوتابع

مشخص می‌شوند مقابل یکدیگر خواهند بود. همین دایره پنج بار با حرکتی که به‌وسیلهٔ تابع $h(t) = e^{10\pi i t}$، $0 \leqslant t \leqslant 1$، مشخص می‌گردد پیموده می‌شود.

۱۰.۶ گذرهای با درازای متناهی و درازای کمان

اکنون می‌خواهیم مفهوم درازای کمان یک خم را معرفی کنیم. **برای** این کار خم را به چند ضلعیهای محاط شده در آن نزدیک می‌کنیم. این **روشی است** که توسط هندسه دانان قدیم بکار برده می‌شد. چون هر خط مستقیم کوتاهترین گذر بین دو نقطه از آن است، از راه شهود درک می‌کنیم که درازای هر چند ضلعی محاط در یک خم نباید از درازای آن خم بیشتر باشد. از این روی، درازای یک خم باید کرانی بالائی برای مجموعهٔ درازاهای همهٔ چند ضلعیهای محاط در آن خم باشد. بنابراین، طبیعی‌است‌که درازای یک خم را مساوی کوچکترین کران بالائی مجموعهٔ درازاهای همهٔ چند ضلعیهای محاط ممکن در آن تعریف کنیم.

برای اکثر خمهائی که عملاً با آنها سروکار داریم، تعریف بالا برای درازای کمان تعریف مفیدی است. اما همان طور که بزودی خواهیم دید، خمهائی هستند که مجموعهٔ درازاهای همهٔ چند ضلعیهای محاطی در آنها کران بالائی ندارد. بنابراین، لازم است خمها را به دو رسته تقسیم کنیم: یک رسته آنهائی که دارای درازای کمان هستند، و رستهٔ دیگر آنهائی که، با تعریف بالا، درازای کمان ندارند. هرعضو از رستهٔ اول یک خم با درازای متناهی، و هر عضو از رستهٔ دوم یک خم با درازای نامتناهی نامیده می‌شود.

اکنون مفهومهای بالا را به طریقهٔ صوری بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ گذری در $\mathbf{R}^n$ باشد. به ازای هر افراز $[a, b]$ مانند

$$P = \{t_0, t_1, \cdots, t_m\},$$

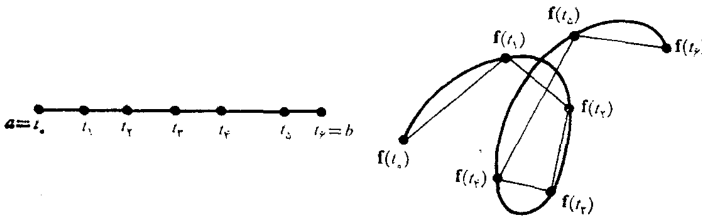
نقطه‌های $\mathbf{f}(t_0)$، $\mathbf{f}(t_1)$، . . . ، و $\mathbf{f}(t_m)$ رأسهای یک چند ضلعی محاطی می باشند. (در شکل ۱۰.۶ مثالی در این مورد نشان داده شده است.) درازای این چند ضلعی را با $\Lambda_{\mathbf{f}}(P)$ نشان می‌دهیم و با مجموع زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(P) = \sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{f}(t_k) - \mathbf{f}(t_{k-1})\|.$$

تعریف ۱۶.۶ هرگاه به ازای همهٔ افرازهای $[a, b]$ مانند P مجموعهٔ عددهای $\Lambda_{\mathbf{f}}(P)$ کراندار باشد، آنگاه گوئیم گذر $\mathbf{f}$ با درازای متناهی است، و درازای کمان $\mathbf{f}$ را با $\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b)$ نشان داده، با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda_f(a, b) = \sup \{\Lambda_f(P) \mid P \in \mathscr{P}[a, b]\} \cdot$$

در حالتی که مجموعهٔ $\Lambda_f(P)$ها بی‌کران باشد، $\mathbf{f}$ با درازای نامتناهی نامیده می‌شود.



شکل ۱.۶

بسادگی می‌توان همهٔ خمهای با درازای متناهی را مشخص کرد.

قضیهٔ ۱۷.۶ گذر $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ با مؤلفه‌های $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\mathbf{f}$ وقتی، و فقط وقتی، با درازای متناهی است که هر مؤلفهٔ f_k بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. اگر $\mathbf{f}$ با درازای متناهی باشد، نامساویهای زیرین را خواهیم داشت:

$$(۲) \qquad V_k(a, b) \leqslant \Lambda_f(a, b) \leqslant V_1(a, b) + \cdots + V_n(a, b) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

که در آنها $V_k(a, b)$ تغییر کل f_k بر $[a, b]$ را نشان می‌دهد.

برهان. اگر $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ یک افراز $[a, b]$ باشد، به ازای هر k این رابطه‌ها برقرارند:

$$(۳) \qquad \sum_{i=1}^{m} | f_k(t_i) - f_k(t_{i-1}) | \leqslant \Lambda_f(P) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | f_j(t_i) - f_j(t_{i-1}) | .$$

از رابطهٔ (۳) همهٔ قسمتهای قضیه بآسانی نتیجه می‌شوند.

چند مثال

۱. همان طور که پیشتر ذکر شد، تابع $f(x) = x \cos \{\pi/(2x)\}$ به ازای

$0 \neq x$ و $0 = f(0)$، بر بازهٔ $[0, 1]$ پیوسته است ولـی با تغییر کراندار نیست. بنابراین، نمودار آن یک خم با درازای نامتناهی می‌باشد.

۲. می‌توان نشان داد (تمرین ۲۱.۷) که هرگاه $\mathbf{f}'$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $\mathbf{f}$ با درازای متناهی است و درازای کمان آن را می‌توان با انتگرال زیر بیان کرد:

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) = \int_a^b \| \mathbf{f}'(t) \| \, dt.$$

۱۱.۶ خاصیتهای جمعپذیری و خاصیتهای پیوستگی درازای کمان

فرض می‌کنیم $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ گذری باشد با درازای متناهی که بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشد. در این صورت، هر f_k بر هر زیربازهٔ $[a, b]$ مانند $[x, y]$ با تغییر کراندار خواهد بود. در این بخش $\mathbf{f}$ را ثابت نگهداشته، درازای کمان $\Lambda_{\mathbf{f}}(x, y)$ را به عنوان تابعی از بازهٔ $[x, y]$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا یک خاصیت جمعپذیری برای این تابع را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۸.۶ اگر $c \in]a, b[$، داریم

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) = \Lambda_{\mathbf{f}}(a, c) + \Lambda_{\mathbf{f}}(c, b).$$

برهان. با الحاق نقطهٔ c به یک افراز $[a, b]$ مانند P، بترتیب، افرازهای P_1 و P_2 و بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ بدست می‌آیند بقسمی که

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(P) \leqslant \Lambda_{\mathbf{f}}(P_1) + \Lambda_{\mathbf{f}}(P_2) \leqslant \Lambda_{\mathbf{f}}(a, c) + \Lambda_{\mathbf{f}}(c, b).$$

از این نتیجه می‌شود که $\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) \leqslant \Lambda_{\mathbf{f}}(a, c) + \Lambda_{\mathbf{f}}(c, b)$. برای بدست آوردن عکس این نامساوی، فرض کنیم P_1 و P_2، بترتیب، افرازهای دلخواه $[a, c]$ و $[c, b]$ باشند. در این صورت،

$$P = P_1 \cup P_2$$

یک افراز $[a, b]$ است که برای آن داریم

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(P_1) + \Lambda_{\mathbf{f}}(P_2) = \Lambda_{\mathbf{f}}(P) \leqslant \Lambda_{\mathbf{f}}(a, b).$$

چون سوپرمم همهٔ $\Lambda_{\mathbf{f}}(P_1) + \Lambda_{\mathbf{f}}(P_2)$ ها مساوی مجموع

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, c) + \Lambda_{\mathbf{f}}(c, b)$$

است (ر. ک. قضیهٔ ۱۵.۱)، پس قضیه برقرار است.

قضیهٔ ۱۹.۶ گذر با درازای متناهی $\mathbf{f}$ را که بر $[a, b]$ تعریف شده است در نظر می‌گیریم. اگر $x \in]a, b]$ قرار می‌دهیم $s(x) = \Lambda_{\mathbf{f}}(a, x)$، و $s(a) = 0$. در این صورت:

یکم) تابع s بر $[a, b]$ صعودی و پیوسته است.
دوم) هرگاه $\mathbf{f}$ بر هیچ یک از زیربازه‌های $[a, b]$ پایا نباشد، آنگاه s بر $[a, b]$ صعودی اکید خواهد بود.

برهان. اگر $a \leqslant x < y \leqslant b$، با توجه به قضیهٔ ۱۸.۶ داریم

$$s(y) - s(x) = \Lambda_{\mathbf{f}}(x, y) \geqslant 0.$$

یعنی، s بر $[a, b]$ صعودی است. بعلاوه، $s(y) - s(x) > 0$. مگر آن که $\Lambda_{\mathbf{f}}(x, y) = 0$. اما، بنابر نامساوی (۲)، از $\Lambda_{\mathbf{f}}(x, y) = 0$ نتیجه می‌شود که به ازای هر k، $V_k(x, y) = 0$، و این به‌نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد که $\mathbf{f}$ بر $[x, y]$ تابعی است پایا. بنابراین (دوم) برقرار است.
برای اثبات پیوستگی s، بار دیگر از نامساوی (۲) استفاده نموده می‌نویسیم

$$0 \leqslant s(y) - s(x) = \Lambda_{\mathbf{f}}(x,y) \leqslant \sum_{k=1}^{n} V_k(x, y) \cdot$$

حال اگر دررابطهٔ بالا $y \to x$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر k، $V_k(x, y) \to 0$، و در نتیجه $s(x) = s(x+)$. بهمین نحو، $s(x) = s(x-)$ و بدین ترتیب برهان قضیه تمام است.

۱۲.۶ هم ارزی گذرها. تغییر پرما

در این بخش ردهٔ گذرهائی را توصیف می‌کنیم که همه دارای یک نمودارند. فرض کنیم $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ گذری در $\mathbf{R}^n$ باشد، و $u : [c, d] \to [a, b]$ تابعی حقیقی، پیوسته، و یکنوای اکید بر $[c, d]$ با برد $[a, b]$ باشد. در این صورت، تابع مرکب $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ u$، که با رابطهٔ

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}[u(t)] \quad \text{به ازای} \quad c \leqslant t \leqslant d$$

مشخص شده است، گذری است که نمودار آن با نمودار $\mathbf{f}$ یکی است. دو گذر $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ را که به طریق بالا به هم مربوط باشند هم‌ارز نامیده، گوئیم این دو نمایشهای پرمائی مختلف یک خم می‌باشند. همچنین گوئیم تابع u یک تغییر پرما را تعریف می‌نماید.

فرض کنیم C نمودار مشترک دو گذر هم‌ارز $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ باشد. اگر u صعودی اکید باشد، گوئیم $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ خم C را در یک جهت رسم می‌کنند. اگر u نزولی اکید باشد، می‌گوئیم $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ خم C را در دو جهت مقابل رسم می‌نمایند. در حالت اول u را جهت نگهدار، و در حالت دوم، آن را جهت برگردان نام می‌گذاریم.

قضیهٔ ۲۰.۶ فرض کنیم $\mathbf{f}: [a, b] \to \mathbf{R}^n$ و $\mathbf{g}: [c, d] \to \mathbf{R}^n$ دو گذر در $\mathbf{R}^n$ باشند بقسمی که هر یک بر قلمرو خود یک به یک باشد. دراین صورت، $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ وقتی، و فقط وقتی، هم‌ارزند که این دو گذر دارای یک نمودار باشند.

برهان. گذرهای هم‌ارز لزوماً دارای یک نمودار خواهند بود. برای اثبات عکس آن، فرض کنیم $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ دارای یک نموار باشند. چون $\mathbf{f}$ برمجموعهٔ فشردهٔ $[a, b]$ یک به یک و پیوسته است، پس بنابر قضیهٔ ۲۹.۴، $\mathbf{f}^{-1}$ وجود دارد و بر نمودار $\mathbf{f}$ پیوسته می‌باشد. حال اگر $t \in [c, d]$، تعریف می‌کنیم:

$$u(t) = \mathbf{f}^{-1}[\mathbf{g}(t)].$$

u بر $[c, d]$ پیوسته است و $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}[u(t)]$. می‌توان تحقیق کرد که u یکنوای اکید است، و در نتیجه $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ گذرهائی هم‌ارز می‌باشند.

تمرین

تابعهای با تغییر کراندار

۱.۶ تعیین کنید کدام از تابعهای زیرین بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار است.

آ) اگر $x \neq 0$، $f(x) = x^2 \sin(1/x)$، و $f(0) = 0$.

ب) اگر $x \neq 0$، $f(x) = \sqrt{x} \sin(1/x)$، و $f(0) = 0$.

۲.۶ فرض‌کنیم تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشد. گوئیم f درشرط لیپ‌شیتس یکشکل از مرتبهٔ $\alpha > 0$ بر $[a, b]$ صدق می‌کند درصورتی که عددی پایا مانند $M > 0$ وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر x و y در $[a, b]$،

$$| f(x) - f(y) | < M | x - y |^{\alpha}.$$

(این تعریف را با تعریف مذکور در تمرین ۱.۵ مقایسه کنید.)

آ) فرض کنید f یک چنین تابعی باشد. نشان دهید که اگر $\alpha > 1$، f بر $[a, b]$ پایا است، حال آن که اگر $\alpha = 1$، f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

ب) تابعی مانند f بقسمی مثال بزنید که در شرط لیپ شیتس یکشکل از مرتبهٔ $\alpha < ۱$ بر $[a, b]$ صدق کند ولی بر $[a, b]$ با تغییر کراندار نباشد.

ج) تابعی مانند f بقسمی مثال بزنید که بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد ولی در شرط لیپ شیتس یکشکل بر $[a, b]$ از هیچ مرتبه‌ای صدق نکند.

۳.۶ نشان دهید که یک چند جمله‌ای مانند f بر هر بازهٔ فشرده مانند $[a, b]$ با تغییر کراندار است. اگر صفرهای f' دانسته فرض شوند، روشی را توصیف کنید که به وسیلهٔ آن بتوان تغییرکل f را بر $[a, b]$ بدست آورد.

۴.۶ فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد نا تهی از تابعهای حقیقی که بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده‌اند. S را یک فضای خطی از تابعها نامیم در صورتی که دارای دو خاصیت زیرین باشد:

آ) هرگاه $f \in S$، آنگاه به ازای هر عدد حقیقی c، $cf \in S$؛

ب) هرگاه $f, g \in S$، آنگاه $f + g \in S$.

بنا به قضیهٔ ۹.۶، چنانچه V مجموعهٔ همهٔ تابعهای با تغییر کراندار بر $[a, b]$ باشد، V یک فضای خطی از تابعها خواهد بود. اگر S یک فضای خطی، و حاوی همهٔ تابعهای یکنوا بر $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که $V \subseteq S$. این مطلب را می‌توان به این طریق توصیف کرد که بگوئیم تابعهای با تغییر کراندار تشکیل کوچکترین فضای خطی را می‌دهند که حاوی همهٔ تابعهای یکنوا می‌باشد.

۵.۶ فرض کنید تابع حقیقی f بر بازهٔ $[۰, ۱]$ تعریف شده باشد بقسمی که $f(۰) > ۰$، به ازای هر x، $f(x) \neq x$، و هرگاه $x \leqslant y$، آنگاه $f(x) \leqslant f(y)$. قرار دهید $A = \{x \mid f(x) > x\}$. ثابت کنید که

$$\sup A \in A \text{، و } f(۱) > ۱.$$

۶.۶ هرگاه تابع f همه‌جا در $\mathbf{R}^۱$ تعریف شده باشد، آنگاه گوئیم f بر $]-\infty, +\infty[$ با تغییر کراندار است در صورتی که f بر هر بازهٔ متناهی با تغییر کراندار باشد، و همچنین عدد مثبتی مانند M باشد بقسمی که به ازای هر بازهٔ فشرده مانند $[a, b]$، $V_f(a, b) < M$. در این صورت، تغییر کل f را بر $]-\infty, +\infty[$ مساوی سوپرمم مجموعهٔ همهٔ عددهای

$$V_f(a, b), \ -\infty < a < b < +\infty,$$

تعریف می‌نمائیم، و با نماد $V_f(-\infty, +\infty)$ نشان می‌دهیم. تعریفهای مشابهی

برای بازه‌های نامتناهی نیمباز $]a, +\infty[$ و $]-\infty, b]$ وجود دارند.

آ) مشابـه قضیه‌هـای ۶.۷، ۶.۹، ۶.۱۰، ۶.۱۱، و ۶.۱۲ را بـرای بـازهٔ نامتناهی $]-\infty, +\infty[$ بیان و ثابت کنید.

ب) اگر در قضیهٔ ۶.۵ به جای لفظ «یکنوا»، «کراندار و یکنوا» قرار دهیم، نشان دهید که قضیهٔ حاصل برای بازهٔ $]-\infty, +\infty[$ درست است. مشابه این اصلاح را در مورد قضیهٔ ۶.۱۳ بیان و سپس آن را ثابت‌کنید.

۶.۷ فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد و

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b].$$

طبق معمـول، می‌نـویسیم $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$، $k = 1, 2, \cdots, n$. تعریف می کنیم

$$A(P) = \{k \mid \Delta f_k > 0\}, \quad B(P) = \{k \mid \Delta f_k < 0\}.$$

عددهای

$$p_f(a, b) = \sup\left\{\sum_{k\in A(P)} \Delta f_k \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\right\}$$

و

$$n_f(a, b) = \sup\left\{\sum_{k\in B(P)} |\Delta f_k| \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\right\}$$

را، بترتیب، تغییرهـای مثبت و منفی f بـر $[a, b]$ می‌نـامند. بـه ازای هـر x در $]a, b]$ فرض می‌کنیم $V(x) = V_f(a, x)$، $p(x) = p_f(a, x)$، $n(x) = n_f(a,x)$، و $V(a) = p(a) = n(a) = 0$.

نشان دهید که:

آ) $V(x) = p(x) + n(x)$.

ب) $0 \leqslant p(x) \leqslant V(x)$ و $0 \leqslant n(x) \leqslant V(x)$.

ج) p و n بر $[a, b]$ صعودیند.

د) $f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$. قسمت (د) برهـان دیگـری از قضیهٔ ۶.۱۳ را بدست می‌دهد.

ه) $2p(x) = V(x) + f(x) - f(a)$،
$2n(x) = V(x) - f(x) + f(a)$.

و) هر نقطهٔ پیوستگی f یک نقطهٔ پیوستگی p و n نیز هست.

خمها

۸.۶ فرض کنید دو تابع مختلط f و g به صورت زیر تعریف شده باشند:

اگر $t \in [0, 1]$، $f(t) = e^{2\pi i t}$، و اگر $t \in [0, 2]$، $g(t) = e^{2\pi i t}$.

آ) ثابت کنید f و g دارای یک نمودارند، ولی برحسب تعریف بخش ۱۲.۶ با یکدیگر همارز نیستند.

ب) ثابت کنید که درازای g دو برابر درازای f می‌باشد.

۹.۶ فرض کنید $\mathbf{f}$ گذری باشد با درازای متناهی با درازای L که بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشد. همچنین $\mathbf{f}$ بر هیچ یک از زیربازه‌های $[a, b]$ پایا نباشد. فرض کنید که s تابع درازای کمان باشد که به این صورت تعریف می‌شود:

$$\text{اگر } a < x \leqslant b \text{، } s(x) = \Lambda_{\mathbf{f}}(a, x) \text{، و } s(a) = 0.$$

آ) ثابت کنید که s^{-1} وجود دارد و بر بازهٔ $[0, L]$ پیوسته است.

ب) اگر $t \in [0, L]$، تعریف کنید $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}[s^{-1}(t)]$، و نشان دهید که $\mathbf{g}$ هم‌ارز $\mathbf{f}$ است. چون $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}[s(t)]$، گوئیم تابع $\mathbf{g}$ نمایشی برای نمودار $\mathbf{f}$ با پرمای درازای کمان بدست می‌دهد.

۱۰.۶ فرض کنید f و g بر $[a, b]$ دو تابع حقیقی، پیوسته، و با تغییر کراندار باشند. بعلاوه، به ازای هر x در $]a, b[$،

$$0 < f(x) < g(x) \text{، } f(a) = g(a) \text{، و } f(b) = g(b).$$

فرض کنید تابع مختلط h بر بازهٔ $[a, 2b - a]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\text{اگر } a \leqslant t \leqslant b \text{، } h(t) = t + if(t)\text{؛}$$

$$\text{اگر } b \leqslant t \leqslant 2b - a \text{، } h(t) = 2b - t + ig(2b - t).$$

آ) نشان دهید که h یک خم با درازای متناهی مانند Γ را توصیف می‌کند.

ب) به وسیلهٔ ترسیم، رابطهٔ هندسی موجود بین f، g، و h را توضیح دهید.

ج) نشان دهید که مجموعهٔ نقطه‌های

$$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

ناحیه‌ای است در $\mathbf{R}^2$ که کرانهٔ آن خم Γ می‌باشد.

د) فرض کنید H تابعی باشد مختلط که بر بازهٔ $[a, 2b-a]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

اگر $a \leqslant t \leqslant b$، $H(t) = t - \frac{1}{2}i[g(t) - f(t)]$؛

اگر

$b \leqslant t \leqslant 2b-a$، $H(t) = t + \frac{1}{2}i[g(2b-t) - f(2b-t)]$.

نشان دهید که خم Γ_0 توصیف شده به وسیلهٔ H با درازای متناهی است، و کرانهٔ ناحیهٔ

$$S_0 = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\; f(x) - g(x) \leqslant 2y \leqslant g(x) - f(x)\}$$

می‌باشد.

ه) نشان دهید که محور x خط تقارن S_0 می‌باشد. (ناحیهٔ S_0 را متقارن شدهٔ S برحسب محور x می‌نامند.)

و) نشان دهید که درازای Γ_0 از درازای Γ بیشتر نیست.

تابعهای پیوستهٔ مطلق

تابع حقیقی f را که بر $[a, b]$ تعریف شده است بر این بازه پیوستهٔ مطلق نامیم در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، δی مثبتی وجود داشته باشد بقسمی که هرگاه به ازای n زیربازهٔ باز از هم جدای $[a, b]$ مانند $]a_k, b_k[$، $n = 1, 2, \ldots$، داشته باشیم $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$، آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n} | f(b_k) - f(a_k) | < \varepsilon \cdot$$

درنظریهٔ انتگرالگیری ومشتقگیری لبگ با تابعهای پیوستهٔ مطلق سروکارخواهیم داشت. تمرینهای زیرین برخی از خاصیتهای مقدماتی این تابعها را بدست می‌دهند.

۱۱.۶ ثابت کنید هر تابع پیوستهٔ مطلق بر $[a, b]$ بر این بازه پیوسته و با تغییر کراندار است.

تبصره. تابعهائی هستند که پیوسته و با تغییر کراندارند ولی پیوستهٔ مطلق نیستند.

۱۲.۶ ثابت کنید اگر f در شرط لیپ شیتس یکشکل ازمرتبهٔ ۱ بر $[a, b]$ صدق کند، f پیوستهٔ مطلق است. (ر. ک. تمرین ۲.۶.)

۱۳.۶ اگر f و g بر $[a, b]$ پیوستهٔ مطلق باشند، ثابت کنید تابعهای $|f|$، cf (c پایا است)، $f+g$، $f \cdot g$، و f/g (اگر g دور از صفر کراندار باشد) نیز پیوستهٔ مطلق می‌باشند.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

6.1 Apostol, T. M., *Calculus,* Vol. 1, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1967.

6.2 Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable,* Vol. 1, rev. ed. Leo F. Boron, translator. Ungar, New York, 1961.

۷

انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس

۱.۷ مقدمه

در حساب دیفرانسیل و انتگرال اساساً با دو مسألهٔ هندسی سروکار داریم: یکی تعیین خط مماس بر یک خم، و دیگری پیداکردن سطح ناحیه‌ای کـه زیـر یک خم قـرار داشته باشد. مسألـهٔ اول به‌کمک عمل حدگیری، به‌نام مشتقگیری؛ مسألـهٔ دوم با عمل دیگری از همان نوع، به‌نام انتگرالگیری (که در این فصل به‌آن مـی‌پردازیم) مطالعه می‌شوند.

خواننده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به یاد دارد که اگر f تابعی فرض شود که بر بازهٔ $[a, b]$ مثبت باشد، برای یافتن مساحت ناحیه‌ای از صفحه که زیرنمودار ایـن تابع است بازهٔ $[a, b]$ را به‌تعدادی متناهی، مثلاً n، زیربازه تقسیم می‌کنیم؛ اگر درازای زیربازهٔ kام را Δx_k بنامیم و t_k نقطهٔ دلخواهی در این زیربازه باشد، مجموع $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$ را درنظر مـی‌گیریم. چنین مجموعی یک مقـدار تقریبی است از مساحت مورد نظر که به‌کمک مستطیلها بدست می‌آید. هـرگاه f در $[a, b]$ به‌قدر کافی خوشرفتار باشد (مثلاً پیوسته باشد)، آنگاه وقتی که $n \to \infty$، یعنی اگر تقسیمها را ظریفتر و ظریفتر کنیم، امید می‌رود که مجموع مـذکور به‌حـدی بگرایـد. آنچه گفته شد، به‌طـور سطحی، تعـریف ریمان است از انتگـرال معین $\int_a^b f(x)dx$. (تعریف دقیق‌آن اندکی بعد داده خواهد شد.)

دو مفهوم مشتق و انتگرال به‌طرق کاملاً متفاوت عرضه می‌شوند. اما عجب آن که رابطه‌ای بسیار نزدیک با یکدیگر دارند. هرگاه انتگرال معین تابع پیوستهٔ f را به‌عنوان تابعی از حد بالائی‌آن در نظر بگیریم، یعنی بنویسیم

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

آنگاه F مشتق دارد و $F'(x) = f(x)$. این نتیجهٔ مهم نشان می‌دهد که عملهای مشتقگیری و انتگرالگیری، بمفهومی، معکوس یکدیگرند.

در این فصل عمل انتگرالگیری را تا حدی بتفصیل مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این‌جا انتگرال ریمان‌ـاشتیل‌یس را، که مفهومی کلیتر از انتگرال ریمان است، در نظر می‌گیریم. این انتگرال متضمن دو تابع f و α می‌باشد، یعنی به‌صورت $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ (یا علامتی مشابه) خواهد بود. انتگرال ریمان معمولی حالت خاص انتگرال ریمان‌ـاشتیل‌یس است که درآن $\alpha(x) = x$. تعریف به‌صورتی است که وقتی α مشتق پیوسته داشته باشد، انتگرال ریمان‌ـاشتیل‌یس $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ تبدیل به انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx$ می‌شود. اما، اگر α مشتقپذیر نباشد یا حتی اگر ناپیوسته باشد، ممکن است انتگرال ریمان‌ـاشتیل‌یس برای‌آن معنی داشته باشد. در واقع، اهمیت انتگرال اشتیل‌یس وقتی ظاهر می‌شود که α ناپیوسته باشد. با انتخاب αی ناپیوستهٔ مناسبی، می‌توان یک مجموع متناهی یا نامتناهی را به‌صورت انتگرال اشتیل‌یس درآورد، و سپس جمعبندی و انتگرالگیری ریمان معمولی به‌صورت حالتهای خاصی از انتگرال ریمان‌ـاشتیل‌یس در می‌آیند. در قسمت مربوط به‌پخش جرم در فیزیک، می‌توان با استفاده از انتگرال ریمان‌ـاشتیل‌یس مسأله‌هائی را که درآنها جرم در قسمتی مجزا ودر قسمت دیگر پیوسته باشد حل کرد. درنظریهٔ ریاضی احتمال، انتگرال ریمان‌ـاشتیل‌یس وسیلهٔ بسیار مفیدی است برای بحث همزمان دربارهٔ متغیرهای تصادفی مجزا و پیوسته.

در فصل ۱۰ تعمیم دیگری از انتگرال ریمان به‌نام انتگرال لبگ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۲.۷ نمادگذاری

برای اختصار، نمادها و اصطلاحهای موجود در این فصل را با شرطهای زیرین بکار می‌بریم: اولاً، بازهٔ $[a, b]$ همواره فشرده است. ثانیاً، همهٔ تابعهائی که بانمادهای f، g، α، β، ومانند اینها، نشان داده شوند تابعهائی حقیقی هستند که بربازهٔ $[a, b]$ تعریف شده و کراندار می‌باشند، مگرآن که خلاف‌آن تصریح شود. در بخش ۲۷.۷ به‌تابعهای مختلط می‌پردازیم، و توسیع مطالب این فصل به‌تابعهای بی‌کران و بازه‌های نامتناهی در فصل ۱۰ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

همان‌طور که در فصل ۶ گفته شد، منظور از یک افراز $[a, b]$ مانند P مجموعه‌ای متناهی است از نقطه‌ها، مثلاً،

$$P = \{x_\circ, x_\backslash, \ldots, x_n\},$$

بقسمی که $a = x_\circ < x_\backslash < \cdots < x_{n-\backslash} < x_n = b$. مـی‌گـویند افـراز P' از P ظریفتر است (یا یک تظـریف P است) در صورتی کـه $P \subseteq P'$. (این مطلب به صورت $P' \supseteq P$ نیز نشان داده می‌شود.) علامت $\Delta\alpha_k$ تفاضل

$$\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-\backslash})$$

را نشان می‌دهد، پس

$$\sum_{k=\backslash}^{n} \Delta\alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a)\,.$$

مجموعهٔ همهٔ افرازهای ممکن $[a, b]$ را با نماد $\mathcal{P}[a,b]$ نشان می‌دهیم.

هنج افراز P عبارت است از درازای بـزرگترین زیربازهٔ P و با نماد $\| P \|$ نشان داده می‌شود. توجه داشته باشید که

$P' \supseteq P$ نامساوی $\| P' \| \leqslant \| P \|$ را ایجاب می‌کند.

یعنی، تظـریف یک افـراز هنج آن را زیاد نمی‌کند، امـا عکس این مطلب لـزوماً برقرار نیست.

۳.۷ تعریف انتگرال ریمان - اشتیل‌یس

* تعریف ۱.۷ فرض‌کنیم $P = \{x_\circ, x_\backslash, \ldots, x_n\}$ یک افراز $[a, b]$، و t_k نقطه‌ای در زیربازهٔ $[x_{k-\backslash}, x_k]$ باشد. هر مجموع به شکل

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=\backslash}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$$

را یک مجموع ریمان ـ اشتیل‌یس f برحسب α می‌نامیم. گـوئیم f برحسب α بر $[a, b]$ انتگرال ریمـان دارد در صورتی‌کـه عددی مانند A با این خـاصیت وجود داشته بـاشد: بـه ازای هر $\varepsilon > \circ$، یک افراز $[a, b]$ مانند P_ε باشد بقسمی کـه به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε و هر انتخاب نقطه‌هـای t_k در $[x_{k-\backslash}, x_k]$، داشته باشیم $| S(P, f, \alpha) - A | < \varepsilon$. در این صورت، مـی‌نویسیم «$f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است.»

اگر عددی مانند A با خاصیت مذکـور در بالا وجـود داشته باشد، این عدد منحصر بفرد است و آن را با نمـاد $\int_a^b f\,d\alpha$ یا با $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ نشان مـی‌دهیم. همچنین می‌گوئیم که انتگـرال ریمان ـ اشتیل‌یس $\int_a^b f\,d\alpha$ وجود دارد. تابعهـای f

و α، بترتیب، انتگرالده و انتگرالگیر نامیده می‌شوند. در حالت خاص که $\alpha(x) = x$، به جای $S(P, f, \alpha)$ نماد $S(P, f)$، و به جای $f \in R(\alpha)$ نماد $f \in R$ را بکار خواهیم برد. انتگرال در این حالت خاص انتگرال ریمان نامیده، با نماد $\int_a^b f dx$ یا $\int_a^b f(x)dx$ نشان داده می‌شود. مقدار عددی $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ فقط به f، α، a، و b بستگی دارد، و از علامت x مستقل است. حرف x یک «متغیر فریبان» است و می‌توان آن را با هر علامت مناسب دیگری عوض کرد.

تبصره. تعریف بالا یکی از چند تعریف مورد قبول انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس است. تعریف دیگری (که هم ارز این تعریف نیست) در تمرین ۳.۷ بیان شده است.

۴.۷ خاصیتهای خطی

بسادگی می‌توان ثابت کرد که عمل انتگرال هم بر انتگرالده و هم بر انتگرالگیر خطی است. این مطالب موضوع دو قضیهٔ زیرین است.

قضیهٔ ۲.۷ هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند، آنگاه به ازای هر دو پایای c_1 و c_2، $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، و

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)d\alpha = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha.$$

برهان. فرض می‌کنیم $h = c_1 f + c_2 g$. به ازای یک افراز مفروض $[a, b]$ مانند P، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} S(P, h, \alpha) &= \sum_{k=1}^{n} h(t_k)\Delta\alpha_k = c_1 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\Delta\alpha_k \\ &= c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, g, \alpha) \cdot \end{aligned}$$

حال اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، P'_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که $P \supseteq P'_\varepsilon$ نامساوی $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon$ را ایجاب کند. همچنین P''_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که $P \supseteq P''_\varepsilon$ نامساوی $|S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha| < \varepsilon$ را ایجاب کند. با فرض $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ معلوم می‌شود که اگر P ظریفتر از P_ε باشد،

$$\left| S(P, h, \alpha) - c_1 \int_a^b f d\alpha - c_2 \int_a^b g d\alpha \right| \leqslant |c_1| \varepsilon + |c_2| \varepsilon,$$

و از این قضیه باثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۳.۷ هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $f \in R(\beta)$ بر $[a,b]$ باشند، آنگاه به ازای هر دو

پایای c_1 و c_2، $f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$ بر $[a, b]$ است، و

$$\int_a^b f d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b f d\beta .$$

برهان شبیه برهان قضیهٔ ۲.۷ است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ زیرین بنوعی با دو قضیهٔ بالا مشابه است. بنابراین قضیه، انتگرال برحسب بازهٔ انتگرالگیری خاصیت جمعپذیری نیز دارد.

✱ قضیهٔ ۴.۷ فرض‌کنیم $c \in]a, b[$. هرگاه دوتا از سه انتگرال رابطهٔ (۱) وجود داشته باشند، آنگاه سومی نیز وجود دارد و داریم

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha . \tag{۱}$$

برهان. فرض می‌کنیم P یک افراز $[a, b]$ باشد بقسمی که $c \in P$. در این صورت،

$$P' = P \cap [a, c] \quad \text{و} \quad P'' = P \cap [c, b]،$$

بترتیب، افرازهای $[a, c]$ و $[c, b]$ خواهند بود. مجموعهای ریمان ـ اشتیل‌یس برای این افرازها با معادلهٔ زیر به هم مربوطند:

$$S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha).$$

حال فرض کنیم $\int_a^c f d\alpha$ و $\int_c^b f d\alpha$ وجود داشته باشند. در این صورت، به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، یک افراز $[a, c]$ مانند P'_ε هست بقسمی که هرگاه P' از P'_ε ظریفتر باشد، آنگاه

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^c f d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

و یک افراز $[c, b]$ مانند P''_ε وجود دارد بقسمی که هرگاه P'' از P''_ε ظریفتر باشد، آنگاه

$$\left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

در این صورت، $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ یک افراز $[a, b]$ است بقسمی که هرگاه P از P_ε ظریفتر باشد، آنگاه $P' \supseteq P'_\varepsilon$ و $P'' \supseteq P''_\varepsilon$. در نتیجه، اگر P ظریفتر از P_ε باشد، می‌توان با تلفیق نتیجه‌های بالا نامساوی

$$\left|S(P, f, \alpha) - \int_a^c f d\alpha - \int_c^b f d\alpha\right| < \varepsilon$$

را بدست آورد. از این ثابت می‌شود که $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و مساوی

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

می‌باشد. حالتهای دیگر این قضیه شبیه به آنچه گفته شد ثابت می‌شوند و خواننده می‌تواند آن را بآسانی تحقیق کند.

به‌کمک استقرای ریاضی، می‌توان قضیه‌ای مشابه بالا برای حالتی که $[a, b]$ به تعدادی متناهی زیربازه تجزیه شده باشد ثابت نمود.

تبصره. اگر $\int_a^b f d\alpha$ وجود داشته باشد، انتگرال $\int_a^c f d\alpha$ نیز وجود دارد، ولی آن را نمی‌توان با دلیلی مشابه دلیل مذکور در بالا ثابت نمود. این مطلب، برای وقتی که انتگرالگیر α با تغییر کراندار باشد، بعداً در قضیهٔ ۲۵.۷ ثابت خواهد شد.

تعریف ۵.۷ اگر $a < b$ و $\int_a^b f d\alpha$ وجود داشته باشد، انتگرال $\int_b^a f d\alpha$ را مساوی $\int_a^b f d\alpha -$ تعریف می‌کنیم، و نیز $\int_a^a f d\alpha$ را مساوی صفر تعریف می‌نمائیم.

بنا به تعریف بالا، معادلهٔ مذکور در قضیهٔ ۴.۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_a^b f d\alpha + \int_b^c f d\alpha + \int_c^a f d\alpha = 0 \cdot$$

۵.۷ انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء

در انتگرال ریمان ــ اشتیلیس ارتباط قابل ملاحظه‌ای بین انتگرالده و انتگرالگیر وجود دارد. اگر $\int_a^b f d\alpha$ وجود داشته باشد، انتگرال $\int_a^b \alpha df$ نیز وجود خواهد داشت و بعکس. بعلاوه، رابطهٔ بسیار ساده‌ای بین این دو انتگرال برقرار می‌باشد.

قضیهٔ ۶.۷ هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $\alpha \in R(f)$ بر $[a, b]$ است و

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) \cdot$$

تبصره. معادلهٔ بالا به دستور انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء معروف است. این معادله بنوعی یک قانون تقابل برای انتگرال می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد، پس یک افراز $[a, b]$ مانند P_ε هست که به ازای هر افراز ظریفتر از آن مانند P'،

$$| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha | < \varepsilon . \qquad (۲)$$

مجموع ریمان ـ اشتیلیس دلخواهی برای انتگرال $\int_a^b \alpha d f$ در نظر می‌گیریم، مثلاً،

$$S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\Delta f_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)f(x_{k-1}),$$

که در آن P از P_ε ظریفتر باشد. با فرض $A = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$A = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1}) .$$

با تفریق دو معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که

$$A - S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[\alpha(x_k) - \alpha(t_k)] + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})[\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})] .$$

با تلفیق دو مجموع طرف راست مجموعی به شکل $S(P', f, \alpha)$ بدست می‌آید، که در آن P' آن افراز $[a, b]$ است که از همهٔ نقطه‌های x_k و t_k با هم ساخته شده است. در این‌صورت، P' از P، و در نتیجه از P_ε، ظریفتر است. بنابراین، نامساوی (۲) به ازای آن معتبر می‌باشد، یعنی اگر P از P_ε ظریفتر باشد،

$$\left| A - S(P, \alpha, f) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon .$$

اما این درست بدین معنی است که انتگرال $\int_a^b \alpha d f$ وجود دارد و مساوی $A - \int_a^b f d\alpha$ است.

۶.۷ تغییر متغیر در انتگرال ریمان ـ اشتیلیس

قضیهٔ ۷.۷ فرض کنیم $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، و g بر بازهٔ S با نقطه‌های انتهائی c و d تعریف شده و بر آن تابعی پیوسته و یکنوای اکید باشد. همچنین $a = g(c)$ و $b = g(d)$. فرض کنید تابعهای مرکب h و β به صورت زیرین

تعریف شده باشند:

۱ اگر $x \in S$، $h(x) = f[g(x)]$ و $\beta(x) = \alpha[g(x)]$.

در این صورت، $h \in R(\beta)$ بر S است، و داریم $\int_a^b f\,d\alpha = \int_c^d h\,d\beta$. یعنی،

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\,d\alpha(t) = \int_c^d f[g(x)]\,d\{\alpha[g(x)]\} \cdot$$

برهان. برای معین بودن وضع، فرض می‌کنیم g بر S صعودی اکید باشد. (این ایجاب می‌کند که $c < d$.) در این صورت، تابع g یک به یک است، و g^{-1} بر $[a, b]$ تعریف شده و پیوسته و صعودی اکید می‌باشد. بنابراین، متناظر با هرافراز $P = \{y_0, \cdots, y_n\}$ بازهٔ $[c, d]$ یک، و فقط یک، افراز $[a, b]$ مانند $P' = \{x_0, \cdots, x_n\}$ وجود دارد که $x_k = g(y_k)$. در حقیقت، می‌توان نوشت

$$P' = g(P) \quad \text{و} \quad P = g^{-1}(P') \cdot$$

بعلاوه، اگر P را ظریف کنیم، افراز متناظر آن، یعنی P'، نیز ظریف خواهد شد، و بعکس.

حال اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، یک افراز $[a, b]$ مانند P'_ε هست بقسمی‌که به‌ازای هر افراز P' ظریفتر از P'_ε، $|S(P', f, \alpha) - \int_a^b f\,d\alpha| < \varepsilon$. فرض می‌کنیم $P_\varepsilon = g^{-1}(P'_\varepsilon)$ افراز متناظر $[c, d]$، و $P = \{y_0, \cdots, y_n\}$ یک افراز $[c, d]$ ظریفتر از P_ε باشد. مجموع ریمان ـ اشتیل‌یس زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^{n} h(u_k)\Delta\beta_k,$$

که در آن $u_k \in [y_{k-1}, y_k]$ و $\Delta\beta_k = \beta(y_k) - \beta(y_{k-1})$. هرگاه قرار دهیم $t_k = g(u_k)$ و $x_k = g(y_k)$، آنگاه $P' = \{x_0, \cdots, x_n\}$ یک افراز $[a, b]$ ظریفتر از P'_ε می‌باشد. بعلاوه، چون $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$، پس

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^{n} f[g(u_k)]\{\alpha[g(y_k)] - \alpha[g(y_{k-1})]\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\{\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\} = S(P', f, \alpha).$$

بنابراین، $|S(P, h, \beta) - \int_a^b f\,d\alpha| < \varepsilon$ و حکم ثابت است.

تبصره. این قضیه خصوصاً در مورد انتگرالهای ریمان بکار برده می‌شود (یعنی،

وقتی که $x = \alpha(x)$. کمی بعد قضیهٔ دیگری از این نوع برای انتگرالهای ریمان ثابت می‌شود که در آن g لزوماً یکنوا نیست. (ر. ک. قضیهٔ ۳۶.۷.)

۷.۷ تحویل انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس به انتگرال ریمان

بنابر قضیهٔ زیرین، اگر α مشتق پیوسته داشته باشد، در انتگرال $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ می‌توان $\alpha'(x)dx$ را به جای $d\alpha(x)$ قرار داد.

قضیهٔ ۸.۷ فرض کنیم $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، و α بر این بازه مشتق پیوسته داشته باشد. در این صورت، انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$ وجود دارد و داریم

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx\,.$$

برهان. با فرض $g(x) = f(x)\alpha'(x)$، مجموع ریمان زیرین را در نظر می‌گیریم:

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\alpha'(t_k)\Delta x_k\,.$$

با افراز P و t_k های انتخاب شده در بالا، مجموع ریمان ـ اشتیل‌یس زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k\,.$$

بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، می‌توان نوشت

$\Delta\alpha_k = \alpha'(v_k)\,\Delta x_k$، که در آن $v_k \in\,]x_{k-1}, x_k[$،

و در نتیجه

$$S(P, f, \alpha) - S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)]\,\Delta x_k.$$

چون f کراندار است، پس عددی مانند $M > 0$ هست بقسمی که به ازای هر x در $[a, b]$، $|f(x)| \leqslant M$. از فرض پیوستگی α' بر $[a, b]$ معلوم می‌شود که α' بر این بازه پیوستهٔ یکشکل است. بنابراین، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، δی مثبتی (فقط تابع ε) وجود دارد بقسمی‌که هرگاه $0 \leqslant |x - y| < \delta$، آنگاه

$$|\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

هرگاه افراز P'_ε را طوری اختیار کنیم که $\|P'_\varepsilon\| < \delta$، آنگاه به ازای هر افراز ظریفتر از P'_ε مانند P در معادلهٔ بالا خواهیم داشت

$$|\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)| < \frac{\varepsilon}{[۲M(b-a)]}.$$

بنابراین، برای این چنین Pی داریم

$$|S(P, f, \alpha) - S(P, g)| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

از سوی دیگر، چون $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، پس افرازی مانند P''_ε هست که به ازای هر افراز P ظریفتر از آن،

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

بنابراین، با تلفیق دونامساوی اخیر، معلوم می‌شود که هرگاه افراز P از

$$P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$$

ظریفتر باشد. آنگاه $|S(P, g) - \int_a^b f\,d\alpha| < \varepsilon$، و ازاین حکم ثابت می‌شود.

تبصره. در قضیهٔ ۳۵.۷ نتیجه‌ای قویتر از قضیهٔ بالا ثابت می‌شود که در آن لزومی به پیوسته بودن α' نیست.

۸.۷ تابعهای پله‌ای به عنوان انتگرالگیر

اگر α در سراسر $[a, b]$ تابعی باشد پایا، چون هر مجموع $S(P, f, \alpha)$ مساوی صفر است، پس انتگرال $\int_a^b f\,d\alpha$ وجود دارد و مساوی صفر خواهد بود. اما، اگر α تابعی پایا باشد مگر در یک نقطه و در این نقطه ناپیوستگی جهشی داشته باشد، انتگرال $\int_a^b f\,d\alpha$ لزوماً وجود ندارد، و اگر وجود داشته باشد، ممکن است مقدارش صفر نباشد. توضیح کاملتر این مطلب در قضیهٔ زیر آمده است:

قضیهٔ ۹.۷ فرض کنیم که $a < c < b$. تابع α را بر $[a, b]$ به صورت زیرین تعریف می‌کنیم: مقدارهای $\alpha(a)$، $\alpha(c)$، و $\alpha(b)$ اختیاری باشند؛

اگر $a \leqslant x < c$ ، $\alpha(x) = \alpha(a)$،

و

اگر $c < x \leqslant b$ ، $\alpha(x) = \alpha(b)$.

بعلاوه، f بر $[a, b]$ بقسمی تعریف شده باشد که دستکم یکی از تابعهای f و α از چپ، و دستکم یکی از آنها از راست در نقطهٔ c پیوسته باشد. دراین‌صورت، $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، و

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)].$$

تبصره. نتیجه در حالت $c = a$ هم برقرار است مشروط به آن که $\alpha(c)$ را به جای $\alpha(c-)$ قرار دهیم، و نیز در حالت $c = b$ برقرار است اگر $\alpha(c)$ را به جای $\alpha(c+)$ بگذاریم. بعداً ثابت می‌کنیم (قضیهٔ ۲۹.۷) که اگر f و α هر دو از راست یا چپ در c ناپیوسته باشند، انتگرال وجود ندارد.

برهان. اگر $c \in P$، هر جمله در مجموع $S(P, f, \alpha)$ مساوی صفر است مگر آن دو جمله‌ای که مربوط به زیربازه‌های جدا شده به وسیلهٔ c می‌باشند. بنابراین،

$$S(P, f, \alpha) = f(t_{k-1})[\alpha(c) - \alpha(c-)] + f(t_k)[\alpha(c+) - \alpha(c)],$$

که در آن $t_{k-1} \leqslant c \leqslant t_k$. این معادله را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\Delta = [f(t_{k-1}) - f(c)][\alpha(c) - \alpha(c-)] + [f(t_k) - f(c)][\alpha(c+) - \alpha(c)],$$

که در آن $\Delta = S(P, f, \alpha) - f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)]$. از این روی داریم:

$$|\Delta| \leqslant |f(t_{k-1}) - f(c)|\,|\alpha(c) - \alpha(c-)| + |f(t_k) - f(c)|\,|\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

اگر f در c پیوسته باشد، به ازای هر $\varepsilon > 0$، δی مثبتی هست بقسمی که اگر $\|P\| < \delta$،

$$|f(t_{k-1}) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |f(t_k) - f(c)| < \varepsilon.$$

در این حالت، نامساوی زیر بدست می‌آید:

$$|\Delta| \leqslant \varepsilon|\alpha(c) - \alpha(c-)| + \varepsilon|\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

اما نامساوی بالا حتی وقتی که f در c پیوسته نباشد نیز برقرار است. مثلاً، هرگاه f هم از راست و هم از چپ در c ناپیوسته باشد، آنگاه $\alpha(c) = \alpha(c-)$ و $\alpha(c) = \alpha(c+)$ و خواهیم داشت $\Delta = 0$. از سوی دیگر، اگر f در c از چپ پیوسته، و از راست ناپیوسته باشد، باید $\alpha(c) = \alpha(c+)$. در این حالت،

$$|\Delta| \leqslant \varepsilon|\alpha(c) - \alpha(c-)|.$$

بهمین نحو، در حالتی که f در c از راست پیوسته، و از چپ ناپیوسته باشد،
$\alpha(c) = \alpha(c-)$ و $|\Delta| \leqslant \varepsilon\,|\alpha(c+) - \alpha(c)|$.
از این روی، نامساوی بالا در همهٔ حالتها برقرار است. از این قضیه باثبات می‌رسد.

مثال. بنا بر قضیهٔ ۹.۷، مقدار انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس ممکن است با تغییر مقدار تابع f فقط در یک نقطه تغییر کند. مثال زیرین نشان می‌دهد که یک چنین تغییری می‌تواند بر موجودیت انتگرال نیز اثر بگذارد. فرض کنیم

اگر $x \neq \circ$، $\alpha(x) = \circ$ و $\alpha(\circ) = -۱$؛
اگر $-۱ \leqslant x \leqslant +۱$، $f(x) = ۱$.

در این حالت، بنابر قضیهٔ ۹.۷، $\int_{-۱}^{۱} f\,d\alpha = \circ$. ولی اگر f را بار دیگر بدین صورت تعریف کنیم: $f(\circ) = ۲$، و اگر $x \neq \circ$، $f(x) = ۱$، بآسانی می‌توان دید که $\int_{-۱}^{۱} f\,d\alpha$ وجود ندارد. در حقیقت، اگر $\circ$ یکی از نقطه‌های تقسیم افراز P باشد،

$$
\begin{aligned}
S(P, f, \alpha) &= f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(\circ)] + f(t_{k-۱})[\alpha(\circ) - \alpha(x_{k-۲})] \\
&= f(t_k) - f(t_{k-۱}),
\end{aligned}
$$

که درآن $x_{k-۲} \leqslant t_{k-۱} \leqslant \circ \leqslant t_k \leqslant x_k$. مقدار این مجموع، برحسب انتخاب t_k و $t_{k-۱}$، مساوی $\circ$، ۱، یا ۱ـ است. از این روی، در این حالت $\int_{-۱}^{۱} f\,d\alpha$ وجود ندارد. اما، در انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)\,dx$، می‌توان مقدار f را در تعدادی متناهی نقطه تغییر داد بدون آن که تأثیری بر موجودیت یا مقدار انتگرال داشته باشد. برای اثبات این مطلب، کافی است حالتی را که f بر $[a, b]$ جز در یک نقطه، مثلاً $x = c$، مساوی صفر است در نظر بگیریم. واضح است که برای یک چنین تابعی داریم $|S(P, f)| \leqslant |f(c)|\,\|P\|$. چون $\|P\|$ را می‌توان بدلخواه کوچک کرد، پس $\int_a^b f(x)\,dx = \circ$.

۹.۷ تحویل انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس به مجموع متناهی

انتگرالگیر αی مذکور در قضیهٔ ۹.۷ نوع خاصی از یک ردهٔ مهم از تابعها به نام تابعهای پله‌ای می‌باشد. این تابعها بر یک بازه جز در تعدادی متناهی از نقاط پایا هستند، و در این نقطه‌ها ناپیوستگی جهشی دارند.

تعریف ۱۰.۷ (تابع پله‌ای). تابع α تعریف شده بر $[a, b]$ را یک تابع پله‌ای

نامیم در صورتی که افرازی مانند

$$a = x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n = b$$

وجود داشته باشد بقسمی که α بر هریک از زیربازه‌های باز $]x_{k-۱}, x_k[$ پایا باشد. اگر $۱ < k < n$، عدد $\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-)$ را جهش در نقطهٔ x_k می‌نامیم. جهش در $x_۱$ مساوی $\alpha(x_۱+) - \alpha(x_۱)$، و جهش در x_n مساوی

$$\alpha(x_n) - \alpha(x_n-)$$

تعریف می‌شود.

تابعهای پله‌ای ارتباط بین انتگرالهای ریمان - اشتیل‌یس و مجموعهای متناهی را میسر می‌سازند:

قضیهٔ ۱۱.۷ (تحویل انتگرال ریمان ــ اشتیل‌یس به‌مجموع متناهی). فرض کنیم‌تابع پله‌ای α بر $[a, b]$ تعریف شده باشد، و در نقطهٔ x_k جهشی مساوی α_k داشته باشد، که در آن $x_۱$، . . . ، x_n همانهائی باشند که در تعریف ۱۰.۷ توصیف شده‌اند. و نیز f بر $[a,b]$ بقسمی تعریف شده باشدکه هر دو تابع f و α از چپ یا از راست در هر x_k ناپیوسته نباشند. در این صورت، $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=۱}^{n} f(x_k)\alpha_k.$$

برهان. با توجه به قضیهٔ ۴.۷ ، می‌توان انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ را به صورت مجموع انتگرالهائی از نوعی که در قضیهٔ ۹.۷ گفته شد در آورد.

یکی از ساده‌ترین تابعهای پله‌ای تابع بزرگترین عدد صحیح است . مقدار این تابع در x مساوی بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x می‌باشد، که آن را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم. بنابراین ، $[x]$ عدد صحیح منحصر بفردی است که در نامساویهای $[x] \leqslant x < [x] + ۱$ صدق می‌نماید.

قضیهٔ ۱۲.۷ هر مجموع متناهی را می‌توان به‌صورت انتگرال ریمان - اشتیل‌یس درآورد. در حقیقت، چنانچه مجموع $\sum_{k=۱}^{n} a_k$ داده شده باشد، تابع f را بر $[۰,n]$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $k - ۱ < x \leqslant k$ $(k = ۱, ۲, \cdots, n)$ ، $f(x) = a_k$،
و $f(۰) = ۰$. در این صورت،

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k = \sum_{k=۱}^{n} f(k) = \int_۰^n f(x)\, d[x],$$

که در آن $[x]$ مساوی بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x می‌باشد.

برهان. تابع بزرگترین عدد صحیح تابعی است پله‌ای، که از راست در هر عدد صحیح پیوسته است و در هر یک از این نقطه‌ها جهشی مساوی ۱ دارد. همچنین، تابع f از چپ در نقطه‌های ۱، ۲، . . . ، و n پیوسته است. حال برای اثبات قضیه کافی است قضیهٔ ۱۱.۷ را بکار ببریم.

۱۰.۷ دستور جمعبندی اویلر[1]

با استفاده از انتگرالهای ریمان ـ اشتیل‌یس دستور شایان توجهی به نام دستورجمعبندی اویلر بدست می‌آید. این دستور انتگرال یک تابع بر بازه‌ای مانند $[a,b]$ را به مجموع مقدارهای این تابع در عددهای صحیح این بازه‌مربوط می‌سازد. گاهی‌می‌توان با استفاده از این دستور یک انتگرال را به یک مجموع نزدیک کرد، یا برعکس، یک مجموع را با یک انتگرال تخمین زد.

قضیهٔ ۱۳.۷ (دستور جمعبندی اویلر). هرگاه f بر $[a,b]$ مشتق پیوسته داشته باشد، آنگاه

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b f'(x)((x))\, dx + f(a)((a)) - f(b)((b)),$$

که در آن $((x)) = x - [x]$. وقتی‌که a و b عددهائی صحیح باشند، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b f'(x)\left(x - [x] - \frac{۱}{۲}\right) dx + \frac{f(a)+f(b)}{۲}.$$

تبصره. $\sum_{a<n\leqslant b}$ یعنی مجموع از $n = [a] + ۱$ تا $n = [b]$.

برهان. با استفاده از قضیهٔ ۶.۷ (انتگرالگیری به‌طریقهٔ جزء به جزء)، داریم

$$\int_a^b f(x)\, d(x - [x]) + \int_a^b (x - [x])\, df(x) = f(b)(b - [b]) - f(a)(a - [a]).$$

چون تابع بزرگترین عدد صحیح در عددهای صحیح $[a] + ۱$، $[a] + ۲$، . . . ،

1. Euler

و $[b]$ جهشی مساوی ۱ دارد، می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x)\,d[x] = \sum_{a<n\leqslant b} f(n).$$

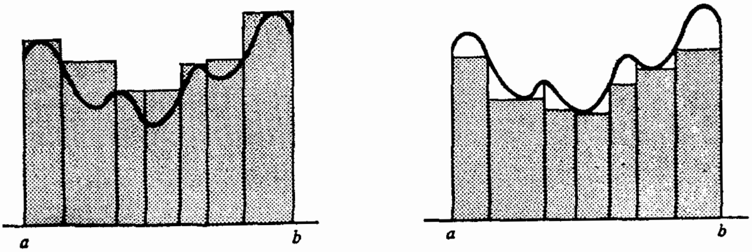
اگر این رابطه را با معادلهٔ قبلی تلفیق کنیم، قضیه بی‌درنگ نتیجه خواهد شد.

۱۱.۷ انتگرالگیرهای صعودی. انتگرالهای بالائی و پائینی

حال نظریهٔ انتگرالگیری ریمان ـ اشتیل‌یس را برای انتگرالگیرهای صعودی گسترش می‌دهیم. بعداً (در قضیهٔ ۲۴.۷) خواهیم دید که از بسیاری جهات این تعمیم دارای همان کلیت نظریهٔ انتگرالگیری برای انتگرالگیرهای با تغییر کراندار است.

وقتی α صعودی باشد، $\Delta\alpha_k$ های موجود در مجموعهای ریمان ـ اشتیل‌یس همه نامنفی می‌باشند. این واقعیت ساده نقشی اساسی در گسترش این نظریه دارد. اگر α بر $[a,b]$ صعودی باشد، برای اختصار می‌نویسیم «$\alpha\nearrow$ بر $[a,b]$ است.»

همان‌طورکه پیشترگفتیم، برای محاسبهٔ مساحت سطح‌ناحیهٔ زیر نمودار تابع f، مجموعهای ریمان $\sum f(t_k)\,\Delta x_k$ را به‌عنوان تقریبهائی از سطح مستطیلها برای این مساحت در نظر می‌گیریم. در بعضی از مسائل فیزیکی نیز که برای حل آنها از انتگرال استفاده می‌شود یک چنین مجموعهائی پدیدار می‌شوند. راه دیگر برای نزدیک شدن به‌این مسائل استفاده‌از مجموعهای ریمان بالائی وپائینی می‌باشد. مثلاً درحالت محاسبهٔ مساحت، می‌توان $\sum M_k\,\Delta x_k$ و $\sum m_k\,\Delta x_k$ را به‌عنوان تقریبهائی از «بالا» و «پائین» برای آن درنظر گرفت، که در آنها M_k و m_k، بترتیب، سوپرمم و اینفیمم مقدارهای تابع در زیربازهٔ kام می‌باشند. آنچه در هندسه درک می‌کنیم این است که هر مجموع بالائی دست‌کم مساوی سطح مورد نظر است، حال آن که مجموعهای پائینی نمی‌توانند بیشتر ازاین سطح باشند. (ر.ک. شکل ۱.۷.) بنابراین طبیعی است که بپرسیم: کوچکترین مقدار ممکن مجموعهای بالائی چیست؟



شکل ۱.۷

از این سؤال به اینفیمم همهٔ مجموعهای بالائی، به نام انتگرال بالائی f، می‌رسیم. انتگرال پائینی بــه همین نحو تعریف می‌شود و آن عبــارت است از سوپرمم همهٔ مجموعهای پائینی. برای تابعهائی مناسب (مثلاً، تابعهـای پیوسته) این دو انتگرال هردو مساوی $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌باشند. اما، در حالت کلی، این دو انتگـرال متفاوتند، و مسألـهٔ مهم پیداکردن شرطهائی برای یک تابع است که با آنها انتگرالهای بالائی و پائینی آن تابع بــا یکدیگـر متساوی باشند. حــال این نــوع مسأله را در مــورد انتگرالهای ریمان ــ اشتیل‌یس مورد بحث قرار می‌دهیم.

تعریف ۱۴۰۷ فرض‌کنیم P یك افراز بازهٔ $[a,b]$ باشد، و قرار می‌دهیم

$$M_k(f) = \sup\,\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$
$$m_k(f) = \inf\,\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

عددهای

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k \quad \text{و} \quad L(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta\alpha_k،$$

بترتیب، مجموعهای اشتیل‌یس بالائی و پائینی f برحسب α بــرای افراز P نــامیده می‌شوند.

تبصره. همواره $m_k(f) \leqslant M_k(f)$. هرگاه $\alpha \nearrow$ بر $[a,b]$ باشد، آنگاه $\Delta\alpha_k \geqslant 0$، و نیز می‌توان نوشت $m_k(f)\,\Delta\alpha_k \leqslant M_k(f)\,\Delta\alpha_k$. از این نامساوی نتیجه می‌شود که مجموعهای پائینی از مجموعهـای بالائی متنــاظرشان بیشتر نیستند. بعلاوه، هرگاه $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$، آنگاه

$$m_k(f) \leqslant f(t_k) \leqslant M_k(f).$$

بنابراین، وقتی‌که $\alpha \nearrow$، نامساویهای زیرین مجموعهای بالائی‌وپائینی را به مجموعهای ریمان ـ اشتیل‌یس مربوط می‌کنند:

$$L(P,f,\alpha) \leqslant S(P,f,\alpha) \leqslant U(P,f,\alpha).$$

این نامساویها، که در مطالب آینده مکرر مورد استفاده قــرار می‌گیرند، وقتی کــه α تابعی صعودی نباشد لزوماً برقرار نیستند.

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهدکه اگر α صعودی باشد، با تظریف افراز، مجموعهای پائینی کم نمی‌شوند و مجموعهای بالائی افزایش نمی‌یابند.

قضیهٔ ۱۵۰۷ فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد، در این صورت:

یکم) اگر P' از P ظریفتر باشد،

$$U(P', f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \text{ و } L(P', f, \alpha) \geqslant L(P, f, \alpha).$$

دوم) به‌ازای هر دو افراز P_1 و P_2،

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

برهان. کافی است (یکم) را برای حالتی‌که P' فقط یک نقطه، مثلاً c، از P بیشتر دارد ثابت کنیم. اگر c در زیربازهٔ iام P باشد، می‌توان نوشت

$$U(P', f, \alpha) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta\alpha_k + M'[\alpha(c)-\alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i)-\alpha(c)],$$

که در آن M' و M'' سوپرممهای f در بازه‌های $[x_{i-1},c]$ و $[c, x_i]$ می‌باشند. اما، چون

$$M' \leqslant M_i(f) \text{ و } M'' \leqslant M_i(f)،$$

پس $U(P', f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha)$. (نامساوی مذکور برای مجموعهای پائینی به طریقی مشابه ثابت می‌شود.)

برای اثبات (دوم)، فرض می‌کنیم $P = P_1 \cup P_2$. در این صورت داریم

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

تبصره. اگر α صعودی باشد و M و m، بترتیب، سوپرمم و اینفیمم f بر $[a,b]$ باشند، از قضیهٔ بالا نیز نتیجه می‌گیریم که

$$m[\alpha(b)-\alpha(a)] \leqslant L(P_1, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha) \leqslant M[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

تعریف ۱۶.۷ فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد. انتگرال اشتیل‌یس بالائی f برحسب α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf\{U(P, f, \alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

همچنین، انتگرال اشتیل‌یس پائینی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup\{L(P, f, \alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

تبصره. گاهی انتگرالهای بالائی و پائینی را با نمادهای $\bar{I}(f,\alpha)$ و $\underline{I}(f,\alpha)$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص که $\alpha(x) = x$، مجموعهای بالائی و پائینی با نمادهای $U(P, f)$ و $L(P, f)$ نشان داده می‌شوند و آنهـا را مجموعهای ریمان بالائی و پائینی می‌نامند. انتگرالهای متناظر آنها را با نمادهای

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \text{ و } \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

نشان داده، آنها را انتگرالهای ریمان بالائی و پائینی می‌نامیم. این انتگرالها برای اولین بار به‌وسیلهٔ داربو[1] در ۱۸۷۵ معرفی شده‌اند.

قضیهٔ ۱۷۰۷ فرض کنیم α $\nearrow$ بر $[a, b]$ باشد. در این صورت

$$\underline{I}(f,\alpha) \leqslant \bar{I}(f, \alpha).$$

برهان. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، افرازی مانند P_1 هست که به‌ازای آن

$$U(P_1, f, \alpha) < \bar{I}(f,\alpha) + \varepsilon.$$

بنا بر قضیهٔ ۱۵۰۷، $\bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ یك کران بالائی مجموعهٔ همهٔ مجموعهای پائینی $L(P, f, \alpha)$ اسـت. از ایـن روی، $\underline{I}(f, \alpha) \leqslant \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$، و چـون ε اختیاری است، از این نامساوی نتیجه می‌شود که

$$\underline{I}(f, \alpha) \leqslant \bar{I}(f, \alpha).$$

مثال. بسادگی می‌توان مثالی یافت که در آن $\underline{I}(f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha)$. فـرض می‌کنیم $\alpha(x) = x$، و f را بر $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگـر x گویا بـاشد، $f(x) = 1$، و اگـر x گنگ بـاشد، $f(x) = 0$.

دراین‌صورت، چون هرزیربازهٔ $[0, 1]$ هم حاوی عددهائی‌گویا وهم گنگ است، پس بـه‌ازای هرافـراز $[0, 1]$ مانند P، $M_k(f) = 1$ و $m_k(f) = 0$. بنا بـرایـن، به‌ازای‌هر P، $U(P, f) = 1$ و $L(P, f) = 0$. از این‌جـا نتیجه می‌شـود کـه برای $[a, b] = [0, 1]$،

$$\overline{\int_a^b} f dx = 1 \text{ و } \underline{\int_a^b} f dx = 0.$$

توجه کنید که اگر تابع f را به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{وقتی که } x \text{ گویا است،} \\ 1 & \text{وقتی که } x \text{ گنگ است،} \end{cases}$$

1. J. G. Darboux

تعریف می‌کردیم، باز هم نتیجهٔ بالا برای آن برقرار بود.

۱۲.۷ خاصیتهای جمعپذیری و خطی انتگرالهای بالائی و پائینی

انتگرالهای بالائی و پائینی دارای بسیاری از خاصیتهای انتگرال هستند. مثلاً، اگر $a < c < b$،

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^c} f d\alpha + \overline{\int_c^b} f d\alpha.$$

همین معادله برای انتگرالهای پائینی نیز برقرار است. اما، بعضی از معادله‌های موجود در انتگرالها برای انتگرالهای بالائی و پائینی به‌صورت نامساوی درمی‌آیند. مثلاً،

$$\overline{\int_a^b}(f + g)d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha + \overline{\int_a^b} g d\alpha,$$

و

$$\underline{\int_a^b}(f + g)d\alpha \geqslant \underline{\int_a^b} f d\alpha + \underline{\int_a^b} g d\alpha.$$

خواننده می‌تواند صحت مطالب بالا را بسادگی تحقیق نماید. (ر. ک. تمرین ۱۱.۷.)

۱۳.۷ شرط ریمان

هرگاه انتظار داشته باشیم که انتگرالهای بالائی و پائینی با هم مساوی شوند، آنگاه باید منتظر باشیم که مجموعهای بالائی نیز به اندازهٔ دلخواه به مجموعهای پائینی نزدیک گردند. از این روی طبیعی است که تابعهائی مانند f را جستجو کنیم که‌برای آنها تفاضل $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$ را بتوان به قدر کافی کوچک نمود.

تعریف ۱۸.۷ گوئیم f در شرط ریمان برحسب α بر $[a, b]$ صدق می‌کند در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، افرازی مانند P_ε وجود پیدا کند بقسمی که هرگاه P از P_ε ظریفتر باشد، آنگاه

$$0 \leqslant U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

قضیهٔ ۱۹.۷ فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد، در این صورت، سه گزارهٔ زیر با هم هم‌ارزند:

یکم) $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است.

دوم) f در شرط ریمان برحسب α بر $[a, b]$ صدق می‌کند.

سوم) $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha)$.

برهان. ثابت می‌کنیم که از (یکم) گـزارهٔ (دوم)، از (دوم) گـزارهٔ (سوم)، و از (سوم) گـزارهٔ (یکـم) نتیجـه مـی‌شود. فـرض کنیم (یکم) برقـرار باشد. هرگاه $\alpha(b) = \alpha(a)$، آنگاه (دوم) بخـودی خـود برقرار است. پس می‌توانیم فـرض کنیم‌که $\alpha(a) < \alpha(b)$. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، P_ε را بقسمی اختیـار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε و هر t_k و t'_k در $[x_{k-1}, x_k]$، داشتـه باشیم

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{و} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta\alpha_k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}،$$

که در آنها $A = \int_a^b f\,d\alpha$. از تلفیق این نامساویها نتیجه می‌گیریم که

$$\left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta\alpha_k\right| < \frac{2}{3}\varepsilon\,.$$

چون

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(x') \mid \text{باشند } [x_{k-1}, x_k] \text{ در } x' \text{ و } x\},$$

پس به ازای هر $h > 0$، می‌توان t_k و t'_k را بقسمی اختیار کرد که

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h\,.$$

حال اگر $h = (1/3)\varepsilon/[\alpha(b) - \alpha(a)]$، می‌توان نوشت

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\,\Delta\alpha_k$$
$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta\alpha_k + h\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k < \varepsilon\,.$$

از این روی، از (یکم) گزارهٔ (دوم) نتیجه می‌شود.

حال، فرض می‌کنیم (دوم) برقرار باشد. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، افرازی مانند P_ε هست که به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε،

$$U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon.$$

از این روی، برای این چنین Pای داریم

$$\bar{I}(f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon \leqslant \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon\,.$$

یعنی، به ازای هر $\varepsilon > \circ$، ε، $\bar{I}(f, \alpha) \leqslant \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$. بنابراین،

$$\bar{I}(f, \alpha) \leqslant \underline{I}(f, \alpha).$$

اما عکس این نامساوی نیز، بنا بر قضیهٔ ۱۷.۷، برقرار است. پس از (دوم) گزارهٔ (سوم) نتیجه می‌شود.

بالاخره، فرض می‌کنیم‌که $\bar{I}(f, \alpha) = \underline{I}(f, \alpha)$ ومقدار مشترک‌آنها را با A نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که $\int_a^b f\,d\alpha$ وجود دارد و مساوی A است. به ازای $\varepsilon > \circ$ داده شده، P'_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریفتر از P'_ε، $U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$. همچنین P''_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریفتر از P''_ε،

$$L(P, f, \alpha) > \underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon.$$

اگر $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$، به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε می‌توان نوشت

$$\underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon < L(P, f, \alpha) \leqslant S(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon.$$

اما، چون $A = \bar{I}(f, \alpha) = \underline{I}(f, \alpha)$، پس به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε، $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$. از این ثابت می‌شود که $\int_a^b f\,d\alpha$ وجود دارد و مساوی A است، و برهان قضیه تمام است.

۱۴.۷ قضیه‌های مقایسه‌ای

قضیهٔ ۲۰.۷ فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند، و به ازای هر x در $[a, b]$، $f(x) \leqslant g(x)$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) \leqslant \int_a^b g(x)d\alpha(x).$$

برهان. چون $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ است، به ازای هر افراز P، مجموعهای ریمان - اشتیلیس این دو تابع f و g متناظر P در رابطه‌های زیرین صدق می‌کنند:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta\alpha_k = S(P, g, \alpha).$$

با استفاده از این امر قضیه بسادگی نتیجه می‌شود.

این قضیه بخصوص ایجاب می‌کند که هرگاه $g(x) \geqslant \circ$ و $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $\int_a^b g(x)d\alpha(x) \geqslant \circ$.

قضیهٔ ۲۱۰۷ فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $|f| \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است و نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \, d\alpha(x).$$

برهان. با استفاده از نمادهای مذکور در تعریف ۱۴۰۷، می‌توان نوشت
$M_k(f) - m_k(f) = \sup \{f(x) - f(y) \mid$ باشند $[x_{k-1}, x_k]$ در y و $x\}$.
چون نامساوی $| f(x) - f(y) | \leqslant || f(x) | - | f(y) ||$ همواره برقرار است، پس

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \leqslant M_k(f) - m_k(f) .$$

با ضرب‌کردن دو طرف نامساوی در $\Delta\alpha_k$ و جمعبندی بر k، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P،

$$U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha).$$

حال، با استفاده از شرط ریمان، نتیجه می‌شود که $|f| \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است. نامساوی حکم قضیه از قضیهٔ ۲۰۰۷ با فرض $g = |f|$ بدست می‌آید.

تبصره. عکس قضیهٔ ۲۱۰۷ درست نیست. (ر. ک. تمرین ۱۲۰۷.)

قضیهٔ ۲۲۰۷ فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $f^2 \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ خواهد بود.

برهان. با استفاده از نمادهای مذکور در تعریف ۱۴۰۷، داریم

$$M_k(f^2) = [M_k(|f|)]^2 \quad \text{و} \quad m_k(f^2) = [m_k(|f|)]^2.$$

از این روی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} M_k(f^2) - m_k(f^2) &= [M_k(|f|) + m_k(|f|)][M_k(|f|) - m_k(|f|)] \\ &\leqslant 2M[M_k(|f|) - m_k(|f|)], \end{aligned}$$

که در آن M یک کران بالائی برای $|f|$ بر $[a, b]$ است. حال با بکاربردن شرط ریمان نتیجه بدست می‌آید.

قضیهٔ ۲۳۰۷ فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a,b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشند، آنگاه $f \cdot g \in R(\alpha)$ بر $[a , b]$ خواهد بود.

برهان. برای اثبات، قضیهٔ ۲۲۰۷ و اتحاد

$$2 f(x)g(x) = [f(x) + g(x)]^2 - [f(x)]^2 - [g(x)]^2$$

را بکار می‌بریم.

۱۵.۷ انتگرالگیرهای باتغییر کراندار

در قضیهٔ ۱۳.۶ دیدیم که اگر α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد، α را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع صعودی بیان نمود. اگر $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ یک چنین تجزیه‌ای باشد و $f \in R(\alpha_1)$ و $f \in R(\alpha_2)$ بر $[a,b]$ باشند، از خاصیت خطی نتیجه می‌شود که $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ است. اما، عکس این مطلب همواره درست نیست. یعنی اگر $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشد، کاملاً ممکن است دو تابع صعودی α_1 و α_2 اختیارکرد بقسمی‌که $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$، اما هیچ‌یک از انتگرالهای $\int_a^b f\,d\alpha_1$ و $\int_a^b f\,d\alpha_2$ وجود نداشته باشد. البته اشکال کار ناشی از منحصر بفرد نبودن تجزیهٔ $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ است. اما می‌توانیم ثابت کنیم‌که دست‌کم برای یکی از تجزیه‌های α عکس حکم درست است، و آن در موردی است که α_1 تغییر کل α باشد و $\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha$. (تعریف ۸.۶ را بیاد بیاورید.)

قضیهٔ ۲۴.۷ فرض‌کنیم α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد. همچنین $V(x)$ عبارت باشد از تغییرکل α بر $[a,x]$ $(a<x\leqslant b)$، و $V(a) = 0$. بعلاوه، f بر $[a,b]$ تعریف شده و کراندار باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشد، آنگاه $f \in R(V)$ بر $[a,b]$ است.

برهان. هرگاه $V(b) = 0$، آنگاه V بر $[a,b]$ تابعی پایا است و حکم بدیهی است. پس، فرض‌می‌کنیم $V(b) > 0$. همچنین به‌ازای‌هر $x \in [a,b]$، $|f(x)| \leqslant M$. چون V صعودی است، فقط کافی است تحقیق کنیم که f در شرط ریمان برحسب V بر $[a,b]$ صدق می‌کند.

به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، P_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم‌که به‌ازای هر افراز P ظریفتر از آن وهر t_k و t'_k در $[x_{k-1}, x_k]$ داشته باشیم

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta\alpha_k\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{و} \quad V(b) < \sum_{k=1}^{n}|\Delta\alpha_k| + \frac{\varepsilon}{4M}.$$

به‌ازای P ظریفتر از P_ε، دو نامساوی زیرین را ثابت می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{n}[M_k(f) - m_k(f)](\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) < \frac{\varepsilon}{2},$$

و

$$\sum_{k=1}^{n}[M_k(f) - m_k(f)]|\Delta\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

زیرا با جمع این دو نامساوی نتیجه می‌شود که $U(P,f,V) - L(P,f,V) < \varepsilon$.

برای اثبات نامساوی اول، توجه می‌کنیم که $\Delta V_k - |\Delta\alpha_k| \geqslant ۰$، و در نتیجه

$$\sum_{k=۱}^{n}[M_k(f)-m_k(f)](\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) \leqslant ۲M\sum_{k=۱}^{n}(\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|)$$
$$= ۲M\left(V(b) - \sum_{k=۱}^{n}|\Delta\alpha_k|\right) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

برای اثبات نامساوی دوم، فرض می‌کنیم

$$A(P) = \{k \mid \Delta\alpha_k \geqslant ۰\}, \quad B(P) = \{k \mid \Delta\alpha_k < ۰\},$$

و $h = (\varepsilon/۴)/V(b)$. اگر $k \in A(P)$، t_k و t'_k را بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h;$$

ولی اگر $k \in B(P)$، t_k و t'_k را چنان اختیار می‌نمائیم که

$$f(t'_k) - f(t_k) > M_k(f) - m_k(f) - h.$$

دراین صورت،

$$\sum_{k=۱}^{n}[M_k(f) - m_k(f)]|\Delta\alpha_k| < \sum_{k \in A(P)}[f(t_k) - f(t'_k)]\,|\Delta\alpha_k|$$
$$+ \sum_{k \in B(P)}[f(t'_k) - f(t_k)]|\Delta\alpha_k| + h\sum_{k=۱}^{n}|\Delta\alpha_k|$$
$$= \sum_{k=۱}^{n}[f(t_k) - f(t'_k)]\Delta\alpha_k + h\sum_{k=۱}^{n}|\Delta\alpha_k|$$
$$< \frac{\varepsilon}{۴} + hV(b) = \frac{\varepsilon}{۴} + \frac{\varepsilon}{۴} = \frac{\varepsilon}{۲}.$$

بنابراین، $f \in R(V)$ بر $[a,b]$ است.

تبصره. به‌کمک این قضیه و قضیهٔ ۱۲.۶ می‌توان نظریهٔ انتگرالگیرهای ریمان-اشتیل‌یس برای انتگرالگیرهای با تغییر کراندار را به حالتی‌که در آن انتگرالگیرها صعودی باشند تحویل کرد. در این صورت، شرط ریمان قابل استفاده است و بخصوص در این کار به‌صورت ابزاری مفید درمی‌آید. به‌عنوان اولین کاربرد این تحویل، قضیهٔ زیرین را نتیجه می‌گیریم که با قضیهٔ ۴.۷ رابطه‌ای نزدیک دارد.

قضیهٔ ۲۵.۷ فرض‌کنیم α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار، و $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشد.

دراین‌صورت $f\in R(\alpha)$ بر هر زیربازهٔ $[c,d]$ مانند $[a,b]$ خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $V(x)$ تغییر کل α بر $[a,x]$ را نشان دهد، و $V(a)=0$. دراین‌صورت $\alpha = V-(V-\alpha)$، که درآن V و $V-\alpha$ بر $[a,b]$ صعودیند (قضیهٔ ۱۲.۶). بنابر قضیهٔ ۲۴.۷، $f\in R(V)$، و درنتیجه $f\in R(V-\alpha)$ بر $[a,b]$ است. بنابراین، اگر قضیه برای انتگرالگیرهای صعودی برقرار باشد، نتیجه می‌شود که $f\in R(V)$ و $f\in R(V-\alpha)$ بر $[c,d]$ است. یعنی، $f\in R(\alpha)$ بر $[c,d]$ خواهد بود.

ازاین روی، کافی است قضیه را برای وقتی‌که $\alpha\nearrow$ بر $[a,b]$ است ثابت‌کنیم. بنابر قضیهٔ ۴.۷، کافی‌است ثابت کنیم‌که هریک از انتگرالهای $\int_a^c f\,d\alpha$ و $\int_a^d f\,d\alpha$ وجود دارد. فرض می‌کنیم که $a<c<b$. اگر P یک افراز $[a,x]$ باشد، قرار می‌دهیم $\Delta(P,x)=U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)$، که در آن U و L مجموعهای بالائی وپائینی f بر بازهٔ $[a,x]$ اند. چون $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ است، پس شرط ریمان برقرار است. بنابراین، اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد، یک افراز $[a,b]$ مانند P_ε وجود دارد بقسمی که به‌ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε، $\Delta(P,b)<\varepsilon$. می‌توان فرض کرد که $c\in P_\varepsilon$. نقطه‌های P_ε در $[a,c]$ تشکیل یک افراز $[a,c]$ مانند P'_ε را می‌دهند. هرگاه P' یک افراز $[a,c]$ ظریفتر از P'_ε باشد، آنگاه $P=P'\cup P_\varepsilon$ یک‌افراز $[a,b]$ است‌که از نقطه‌های P' و نقطه‌هائی از P_ε که دربازهٔ $[c,b]$ قرار دارند تشکیل شده است. مجموعی که $\Delta(P',c)$ به‌وسیلهٔ آن تعریف می‌شود فقط حاوی قسمتی ازجمله‌های موجود در مجموع $\Delta(P,b)$ است. چون هر جمله در این مجموعها نامنفی‌است و P از P_ε ظریفتر می‌باشد، پس

$$\Delta(P',c)\leqslant \Delta(P,b)<\varepsilon.$$

یعنی، اگر P' ظریفتر از P'_ε باشد، $\Delta(P',c)<\varepsilon$. بنابراین، f در شرط ریمان بر $[a,c]$ صدق می‌کند و انتگرال $\int_a^c f\,d\alpha$ وجود دارد. البته، با بیانی مشابه، معلوم می‌شود که انتگرال $\int_a^d f\,d\alpha$ نیز وجود دارد. پس، بنابر قضیهٔ ۴.۷، انتگرال $\int_c^d f\,d\alpha$ وجود خواهد داشت.

قضیهٔ زیرین کاربردی است از قضیه‌های ۲۳.۷ ، ۲۱.۷ ، و ۲۵.۷.

قضیهٔ ۲۶.۷ فرض‌کنیم $f\in R(\alpha)$ و $g\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشند، که در آنها $\alpha\nearrow$ بر $[a,b]$ باشد. اگر $x\in[a,b]$، تعریف می‌کنیم

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,d\alpha(t)$$

و

$$G(x) = \int_a^x g(t)d\alpha(t).$$

دراین‌صورت $f\in R(G)$ ، $g\in R(F)$، و $f\cdot g\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ خواهد بود، و داریم

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, d\, G(x)$$
$$= \int_a^b g(x)\, d\, F(x).$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۲۳.۷، انتگرال $\int_a^b f\cdot g d\alpha$ وجود دارد. به‌ازای هر افراز $[a,b]$ مانند P، داریم

$$S(P,f,G) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t)d\alpha(t) = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t_k)g(t)d\alpha(t),$$

و

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)g(t)\, d\alpha(t).$$

بنابراین، اگر $M_g = \sup\{|g(x)|\,|x\in[a,b]\}$، خواهیم داشت

$$\left|S(P,f,G) - \int_a^b f\cdot g\, d\alpha\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\{f(t_k) - f(t)\}g(t)\, d\alpha(t)\right|$$
$$\leqslant M_g\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t_k) - f(t)|\, d\alpha(t)$$
$$\leqslant M_g\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[M_k(f) - m_k(f)]\, d\alpha(t)$$
$$= M_g\{U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)\}.$$

چون $f\in R(\alpha)$، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، افرازی مانند P_ε هست بقسمی که اگر P از P_ε ظریفتر باشد، $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon$. از این ثابت می‌شود که $f\in R(G)$ بر $[a,b]$ است و $\int_a^b f\cdot g d\alpha = \int_a^b f dG$. با بیانی مشابه معلوم می‌شود که $g\in R(F)$ بر $[a,b]$ است و $\int_a^b f\cdot g d\alpha = \int_a^b g dF$.

تبصره. قضیهٔ ۲۶.۷ برای وقتی‌که α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد نیزمعتبر است.

۱۶.۷ شرطهای کافی برای وجود انتگرالهای ریمان ـ اشتیل‌یس

در اکثر قضیه‌های پیش با فرض وجود داشتن انتگرالها خاصیتهای آنهـا را بررسی نمودیم. حال طبیعی است بپرسیم: چه موقع خود انتگرال وجـود دارد؟ در زیـر دو شرط کافی مفید برای وجود انتگرال ذکر می‌شود.

قضیهٔ ۲۷.۷ هرگاه f بر $[a,b]$ پیوسته، و α براین بازه با تغییرکراندار باشد، آنگاه $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ است.

تبصره. بنا بر قضیهٔ ۶.۷ ، اگر درقضیهٔ بالا جای f و α را عوض‌کنیم، دومین شرط کافی برای وجود انتگرال بدست خواهد آمد.

برهان. کافی است قضیه را برای حالتی کـه $\alpha\nearrow$ و $\alpha(a)<\alpha(b)$ ثابت کنیم. گوئیم چـون f بر $[a,b]$ پیوستـه است، پس بر این بازه پیوستـهٔ یکشـکل است. بنابراین، بـا فرض $A=۲[\alpha(b)-\alpha(a)]$ ، اگـر $\varepsilon>۰$ داده شده باشد، δی مثبتی (فقط تابـع ε) می‌تـوان یافت بقسمی کـه هـرگاه $|x-y|<\delta$، آنگـاه $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/A$. هرگاه P_ε افرازی باشد کـه $\|P_\varepsilon\|<\delta$، آنگاه‌به‌ازای افراز P ظریفتر از P_ε باید داشته باشیم

$$M_k(f)-m_k(f)\leqslant\varepsilon/A,$$

زیرا $M_k(f)-m_k(f)=\sup\{f(x)-f(y)|$ xوy در $[x_{k-۱},x_k]$ باشند$\}$.
با ضرب کردن دو طرف نامساوی بالا در $\Delta\alpha_k$ و جمعبندی آنها، خواهیم داشت

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\leqslant\frac{\varepsilon}{A}\sum_{k=۱}^{n}\Delta\alpha_k=\frac{\varepsilon}{۲}<\varepsilon,$$

یعنی شرط ریمان برقرار است. پس $f\in R(\alpha)$ بـر $[a,b]$ خواهد بود.

برای حالت‌خاص که $\alpha(x)=x$، از قضیه‌هـای ۲۷.۷ و ۶.۷ ایـن نتیجـه حاصل می‌شود:

قضیهٔ ۲۸.۷ هریك از شرطهای زیرین برای وجود انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)dx$ کافی است:

آ) f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.

ب) f بر $[a,b]$ باتغییر کراندار باشد.

۱۷.۷ شرطهای لازم برای وجود انتگرالهای ریمان ـ اشتیل‌یس

وقتی که α بر $[a,b]$ بـا تغییر کراندار بـاشد، پیوستگی f برای وجـود انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ کافی است. ولی پیوستگی f در سراسر این بازه شرط لازم بـرای وجـود

انتگرال نیست. مثلاً، در قضیهٔ ۹.۷ دیدیم که هرگاه α تابعی پله‌ای باشد، آنگاه f را می‌توان بدلخواه در $[a,b]$ تعریف کرد به‌شرط آن‌که f در ناپیوستگیهای α پیوسته باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که برای وجود انتگرال $\int_a^b f\,d\alpha$، f و α نباید هر دو از چپ یا از راست نقطه‌ای ناپیوسته باشند.

* ۵ قضیهٔ ۲۹.۷ فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a,b]$ باشد، و $a<c<b$. و نیز فرض می‌کنیم که α و f هردو از راست در $x=c$ ناپیوسته باشند؛ یعنی، عدد مثبتی مانند ε وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر δی مثبت، دو مقدار x و y در بازهٔ $]c,c+\delta[$ باشند که به‌ازای آنها

$$|f(x)-f(c)|\geqslant\varepsilon \quad \text{و} \quad |\alpha(y)-\alpha(c)|\geqslant\varepsilon.$$

دراین‌صورت، $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد. همچنین اگر α و f هر دو از چپ در c ناپیوسته باشند، این انتگرال وجود نخواهد داشت.

برهان. فرض‌کنیم P یک‌افراز $[a,b]$ حاوی c باشد. تفاضل زیررا تشکیل‌می‌دهیم:

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\Delta\alpha_k.$$

هرگاه c نقطهٔ انتهائی چپ زیربازهٔ iم باشد، آنگاه چون هر جملهٔ مجموع بالا نامنفی است، پس

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\geqslant[M_i(f)-m_i(f)][\alpha(x_i)-\alpha(c)].$$

اگر c ناپیوستگی مشترک fوα از راست باشد، x_i را می‌توان طوری اختیارکرد که $\alpha(x_i)-\alpha(c)\geqslant\varepsilon$. بعلاوه، ازفرض قضیه‌برمی‌آیدکه $M_i(f)-m_i(f)\geqslant\varepsilon$. از این روی،

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\geqslant\varepsilon^2,$$

یعنی شرط ریمان نمی‌تواند برقرار باشد. (اثبات حالتی که c ناپیوستگی مشترک f و α از چپ باشد مشابه بالا خواهد بود.)

۱۸.۷ قضیه‌های مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان ـ اشتیل‌یس

اگر چه انتگرالها در مسائل مختلفی مورد پیدا می‌کند، ولی در حالتهای نسبتاً کمی می‌توان مقدار آنها را بدست آورد. اما، اغلب تخمین از یک انتگرال کافی است و احتیاجی به مقدار دقیق آن نمی‌باشد. قضیه‌های مقدار میانگین مذکور در این بخش مخصوصاً برای این چنین تخمینها مفیدند.

قضیهٔ ۳۰.۷ (قضیهٔ اول مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان - اشتیل‌یس). فرض کنیم $\alpha \nearrow$، و $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشد، همچنین M و m، بترتیب، سوپرمم و اینفیمم مجموعهٔ $\{f(x)|x\in[a,b]\}$ را نشان دهند. دراین‌صورت، عددی حقیقی‌ مانند c هست بقسمی که $m\leqslant c\leqslant M$ و

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = c\int_a^b d\alpha(x) = c[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

بخصوص، هرگاه f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه به‌ازای نقطه‌ای مانند $x_\circ$ در $[a,b]$، $c=f(x_\circ)$.

برهان. اگر $\alpha(a)=\alpha(b)$، دوطرف تساوی بالا مساوی صفر هستند و حکم بدیهی است. پس می‌توانیم فرض‌کنیم که $\alpha(a)<\alpha(b)$. چون همهٔ مجموعهای بالائی و پائینی در

$$m[\alpha(b)-\alpha(a)] \leqslant L(P,f,\alpha) \leqslant U(P,f,\alpha)\leqslant M[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

صدق می‌کنند، پس انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ باید بین دوکران مذکور در نامساویهای بالا باشد. بنابراین، خارج قسمت $c=(\int_a^b f d\alpha)/(\int_a^b d\alpha)$ بین m و M واقع خواهد بود. وقتی که f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، بنابرقضیهٔ مقدار میانی، $x_\circ$ی در $[a,b]$ هست که به‌ازای آن $c=f(x_\circ)$.

با استفاده از انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به‌جزء، از قضیهٔ اول مقدار میانگین می‌توان قضیهٔ دیگری از این نوع بدست آورد.

قضیهٔ ۳۱.۷ (قضیهٔ دوم مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان - اشتیل‌یس). فرض کنیم α پیوسته، و $f \nearrow$ بر $[a,b]$ باشد. دراین‌صورت، نقطه‌ای مانند $x_\circ$ در $[a,b]$ هست بقسمی‌که به‌ازای آن،

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)\int_a^{x_\circ} d\alpha(x) + f(b)\int_{x_\circ}^b d\alpha(x).$$

برهان. با توجه به‌قضیهٔ ۶.۷، داریم

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)df(x).$$

حال اگر قضیهٔ ۳۰.۷ را در مورد انتگرال طرف راست تساوی بالا بکار بریم، معلوم می‌شود که $x_\circ$ی در $[a,b]$ هست که به‌ازای آن

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)[\alpha(x_\circ)-\alpha(a)] + f(b)[\alpha(b)-\alpha(x_\circ)],$$

و حکم ثابت است.

۱۹.۷ انتگرال به‌عنوان تابعی از بازه

هرگاه $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$، و α با تغییر کراندار باشد، آنگاه (بنا به قضیهٔ ۲۵.۷) به‌ازای هر x در $[a,b]$ انتگرال $\int_a^x f\,d\alpha$ وجود دارد، وآن را می‌توان به‌عنوان تابعی از x مورد مطالعه قرار داد. اکنون بعضی ازخاصیتهای این تابع رابدست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳۲.۷ فرض‌کنیم α بر $[a,b]$ با تغییرکراندار، و $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشد. تابع F را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{اگر } x\in[a,b] \text{ ،} \quad F(x)=\int_a^x f\,d\alpha.$$

در این‌صورت :

یکم) F بر $[a,b]$ باتغییر کراندار است؛

دوم) هر نقطهٔ پیوستگی α نقطهٔ پیوستگی F نیز هست؛

سوم) اگر $\alpha\nearrow$ بر $[a,b]$ باشد، در هر نقطهٔ $]a,b[$ مانند x که $\alpha'(x)$ وجود داشته و f پیوسته باشد، $F'(x)$ وجود خواهد داشت. برای چنین xی، داریم

$$F'(x)=f(x)\alpha'(x).$$

برهان. کافی‌است فرض‌کنیم $\alpha\nearrow$ بر $[a,b]$ می‌باشد. اگر $y\neq x$، ازقضیهٔ ۳۰.۷ نتیجه می‌شود که

$$F(y)-F(x)=\int_x^y f\,d\alpha=c[\alpha(y)-\alpha(x)],$$

که در آن $m\leqslant c\leqslant M$ (در این‌جا نمادهای قضیهٔ ۳۰.۷ بکار رفته‌اند). گزاره‌های (یکم) و (دوم) بی‌درنگ از معادلهٔ بالا نتیجه می‌شوند. برای اثبات (سوم)، پس از آن‌که معادلهٔ بالا را بر $y-x$ تقسیم نمودیم، به‌این مطلب توجه می‌کنیم که وقتی‌که $y\to x$ ، $c\to f(x)$.

با استفاده از قضیه‌های ۳۲.۷ و ۲۶.۷، قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود. این قضیه انتگرال ریمان حاصل ضرب $f\cdot g$ را به‌یک انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس $\int_a^b f\,dG$ بر‌می‌گرداند، که در آن انتگرالگیر با تغییر کراندار و پیوسته است.

قضیهٔ ۳۳.۷ اگر $f\in R$ و $g\in R$ بر $[a,b]$ باشند، فرض می‌کنیم

۱ اگر $x\in[a,b]$، $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ و $G(x)=\int_a^x g(t)dt$.
در این صورت، F و G بر $[a,b]$ تابعهائی پیوسته و باتغییر کراندار می‌باشند.
همچنین، $f\in R(G)$ و $g\in R(F)$ بر $[a,b]$ هستند، و داریم

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dG(x)=\int_a^b g(x)\,dF(x).$$

برهان. قسمتهای (یکم) و (دوم) قضیهٔ ۳۲.۷ نشان می‌دهند که F و G بر $[a,b]$ پیوسته و با تغییر کراندار هستند. وجود انتگرالها و دو دستور مذکور در بالا برای $\int_a^b f(x)g(x)dx$ با فرض $\alpha(x)=x$ در قضیهٔ ۲۶.۷ نتیجه می‌شوند.

تبصره. وقتی که $\alpha(x)=x$، قسمت (سوم) قضیهٔ ۳۲.۷ گاهی قضیهٔ اساسی اول حساب انتگرال نامیده می‌شود. بنابراین قضیه، در هر نقطهٔ پیوستگی f، $F'(x)=f(x)$. دربخش آینده لنگهٔ این نتیجه، به نام قضیهٔ اساسی دوم، داده خواهد شد.

۲۰.۷ قضیهٔ اساسی دوم حساب انتگرال

قضیهٔ زیرین نشان می دهد که چگونه از مشتق انتگرالگیری می‌شود.

قضیهٔ ۳۴.۷ (قضیهٔ اساسی دوم حساب انتگرال). فرض کنیم $f\in R$ بر $[a,b]$ باشد. همچنین تابع g بر $[a,b]$ بقسمی تعریف شده باشد که g' در $]a,b[$ وجود داشته باشد، و به‌ازای هر x در $]a,b[$، $g'(x)=f(x)$.
در نقطه‌های انتهائی فرض می‌کنیم که $g(a+)$ و $g(b-)$ وجود داشته، در رابطهٔ زیرین صدق کنند:

$$g(a)-g(a+)=g(b)-g(b-).$$

در این صورت،

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g'(x)dx=g(b)-g(a).$$

برهان. به ازای هر افراز $[a, b]$، می‌توان نوشت

$$g(b)-g(a)=\sum_{k=1}^{n}[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n}g'(t_k)\,\Delta x_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\,\Delta x_k,$$

که در آنها t_k نقطه‌ای در $]x_k$ و $x_{k-1}[$ است که به‌وسیلهٔ قضیهٔ مقدار میانگین حساب دیفرانسیل مشخص می‌شود. اما، به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، افراز را می‌توان آن‌قدر ظریف انتخاب نمود که

$$\left| g(b) - g(a) - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

و از این حکم باثبات می‌رسد.

می‌توان قضیهٔ اساسی دوم را با قضیهٔ ۳۳.۷ تلفیق نمود وقضیهٔ زیر را، که‌از قضیهٔ ۸.۷ قویتر است، بدست آورد.

قضیهٔ ۳۵.۷ فرض کنیم $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. همچنین α بر $[a, b]$ پیوسته باشد و α' بر این بازه انتگرال ریمان داشته باشد. در این صورت، انتگرالهای زیر وجود دارند و این رابطه برقرار می‌باشد:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

برهان. بنابر قضیهٔ اساسی دوم، به ازای هر x در $[a, b]$،

$$\alpha(x) - \alpha(a) = \int_a^x \alpha'(t)\,dt.$$

حال اگر در قضیهٔ ۳۳.۷ فرض کنیم که $g = \alpha'$، قضیهٔ ۳۵.۷ نتیجه می‌شود.

تبصره. نتیجه‌ای مربوط به این قضیه در تمرین ۳۴.۷ توصیف شده است.

۲۱.۷ تغییر متغیر در انتگرال ریمان

هرگاه $\alpha(x) = x$، g یکنوای اکید، و g' پیوسته باشد، آنگاه دستور

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_c^d h\,d\beta$$

در قضیهٔ ۷.۷ برای تغییر متغیر در یک انتگرال به شکل زیر در می‌آید:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

رابطهٔ اخیر در صورتی معتبر است که $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. در حالتی که f پیوسته باشد، با استفاده از قضیهٔ ۳۲.۷ می‌توان قید یکنوا بودن g را حذف نمود. در حقیقت، در این حالت قضیهٔ زیرین برقرار است:

قضیهٔ ۳۶.۷ (تغییر متغیر در انتگرال ریمان). فرض کنیم g' بر بازهٔ $[c, d]$، و f بر $g([c, d])$ پیوسته باشد. تابع F را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_{g(c)}^{x} f(t)dt \quad \text{،} \quad x \in g([c,d]) \quad \text{اگر}$$

در این صورت، به ازای هر x در $[c, d]$، انتگرال $\int_c^x f[g(t)]g'(t)dt$ وجود دارد و مقدار آن مساوی $F[g(x)]$ می‌باشد. بخصوص،

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

برهان. چون g' و تابع مرکب $f \circ g$ هر دو بر $[c, d]$ پیوسته‌اند، پس انتگرال مورد بحث، یعنی $\int_c^x f[g(t)]g'(t)dt$، به ازای هر x در $[c, d]$ وجود دارد. حال تابع G را بر $[c, d]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(x) = \int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

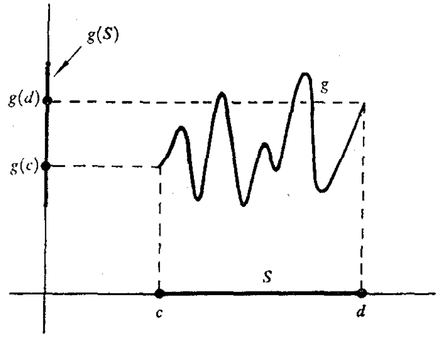
باید نشان دهیم که $G(x) = F[g(x)]$. بنا بر قضیهٔ ۳۲.۷، داریم

$$G'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

همچنین، بنا بر قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتق $F[g(x)]$ نیز مساوی $f[g(x)]g'(x)$ می‌باشد (چون $F'(x) = f(x)$). از این روی، $G(x) - F[g(x)]$ پایا است. اما وقتی که $x = c$، $G(c) = 0$ و $F[g(c)] = 0$، پس این مقدار پایا باید صفر باشد. از این روی، به‌ازای هر x در $[c, d]$، $G(x) = F[g(x)]$. خصوصاً، وقتی که $x = d$، $G(d) = F[g(d)]$، و این همان آخرین معادلهٔ مذکور در حکم قضیه است.

تبصره. در بعضی از کتابهای درسی قضیهٔ بالا باشرط اضافی صفر نبودن g' در هیچ نقطهٔ $[c, d]$ ثابت شده است، شرطی که، البته، یکنوا بودن g را ایجاب می‌کند. برهان بالا نشان می‌دهد که این شرط ضرورت ندارد. باید خاطر نشان ساخت که، چون g بر $[c, d]$ پیوسته است، پس $g([c, d])$ بازه‌ای است حاوی بازه‌ای که $g(c)$ و $g(d)$ را به هم وصل می‌کند. بخصوص، در حالت $g(c) = g(d)$، نتیجهٔ بالا معتبراست. این خاصیت قضیهٔ بالا را درعمل بسیار قابل استفاده می‌سازد. (برای مشاهدهٔ یک gی مجاز، ر. ک. شکل ۲.۷.)

عملاً، بیان کلیتری از قضیهٔ ۳۶.۷ وجود دارد که در آن پیوستگی f یا g'



شکل ۲.۷

لازم نیست، ولی اثبات آن به طور قابل ملاحظه‌ای مشکلتر است. این قضیه بــه قرار زیر است: فرض کنیم $h \in R$ بر $[c, d]$ باشد. اگر $x \in [c, d]$ و a نقطهٔ ثابتی در $[c, d]$ باشد، قرار می‌دهیم $g(x) = \int_a^x h(t)dt$. در این صورت، اگــر $f \in R$ بر $g([c, d])$ باشد، انتگرال $\int_c^d f[g(t)]h(t)dt$ وجود دارد و

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx = \int_c^d f[g(t)]h(t)\, dt \,.$$

بنظر می‌رسد که این قضیه کلیترین قضیه دربارهٔ تغییر متغیر در انتگــرال ریمان باشد[۱]. قضیهٔ ۳۶.۷ حــالت خــاصی از این قضیه است کــه در آن h بــر $[c, d]$ و f بر $g([c, d])$ پیوسته‌اند.

۲۲.۷ قضیهٔ دوم مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان

قضیهٔ ۳۷.۷ فــرض کنیم g پیوسته، و $f \searrow$ بــر $[a, b]$ باشد. همچنیــن A و B دو عدد حقیقی باشند که در نامساویهای زیرین صدق کنند:

$$A \leqslant f(a+) \text{ و } B \geqslant f(b-) \,.$$

در این صورت، نقطه‌ای مانند x_0 در $[a, b]$ هست بقسمی که

$$\text{(یکم)} \qquad \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = A\int_a^{x_0} g(x)\, dx + B\int_{x_0}^b g(x)\, dx \,.$$

۱. برای مشاهدهٔ برهانی از آن، ر.ک. مقالهٔ نوشته شده به‌وسیلهٔ H. Kestelman در شمارهٔ ۴۵ Mathematical Gazette، سال ۱۹۶۱، صفحات ۱۷ــ۲۳.

خصوصاً، اگر به ازای هر x در $[a, b]$، $f(x) \geqslant 0$، بــه ازای نقطه‌ای مانند x_0 در $[a, b]$،

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = B\int_{x_0}^b g(x)\, dx. \qquad \text{(دوم)}$$

تبصره. قسمت (دوم) به نام قضیهٔ بونه[1] معروف است.

برهان. هرگاه $\alpha(x) = \int_a^x g(t)dt$، آنگاه $\alpha' = g$. بنا براین، بنا برقضیهٔ ۳۱.۷،

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a)\int_a^{x_0} g(x)\, dx + f(b)\int_{x_0}^b g(x)\, dx.$$

یعنی، قسمت (یکم) برای $A = f(a)$ و $B = f(b)$ برقرار است. اکنون اگر A و B دو عدد حقیقی باشند بقسمی که $A \leqslant f(a+)$ و $B \geqslant f(b-)$، می‌توان f را در نقطه‌های انتهائی a و b مجدداً تعریف کرد که دارای مقدارهای $A = f(a)$ و $B = f(b)$ شود. f اصلاح شده باز هم بر $[a, b]$ صعودی است، و ، همان طور که قبلاً متذکر شده‌ایم، تغییر مقدار f در تعدادی متناهی نقطه برمقدار انتگرال ریمان آن اثری ندارد. (نقطهٔ x_0 که در (یکم) بدست آمده است البته بــه انتخاب A و B بستگی‌دارد.) با انتخاب $A = 0$، قسمت (دوم) ازقسمت (یکم) نتیجه خواهــد شد.

۲۳.۷ انتگرالهای ریمان ـ اشتیلیس که به یک پرما بستگی دارند

قضیهٔ ۳۸.۷ فرض کنیم f در هر نقطهٔ (x, y) از مستطیل

$$Q = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

پیوسته باشد، و نیز α بر $[a, b]$ با تغییر کــراندار باشد. تــابع F را بر $[c, d]$ بــا معادلهٔ زیرین تعریف می‌کنیم:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)d\alpha(x).$$

در این صورت، F بر بازهٔ $[c, d]$ پیوسته است. با بیــان دیگر می‌تــوان گفت که، اگر $y_0 \in [c, d]$،

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x) = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)d\alpha(x) = \int_a^b f(x, y_0)\, d\alpha(x).$$

1. Bonnet

برهان. فرض کنیم $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد. چون Q مجموعه‌ای فشرده است، پس f بر Q پیوستهٔ یکشکل می‌باشد. از این روی، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، δی مثبتی (فقط تابع ε) هست بقسمی که به ازای هر جفت نقطه مانند $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ در Q که واجد شرط $| z - z' | < \delta$ باشند، خواهیم داشت $| f(x, y) - f(x', y') | < \varepsilon$. اگر $| y - y' | < \delta$، داریم

$$| F(y) - F(y') | \leqslant \int_a^b | f(x, y) - f(x, y') | \, d\alpha(x)$$
$$\leqslant \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] \cdot$$

بنابراین، F بر $[c, d]$ پیوسته خواهد بود.

البته، اگر $\alpha(x) = x$، این قضیه به قضیهٔ پیوستگی انتگرالهای ریمان وابسته به یک پرما تبدیل می‌شود. ولی اگر به جای آن که در این قضیه $\alpha(x) = x$ را قرار دهیم قضیهٔ ۲۶.۷ را بکار بریم، برای انتگرالهای ریمان نتیجهٔ مفیدتری ببار خواهد آمد.

قضیهٔ ۳۹.۷ هرگاه f بر مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ پیوسته، و $g \in R$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه تابع F که با معادلهٔ

$$F(y) = \int_a^b g(x) \, f(x,y) dx$$

تعریف می‌شود بر $[c, d]$ پیوسته خواهد بود. یعنی، اگر $y_0 \in [c, d]$، داریم

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b g(x) \, f(x, y) \, dx = \int_a^b g(x) \, f(x, y_0) \, dx \cdot$$

برهان. اگر $G(x) = \int_a^x g(t) dt$، بنا بر قضیهٔ ۲۶.۷، $F(y) = \int_a^b f(x,y) \, dG(x)$. حال قضیهٔ ۳۸.۷ را بکار می‌بریم.

۲۴.۷ مشتقگیری زیر علامت انتگرال

قضیهٔ ۴۰.۷ فرض کنیم $Q = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. و نیز α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، و به‌ازای هرنقطهٔ ثابت مانند y در $[c, d]$،

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) \, d\alpha(x)$$

وجود داشته باشد. اگر مشتق جزئی $D_2 f$ بر Q پیوسته باشد، به‌ازای هر y در

$]c, d[$، $F'(y)$ وجود دارد و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x, y)\, d\alpha(x).$$

تبصره. در حالت خاصی که $g \in R$ بر $[a, b]$ است و $\alpha(x) = \int_a^x g(t)\, dt$، خواهیم داشت

$$F(y) = \int_a^b g(x) f(x,y) dx \quad \text{و} \quad F'(y) = \int_a^b g(x) D_2 f(x,y) dx.$$

برهان. اگر $y_0 \in]c, d[$ و $y \neq y_0$، داریم

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} d\alpha(x) = \int_a^b D_2 f(x, \bar{y}) d\alpha(x),$$

که درآن $\bar{y}$ نقطه‌ای بین y و y_0 است. چون $D_2 f$ بر Q پیوسته است، قضیه را می‌توان با برهانی مشابه برهان قضیهٔ ۳۸.۷ باثبات رسانید.

۲۵.۷ تعویض ترتیب عمل انتگرالگیری

قضیهٔ ۴۱.۷ فرض کنیم $Q = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. همچنین α بر $[a, b]$ و β بر $[c, d]$ با تغییر کراندار باشند، و f بر Q پیوسته باشد. اگر $(x, y) \in Q$، تابعهای F و G را با معادله‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x) \quad , \quad G(x) = \int_c^d f(x, y)\, d\beta(y).$$

در این صورت، $F \in R(\beta)$ بر $[c, d]$، $G \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، و داریم

$$\int_c^d F(y)\, d\beta(y) = \int_a^b G(x)\, d\alpha(x).$$

به‌بیان دیگر می‌شود گفت که، می‌توان ترتیب عمل انتگرالگیری را به‌صورت زیر عوض کرد:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, d\beta(y) \right] d\alpha(x) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, d\alpha(x) \right] d\beta(y).$$

برهان. بنا برقضیهٔ ۳۸.۷، F بر $[c, d]$ پیوسته است، و در نتیجه $F \in R(\beta)$ بر $[c, d]$ خواهد بود. بهمین‌نحو، معلوم می‌شود که $G \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است. برای اثبات تساوی دو انتگرال، کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ و $\beta \nearrow$ بر $[c, d]$ می‌باشند.

بنا به‌خاصیت پیوستگی یکشکل، به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، δی مثبتی هست بقسمی که به‌ازای هرجفت نقطه مانند $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ در Q که در نامساوی $|z - z'| < \delta$ صدق کنند،

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

حال عدد طبیعی n را بقسمی اختیار می‌کنیم که در نامساویهای زیرین صدق کند:

$$\frac{b-a}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \frac{d-c}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

سپس با تقسیم هریک از بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ به n قسمت متساوی، Q را به n^2 مستطیل متساوی تقسیم می‌نمائیم. اگر به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ بنویسیم

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \quad \text{و} \quad y_k = c + \frac{k(d-c)}{n}،$$

خواهیم داشت

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, d\beta(y) \right) d\alpha(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)\, d\beta(y) \right) d\alpha(x).$$

قضیهٔ ۷.۳۰ را دوبار در طرف راست تساوی بالا بکار می‌بریم. مجموع مضاعف به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x'_k, y'_j)[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

که‌درآن (x'_k, y'_j) در مستطیل $Q_{k,j}$ با رأسهای متقابل (x_k, y_j) و (x_{k+1}, y_{j+1}) قرار دارد. بهمین‌نحو، معلوم می‌شود که

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x) \right) d\beta(y)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x''_k, y''_j)[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

کـه در آن $(x''_k, y''_j) \in Q_{k,j}$. امـا $|f(x'_k, y'_j) - f(x''_k, y''_j)| < \varepsilon$ ، و

در نتیجه

$$\left|\int_a^b G(x)\,d\alpha(x)-\int_c^d F(y)\,d\beta(y)\right|$$
$$<\varepsilon\sum_{j=0}^{n-1}[\beta(y_{j+1})-\beta(y_j)]\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha(x_{x+1})-\alpha(x_k)]$$
$$=\varepsilon[\beta(d)-\beta(c)][\alpha(b)-\alpha(a)].$$

چون ε دلخواه است، پس دو انتگرال مورد نظر با یکدیگر متساویند.

از دوقضیهٔ ۴۱۰۷ و ۲۶۰۷ نتیجهٔزیر برای انتگرالهای ریمان حاصل می‌گردد:

قضیهٔ ۴۲۰۷ فرض کنیم f بر مستطیل $[a, b]\times[c, d]$ پیوسته باشد. هرگاه $g\in R$ بر $[a, b]$، و $h\in R$ بر $[c, d]$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b\left[\int_c^d g(x)\,h(y)\,f(x, y)\,dy\right]dx$$
$$=\int_c^d\left[\int_a^b g(x)\,h(y)\,f(x, y)\,dx\right]dy.$$

برهان. قرار می‌دهیم $\alpha(x)=\int_a^x g(u)du$ و $\beta(y)=\int_c^y h(v)dv$، و برای اثبات قضیه، قضیه‌های ۲۶۰۷ و ۴۱۰۷ را بکار می بریم.

۲۶۰۷ محك لبگ برای وجود انتگرالهای ریمان

هر تابع پیوسته دارای انتگرال ریمان است. اما محققاً پیوسته بودن الزامی نیست، زیرا دیده‌ایم که اگر f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، $f\in R$ بر $[a, b]$ است. بخصوص، f می‌تواند تابعی یکنوا با مجموعهٔ ناپیوستگیهای شمارشپذیر باشد. برای این f می‌دانیم که انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ وجود دارد. در واقع، تابعهائی هستند که دارای انتگرال ریمان هستندومجموعهٔ ناپیوستگیهای آنها شمارش‌ناپذیر است. (ر. ک. تمرین ۳۲۰۷.) بنابراین، طبیعی است سؤال کنیم که: مجموعهٔ ناپیوستگیهای یک تابع دارای انتگرال ریمان تا چه حدی می‌تواند «وسیع» باشد؟ جواب قطعی این سؤال به‌وسیلهٔ لبگ کشف شده است و در این بخش ثابت خواهد شد. نحوهٔ اثبات قضیهٔ لبگ با بررسی نوع قیدی که شرط ریمان برمجموعهٔ ناپیوستگیهای f می‌گذارد روشن می‌گردد.

تفاضل بین مجموعهای ریمان بالائی و پائینی به‌صورت زیر است:

$$\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\,\Delta x_k.$$

با بیان سطحی می‌توان گفت که، f وقتی، و فقط وقتی، انتگرالپذیر است که این مجموع را به دوقسمت،، مثلاً، $S_1 + S_2$ ، تقسیم کنیم ، که در آن S_1 مجموع جمله‌های متناظر زیربازه‌هائی است که فقط حاوی نقطه‌های پیوستگی f اند، و S_2 مجموع بقیهٔ جمله‌ها است. در S_1، به‌خاطر پیوستگی f، هر تفاضل $M_k(f) - m_k(f)$ کوچک است. بنابراین، اگر حتی تعداد جمله‌های S_1 زیاد باشد، S_1 را می‌توان کوچک نگهداشت. ولی در S_2، تفاضلهای $M_k(f) - m_k(f)$ لزوماً کوچک نیستند؛ اما چون این‌تفاضلها کراندار هستند (مثلاً به M)، پس $|S_2| \leqslant M\sum \Delta x_k$. بنابراین، S_2 در صورتی کوچک است که مجموع درازاهای زیربازه‌های متناظر جمله‌های S_2 کوچک باشد. از این روی، انتظار می‌رود که مجموعهٔ ناپیوستگیهای یک تابع انتگرالپذیر را بتوان با تعدادی بازه، که مجموع درازاهای آنها کوچک باشد، پوشانید.

آنچه گفته شد مدلول اصلی قضیهٔ لبگ است. برای تنظیم این قضیه به‌صورت دقیقتر، مجموعه‌های دارای اندازهٔ صفر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴۳.۷ می‌گوئیم که مجموعهٔ S از عددهای حقیقی دارای اندازهٔ صفر است در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یك پوشش شمارشپذیر از بازه‌های باز وجود داشته باشد که مجموع درازاهایشان از ε کوچکتر باشد.

اگر این بازه‌ها را با $]a_k, b_k[$ نشان دهیم، باید

$$S \subseteq \bigcup_k \,]a_k, b_k[\qquad \text{و} \qquad \sum_k (b_k - a_k) < \varepsilon. \tag{۳}$$

اگر دستهٔ بازه‌ها متناهی باشد، زیرنویس k در (۳) روی مجموعه‌ای متناهی تغییر می‌کند. هرگاه دستهٔ بازه‌ها نامتناهی شمارشپذیر باشد، آنگاه k از ۱ تا ∞ تغییر می‌کند، و مجموع درازاهای بازه‌ها مساوی مجموع این رشتهٔ نامتناهی است:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k).$$

علاوه بر تعریف بالا، نتیجه‌ای دیگر در مورد مجموعه‌های دارای اندازهٔ صفر نیز مورد نیاز ما می‌باشد.

قضیهٔ ۴۴.۷ ـ فرض کنیم F دسته‌ای باشد شمارشپذیر از مجموعه‌هائی در $\mathbf{R}$، مثلاً، به‌صورت

$$F = \{F_1, F_2, \cdots\},$$

که هریك دارای اندازهٔ صفر باشد، در این صورت، اجتماع آنها، یعنی

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

نیز دارای اندازهٔ صفر خواهدبود.

برهان. اگر $\varepsilon > 0$ معلوم باشد، به‌ازای هر k، یک پوشش شمارشپذیر F_k از بازه‌های باز هست که مجموع درازاهای آنها از $\varepsilon/2^k$ کمتر است. اجتماع همهٔ این پوششها خود یک پوشش شمارشپذیر S از بازه‌های باز است، و مجموع درازاهای همهٔ این بازه‌ها از

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

کمتر است.

چند مثال. چون هرمجموعهٔ شامل فقط یک نقطه دارای اندازهٔ صفر است، پس‌هر زیرمجموعهٔ شمارشپذیر $\mathbf{R}$ دارای اندازهٔ صفر می‌باشد. بخصوص، مجموعهٔ عددهای گویا دارای اندازهٔ صفر است. اما باید توجه داشت که، مجموعه‌هائی شمارش‌ناپذیر که دارای اندازهٔ صفرند نیز وجود دارند. (ر. ک. تمرین ۳۲.۷)

اینک مفهوم نوسان را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴۵.۷ فرض کنیم f بر بازهٔ S تعریف شده، و بر این بازه کراندار باشد. اگر $T \subseteq S$، عدد

$$\Omega_f(T) = \sup\{f(x) - f(y) | x \in T,\ y \in T\}$$

را نوسان f بر T می‌نامند. نوسان f در x به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0+} \Omega_f(B(x;h) \cap S).$$

تبصره. چون $\Omega_f(B(x;h) \cap S)$ تابعی نزولی از h است، پس حد بالا همواره وجود دارد. در حقیقت، هرگاه $T_1 \subseteq T_2$، آنگاه $\Omega_f(T_1) \leqslant \Omega_f(T_2)$. همچنین، $\omega_f(x) = 0$ وقتی، وفقط وقتی، که f در x پیوسته باشد (تمرین ۲۴.۴).

بنا برقضیهٔ زیرین، هرگاه در هرنقطه ازبازهٔ فشردهٔ $[a,b]$ مانند x، $\omega_f(x) < \varepsilon$، آنگاه به‌ازای هر زیربازهٔ $[a,b]$ مانند T به‌قدر کافی کوچک، $\Omega_f(T)$ نیز کوچکتر از ε خواهد بود.

قضیهٔ ۴۶.۷ فرض کنیم f بر $[a,b]$ تعریف شده، و بر این بازه کراندار باشد.

همچنین $\varepsilon>0$ داده شده باشد، فرض می‌کنیم به‌ازای هر x در $[a,b]$، $\omega_f(x)<\varepsilon$. دراین صورت، عدد مثبتی مانند δ (فقط تابع ε) هست بقسمی‌که به‌ازای هر زیربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ مانند T که درازای آن کمتر از δ باشد، داریم $\Omega_f(T)<\varepsilon$.

برهان. به‌ازای هر x در $[a,b]$، گویی یک بعدی مانند $B_x = B(x;\delta_x)$ هست بقسمی که

$$\Omega_f(B_x \cap [a,b]) < \omega_f(x) + [\varepsilon - \omega_f(x)] = \varepsilon.$$

مجموعهٔ همهٔ‌گویهای $B(x;\delta_x/2)$ یک پوشش باز $[a,b]$ است. چون $[a,b]$ فشرده است، پس تعدادی متناهی (مثلاً k تا) از این بازه‌ها $[a,b]$ را می‌پوشانند. فرض‌کنیم‌که $\delta_1/2$، ...، $\delta_k/2$ شعاعهای آنها باشند و δ مینیمم این k عدد باشد. هرگاه بازهٔ T درازایش از δ کمتر باشد، آنگاه قسمتی از T دست‌کم به‌وسیلهٔ یکی از این گویها، مثلاً، $B(x_p;\delta_p/2)$، پوشیده می‌شود. چون $\delta_p \geqslant 2\delta$، پس‌گوی $B(x_p;\delta_p)$ تمام T را می‌پوشاند. بعلاوه، در $B(x_p;\delta_p)\cap[a,b]$ نوسان f از ε کمتر است. از این نتیجه می‌شود که $\Omega_f(T)<\varepsilon$ و قضیه ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۴۷.۷ فرض‌کنیم f بر $[a,b]$ تعریف شده، و بر این بازه کراندار باشد. به‌ازای هر $\varepsilon>0$، مجموعهٔ J_ε را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_\varepsilon = \{x \mid x\in[a,b],\ \omega_f(x)\geqslant\varepsilon\}.$$

دراین‌صورت، J_ε مجموعه‌ای است بسته.

برهان. فرض‌کنیم x یک‌نقطهٔ انباشتگی J_ε باشد. اگر $x\notin J_\varepsilon$، داریم $\omega_f(x)<\varepsilon$. از این روی، گویی یک بعدی مانند $B(x)$ هست که به‌ازای آن،

$$\Omega_f(B(x)\cap[a,b])<\varepsilon.$$

یعنی، هیچ نقطهٔ $B(x)$ نمی‌تواند به J_ε تعلق داشته‌باشد، و این ناقض آن است که x نقطهٔ انباشتگی J_ε باشد. بنابراین، $x\in J_\varepsilon$ و J_ε بسته است.

قضیهٔ ۴۸.۷ (محک لبگ برای وجود انتگرال ریمان). فرض‌کنیم f بر $[a,b]$ تعریف‌شده، و بر این بازه کراندار باشد. همچنین D مجموعهٔ ناپیوستگیهای f در $[a,b]$ باشد. دراین صورت، $f\in R$ بر $[a,b]$ است وقتی، وفقط وقتی، که D دارای اندازهٔ صفر باشد.

برهان (لزوم شرط). ابتدا فرض می‌کنیم D دارای اندازهٔ صفر نباشد و نشان می‌دهیم که f انتگرالپذیر نیست. D را می‌توان به‌صورت اجتماعی شمارشپذیر از

مجموعه‌ها مانند

$$D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r$$

نوشت، که‌در آن

$$D_r = \left\{x \mid \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{r}\right\}.$$

هرگاه $x \in D$ ، آنگاه $\omega_f(x) > 0$، بنابراین، D مساوی اجتماع مجموعه‌های D_r ($r = 1, 2, \ldots$) خواهد بود.

حال اگر D دارای اندازهٔ صفر نباشد، بنابرقضیهٔ ۴۴.۷، یکی از D_r ها دارای اندازهٔ صفر نیست. بنابراین، عدد مثبتی مانند ε هست بقسمی که در هر دستهٔ شمارشپذیر از بازه‌های باز که D_r را بپوشاند، مجموع درازاهای این بازه‌ها از ε کمتر نیست. به‌ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P،

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k = S_1 + S_2 \geqslant S_1,$$

که در آن S_1 مجموع جمله‌هائی است که زیربازه‌های متناظر آنها حاوی نقطه‌هائی از D در درون خود باشند، و S_2 بقیهٔ جمله‌ها است. چون بازه‌های باز موجود در S_1 مجموعهٔ D_r را، بجز احتمالاً یک زیرمجموعهٔ متناهی D_r، که دارای اندازهٔ صفر است، می‌پوشانند، پس مجموع درازاهای آنها دست‌کم مساوی ε است. بعلاوه، در این بازه‌ها داریم

$$M_k(f) - m_k(f) \geqslant \frac{1}{r}\text{، و در نتیجه } S_1 \geqslant \frac{\varepsilon}{r}.$$

یعنی، به‌ازای هر افراز P،

$$U(P,f) - L(P,f) \geqslant \frac{\varepsilon}{r},$$

پس شرط ریمان نمی‌تواند صادق باشد. بنابراین، f انتگرالپذیر نیست. با بیان دیگر می‌توان گفت که، هرگاه $f \in R$، آنگاه D دارای اندازهٔ صفر است.

(کفایت شرط). حال فرض می‌کنیم D دارای اندازهٔ صفر باشد، و نشان می‌دهیم که شرط ریمان برقرار است. بار دیگر می‌نویسیم $D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r$ ، که در آن D_r مجموعهٔ نقطه‌هائی مانند x است که در آنها $\omega_f(x) \geqslant 1/r$. چون $D_r \subseteq D$،

پس هر D_r دارای اندازهٔ صفر است. پس D_r را می‌توان به‌وسیلهٔ تعدادی بازهٔ باز با مجموع درازاهای کمتر از $1/r$ پوشانید. چون D_r فشرده است (قضیهٔ ۴۷.۷)، تعدادی متناهی از این بازه‌ها D_r را می‌پوشانند. اجتماع این بازه‌ها مجموعهٔ بازی است که آن را با A_r نشان می‌دهیم. مجموعهٔ متمم $B_r = [a, b] - A_r$ مساوی اجتماع تعدادی متناهی زیربازهٔ بستهٔ $[a, b]$ خواهد بود. فرض کنیم I یکی از زیربازه‌های B_r باشد. هرگاه $x \in I$، آنگاه $\omega_f(x) < 1/r$، پس، بنابر قضیهٔ ۴۶.۷، عدد مثبتی مانند δ (فقط تابع r) هست بقسمی که I را می‌توان به تعدادی متناهی زیربازه تقسیم کرد بطوری که درازای هریک از زیربازه‌های بدست‌آمده، مثلاً T، از δ کمتر باشد و $\Omega_f(T) < 1/r$. نقطه‌های انتهائی این زیربازه‌ها یک افراز $[a, b]$ مانند P_r بوجود می‌آورند. اگر P از P_r ظریفتر باشد، می‌توان نوشت

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k = S_1 + S_2,$$

که در آن S_1 مجموع جمله‌های متناظر زیر بازه‌هائی است که حاوی نقطه‌هائی از D_r هستند، و S_2 بقیهٔ جمله‌ها است. در جملهٔ kام S_2 داریم

$$M_k(f) - m_k(f) < \frac{1}{r}، \text{ و در نتیجه } S_2 < \frac{b-a}{r}.$$

چون A_r همهٔ بازه‌های مربوط به S_1 را می‌پوشانند، پس

$$S_1 \leqslant \frac{M - m}{r},$$

که در آن M و m سوپرمم و اینفیمم f بر $[a, b]$ می‌باشند. بنابراین،

$$U(P,f) - L(P,f) < \frac{M - m + b - a}{r}.$$

چون رابطهٔ بالا به‌ازای هر $r \geqslant 1$ برقرار است، پس شرط ریمان برقرار بوده، $f \in R$ بر $[a, b]$ خواهد بود.

تبصره. فرض‌کنیم S یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^1$ باشد. اگر همهٔ نقطه‌های S، بجز نقاط زیر مجموعه‌ای از آن که دارای اندازهٔ صفر است، دارای خاصیتی باشند، گوئیم این خاصیت تقریباً همه‌جا بر S برقرار است. بنابراین، بنا به قضیهٔ لبگ، هر تابع کراندار مانند f بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ وقتی، و فقط وقتی، انتگرال ریمان دارد که f تقریباً همه‌جا بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

گزاره‌های زیرین (که بعضی از آنها پیشتر در این فصل ثابت شده‌اند) بی‌درنگ از قضیهٔ لبگ نتیجه می‌شوند.

قضیهٔ ۴۹.۷

آ) هرگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه $f\in R$ بر $[a, b]$ است.

ب) هرگاه $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه به‌ازای هر زیربازهٔ $[c, d]$ مانند $[a, b]$، $f \in R$ بر $[c, d]$ است، و $|f|\in R$ و $f^2\in R$ بر $[a, b]$ خواهند بود. همچنین، هرگاه $g\in R$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $f\cdot g\in R$ بر $[a, b]$ است.

ج) هرگاه $f\in R$ و $g\in R$ بر $[a, b]$ باشند و g دور از ۰ کراندار باشد، آنگاه $(f/g)\in R$ بر $[a, b]$ است.

د) هرگاه f و g بر $[a, b]$ کراندار باشند و ناپیوستگیهای آنها براین بازه یکی باشند، آنگاه $f\in R$ بر $[a, b]$ است وقتی، وفقط وقتی، که $g\in R$ بر $[a, b]$ باشد.

ه) فرض کنیم $g\in R$ بر $[a, b]$ باشد، و به‌ازای هر x در $[a, b]$، $m\leqslant g(x)\leqslant M$. اگر f بر بازهٔ $[m, M]$ پیوسته باشد، تابع مرکب h که با معادلهٔ $h(x) = f[g(x)]$ تعریف می‌شود بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارد.

تبصره. اگر فقط فرض‌کنیم که $f\in R$ بر $[m, M]$ باشد، گزارهٔ (ه) لزوماً برقرار نیست. (ر.ک. تمرین ۲۹.۷.)

۲۷.۷ انتگرالهای ریمان - اشتیل‌یس مختلط

انتگرالهای ریمان - اشتیل‌یس به‌شکل $\int_a^b f\,d\alpha$، که در آن f و α تابعهائی مختلط بر $[a, b]$ تعریف شده و کراندار باشند، در نظریهٔ تابعهای یک متغیر مختلط دارای اهمیتی اساسی هستند. این انتگرالها را می‌توان درست با همان تعریفی که در حالت حقیقی بکاربرده شده است معرفی نمود. در حقیقت، تعریف ۱.۷ برای وقتی هم که f و α مختلط باشند معنی دارد. در این حالت، مجموع حاصل ضربهائی به‌شکل $f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$، که برای تشکیل مجموعهای ریمان - اشتیل‌یس بکار می‌روند، فقط نیازمند به آن هستند که مانند مجموع حاصل‌ضربهای چند عدد مختلط تعبیر شوند. چون عددهای مختلط، مانند عددهای حقیقی، ازقانونهای تعویضپذیری و شرکتپذیری و پخشپذیری تبعیت می‌کنند، پس این مطلب که انتگرالهای مختلط بیشتر خاصیتهای انتگرالهای حقیقی را دارا هستند تعجب‌آور نخواهد بود. مخصوصاً، قضیه‌های ۲.۷ ، ۳.۷ ، ۴.۷ ، ۶.۷ ، و ۷.۷ (وهمچنین برهانهای آنها کلمه‌به‌کلمه)

برای وقتی که f و α مختلط باشند همه‌معتبرند. (در قضیه‌های ۲.۷ و ۳.۷ پایاهای c_1 و c_2 می‌توانند عددهای مختلط اختیار شوند.) بعلاوه، قضیهٔ زیرین، که در واقع نظریهٔ انتگرالهای اشتیل‌یس مختلط را به حالت حقیقی تحویل می‌کند، وجود دارد.

قضیهٔ ۵۰.۷ فرض‌کنیم تابعهای مختلط $f = f_1 + if_2$ و $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشند، در این‌صورت،

$$\int_a^b f\,d\alpha = \left(\int_a^b f_1\,d\alpha_1 - \int_a^b f_2\,d\alpha_2\right) + i\left(\int_a^b f_2\,d\alpha_1 + \int_a^b f_1\,d\alpha_2\right),$$

به‌شرط آن‌که چهار انتگرال طرف راست تساوی بالا وجود داشته باشند.

برهان قضیهٔ ۵۰.۷، که بی‌درنگ از تعریف نتیجه می‌شود، به خواننده واگذار می‌گردد.

با استفاده از این قضیه می‌توان اکثر خاصیتهای مهم انتگرالهای حقیقی را به حالت مختلط وسعت داد. مثلاً، اگرمفهومهای پیوستگی، مشتقپذیری، وبا تغییر کراندار بودن را برای تابعهای مختلط مؤلفه به مؤلفه (مانند تابعهای برداری) تعریف کنیم، رابطهٔ بین مشتقگیری و انتگرالگیری مذکور در قضیهٔ ۳۲.۷ برای انتگرالهای مختلط نیز معتبر خواهد بود. بنابراین، تابع مختلط $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ بر $[a, b]$ را با تغییر کراندار نامیم درصورتی که هر یک از مؤلفه‌های α_1 و α_2 بر این بازه با تغییر کراندار باشد. همچنین، اگر $\alpha'_1(t)$ و $\alpha'_2(t)$ وجود داشته باشند، $\alpha'(t)$ با معادلهٔ $\alpha'(t) = \alpha'_1(t) + i\alpha'_2(t)$ تعریف می‌شود. (مشتقهای یکطرفی نیز به همین صورت تعریف می‌شوند.) با این تعریفها، قضیه‌های ۳۲.۷ و ۳۴.۷ (قضیه‌های اساسی حساب انتگرال) هر دو برای وقتی که f و α مختلط باشند معتبر باقی خواهند ماند. برهانهای این دو قضیه از حالتهای حقیقی آنها و قضیهٔ ۵۰.۷ مستقیماً بدست می‌آیند.

در فصل ۱۶، وقتی که تابعهای مختلط با تفصیل بیشتری مورد مطالعه قرار می‌گیرند، به انتگرالهای مختلط باز خواهیم گشت.

تمرین

انتگرالهای ریمان ـ اشتیل‌یس

۱.۷ مستقیماً از تعریف ۱.۷ ثابت کنید که $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$.

۲.۷ اگر به ازای هر تابع f که بر $[a, b]$ یکنوا باشد، $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد و $\int_a^b f d\alpha = 0$، ثابت کنید که α بر $[a, b]$ باید تابعی پایا باشد.

۳.۷ در نوشته‌ها غالباً تعریف انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس مذکور در زیر بکار می‌رود: تابع f را برحسب α انتگرالپذیر گوئیم در صورتی که عددی حقیقی مانند A وجود داشته باشد بقسمی‌که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، δی مثبتی باشد چنان که به‌ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P با $\|P\| < \delta$ و اختیار کردن هر t_k در $[x_{k-1}, x_k]$، رابطهٔ $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$ برقرار باشد.

آ) نشان دهید هرگاه $\int_a^b f d\alpha$ بر طبق این تعریف وجود داشته باشد، آنگاه این انتگرال بر طبق تعریف ۱.۷ نیز وجود دارد و دو انتگرال با یکدیگر متساویند.

ب) فرض کنید به ازای $a \leqslant x < c$، $f(x) = \alpha(x) = 0$، و به ازای $c < x \leqslant b$، $f(x) = \alpha(x) = 1$، و $f(c) = 0$ و $\alpha(c) = 1$. نشان دهید که $\int_a^b f d\alpha$ بر طبق تعریف ۱.۷ وجود دارد ولی بر طبق این تعریف دوم مذکور در بالا وجود ندارد.

۴.۷ اگر بر طبق تعریف ۱.۷، $f \in R$، ثابت کنید که $\int_a^b f(x)dx$ برطبق تعریف تمرین ۳.۷ نیز وجود دارد. [برخلاف تمرین ۳.۷ (ب).] راهنمائی. فرض کنید که $I = \int_a^b f(x)dx$ و $M = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، P_ε را بقسمی اختیار کنید که $U(P_\varepsilon, f) < I + \varepsilon/2$ (در این جا نمادهای بخش ۱۱.۷ بکار برده شده‌اند). فرض کنید N تعداد نقطه‌های تقسیم در P_ε باشد و قرار دهید $\delta = \varepsilon/(2MN)$. اگر $\|P\| < \delta$، بنویسید

$$U(P, f) = \sum M_k(f)\Delta x_k = S_1 + S_2,$$

که در آن S_1 مجموع جمله‌های متناظر زیربازه‌هائی از P است که حاوی هیچ نقطهٔ P_ε نیستند، و S_2 مجموع بقیهٔ جمله‌ها است. دراین صورت،

$$S_1 \leqslant U(P_\varepsilon, f) < I + \varepsilon/2$$
و $$S_2 \leqslant NM\|P\| < NM\delta = \varepsilon/2،$$

و در نتیجه $U(P, f) < I + \varepsilon$. بهمین طریق، معلوم می‌شود که به ازای δ' مثبتی،

هرگاه $\|P\| < \delta'$، آنگاه $L(P, f) > I - \varepsilon$.

یعنی هرگاه $\|P\| < \min(\delta, \delta')$، آنگاه $|S(P, f) - I| < \varepsilon$.

۵.۷ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد از عددهای حقیقی. به ازای $x \geqslant 0$، تعریف کنید

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n = \sum_{n=1}^{[x]} a_n,$$

که در آن $[x]$ بزرگترین عدد صحیح در x می‌باشد، و مجموعهای تهی صفر فرض می‌شوند. فرض کنید f در بازهٔ $1 \leqslant x \leqslant a$ مشتق پیوسته داشته باشد. با استفاده از انتگرالهای اشتیل‌یس دستور زیر را بدست آورید:

$$\sum_{n \leqslant a} a_n f(n) = -\int_1^a A(x) f'(x) dx + A(a) f(a).$$

۶.۷ با استفاده از دستور جمعبندی اویلر، یا انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء در انتگرال اشتیل‌یس، اتحادهای زیرین را ثابت کنید:

آ) اگر $s \neq 1$، $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s\int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}} dx$.

ب) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2} dx + 1$.

۷.۷ فرض کنید f' بر $[1, 2n]$ پیوسته باشد. با استفاده ازدستور جمعبندی اویلر، یا انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء، ثابت کنید که

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = \int_1^{2n} f'(x)([x] - 2[x/2]) dx.$$

۸.۷ فرض‌کنید اگر x عددی صحیح نباشد، $\varphi_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$، و اگر x عددی صحیح باشد، $\varphi_1(x) = 0$. و نیز فرض کنید که $\varphi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(t) dt$. اگر f'' بر $[1, n]$ پیوسته باشد، ثابت کنید از دستور جمعبندی اویلر رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x) dx - \int_1^n \varphi_2(x) f''(x) dx + \frac{f(1) + f(n)}{2}.$$

۹.۷ با فرض $f(x) = \log x$ در تمرین ۸.۷، ثابت کنید که

$$\log n! = (n + \tfrac{1}{2}) \log n - n + 1 + \int_1^n \frac{\varphi_2(t)}{t^2} dt.$$

۱۰.۷ اگر $1 \leqslant x$، فرض کنید $\pi(x)$ تعداد عددهای اول نا بیشتر از x را نشان دهد، یعنی،

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1,$$

که در آن مجموع روی همهٔ عددهای اول نا بیشتر از x گرفته شده باشد. بنابر قضیهٔ عددهای اول،

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1 .$$

این قضیه معمولاً با مطالعهٔ تابع ϑ ثابت می‌گردد. ϑ با تابع π مربوط است و با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p,$$

که در آن باز هم مجموع بروی همهٔ عددهای اول نا بیشتر از x گرفته شده است. تابعهای π و ϑ هر دو پله‌ای هستند، و فقط در عددهای اول دارای جهش می‌باشند. این تمرین نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با استفاده از انتگرالهای ریمان ـ اشتیلیس این دو تابع را به هم مربوط کرد.

آ) اگر $2 \leqslant x$، ثابت کنید که $\pi(x)$ و $\vartheta(x)$ را می‌توان به صورت انتگرالهای ریمان ـ اشتیلیس زیر درآورد:

$$\vartheta(x) = \int_{3/2}^{x} \log t \, d\pi(t), \quad \pi(x) = \int_{3/2}^{x} \frac{1}{\log t} d\vartheta(t) .$$

تبصره. حد پائینی دو انتگرال بالا را می‌توان با هرعدد دیگری در بازهٔ باز $]1, 2[$ عوض کرد.

ب) اگر $2 \leqslant x$، با استفاده از انتگرالگیری به طریقهٔ جزء بجزء نشان دهید که

$$\vartheta(x) = \pi(x) \log x - \int_{2}^{x} \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_{2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt.$$

با استفاده از معادله‌های بالا می‌توان ثابت کرد که قضیهٔ عددهای اول

هم‌ارز رابطهٔ $\lim_{x\to\infty} \vartheta(x)/x = 1$ است.

۱۱.۷ اگر $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که

آ) $\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^c} f d\alpha + \overline{\int_c^b} f d\alpha$ $(a<c<b)$؛

ب) $\overline{\int_a^b}(f+g)d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f\, d\alpha + \overline{\int_a^b} g\, d\alpha$؛

ج) $\underline{\int_a^b}(f+g)d\alpha \geqslant \underline{\int_a^b} f\, d\alpha + \underline{\int_a^b} g\, d\alpha$.

۱۲.۷ بر بازه‌ای چون $[a, b]$، تابع با تغییر کراندار f و تابع صعودی α را بقسمی مثال بزنید که $|f| \in R(\alpha)$ ولی $\int_a^b f d\alpha$ وجود نداشته باشد.

۱۳.۷ فرض کنید تابع α بر $[a, b]$ پیوسته و با تغییر کراندار باشد. همچنین $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، و اگر $x \in [a, b]$، $\beta(x) = \int_a^x g(t)\, d\alpha(t)$. نشان دهید که:

آ) اگر $f \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد، نقطه‌ای مانند x_0 در $[a, b]$ هست بقسمی که

$$\int_a^b f d\beta = f(a)\int_a^{x_0} g\, d\alpha + f(b)\int_{x_0}^b g d\alpha.$$

ب) بعلاوه، اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، نیز خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x) = f(a)\int_a^{x_0} g d\alpha + f(b)\int_{x_0}^b g d\alpha.$$

۱۴.۷ فرض کنید $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$، و α بر این بازه با تغییر کراندار باشد. همچنین به ازای هر x در $]a, b]$، $V(x)$ تغییر کل α بر $[a, x]$ باشد، و $V(a) = 0$. اگر M کرانی بالائی برای $|f|$ بر $[a, b]$ باشد، نشان دهید که

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leqslant \int_a^b |f|\, dV \leqslant MV(b).$$

در حالت خاص که $\alpha(x) = x$، نامساوی بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant M(b-a).$$

۱۵.۷ فرض کنید $\{\alpha_n\}$ دنبالـه‌ای باشد از تابعهای با تغییر کراندار بر $[a, b]$. همچنین تابعی مانند α تعریف شده بر $[a, b]$ باشد بقسمی کـه تغییر کل $\alpha - \alpha_n$ بر $[a, b]$، وقتی که $n \to \infty$، به ۰ بگراید. بعلاوه، به ازای هر

$$n = ۱, ۲, \ldots ، \alpha(a) = \alpha_n(a) = ۰.$$

اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

۱۶.۷ اگر $f \in R(\alpha)$، $f^۲ \in R(\alpha)$، $g \in R(\alpha)$، و $g^۲ \in R(\alpha)$ بـر $[a, b]$ باشند، ثابت کنید که

$$\frac{۱}{۲}\int_a^b\left[\int_a^b \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{vmatrix}^۲ d\alpha(y)\right] d\alpha(x)$$
$$= \left(\int_a^b f(x)^۲ d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)^۲\, d\alpha(x)\right)$$
$$- \left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x)\right)^۲.$$

وقتی که $\alpha \nearrow$ بـر $[a, b]$ باشد، نامساوی زیر (نامساوی کشی ـ شوارتـز) را از آن نتیجه بگیرید:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x)\right)^۲ \leqslant \left(\int_a^b f(x)^۲\, d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)^۲\, d\alpha(x)\right).$$

(با تمرین ۲۳.۱ مقایسه شود.)

۱۷.۷ فرض کنید $f \in R(\alpha)$، $g \in R(\alpha)$، و $f \cdot g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند. نشان دهید که

$$\frac{۱}{۲}\int_a^b\left[\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))\, d\alpha(y)\right] d\alpha(x)$$
$$= (\alpha(b) - \alpha(a))\int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x)$$
$$- \left(\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)\, d\alpha(x)\right).$$

اگر $\alpha \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد، و f و g بر $[a, b]$ هر دو صعودی (یا هر دو نزولی)

باشند، نامساوی زیر را نتیجه بگیرید:

$$\left(\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)\,d\alpha(x)\right)$$
$$\leqslant (\alpha(b)-\alpha(a))\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x).$$

نشان دهید که در حالتی‌که f بر $[a, b]$ صعودی، و g نزولی باشد، عکس نامساوی بالا برقرار خواهد بود.

انتگرالهای ریمان

۱۸.۷ فرض کنید $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. با استفاده از تمرین ۴.۷، ثابت کنید که حد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

وجود دارد و مقدار آن مساوی $\int_a^b f(x)dx$ است. از آن نتیجه بگیرید که

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{-1/2} = \log(1+\sqrt{2}).$$

۱۹.۷ تابعهای f و g را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2, \quad g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt.$$

آ) نشان دهید که به ازای هرx، $g'(x)+f'(x)=0$، و نتیجه بگیریدکه

$$g(x)+f(x)=\frac{\pi}{4}.$$

ب) با استفاده از (آ)، ثابت کنید که

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

۲۰.۷ فرض‌کنید $g \in R$ بر $[a, b]$ باشد، واگر $x \in [a, b]$، $f(x)=\int_a^x g(t)dt$. ثابت کنید که انتگرال $\int_a^x |g(t)|dt$ مساوی تغییر کل f بر $[a, x]$ است.

۲۱.۷ فرض کنید تابع برداری $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ دارای مشتق پیوسته بر $[a, b]$ باشد. ثابت کنید که درازای خمی که به وسیلهٔ $\mathbf{f}$ توصیف شده است از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) = \int_a^b \| \mathbf{f}'(t) \| \, dt.$$

۲۲.۷ اگر $f^{(n+1)}$ بر $[a, x]$ پیوسته باشد، تابع I_n را به صورت زیر تعریف کنید:

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

آ) نشان دهید که

$$I_{k-1}(x) - I_k(x) = \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

ب) با استفاده از (آ) قسمت باقیمانده در دستور تیلور (قضیهٔ ۱۹.۵) را به صورت انتگرال درآورید.

۲۳.۷ فرض‌کنید تابع f بر بازهٔ $[0, a]$ پیوسته باشد. اگر $x \in [0, a]$، تعریف کنید $f_0(x) = f(x)$ و

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

آ) نشان دهید که مشتق nام f_n وجود دارد و مساوی f است.

ب) قضیهٔ زیر را، که به نام قضیهٔ فکته[1] معروف است، ثابت کنید: تعداد تغییر علامتهای f در بازهٔ $[0, a]$ از تعداد تغییر علامتها در مجموعهٔ مرتب حاصل از عددهای

$$f(a), f_1(a), \ldots, f_n(a)$$

کمتر نیست.

راهنمائی. استقرای ریاضی را بکار برید.

ج) با استفاده از (ب)، قضیهٔ زیر را، که به نام قضیهٔ فجر[2] معروف است، ثابت‌کنید: تعداد تغییر علامتهای f در $[0, a]$ از تعداد تغییر علامتها در

---
1. M. Fekete 2. L. Fejer

مجموعهٔ مرتب حاصل از عددهای

$$f(0),\quad \int_0^a f(t)\,dt\,,\quad \int_0^a tf(t)\,dt\,,\quad \ldots,\quad \int_0^a t^n f(t)\,dt$$

کمتر نیست.

۲۴.۷ فرض کنید تابع مثبت f بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد. همچنین M ماکزیمم مقدارهای f بر $[a, b]$ را نشان دهد. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} = M.$$

۲۵.۷ تابع f از دو متغیر حقیقی به‌ازای هر نقطهٔ (x,y) در مربع یکهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ ، $0\leqslant y\leqslant 1$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد،} \\ 2y & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد،} \end{cases}$$

آ) انتگرالهای $\overline{\int_0^1} f(x,y)dx$ و $\underline{\int_0^1} f(x,y)dx$ را برحسب y محاسبه‌کنید.

ب) نشان دهید که انتگرال $\int_0^1 f(x,y)dy$ به‌ازای هر x ثابت وجود دارد، و به‌ازای $0\leqslant x\leqslant 1$ و $0\leqslant t\leqslant 1$، انتگرال $\int_0^t f(x,y)dy$ را برحسب x و t محاسبه کنید.

ج) فرض‌کنید $F(x) = \int_0^1 f(x,y)dy$. نشان‌دهیدکه انتگرال $\int_0^1 F(x)dx$ وجود دارد، و مقدار آن را بیابید.

۲۶.۷ فرض کنید f بر $[0,1]$ به‌این صورت تعریف شده باشد: $f(0) = 0$؛ به‌ازای $n = 0,1,2,\ldots$ ، هرگاه $2^{-n-1} < x \leqslant 2^{-n}$ ، آنگاه $f(x) = 2^{-n}$.

آ) دو دلیل بیاورید برای این‌که چرا $\int_0^1 f(x)dx$ وجود دارد.

ب) فرض کنید $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. نشان دهید به‌ازای $0 < x\leqslant 1$ ،

$$F(x) = xA(x) - \tfrac{1}{3}A(x)^2,$$

که در آن $A(x) = 2^{-[-\log x/\log 2]}$ ، و $[y]$ بزرگترین عدد صحیح در y است.

۲۷.۷ فرض‌کنید مشتق f بر بازهٔ $[a, b]$ نزولی باشد، و به‌ازای هر x در این بازه، $f'(x)\geqslant m > 0$. ثابت‌کنید که

$$\left|\int_a^b \cos f(x)dx\right| \leqslant \frac{2}{m}.$$

راهنمائی. انتگرالده را در $f'(x)$ ضرب و بر آن تقسیم کنید، و قضیهٔ ۳۷.۷ قسمت (دوم) را بکار برید.

۲۸.۷ دنبالهٔ نزولی مفروض $\{G(n)\}$ از عددهای حقیقی بقسمی است که، وقتی‌که $n \to \infty$، $G(n) \to ۰$. تابع f را بر $[۰,۱]$ برحسب $\{G(n)\}$ به‌این صورت تعریف کنید: $f(۰) = ۱$؛ هرگاه x گنگ باشد، آنگاه $f(x) = ۰$؛ هرگاه x گویا و به‌صورت m/n (m و n نسبت به‌هم اول) باشد،آنگاه $f(m/n) = G(n)$. نوسان $\omega_f(x)$ را در هر x در $[۰,۱]$ محاسبه کنید، و نشان دهید که $f \in R$ بر $[۰,۱]$ است.

۲۹.۷ فرض‌کنید f تابعی باشد مانند تمرین ۲۸.۷، که برحسب $G(n) = ۱/n$ تعریف شده باشد. همچنین، اگر $۰ < x \leqslant ۱$، قرار دهید $g(x) = ۱$، و $g(۰) = ۰$. نشان دهید که، با وجود آن که $f \in R$ و $g \in R$ بر $[۰,۱]$ اند، ولی تابع مرکب h که چنین تعریف می‌شود $h(x) = g[f(x)]$ بر $[۰,۱]$ انتگرال ریمان ندارد.

۳۰.۷ با استفاده از قضیهٔ لبگ قضیهٔ ۴۹.۷ را ثابت کنید.

۳۱.۷ با استفاده از قضیهٔ لبگ ثابت کنید هرگاه $f \in R$ و $g \in R$ بر $[a, b]$ باشند، و به‌ازای هر x در $[a, b]$، $f(x) \geqslant m > ۰$، آنگاه تابع h تعریف شده با معادلهٔ

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارد.

۳۲.۷ فرض‌کنید $I = [۰,۱]$، و $A_۱ = I -]۱/۳, ۲/۳[$ آن زیرمجموعهٔ I باشدکه با حذف قسمت باز وسط I به درازای $۱/۳$ بدست می‌آید؛ یعنی، $A_۱ = [۰, ۱/۳] \cup [۲/۳, ۱]$. همچنین، $A_۲$ آن زیرمجموعهٔ $A_۱$ باشد که با حذف قسمتهای باز وسطی $[۰, ۱/۳]$ و $[۲/۳, ۱]$ به درازای $۱/۹$ بدست می آید. این عمل را تکرار نموده، مجموعه‌های $A_۳$،$A_۴$،... را نیز تعریف کنید. مجموعهٔ $C = \bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n$ مجموعهٔ کانتور نامیده می‌شود. ثابت کنید:

آ) C مجموعه‌ای فشرده است، و دارای اندازهٔ صفر می‌باشد.

ب) $x \in C$ وقتی، و فقط وقتی،که $x = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n ۳^{-n}$، که درآن هر a_n یا ۰ یا ۲ می‌باشد.

ج) C شمارش‌ناپذیر است.

د) اگر $x \in C$، قراردهید $f(x)=1$، واگر $x \notin C$، فرض‌کنید $f(x)=0$.
ثابت کنید $f \in R$ بر $[0,1]$ است .

۳۳.۷ این تمرین اثبات گنگ بودن π^2 را (که منسوب به نیون[1] است) باختصار شرح می‌دهد . فرض کنید $f(x) = x^n(1-x)^n/n!$. ثابت‌کنید:

آ) اگر $0<x<1$، $0<f(x)<1/n!$.

ب) هریک از مشتقهای kام $f^k(0)$ و $f^{(k)}(1)$ عددی صحیح است.

حال فرض‌کنید به‌ازای عددهای صحیح و مثبت a و b ، $\pi^2 = a/b$، و قرار دهید

$$F(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k}.$$

ثابت کنید :

ج) $F(0)$ و $F(1)$ عددهائی صحیح هستند .

د) $\pi^2 a^n f(x) \sin \pi x = \dfrac{d}{dx}\{F'(x)\sin \pi x - \pi F(x)\cos \pi x\}$.

ه) $F(1) + F(0) = \pi a^n \int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx$.

و) بااستفاده از (آ) در (ه) ، نتیجه بگیرید که اگر n به قدر کافی بزرگ باشد ، $0<F(1)+F(0)<1$. این مطلب ناقض (ج) است و نشان می‌دهد که π^2 (و در نتیجه π) گنگ است .

۳۴.۷ تابع حقیقی α ، که بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته است و α' بر $]a, b[$ کراندار می‌باشد، مفروض است. فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده، وبراین بازه کراندار باشد. همچنین، دو انتگرال

$$\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

وجود داشته باشند. ثابت‌کنید که این دو انتگرال متساویند . (در این‌جا فرض نشده است که α' پیوسته باشد.)

۳۵.۷ قضیهٔ زیررا ثابت کنید. بنابراین قضیه، اگر انتگرال یک تابع مثبت باشد، خود این تابع باید بر بازه‌ای مثبت باشد. فرض کنید $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد، و

1. Ivan Niven

به‌ازای M مثبتی ، $0 \leqslant f(x) \leqslant M$ بر $[a, b]$ باشد. قرار دهید

$$I = \int_a^b f(x)dx \text{ و } h = (I/2)/(M + b - a)،$$

و فرض‌کنید کـه $I > 0$. در این صورت، مجموعـهٔ $T = \{x | f(x) \geqslant h\}$ حاوی تعدادی متناهی بازه است، که مجموع درازاهای آنهـا دست‌کم مساوی h می بـاشد.
راهنمائی. فرض کنید P یک افراز $[a, b]$ بـاشد بقسمی که هـر مجموع ریمـان $S(P,f) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k$ در نـامسـاوی $S(P,f) > I/2$ صـدق کـند. $S(P,f)$ را به دوقسمت $S(P,f) = \sum_{k\in A} + \sum_{k\in B}$ تقسیم کنیـد ، کـه در آن

$$A = \{k | [x_{k-1}, x_k] \subseteq T\} \quad \text{و} \quad B = \{k | k \notin A\}.$$

اگـر $k \in A$، از نامسـاوی $f(t_k) \leqslant M$ استفاده کنید؛ اگـر $k \in B$ ، t_k را بقسمی اختیار کنید که $f(t_k) < h$. نتیجه بگیرید که $\sum_{k\in A} \Delta x_k > h$.

قضیه‌های وجودی برای معادله‌های انتگرال و دیفرانسیل

تمرینهای زیر مصور می‌سازند که چگونه قضیهٔ نقطهٔ ثابت در مـورد انقباضها (قضیهٔ ۴۸.۴) برای اثبات قضیه‌های وجودی دربارهٔ جوابهای بعضی از معادله‌های انتگرال و دیفرانسیل بکار مـی‌رود. فضای متری همهٔ تابعهای پیوستهٔ حقیقی بر $[a, b]$ را به $C[a, b]$ نشان می‌دهیم. متر این فضا به‌صورت زیر است:

$$d(f, g) = \|f - g\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|,$$

و یادآوری می‌کنیم که $C[a, b]$ یک فضای متری تام می‌باشد (تمرین ۶۷.۴).

۳۶.۷ g تابع مفروضی در $C[a, b]$، وتابع K برمستطیل $Q = [a, b] \times [a, b]$ پیوسته می‌باشد. اگر λ پایای داده شده‌ای باشد، تابع T را بر $C[a, b]$،که با معادلهٔ

$$T(\varphi)(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt$$

تعریف شده است، درنظر بگیرید.

آ) ثابت کنید T فضای $C[a, b]$ را در خودش می‌نگارد.

ب) اگـر بـه‌ازای M مثبتی ، $|K(x, y)| \leqslant M$ بـر Q بـاشد ، و اگـر $|\lambda| < M^{-1}(b-a)^{-1}$، ثابت‌کنید T یک انقباض $C[a, b]$ است، و در نتیجه دارای نقطهٔ ثابتی مانند φ می‌باشد، که عبارت است از جواب معادلهٔ انتگرال

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

۳۷.۷ فرض‌کنید تابع f برمستطیل $Q=[a-h, a+h]\times[b-k, b+k]$، که درآن $h>0$ و $k>0$، پیوسته باشد.

آ) فرض کنید تابع φ بر $[a-h, a+h]$ پیوسته باشد، بقسمی که به‌ازای هر x در $[a-h, a+h]$، $(x, \varphi(x))\in Q$. اگر $h\leqslant c<0$، ثابت کنید φ بر $]a-c, a+c[$ وقتی، و فقط وقتی، در معادلهٔ دیفرانسیل $y'=f(x, y)$ با شرط اولیهٔ $\varphi(a)=b$ صدق می‌کند که φ در معادلهٔ انتگرال

$$\varphi(x)=b+\int_a^x f(t, \varphi(t))\,dt \quad \text{بر}\ ]a-c, a+c[$$

صدق نماید.

ب) فرض کنید به ازای M مثبتی، $|f(x, y)|\leqslant M$ بر Q باشد، و $c=\min\{h, k/M\}$. همچنین، S زیرفضای متری $C[a-c, a+c]$ مشتمل بر همهٔ φهائی را نشان دهد که $|\varphi(x)-b|\leqslant Mc$ بر $[a-c, a+c]$ باشد. ثابت کنید که S یک زیرفضای بستهٔ $C[a-c, a+c]$است، و درنتیجه خود S یک فضای متری تام می‌باشد.

ج) ثابت کنید تابع T، که بر S با معادلهٔ

$$T(\varphi)(x)=b+\int_a^x f(t, \varphi(t))\,dt$$

تعریف می‌شود، S را در خودش می‌نگارد.

د) حال فرض کنید که f در شرط لیپ شیتس به‌شکل زیر صدق کند: Aی مثبتی باشد که به‌ازای هرجفت نقطه در Q مانند (x, y) و (x, z)، داشته باشیم

$$|f(x, y)-f(x, z)|\leqslant A|y-z|.$$

ثابت کنید اگر $h<1/A$، T یک انقباض S می‌باشد. از این‌جا نتیجه بگیریدکه به‌ازای $h<1/A$، معادلهٔ دیفرانسیل $y'=f(x, y)$ فقط دارای یک جواب مانند $y=\varphi(x)$ بر $]a-c, a+c[$ با $\varphi(a)=b$ می‌باشد.

فهرست چند کتاب به‌زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه‌کرد.

7.1 Hildebrandt, T. H., *Introduction to the Theory of Integration*. Academic Press, New York, 1963.

7.2 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, Oxford, 1937.

7.3 Rankin, R. A., *An Introduction to Mathematical Analysis*. Pergamon Press, Oxford, 1963.

7.4 Rogosinski, W. W., *Volume and Integral*. Wiley, New York, 1952.

7.5 Shilov, G. E., and Gurevich, B. L., *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach*. R. Silverman, translator. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.

۸
رشته‌های نامتناهی و حاصل ضربهای نامتناهی

۱.۸ مقدمه

در این فصل نظریهٔ رشته‌های نامتناهی و حاصل ضربهای نامتناهی باختصار نشان داده می‌شود. اینها صرفاً دنباله‌هائی نامتناهی هستند که جمله‌هایشان حقیقی یا مختلط می‌باشند. دربارهٔ دنباله‌های همگرا در فصل ۴ در محدودهٔ فضاهای متری کلی بحث شد. در این‌جا بعضی از مفهومهای فصل ۴ را، به‌صورتی که در مورد دنباله‌های موجود در C (با متر اقلیدسی متداول) بکار می‌روند، یادآوری می‌کنیم.

۲.۸ دنباله‌های همگرا و واگرای عددهای مختلط

تعریف ۱.۸ دنبالهٔ $\{a_n\}$ از نقطه‌ها در C را همگرا نامیم در صورتی که نقطه‌ای مانند p در C با این خاصیت وجود داشته باشد:

به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند N (تابع ε) باشد بقسمی که

هرگاه $n \geqslant N$، آنگاه $|a_n - p| < \varepsilon$.

اگر $\{a_n\}$ همگرا به p باشد، می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ و p را حد دنباله می‌نامیم. دنباله‌ای واگرا نامیده می‌شود که همگرا نباشد.

یک دنباله در C را یک دنبالهٔکشی نامند در صورتی که در شرط‌کشی صدق کند؛ یعنی، به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند N باشد بقسمی که

هرگاه $n \geqslant N$ و $m \geqslant N$، آنگاه $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

چون C یک فضای متری تام است، از فصل ۴ می‌دانیم که یک دنباله در C وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که یک دنبالهٔکشی باشد.

خصوصاً وقتی که عملاً مقدار حد یک دنباله را ندانیم، شرطکشی در اثبات همگرائی دنباله‌ها مفید است.

هر دنبالهٔ همگرا کراندار است (قضیهٔ ۳.۴)، و در نتیجه یک دنبالهٔ بی‌کران لزوماً واگرا است.

هرگاه دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا به p باشد، آنگاه هر زیردنبالهٔ آن مانند $\{a_{k_n}\}$ نیز به p همگرا خواهد بود (قضیهٔ ۵.۴).

دنبالهٔ حقیقی $\{a_n\}$ را واگرا به $+\infty$ نامند در صورتی که به ازای هر $M > 0$، عدد صحیحی مانند N (تابع M) باشد بقسمی که

هرگاه $n \geqslant N$، آنگاه $a_n > M$.

در این حالت می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

اگر $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$، می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ و گوئیم $\{a_n\}$ واگرا به $-\infty$ است. البته، دنباله‌هائی حقیقی و واگرا وجود دارند که واگرا به $+\infty$ یا $-\infty$ نمی‌باشند. مثلاً، دنبالهٔ $\{(-1)^n(1+1/n)\}$ واگرا است ولی واگرا به $+\infty$ یا $-\infty$ نیست.

۳.۸ حد اعلا و حد اسفل یک دنبالهٔ حقیقی

تعریف ۲.۸ فرض کنیم دنبالهٔ $\{a_n\}$ دنباله‌ای ازعددهای حقیقی باشد، همچنین، عددی حقیقی مانند U باشد که در دو شرط زیرین صدق کنند:

یکم) به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند N وجود داشته باشد بقسمی که اگر $n > N$،

$$a_n < U + \varepsilon.$$

دوم) به‌ازای $\varepsilon > 0$، و $m > 0$ داده‌شده، عدد صحیحی مانند $n > m$ باشد بقسمی که

$$a_n > U - \varepsilon.$$

در این‌صورت، U را حد اعلای (یا حد بالائی) $\{a_n\}$ نامیده، می‌نویسیم

$$U = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

بنابرگزارهٔ (یکم)، مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots\}$ از بالا کراندار است. اگر این مجموعه از بالا کراندار نباشد، تعریف می‌کنیم

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty \cdot$$

هرگاه این مجموعه از بالا کراندار باشد ولی از پائین کراندار نباشد، و $\{a_n\}$ حد اعلای متناهی نداشته باشد، آنگاه گوئیم که

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty \cdot$$

حد اسفل (یا حد پائینی) $\{a_n\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} b_n$،

که در آن $b_n = -a_n$.

تبصره. گزارهٔ (یکم) بدین معنی است که سرانجام همهٔ جمله‌های دنباله در سمت چپ $U+\varepsilon$ قرار می‌گیرند. گزارهٔ (دوم) یعنی که تعدادی نامتناهی ازجمله‌های آن در طرف راست $U-\varepsilon$ قرار دارند. واضح است که بیش از یک U نمی‌تواند وجود داشته باشد که در دو شرط (یکم) و (دوم)، با هم، صدق کند. هر دنبالهٔ حقیقی در دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافته، یعنی $\mathbf{R}^*$، دارای حد اعلا و حد اسفل است. (ر. ک. تمرین ۸.۱۰.)

اثبات قضیه‌های زیرین به‌خواننده واگذار می‌شود :

قضیهٔ ۳.۸ فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از عددهای حقیقی باشد. دراین‌صورت:

آ) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n$.

ب) این دنباله وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \text{ و } \limsup_{n\to\infty} a_n$$

هر دو متناهی و متساوی باشند، که دراین‌صورت

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot$$

ج) این دنباله وقتی، وفقط وقتی، واگرا به $+\infty$ است که

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

د) این دنباله وقتی، وفقط وقتی، واگرا به $-\infty$ است که

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

تبصره. اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$، $\limsup_{n\to\infty} a_n \neq \liminf_{n\to\infty} a_n$، گوئیم $\{a_n\}$ نوسان می‌کند.

قضیهٔ ۴.۸ فرض‌کنیم به‌ازای هر $n = ۱, ۲, \ldots$، $a_n \leqslant b_n$. در این صورت:
$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n$ و $\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n$.

چند مثال

۱. $a_n = (-۱)^n(۱ + ۱/n)$، $\liminf_{n\to\infty} a_n = -۱$، $\limsup_{n\to\infty} a_n = +۱$.

۲. $a_n = (-۱)^n$، $\liminf_{n\to\infty} a_n = -۱$، $\limsup_{n\to\infty} a_n = +۱$.

۳. $a_n = (-۱)^n n$، $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$، $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

۴. $a_n = n^۲ \sin^۲\left(\frac{۱}{۲} n\pi\right)$، $\liminf_{n\to\infty} a_n = ۰$، $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

۴.۸ دنباله‌های یکنوای عددهای حقیقی

تعریف ۵.۸ فرض‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد از عددهای حقیقی. اگر به‌ازای هر $n = ۱, ۲, \ldots$، $a_n \leqslant a_n + ۱$، گوئیم این دنباله صعودی است، و می‌نویسیم $a_n \nwarrow$. اگر به‌ازای هر n، $a_n \geqslant a_{n+۱}$، دنباله را نزولی نامیده، می‌نویسیم $a_n \swarrow$. دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد یکنوا نامیده می‌شود.

بخصوص تعیین همگرائی یا واگرائی دنباله‌های یکنوا ساده است. در حقیقت، داریم

قضیهٔ ۶.۸ یك دنبالهٔ یکنوا وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که کراندار باشد.

برهان. اگر $a_n \nwarrow$، $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n = ۱, ۲, \ldots\}$.
اگر $a_n \swarrow$، $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n = ۱, ۲, \ldots\}$.

۵.۸ رشته‌های نامتناهی

فرض‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای مفروض از عددهای حقیقی یا مختلط باشد. دنبالهٔ جدید

$\{s_n\}$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$(۱) \quad s_n = a_۱ + \cdots + a_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k \quad (n = ۱, ۲, \cdots).$$

تعریف ۷.۸ جفت مرتب $(\{a_n\}, \{s_n\})$ یك رشتهٔ نامتناهی نامیده می‌شود. عدد s_n را مجموع جزئی nام رشته می‌نامند. رشته را همگرا یا واگرا نامند در صورتی که $\{s_n\}$ همگرا یا واگرا باشد. برای رشته‌ای که با رابطهٔ (۱) تعریف شود علامتهای زیر بکار می روند :

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n + \cdots, \; a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots,$$
$$\sum_{k=۱}^{\infty} a_k.$$

تبصره. حرف k که در $\sum_{k=۱}^{\infty} a_k$ بکار برده شده است یک «متغیر فریبان» است، ومی‌تواند با هر علامت مناسب دیگری تعویض گردد. اگر p عدد صحیحی ناکمتر از ۰ باشد، منظور از علامت $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ یعنی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$، که در آن $a_n = b_{n+p-۱}$. هرکجا خطر ابهام نباشد، به‌جای $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ می‌نویسیم $\sum b_n$.

اگر دنبالهٔ $\{s_n\}$ که با رابطهٔ (۱) تعریف شده است همگرا به s باشد، عدد s را مجموع رشته می‌نامیم و می‌نویسیم

$$s = \sum_{k=۱}^{\infty} a_k.$$

بنابراین، برای رشته‌های همگرا، علامت $\sum a_k$ هم رشته و هم مجموع آن را نشان خواهد داد.

مثال. هرگاه x دارای بسط اعشاری نامتناهی به صورت $x = a_۰ \text{ر} a_۱ a_۲ \ldots$ باشد (ر.ک. بخش ۱۷۰۱)، آنگاه رشتهٔ $\sum_{k=۰}^{\infty} a_k ۱۰^{-k}$ به x همگرا خواهد بود.

قضیهٔ ۸.۸ فرض کنیم $a = \sum a_n$ و $b = \sum b_n$ رشته‌های همگرائی باشند. دراین صورت، به‌ازای هر جفت عدد پایای α و β، رشتهٔ $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ به مجموع $\alpha a + \beta b$ همگرا است. یعنی،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=۱}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=۱}^{\infty} b_n.$$

برهان.

$$\sum_{k=۱}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=۱}^{n} a_k + \beta \sum_{k=۱}^{n} b_k.$$

قضیهٔ ۹.۸ فرض کنیم به‌ازای هر $n = ۱, ۲, \ldots$، $a_n \geqslant ۰$. در این صورت، $\sum a_n$ وقتی، وفقط وقتی، همگرا است که دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن از بالا کراندار باشد.

برهان. فرض می‌کنیم $s_n = a_۱ + \cdots + a_n$. در این صورت، $s_n \nearrow$ و می‌توان قضیهٔ ۶.۸ را در مورد آن بکار برد.

قضیهٔ ۱۰.۸ (رشته‌های توی هم‌رونده). فرض‌کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند با این خاصیت که به ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، $a_n = b_{n+۱} - b_n$. در این صورت، $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که $\lim_{n\to\infty} b_n$ وجود داشته باشد، که در این صورت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_۱.$$

برهان.

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k = \sum_{k=۱}^{n} (b_{k+۱} - b_k) = b_{n+۱} - b_۱.$$

قضیهٔ ۱۱.۸ (شرط‌کشی برای رشته‌ها). رشتهٔ $\sum a_n$ وقتی، وفقط وقتی، همگرا است که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، عدد صحیحی مانند N باشد بقسمی که به‌ازای هر $n > N$ و هر $p = ۱, ۲, \ldots$، داشته باشیم

$$|a_{n+۱} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \qquad (۲)$$

برهان. فرض می‌کنیم $s_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$. می‌نویسیم:

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+۱} + \cdots + a_{n+p},$$

و قضیه‌های ۸.۴ و ۶.۴ را بکار می‌بریم.

اگر در رابطهٔ (۲)، p را مساوی ۱ قرار دهیم، معلوم می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

شرطی لازم برای همگرائی $\sum a_n$ است. کافی نبودن شرط وقتی معلوم می‌شود که a_n را مساوی $۱/n$ اختیار کنیم. اگر در رابطهٔ (۲)، $n = ۲^m$ و $p = ۲^m$ اختیار گردند، نتیجه می‌شود که

$$a_{n+۱} + \cdots + a_{n+p} = \frac{۱}{۲^m + ۱} + \cdots + \frac{۱}{۲^m + ۲^m} \geqslant \frac{۲^m}{۲^m + ۲^m} = \frac{۱}{۲},$$

و در نتیجه شرط‌کشی به ازای $\varepsilon \leqslant ۱/۲$ نمی‌تواند صادق باشد. بنابراین، رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} ۱/n$ واگرا است. این رشته را رشتهٔ توافقی می‌نامند.

۶.۸ درج و حذف کمانکها

تعریف ۱۲.۸ فرض کنیم p تابعی باشد که قلمرو آن مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت، و برد آن یک زیرمجموعهٔ عددهای صحیح مثبت باشد بقسمی که

یکم) اگر $m > n$، داشته باشیم $p(n) < p(m)$.

فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو رشته باشند که بدین صورت با هم مربوط شده‌اند:

$$b_۱ = a_۱ + a_۲ + \dots + a_{p(۱)},$$

دوم) هرگاه $n = ۱, ۲, \dots$، آنگاه

$$b_{n+۱} = a_{p(n)+۱} + a_{p(n)+۲} + \dots + a_{p(n+۱)}.$$

در این صورت، گوئیم که $\sum b_n$ از $\sum a_n$ با درج کمانکها، و $\sum a_n$ از $\sum b_n$ با حذف کمانکها بدست آمده است.

قضیهٔ ۱۳.۸ اگر $\sum a_n$ همگرا به s باشد، هر رشته مانند $\sum b_n$ که از $\sum a_n$ با درج کمانکها بدست آمده باشد نیز به s همگرا خواهد بود.

برهان. فرض‌کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ با رابطهٔ (دوم) به‌هم مربوط باشند، ومی‌نویسیم $s_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$ و $t_n = \sum_{k=۱}^{n} b_k$. در این صورت، $\{t_n\}$ یک زیردنبالهٔ $\{s_n\}$ است. در حقیقت، $t_n = s_{p(n)}$. بنابراین، همگرائی $\{s_n\}$ به s همگرائی $\{t_n\}$ به s را ایجاب می‌کند.

حذف کمانکها ممکن است همگرائی رشته را از بین ببرد. برای پی بردن به این مطلب، رشتهٔ $\sum b_n$ را که هرجملهٔ آن ۰ (و مسلماً همگرا) است درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $p(n) = ۲n$ و $a_n = (-۱)^n$. در این صورت، (یکم) و (دوم) برقرارند ولی $\sum a_n$ واگرا است.

با تحمیل قیدهائی بر $\sum a_n$ و p می‌توان کمانکها را حذف کرد.

قضیهٔ ۱۴.۸ فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ با شرط تعریف ۱۲.۸ به هم مربوط باشند، و نیز عدد پایائی مانند $M > ۰$ وجود داشته باشد که به ازای هرمقدار n، نامساوی $p(n+۱) - p(n) < M$ برقرار باشد. بعلاوه، $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$. در این صورت، $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که $\sum b_n$ همگرا باشد، که در این صورت مجموع هر دو رشته یکی خواهد بود.

برهان. اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، نتیجه از قضیهٔ ۱۳.۸ حاصل است. تمام اشکال در اثبات عکس این مطلب نهفته است. فرض کنیم

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n,\ t_n = b_1 + \cdots + b_n,\ t = \lim_{n\to\infty} t_n \cdot$$

اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای $n > N$،

$$\cdot |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{و} \quad |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

اگر $n > p(N)$، می‌توان یک $m \geqslant N$ یافت بقسمی که

$$N \leqslant p(m) \leqslant n < p(m+1) \cdot$$

[چرا؟] به ازای این مقدار n، داریم

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_{p(m+1)} - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}) \\ &= t_{m+1} - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}), \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} |s_n - t| &\leqslant |t_{m+1} - t| + |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}| \\ &\leqslant |t_{m+1} - t| + |a_{p(m)+1}| + |a_{p(m)+2}| + \cdots + |a_{p(m+1)}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (p(m+1) - p(m)) \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

این ثابت می‌کند که $\lim_{n\to\infty} s_n = t$.

۷.۸ رشته‌های متناوب

تعریف ۱۵.۸ اگر به‌ازای هر مقدار n، $a_n > 0$، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ را رشتهٔ متناوب می‌نامند.

قضیهٔ ۱۶.۸ اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد و همگرا به ۰، رشتهٔ متناوب $\sum (-1)^{n+1} a_n$ همگرا است. اگر s مجموع این رشته، و s_n مجموع جزئی nم آن باشد، نامساوی زیرین برقرار است:

$$\text{به‌ازای}\quad n = 1, 2, \cdots \quad 0 < (-1)^n (s - s_n) < a_{n+1}. \tag{۳}$$

تبصره. بنابر نامساوی (۳)، وقتی که s را با s_n «تقریب» می‌زنیم، خطائی که دراین عمل مرتکب می‌شویم دارای علامت اولین جمله‌ای است که از آن صرف‌نظر شده است و مقدار آن از قدر مطلق این جمله کمتر است.

برهان. با درج کمانکها در $\sum(-1)^{n+1} a_n$، جمله‌های این رشته را دوتا دوتا با هم دسته‌بندی می‌کنیم. یعنی، p_n را مساوی $2n$ اختیار نموده، رشتهٔ جدید $\sum b_n$ را برطبق تعریف ۱۲.۸ تشکیل می‌دهیم. جمله‌های این رشته به‌صورت زیرند:

$$b_1 = a_1 - a_2,\ b_2 = a_3 - a_4,\ \ldots,\ b_n = a_{2n-1} - a_{2n}.$$

چون $a_n \to 0$ و $p(n+1) - p(n) = 2$، پس، بنابرقضیهٔ ۱۴.۸، اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum(-1)^{n+1} a_n$ نیز همگرا خواهدبود. اما چون $a_n \searrow$، پس $\sum b_n$ رشته‌ای است با جمله‌های نامنفی. همچنین، مجموعهای جزئی‌آن از بالا کراندارند، زیرا

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

بنابراین، $\sum b_n$ همگرا است، در نتیجه $\sum(-1)^{n+1} a_n$ نیز همگرا می‌باشد.
نامساوی (۳) نتیجه‌ای است از رابطه‌های زیرین:

$$(-1)^n(s - s_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) > 0,$$

و

$$(-1)^n(s - s_n) = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k} - a_{n+2k+1}) < a_{n+1}.$$

۸.۸ همگرائی مطلق و همگرائی مشروط

تعریف ۱۷.۸ رشتهٔ $\sum a_n$ را همگرای مطلق نامیم در صورتی که $\sum|a_n|$ همگرا باشد. اگر $\sum a_n$ همگرا، اما $\sum|a_n|$ واگرا باشد، گوئیم رشتهٔ $\sum a_n$ همگرای مشروط است.

قضیهٔ ۱۸.۸ همگرائی مطلق $\sum a_n$ همگرائی‌آن را ایجاب می‌کند.

برهان. شرط‌کشی را در نامساوی زیر بکار برید:

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|.$$

برای‌آن که درست نبودن عکس این قضیه را ببینیم، مثال زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

این رشتهٔ متناوب، بنابرقضیهٔ ۱۶.۸، همگرا است، ولی همگرای مطلق نیست.

قضیهٔ ۱۹.۸ فرض کنیم $\sum a_n$ رشته‌ای داده شده با جمله‌های حقیقی باشد و تعریف می‌کنیم

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{۲}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{۲} \quad (n = ۱, ۲, \dots). \qquad (۴)$$

در این صورت:

یکم) اگر $\sum a_n$ همگرای مشروط باشد، هر دو رشتهٔ $\sum p_n$ و $\sum q_n$ واگرا هستند.

دوم) اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد، هردو رشتهٔ $\sum p_n$ و $\sum q_n$ همگرا هستند و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \sum_{n=۱}^{\infty} p_n - \sum_{n=۱}^{\infty} q_n.$$

تبصره. اگر $a_n \geqslant ۰$، $p_n = a_n$ و $q_n = ۰$، حال آن که اگر $a_n \leqslant ۰$، $q_n = -a_n$ و $p_n = ۰$.

برهان. داریم $a_n = p_n - q_n$ و $|a_n| = p_n + q_n$. برای اثبات (یکم)، فرض می‌کنیم $\sum a_n$ همگرا و $\sum |a_n|$ واگرا باشد. هرگاه $\sum q_n$ همگرا باشد، آنگاه چون $p_n = a_n + q_n$، بنا برقضیهٔ ۸.۸، $\sum p_n$ نیز همگرا است. به‌نحو مشابه، هرگاه $\sum p_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum q_n$ نیز همگرا است. از این روی، اگر $\sum p_n$ یا $\sum q_n$ همگرا باشد، هردو باید همگرا باشند و نتیجه می‌گیریم که، چون $|a_n| = p_n + q_n$، پس $\sum |a_n|$ همگرا است. از این تناقض صحت قسمت (یکم) مسلم می‌شود.

برای اثبات (دوم)، کافی است رابطه‌های (۴) و قضیهٔ ۸.۸ را بکار بریم.

۹.۸ قسمتهای حقیقی و موهومی یك رشتهٔ مختلط

$\sum c_n$ را رشته‌ای باجمله‌های مختلط فرض کرده می‌نویسیم $c_n = a_n + ib_n$، که در آن a_n و b_n حقیقی هستند. رشته‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$، بترتیب، قسمتهای حقیقی و موهومی $\sum c_n$ نامیده می‌شوند. هروقت با رشته‌های مختلط سروکار پیدا کنیم، اغلب راحتتر آن‌است که قسمتهای حقیقی وموهومی جداگانه بررسی بشوند. البته، همگرائی هردو رشتهٔ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرائی رشتهٔ $\sum c_n$ را ایجاب می‌کند. همچنین، بعکس، همگرائی $\sum c_n$ همگرائی هردو رشتهٔ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ را موجب می‌شود. این مطالب درمورد همگرائی مطلق نیز صادقند. اما، وقتی که $\sum c_n$ همگرای مشروط باشد، فقط یکی ازدورشتهٔ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ می‌تواند همگرای مطلق باشد. (ر. ک. تمرین ۱۹.۸.)

اگر $\sum c_n$ همگرای مطلق باشد، می‌توان قسمت (دوم) قضیهٔ ۱۹.۸ را در

قسمتهای حقیقی و موهومی این رشته جداگانه بکار برد، تا تجزیهٔ زیر بدست آید:

$$\sum c_n = \sum(p_n + iu_n) - \sum(q_n + iv_n),$$

کــه در آن $\sum p_n$، $\sum q_n$، $\sum u_n$، و $\sum v_n$ رشته‌هائی همگــرا با جملـه‌های نـامنفی می‌باشند.

۱۰.۸ آزمونهائی برای همگرائی رشته‌های با جمله‌های مثبت

قضیهٔ ۲۰.۸ (آزمون مقایسه‌ای). هرگاه به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، $a_n > ۰$ و $b_n > ۰$، و پایــاهــای مثبتــی مــانند c و N وجــود داشتــه بــاشند بقسمــی کــه به‌ازای $n \geqslant N$، $a_n < cb_n$، آنگاه همگرائی $\sum b_n$ موجب همگــرائی $\sum a_n$ می‌شود.

برهان. اگر مجموعهای جزئی $\sum b_n$ کراندار باشند، مجموعهای جزئی $\sum a_n$ نیز کراندار خواهند بود. از این مطلب و قضیهٔ ۹.۸، قضیهٔ مورد بحث ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۲۱.۸ (آزمون مقایسه‌ای حدی). فــرض کنیم به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، $a_n > ۰$ و $b_n > ۰$، و نیز

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۱\,.$$

در این صورت، $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که $\sum b_n$ همگرا باشد.

برهان. عددی چون N وجود دارد که به‌ازای $n \geqslant N$، $۱/۲ < a_n/b_n < ۳/۲$. حال برای اثبات قضیه کافی است دوبار قضیهٔ ۲۰.۸ را بکار بریم.

تبصره. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$، قضیهٔ ۲۱.۸ بازهم بـرقرار است، به‌شرط آن که $c \neq ۰$. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = ۰$، فقط می‌توان نتیجه گرفت کــه همگرائی $\sum b_n$ همگرائی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند.

۱۱.۸ رشته‌های هندسی

برای‌آن که بتوان‌آزمونهای مقایسه‌ای را بنحوی مــؤثر بکار بــرد، باید مثالهائی از رشته‌هائی که رفتارشان معلوم باشد در اختیار داشته باشیم. یکی از مهمترین رشته‌ها برای این منظور رشتهٔ هندسی است.

قضیهٔ ۲۲.۸ اگر $|x| < ۱$، رشتهٔ $۱ + x + x^۲ + \ldots$ همگرا است و مجمــوع آن مساوی است با $۱/(۱ - x)$. اگر $|x| \geqslant ۱$، این رشته واگرا است.

برهان. $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}$. وقتی که $|x| < 1$، $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. اگر $|x| \geqslant 1$، جملهٔ عمومی رشته به 0 نمی‌گراید و رشته نمی‌تواند همگرا باشد.

۱۲.۸ آزمون انتگرال

مثالهای دیگری از رشته‌های با رفتار معلوم را می‌توان با بکار بردن آزمون انتگرال خیلی ساده بدست‌آورد.

قضیهٔ ۲۳.۸ (آزمون انتگرال). فرض کنیم f بر $[1, +\infty[$ تابعی نزولی و مثبت باشد بقسمی که $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. به‌ازای $n = 1, 2, \dots$، تعریف می‌کنیم

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),\ t_n = \int_1^n f(x)dx,\ d_n = s_n - t_n.$$

دراین صورت، داریم:

یکم) به‌ازای $n = 1, 2, \dots$، $0 < f(n+1) \leqslant d_{n+1} \leqslant d_n \leqslant f(1)$.

دوم) $\lim_{n\to\infty} d_n$ وجود دارد.

سوم) رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ وقتی، وفقط وقتی، همگرا است که دنبالهٔ $\{t_n\}$ همگرا باشد.

چهارم) به‌ازای $k = 1, 2, \dots$، $0 \leqslant d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leqslant f(k)$.

برهان. برای اثبات (یکم)، می‌نویسیم

$$t_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(k)\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n.$$

از این نتیجه می‌شود که

$$f(n+1) = s_{n+1} - s_n \leqslant s_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1},$$

و خواهیم داشت

$$0 < f(n+1) \leqslant d_{n+1}.$$

اما نیز داریم

$$d_n - d_{n+1} = t_{n+1} - t_n - (s_{n+1} - s_n) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \tag{5}$$
$$- f(n+1) \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx - f(n+1) = 0,$$

و در نتیجه $d_{n+1} \leqslant d_n \leqslant d_1 = f(1)$. از این (یکم) ثابت می‌شود. اکنون واضح است‌که از (یکم) قسمت (دوم)، و از (دوم) قسمت (سوم) نتیجه می‌شود.

برای اثبات قسمت (چهارم)، بار دیگر (۵) را بکار برده می‌نویسیم

$$0 \leqslant d_n - d_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,dx - f(n+1) = f(n) - f(n+1)\,.$$

و چون بر n جمعبندی کنیم بدست می‌آوریم :

اگر $k \geqslant 1$، $\quad 0 \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1))\,.$

وقتی که در نامساویهای بالا مجموعهای رشته‌های توی هم روندهٔ موجود در آنها را ارزیابی کنیم ، قسمت (چهارم) بدست می‌آید.

تبصره . فرض‌کنیم $D = \lim_{n\to\infty} d_n$. در این صورت ، از (یکم) نتیجه می‌شود که $0 \leqslant D \leqslant f(1)$ ، حال آن‌که از (چهارم) رابطه‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx - D \leqslant f(n)\,. \tag{۶}$$

نامساوی بالا برای تقریب بعضی از مجموعهای متناهی به انتگرالها بی‌اندازه مفید است.

۱۳.۸ نمادهای اوی بزرگ و اوی کوچک

تعریف ۲۴.۸ دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مفروضند بقسمی که به‌ازای هر مقدار n ، $b_n \geqslant 0$. هرگاه عدد پایائی چون $M > 0$ وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر مقدار n، $|a_n| \leqslant M b_n$ ، آنگاه می‌نویسیم

$a_n = O(b_n)$ (بخوانید : «a_n اوی بزرگ b_n است») ؛

و نیز هرگاه $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ ، آنگاه می‌نویسیم

وقتی $n \to \infty$، $a_n = o(b_n)$ (بخوانید : «a_n اوی کوچك b_n است»).

تبصره . منظور ازمعادلهٔ $a_n = c_n + O(b_n)$ یعنی $a_n - c_n = O(b_n)$. بهمین‌نحو، $a_n = c_n + o(b_n)$ به‌معنی $a_n - c_n = o(b_n)$ است . مزیت این نمادها این است که بعضی از نامعادله‌ها بوسیلهٔ آنها تبدیل به معادله می‌شوند. مثلاً ، از رابطهٔ (۶) این رابطه حاصل می‌شود :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + D + O(f(n))\,. \tag{۷}$$

مثال ۱ در قضیهٔ ۲۳.۸، فرض می‌کنیم $f(x) = 1/x$. دیده می‌شود که $t_n = \log n$، و در نتیجه $\sum 1/n$ واگرا است. اما، از رابطهٔ (دوم) وجود حد

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

مسلم می‌شود، که عدد معروفی است موسوم به پایای اویلر، و معمولاً با C (یا با γ) نشان داده می‌شود. معادلهٔ (۷) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (8)$$

مثال ۲ در قضیهٔ ۲۳.۸، فرض می‌کنیم $f(x) = x^{-s}$، $s \neq 1$. می‌بینیم که $\sum n^{-s}$ به‌ازای $s>1$ همگرا، و به‌ازای $s<1$ واگرا است. این رشته به‌ازای $s>1$ تابع مهمی به‌نام تابع زتای ریمان را تعریف می‌کند:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \quad (s>1).$$

برای $s>0$ و $s\neq 1$، می‌توان رابطهٔ (۷) را بکار برد و نوشت:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{n^{1-s}-1}{1-s}+C(s)+O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

که در آن $C(s)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{-s}-(n^{1-s}-1)/(1-s)\right)$.

۱۴.۸ آزمون نسبت و آزمون ریشه

قضیهٔ ۲۵.۸ (آزمون نسبت). فرض کنیم $\sum a_n$ رشته‌ای باشد که جمله‌های آن همه مختلط و ناصفر باشند. قرار می‌دهیم

$$r=\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad R=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

آ) اگر $R<1$، رشتهٔ $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) اگر $r>1$، رشتهٔ $\sum a_n$ واگرا است.

ج) در حالت $r\leqslant 1\leqslant R$، از این آزمون چیزی نتیجه نمی‌شود.

برهان. فرض می‌کنیم $R<1$ و x را بقسمی اختیار می‌کنیم که $R<x<1$. بنابر تعریف R، عددی مانند N وجود دارد بقسمی که هرگاه $N\leqslant x$، آنگاه

$|a_{n+1}/a_n|<x$. چون $x = x^{n+1}/x^n$، پس

هرگاه $n \geqslant N$، آنگاه $\frac{|a_N|}{x^N} \geqslant \frac{|a_n|}{x^n} > \frac{|a_{n+1}|}{x^{n+1}}$،

و در نتیجه اگر $n \geqslant N$، $|a_n| \leqslant cx^n$، که در آن $c = |a_N|x^{-N}$. حال اگر آزمون مقایسه‌ای را بکار بریم، گزارهٔ (آ) نتیجه خواهد شد.

برای اثبات (ب)، کافی است ملاحظه کنیم که اگر $r>1$، عددی مانند N هست که به‌ازای هر $n \geqslant N$، $|a_{n+1}|>|a_n|$، و در نتیجه $\lim_{n\to\infty}a_n$ نمی‌تواند مساوی صفر باشد.

برای اثبات (ج)، دو مثال $\sum n^{-1}$ و $\sum n^{-2}$ را در نظر می‌گیریم. در هر دو، $r = R = 1$ اما $\sum n^{-1}$ واگرا است، حال آن که $\sum n^{-2}$ همگرا می‌باشد.

قضیهٔ ۲۶.۸ (آزمون ریشه). فرض‌کنیم $\sum a_n$ دشته‌ای با جمله‌های مختلط باشد. قرار می‌دهیم

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

آ) اگر $\rho<1$، دشتهٔ $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) اگر $\rho>1$، دشتهٔ $\sum a_n$ واگرا است.

ج) برای حالت $\rho=1$، از این آزمون چیزی نتیجه نمی‌شود.

برهان. فرض‌کنیم $\rho<1$ و x را بقسمی اختیار می‌کنیم که $\rho<x<1$. بنابر تعریف ρ، عددی مانند N با این‌خاصیت وجود داردکه به‌ازای $n \geqslant N$، $|a_n|<x^n$. از این روی، از آزمون مقایسه‌ای نتیجه می‌شود که $\sum|a_n|$ همگرا است. از این (آ) ثابت می‌شود.

برای اثبات (ب)، می‌بینیم که $\rho>1$ ایجاب می‌کند که بی‌نهایت بار $|a_n|>1$، و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n$ نمی‌تواند مساوی صفر باشد.

بالاخره، (ج) را می‌توان با استفاده از همان مثالهای قضیهٔ ۲۵.۸ اثبات کرد.

تبصره. آزمون ریشه از آزمون نسبت «قوی» تر است. یعنی، هرجا آزمون ریشه بی حاصل باشد، آزمون نسبت نیز چنین خواهد بود. اما مثالهائی هستند که درآنها آزمون نسبت را نمی‌توان بکار برد ولی آزمون ریشه قابل استفاده است. (ر.ک. تمرین ۴.۸.)

۱۵.۸ آزمون دیریکله[1] و آزمون آبل[2]

همهٔ آزمونهائی‌که در بخش پیشین دیدیم برای تعیین همگرائی مطلق یک‌رشته با جمله‌های مختلط مفیدند. در مورد رشته‌هائی که ممکن است همگرای مطلق نباشند نیز داشتن آزمونهائی برای تعیین همگرائی آنها اهمیت دارد. آزمونهائی که دراین بخش می‌آوریم خصوصاً برای این منظور مفید می‌باشند. همهٔ این آزمونها به دستور جمعبندی جزئی آبل (معادلهٔ (۹) در قضیهٔ زیرین) بستگی دارند.

قضیهٔ ۲۷.۸ اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از عددهای مختلط باشند، تعریف می‌کنیم

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n \cdot$$

در این صورت، اتحاد زیر برقرار خواهد بود:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k) \cdot \qquad (۹)$$

بنابراین، $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ در صورتی همگرا است که رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1} - b_k)$ و دنبالهٔ $\{A_n b_{n+1}\}$ هر دو همگرا باشند.

برهان. اگر بنویسیم $A_0 = 0$، اتحاد

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1}$$

بدست می‌آید، که قسمت دوم قضیه بی‌درنگ از آن نتیجه می‌شود.

تبصره. دستور (۹) شبیه است به دستور انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء در انتگرال ریمان ـ اشتیل یس.

قضیهٔ ۲۸.۸ (آزمون دیریکله). فرض کنیم دنبالهٔ مجموعهای جزئی رشتهٔ $\sum a_n$ با جمله‌های مختلط دنباله‌ای کراندار باشد، همچنین $\{b_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد همگرا به ۰ . در این صورت $\sum a_n b_n$ همگرا است.

برهان. فرض می‌کنیم $A_n = a_1 + \cdots + a_n$، و به‌ازای هر n، $|A_n| \leqslant M$. در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0 \cdot$$

بنابراین، برای اثبات همگرائی $\sum a_n b_n$ فقط کافی است نشان دهیم که

$$\sum A_k (b_{k+1} - b_k)$$

1. Dirichlet 2. Abel

همگرا است. گوئیم چون $b_n \searrow$، رابطهٔ

$$|A_k(b_{k+1} - b_k)| \leqslant M(b_k - b_{k+1})$$

برقرار است. اما رشتهٔ $\sum(b_{k+1} - b_k)$ یک رشتهٔ توی هم روندهٔ همگرا است. از این روی آزمون مقایسه‌ای همگرای مطلق بودن $\sum A_k(b_{k+1} - b_k)$ را ایجاب می‌کند.

قضیهٔ ۲۹.۸ (آزمون آبل). اگر رشتهٔ $\sum a_n$ همگرا، و دنبالهٔ $\{b_n\}$ همگرای یکنوا باشد، رشتهٔ $\sum a_n b_n$ همگرا است.

برهان. اگر $A_n = a_1 + \cdots + a_n$، از همگرائی $\sum a_n$ و $\{b_n\}$ وجود حد $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$ نتیجه می‌شود. همچنین، $\{A_n\}$ دنباله‌ای است کراندار. باقی برهان مشابه برهان قضیهٔ ۲۸.۸ است. (دو آزمون دیگر، که مشابه‌آزمون بالا هستند. در تمرین ۲۷.۸ داده می‌شوند.)

۱۶.۸ مجموعهای جزئی رشتهٔ هندسی $\sum z^n$ بر دایرهٔ یکهٔ $|z| = 1$

برای آن که آزمون دیریکله به‌طرز مؤثری قابل اجرا باشد، لازم است با چند رشتهٔ دارای مجموعهای جزئی کراندار آشنا شویم. البته، همهٔ رشته‌های همگرا دارای این خاصیت هستند. قضیهٔ زیر رشتهٔ واگرائی را نشان می‌دهد که دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن کراندار است. این رشتهٔ واگرا رشتهٔ هندسی $\sum z^n$ با $|z| = 1$، یعنی $z = e^{ix}$ (x حقیقی است)، می‌باشد. دستور برای مجموعهای جزئی این رشته در نظریهٔ رشته‌های فوریه[1] اهمیتی اساسی دارد.

قضیهٔ ۳۰.۸ به ازای هر عدد حقیقی $x \neq 2m\pi$ (m عددی است صحیح)، داریم

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}e^{i(n+1)x/2}. \tag{10}$$

تبصره. از اتحاد بالا تخمین زیر نتیجه می‌شود:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}. \tag{11}$$

برهان.

$$(1 - e^{ix})\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n}(e^{ikx} - e^{i(k+1)x}) = e^{ix} - e^{i(n+1)x}.$$

---

1. Fourier

از این رابطه اولین تساوی موجود در (۱۰) بدست می‌آید. معادلهٔ دوم از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{inx/2}-e^{-inx/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}e^{i(n+1)x/2}.$$

تبصره. با توجه به قسمتهای حقیقی و موهومی (۱۰)، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin\frac{nx}{2}\cos(n+1)\frac{x}{2}/\sin\frac{x}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2n+1)\frac{x}{2}/\sin\frac{x}{2}, \tag{۱۲}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sin\frac{nx}{2}\sin(n+1)\frac{x}{2}/\sin\frac{x}{2}. \tag{۱۳}$$

با استفاده از (۱۰)، نیز می‌توان نوشت

$$\sum_{k=1}^{n}e^{i(2k-1)x}=e^{-ix}\sum_{k=1}^{n}e^{ik(2x)}=\frac{\sin nx}{\sin x}e^{inx}, \tag{۱۴}$$

که اتحادی است که به‌ازای هر $x\neq m\pi$ (m عددی است صحیح) معتبر است. با جدا نمودن قسمتهای حقیقی و موهومی (۱۴)، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \tag{۱۵}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}. \tag{۱۶}$$

دستورهای (۱۲) و (۱۶) در نظریهٔ رشته‌های فوریه بکار می‌آیند.

۱۷.۸ تجدید آرایش رشته‌ها

یادآوری می‌کنیم که Z^+ عبارت است از مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت؛ یعنی،

$$Z^+=\{1,2,3,\dots\}.$$

تعریف ۳۱.۸ فرض کنیم f تابعی با قلمرو و برد Z^+ باشد، و f بر Z^+ یك به‌یك باشد. همچنین دو رشتهٔ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ چنان باشند که

$$\text{به‌ازای } n=1,2,\dots\text{،}\quad b_n=a_{f(n)}. \tag{۱۷}$$

دراین‌صورت، گوئیم که $\sum b_n$ یك تجدید آرایش $\sum a_n$ است.

تبصره. از معادلهٔ (۱۷) نتیجه می‌شودکه $a_n = b_{f^{-1}(n)}$، و در نتیجه $\sum a_n$ نیز یک تجدید آرایش $\sum b_n$ است.

قضیهٔ ۳۲.۸ فرض‌کنیم $\sum a_n$ یك رشتهٔ همگرای مطلق با مجموع s باشد. دراین صورت، هر تجدید آرایش $\sum a_n$ نیز همگرای مطلق است و مجموع آن s است.

برهان. فرض‌کنیم $\{b_n\}$ دنباله‌ای باشدکه با (۱۷) تعریف شده‌باشد. دراین‌صورت،

$$|b_1| + \cdots + |b_n| = |a_{f(1)}| + \cdots + |a_{f(n)}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

پس دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\sum |b_n|$ کراندار است. از این روی، $\sum b_n$ همگرای مطلق است.

برای‌آن‌که نشان دهیم که $\sum b_n = s$، قرار می‌دهیم $t_n = b_1 + \cdots + b_n$ و $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که $|s_N - s| < \varepsilon/2$ و $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| \leqslant \varepsilon/2$. دراین‌صورت،

$$|t_n - s| \leqslant |t_n - s_N| + |s_N - s| < |t_n - s_N| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

همچنین، M را بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{f(1), f(2), \ldots, f(M)\}.$$

دراین‌صورت، $n > M$ ایجاب می‌کند که $f(n) > N$، و برای این‌چنین nی داریم

$$\begin{aligned} |t_n - s_N| &= |b_1 + \cdots + b_n - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ &= |a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)} - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ &\leqslant |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

زیرا همهٔ جمله‌های a_1، . . .، a_N در تفریق حذف می‌شوند. ازاین‌روی، $n > M$ ایجاب می‌کند که $|t_n - s| < \varepsilon$ و این بدان معنی است که $s = \sum b_n$.

۱۸.۸ قضیهٔ ریمان دربارهٔ رشته‌های همگرای مشروط

فرض همگرائی مطلق در قضیهٔ ۳۲.۸ فرضی است لازم. ریمان کشف کرد که هر رشته با جمله‌های حقیقی و همگرای مشروط را می‌توان باتجدید آرایش به‌رشته‌ای تبدیل کرد که به‌مجموع مفروض دلخواه همگرا باشد. این واقعیت شایان توجه نتیجه‌ای

است از قضیهٔ زیرین:

قضیهٔ ۳۳۰۸ فرض‌کنیم‌رشتهٔ $\sum a_n$ باجمله‌های حقیقی همگرای‌مشروط باشد. همچنین x و y دو عدد مفروض دربازهٔ بستهٔ $[-\infty, +\infty]$ باشند، و $x \leqslant y$. دراین صورت، برای $\sum a_n$ تجدید آرایشی مانند $\sum b_n$ وجود دارد بقسمی که

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = x \quad \text{و} \quad \limsup_{n\to\infty} t_n = y،$$

که در آنها $t_n = b_1 + \cdots + b_n$.

برهان. حذف جمله‌های صفر یک رشته اثری برهمگرائی یا واگرائی آن ندارد. از این‌روی می‌توان فرض‌کرد که هیچ جملهٔ $\sum a_n$ صفر نباشد. فرض‌کنیم p_n جملهٔ nام مثبت $\sum a_n$، و $-q_n$ جملهٔ nام منفی آن باشد. دراین‌صورت، $\sum p_n$ و $\sum q_n$ هر دو رشته‌هائی واگرا با جمله‌های مثبت می‌باشند. [چرا؟] اکنون، دو دنباله ازعددهای حقیقی، مثلاً $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$، را با خاصیتهای زیر می‌سازیم:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x ،\quad \lim_{n\to\infty} y_n = y ،\quad \text{با } x_n < y_n \text{ و } y_1 > 0.$$

حال دیگر طرز اثبات قضیه کاملاً ساده است. به‌تعداد کافی (مثلاً k_1) جملهٔ مثبت اختیار می‌کنیم بقسمی‌که

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} > y_1،$$

و متعاقب آن به تعداد کافی (مثلاً r_1) جملهٔ منفی اختیار می‌نمائیم بقسمی‌که

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} < x_1.$$

سپس، به‌قدر کافی جملهٔ مثبت دیگر اختیار می‌کنیم بقسمی‌که

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} > y_2،$$

و بار دیگر به‌قدر کافی جملهٔ منفی اختیار می‌نمائیم که در نامساوی زیرین صدق کنند:

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots - q_{r_2} < x_2.$$

چون $\sum p_n$ و $\sum q_n$ هردو واگرا با جمله‌های مثبت می‌باشند، مرحله‌های بالا امکان‌پذیر خواهند بود. واضح است که اگر این عملها را به‌همین‌نحو ادامه دهیم، یک تجدیدآرایش رشتهٔ $\sum a_n$ بدست خواهدآمد. اثبات این که مجموعهای جزئی این تجدیدآرایش دارای حداعلای y و حد اسفل x می‌باشندبه‌خواننده واگذار می‌شود.

۱۹.۸ زیررشته‌ها

تعریف ۳۴.۸ فرض کنیم f تابعی باشد با قلمرو $\mathbf{Z}^+$ که برد آن یک زیرمجموعهٔ نامتناهی $\mathbf{Z}^+$ باشد، و f بر $\mathbf{Z}^+$ یک به‌یک باشد. همچنین دو رشتهٔ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ چنان باشند که

$$\text{اگر} \quad n \in \mathbf{Z}^+ \text{ ،} \quad b_n = a_{f(n)}.$$

در این صورت، گوئیم $\sum b_n$ یک زیررشتهٔ $\sum a_n$ است.

قضیهٔ ۳۵.۸ اگر $\sum a_n$ همگرای‌مطلق باشد، هر زیررشته‌آن مانند $\sum b_n$ نیزهمگرای مطلق است. بعلاوه،

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

برهان. به‌ازای n مفروض، فرض می‌کنیم N بزرگترین عدد صحیح موجود در مجموعهٔ $\{f(1), \ldots, f(n)\}$ باشد. در این صورت،

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

نامساوی $\sum_{k=1}^{n} |b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ همگرائی مطلق $\sum b_n$ را ایجاب می‌کند.

قضیهٔ ۳۶.۸ فرض کنیم $\{f_1, f_2, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از تابعهائی باشد که هریک بر $\mathbf{Z}^+$ تعریف شده باشد، و دارای خاصیتهای زیرین باشند:

آ) هر f_n بر $\mathbf{Z}^+$ یک به‌یک باشد.

ب) برد $Q_n = f_n(\mathbf{Z}^+)$ یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ باشد.

ج) $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ دسته‌ای از مجموعه‌های از هم‌جدا باشد که اجتماع آن مساوی $\mathbf{Z}^+$ باشد.

فرض کنیم که $\sum a_n$ یک رشتهٔ همگرای مطلق باشد، و تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر} \quad n \in \mathbf{Z}^+ \text{ و } k \in \mathbf{Z}^+ \text{ ،} \quad b_k(n) = a_{f_k(n)}.$$

دراین صورت:

یکم) به‌ازای هر k، $\sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)$ یک زیررشتهٔ همگرای مطلق $\sum a_n$ است.

دوم) اگر $s_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)$، رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ همگرای مطلق است ومجموع آن با مجموع $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یکی است.

برهان. از قضیهٔ ۳۵.۸ می‌توان (یکم) را نتیجه گرفت. برای اثبات (دوم)، فرض کنیم که $t_k = |s_1| + \cdots + |s_k|$. در این صورت،

$$t_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_1(n)| + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} |b_k(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} (|b_1(n)| + \cdots + |b_k(n)|) = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{f_1(n)}| + \cdots + |a_{f_k(n)}|).$$

اما $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_{f_1(n)}| + \cdots + |a_{f_k(n)}|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. این ثابت می‌کند که دنبالهٔ مجموعهای جزئی رشتهٔ $\sum|s_k|$ کراندار است، و در نتیجه $\sum s_k$ همگرای مطلق است.

برای پیداکردن مجموع $\sum s_k$، به‌صورت زیرعمل‌می‌کنیم: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. N را بقسمی اختیار می‌کنیم که اگر $n \geqslant N$،

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{۱۸}$$

حال به‌تعداد کافی از تابعها، مثلاً f_1، . . .، f_r، را چنان اختیار می‌نمائیم که a_1، a_2، . . .، و a_N جائی در مجموع

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f_1(n)} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{f_r(n)}$$

ظاهر شوند. عدد r بستگی به N، و در نتیجه به ε دارد. اگر $n > r$ و $n > N$، این نامساویها را بدست می‌آوریم

$$\left| s_1 + s_2 + \cdots + s_n - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{۱۹}$$

زیرا جمله‌های a_1، a_2، . . .، و a_N در تفریق حذف می‌شوند. حال از (۱۸) نتیجه می‌شود که

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

با تلفیق این نامساوی و رابطهٔ (۱۹) معلوم می‌شود که اگر $n > r$ و $n > N$،

$$\left|s_1 + \cdots + s_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon,$$

و برهان قسمت (دوم) تمام می‌شود.

۲۰.۸ دنباله‌های مضاعف

تعریف ۳۷.۸ هرتابع مانند f را که قلمروآن مجموعهٔ $Z^+ \times Z^+$ باشد یك دنبالهٔ مضاعف می‌نامند.

تبصره. فقط دنباله‌های مضاعف حقیقی یا مختلط مورد علاقهٔ ما هستند.

تعریف ۳۸.۸ اگر $a \in C$ و به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N وجود داشته باشد بقسمی که از $p > N$ و $q > N$ نتیجه شود که $|f(p, q) - a| < \varepsilon$، می‌نویسیم $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q) = a$ و می‌گوئیم که دنبالهٔ مضاعف f همگرا به a است.

قضیهٔ ۳۹.۸ فرض کنیم $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q) = a$، و به‌ازای هر pی ثابت، $\lim_{q\to\infty} f(p, q)$ وجود داشته باشد. در این صورت،

$$\lim_{p\to\infty}(\lim_{q\to\infty} f(p, q))$$

نیز وجود دارد و مقدار آن مساوی a است.

تبصره. برای‌آن که $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q)$ را از $\lim_{p\to\infty}(\lim_{q\to\infty} f(p, q))$ تمیز دهیم، اولی را یك حد مضاعف، و دومی را یک حد مکرر می‌نامیم.

برهان. فرض می‌کنیم که $F(p) = \lim_{q\to\infty} f(p, q)$. به‌ازای مقدار مفروض $\varepsilon > 0$، N_1 را بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$\text{اگر } p > N_1 \text{ و } q > N_1 \text{، } |f(p, q) - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (۲۰)$$

به‌ازای هر p، می‌توان N_2 را بقسمی اختیار کرد که

$$\text{اگر } q > N_2 \text{، } |F(p) - f(p, q)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (۲۱)$$

(توجه داشته‌باشید که N_2 هم به‌p بستگی‌دارد وهم به ε.) به‌ازای هر $p \geqslant N_1$، N_2 را اختیار نموده، سپس یک qی ثابتی را بزرگتر از N_1 و N_2 درنظر می‌گیریم. در این صورت، هردو رابطهٔ (۲۰) و (۲۱) برقرارند، و در نتیجه

$$\text{اگر } p > N_1 \text{، } |F(p) - a| < \varepsilon.$$

بنابراین، $\lim_{p\to\infty} F(p) = a$.

تبصره. اگر نقشهای p و q عوض شوند، نتیجه‌ای مشابه بدست می‌آید.

بنابراین، وجود حد مضاعف $\lim_{p,\, q\to\infty} f(p, q)$ و $\lim_{q\to\infty} f(p, q)$ وجود حد مکرر

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lim_{q\to\infty} f(p,q)\right)$$

را ایجاب می‌کنند. مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب صحیح نیست.

مثال. فرض کنیم

$$f(p, q) = \frac{pq}{p^{۲} + q^{۲}}\ ,\ (p = ۱, ۲, \cdots, q = ۱, ۲, \cdots).$$

در این صورت $\lim_{q\to\infty} f(p, q) = ۰$، و در نتیجه

$$\lim_{p\to\infty} (\lim_{q\to\infty} f(p, q)) = ۰.$$

اما وقتی که $p = q$، $f(p, q) = \frac{۱}{۲}$، و وقتی که $p = ۲q$، $f(p, q) = \frac{۲}{۵}$، و در نتیجه واضح است که در این حالت حد مضاعف نمی‌تواند وجود داشته باشد.

با وارد ساختن مفهوم همگرائی یکشکل می‌توان عکس مناسبی برای قضیهٔ ۳۹.۸ بیان کرد. (این عمل در فصل آینده در قضیهٔ ۱۶.۹ انجام خواهد شد.)

در تمرین ۲۸.۸ مثالهای دیگری ذکر شده است، که رفتار دنباله‌های مضاعف را مصور می‌سازند.

۲۱.۸ رشته‌های مضاعف

تعریف ۴۰.۸ فرض کنیم f دنباله‌ای مضاعف باشد، و s دنبالهٔ مضاعفی باشد که با معادلهٔ

$$s(p, q) = \sum_{m=۱}^{p} \sum_{n=۱}^{q} f(m, n)$$

تعریف شود. در این صورت، جفت (f, s) را یك رشتهٔ مضاعف نامیده، آن را با علامت $\sum_{m,n} f(m, n)$ یا، به‌طور ساده‌تر، با علامت $\sum f(m, n)$ نشان می‌دهیم. گوئیم این رشتهٔ مضاعف به‌مجموع a همگرا است در صورتی که

$$\lim_{p,\, q\to\infty} s(p, q) = a.$$

هر $f(m,n)$ را یک جمله، و هر $s(p,q)$ را یک مجموع جزئی رشتهٔ مضاعف می‌نامیم. اگر جمله‌های $\sum f(m,n)$ همه مثبت باشند، بسادگی می‌توان نشان داد که این رشته وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که مجموعهٔ مجموعهای جزئی آن کراندار باشد. (ر.ک. تمرین ۲۹.۸.) گوئیم $\sum f(m,n)$ همگرای مطلق است در صورتی که $\sum |f(m,n)|$ همگرا باشد. قضیهٔ ۱۸.۸ برای رشته‌های مضاعف معتبر است. (ر. ک. تمرین ۲۹.۸.)

۲۲.۸ قضیهٔ تجدیدآرایش برای رشته‌های مضاعف

تعریف ۴۱.۸ فرض کنیم f دنباله‌ای مضاعف باشد و تابع یك به‌یك g بر $\mathbf{Z}^+$ تعریف شده، و بردآن $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ باشد. همچنین دنبالهٔ G با معادلهٔ زیرین تعریف شده باشد:

$$G(n) = f[g(n)] \quad \text{،} \quad n \in \mathbf{Z}^+ \text{ اگر}.$$

در این صورت، g را یك آرایش دنبالهٔ مضاعف f به‌صورت دنبالهٔ G می‌نامیم.

قضیهٔ ۴۲.۸ فرض کنیم رشتهٔ مضاعف $\sum f(m,n)$ داده شده باشد، و g یك آرایش دنبالهٔ مضاعف f به‌صورت دنبالهٔ G باشد. دراین صورت،

آ) $\sum G(n)$ وقتی، وفقط وقتی، همگرای مطلق است که $\sum f(m,n)$ همگرای مطلق باشد.

بعلاوه، اگر $\sum f(m,n)$ همگرای مطلق، با مجموع S، فرض شود، خواهیم داشت:

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} G(n) = S$.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n)$ و $\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n)$ هردو همگرای مطلق هستند.

د) اگر $A_m = \sum_{n=1}^{\infty} f(m,n)$ و $B_n = \sum_{m=1}^{\infty} f(m,n)$، دو رشتهٔ $\sum A_m$ و $\sum B_n$ همگرای مطلق هستند، و مجموع هر یك از آنها S است، یعنی،

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) = S.$$

برهان. فرض می‌کنیم $T_k = |G(1)| + \cdots + |G(k)|$ و

$$S(p,q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} |f(m,n)|.$$

در این صورت، به‌ازای هر k، جفتی مانند (p,q) هست که $T_k \leqslant S(p,q)$، و بعکس، به‌ازای هرجفت (p,q)، عددی‌صحیح‌مانند r هست بقسمی که $S(p,q) \leqslant T_r$.

از این نامساویها نتیجه می‌شود که مجموعهای جزئی $\sum|G(n)|$ وقتی، و فقط وقتی، کراندارند که مجموعهای جزئی $\sum|f(m, n)|$ کراندار باشند. از این (آ) ثابت می‌شود.

حال فرض می‌کنیم $\sum|f(m, n)|$ همگرا باشد. پیش از اثبات (ب)، نشان می‌دهیم که مجموع رشتهٔ $\sum G(n)$ از تابع g که در ساختن G از f بکار رفته است مستقل است. برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض کنیم h آرایش دیگری ازدنبالهٔ مضاعف f به‌صورت دنبالهٔ H باشد. در این صورت،

$$G(n) = f[g(n)] \quad \text{و} \quad H(n) = f[h(n)].$$

اما این بدان معنی است که $G(n) = H[k(n)]$، که در آن $k(n) = h^{-1}[g(n)]$. چون k نگاشتی یک به‌یک از Z^+ روی Z^+ است، پس رشتهٔ $\sum H(n)$ یک‌تجدید آرایش $\sum G(n)$ است، و در نتیجه هردو دارای یک مجموع می‌باشند. این‌مجموع مشترک را با S' نشان می‌دهیم. بعداً نشان می‌دهیم که $S' = S$.

حال می‌بینیم که هر رشته در (ج) یک زیررشتهٔ $\sum G(n)$ است. از این روی، (ج) از (آ) نتیجه می‌شود. با استفاده ازقضیهٔ ۳۶.۸، معلوم می‌شود که $\sum A_m$ همگرای مطلق است و مجمـوع آن S' است. همین مطلب در مورد $\sum B_n$ صادق است. باقـی می‌ماند اثبات $S' = S$.

برای این‌منظور، قرارمی‌دهیم $T = \lim_{p, q \to \infty} S(p, q)$. به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، N را بقسمی اختیـار می‌کنیم‌کـه هروقت $p > N$ و $q > N$، داشته باشیم $0 \leqslant T - S(p, q) < \varepsilon/2$. اکنون می‌توان نوشت

$$t_k = \sum_{n=1}^{k} G(n), \quad s(p, q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{n} f(m, n).$$

M را بقسمی اختیار می‌کنیم‌که t_M همهٔ جمله‌های $f(m, n)$، با

$$1 \leqslant m \leqslant N + 1 \text{ و } 1 \leqslant n \leqslant N + 1،$$

را شامل باشد. دراین‌صـورت، $t_M - s(N + 1, N + 1)$ مجموع جمله‌هـائی از $f(m, n)$ هاست‌که درآنها $m > N$ یا $n > N$. بنابراین، اگر $n \geqslant M$، داریم

$$|t_n - s(N + 1, N + 1)| \leqslant T - S(N + 1, N + 1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

بهمین نحو،

$$|S - s(N + 1, N + 1)| \leqslant T - S(N + 1, N + 1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

بنابراین، به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، همیشه می‌توان M را بقسمی یافت‌که اگر $n \geqslant M$، $|t_n - S| < \varepsilon$. چون $\lim_{n\to\infty} t_n = S'$، پس $S' = S$.

تبصره. رشته‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ و $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ را «رشته‌های مکرر» می‌نامند. همگرائی هر دو رشتهٔ مکرر بالا با تساوی آنها ملازمه ندارد. مثلاً، فرض‌کنیم

$$f(m,n)= \begin{cases} 1، & n = 1, 2, \ldots، m = n+1 \text{ اگر} \\ -1، & n = 1, 2, \ldots، m = n-1 \text{ اگر} \\ 0، & \text{و در غیراین‌صورت} \end{cases}.$$

دراین‌صورت،

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = -1 \text{ ، ولی } \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = 1.$$

۲۳.۸ شرطی‌کافی برای تساوی رشته‌های مکرر

قضیهٔ ۴۳.۸ فرض‌کنیم f دنبالهٔ مضاعف مختلطی باشد، و نیز، به‌ازای هر m ثابت، $\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ همگرای مطلق باشد، و

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |f(m, n)|$$

نیز همگرا باشد. دراین‌صورت:

آ) رشتهٔ مضاعف $\sum_{m,n} f(m, n)$ همگرای مطلق است؛

ب) $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ به‌ازای هر n همگرای مطلق است؛

ج) هر دو رشتهٔ مکرر $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ و $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ همگرای مطلق هستند، و

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{m,n} f(m, n).$$

برهان. فرض‌کنیم g یک‌آرایش دنبالهٔ مضاعف f به‌صورت دنبالهٔ G باشد. چون همهٔ مجموعهای جزئی $\sum |G(n)|$ به $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |f(m, n)|$ کراندارند، پس $\sum G(n)$ همگرای مطلق است. بنابرقضیهٔ ۴۲.۸(آ)، رشتهٔ مضاعف $\sum_{m,n} f(m, n)$ همگرای مطلق است، وگزاره‌های (ب) و (ج) نیز از قضیهٔ ۴۲.۸ نتیجه می‌شوند.

رشتهٔ مضاعف $\sum_{m,n} f(m, n)$ را درنظر می‌گیریم،که در آن جمله‌هایش را می‌توان به‌صورت حاصل ضرب تابعی از m در تابعی از n درآورد. حال، به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ ۴۳.۸، قضیهٔ زیر را در مورد این رشته ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۴۴.۸ فرض‌کنیم $\sum a_m$ و $\sum b_n$ دو رشتهٔ همگرای مطلق باشند، و مجموعهای آنها، بترتیب، A و B باشند. همچنین، دنبالهٔ مضاعف f با معادلهٔ زیر تعریف شده‌باشد:

$$f(m, n) = a_m b_n, \quad (m, n) \in Z^+ \times Z^+ \text{ اگر}$$

دراین‌صورت، $\sum_{m,n} f(m, n)$ همگرای مطلق، و مجموع آن AB است.

برهان. داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{m=1}^{\infty} \left(|a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_m| \, |b_n|.$$

بنابراین، به‌موجب قضیهٔ ۴۳.۸، رشتهٔ مضاعف $\sum_{m,n} a_m b_n$ همگرای مطلق، ومجموع آن AB است.

۲۴.۸ ضرب رشته‌ها

اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو رشتهٔ مفروض باشند، همواره می‌توان رشتهٔ مضاعف $\sum f(m,n)$ را تشکیل داد، که در آن $f(m, n) = a_m b_n$. به‌ازای هر آرایش تابع f به‌صورت دنبالهٔ G مانند g، رشتهٔ دیگری مانند $\sum G(n)$ حاصل می‌شود. همچنان‌که در مجموعهای متناهی معمول است، طبیعی است که $\sum f(m, n)$ یا $\sum G(n)$ را «حاصلضرب» رشتهٔ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ بنامیم. قضیهٔ ۴۴.۸ این اصطلاح را برای حالتی که دو رشتهٔ داده شدهٔ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرای مطلق باشند توجیه می‌کند. اما، اگر $\sum a_n$ یا $\sum b_n$ همگرای مشروط باشد، تضمینی برای همگرائی $\sum f(m,n)$ یا $\sum G(n)$ وجود ندارد. بعلاوه، اگر یکی‌از این دو رشته همگرا باشد، مجموع آن لزوماً مساوی AB نخواهد بود. همگرائی و مجموع $\sum G(n)$ بستگی به آرایش g دارند. با انتخاب gهای متفاوت ممکن است حاصلضرب مقدارهای متفاوتی بخود بگیرد. حالت بسیار مهمی وجود دارد، که در آن برای بدست آوردن $\sum G(n)$ جمله‌های $f(m,n)$ را به‌صورت «قطری» آراسته، سپس با درج کمانکها، $a_m b_n$هائی راکه به‌ازای آنها $m+n$ مقدار ثابتی است دسته‌بندی می‌کنیم. این حاصلضرب به‌نام حاصلضرب‌کشی معروف است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۴۵.۸ فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو رشتهٔ مفروض باشند، بنابر تعریف،

$$\text{اگر} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \quad (۲۲)$$

رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ حاصل ضرب‌کشی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نامیده می‌شود.

تبصره. اگر دو رشتهٔ توانی را درهم ضرب کنیم، حاصل ضرب کشی به‌صورتی طبیعی ظاهر خواهد شد. (ر. ک. تمرین ۳۳.۸.)

اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرای مطلق باشند، بنابر قضیه‌های ۴۴.۸ و ۱۳.۸، حاصل‌ضرب کشی این دو رشته همگرا است و

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \quad (۲۳)$$

در حالتی‌که $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرای مشروط باشند، معادلهٔ بالا ممکن است برقرار نباشد. (ر. ک. تمرین ۳۲.۸.) اما، می‌توان ثابت کرد که اگر دست‌کم از $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یکی همگرای مطلق باشد، معادلهٔ (۲۳) معتبر است.

قضیهٔ ۴۶.۸ (مرتنس[1]). فرض کنیم رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق، و مجموع آن A باشد، وهمچنین، $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا، و مجموع آن B باشد، دراین صورت، حاصل‌ضرب‌کشی این دو رشته همگرا است و دارای مجموع AB می‌باشد.

برهان. تعریف می‌کنیم

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \; B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \; C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

که در آن c_k از رابطهٔ (۲۲) بدست می‌آید. فرض کنیم $d_n = B - B_n$ و $e_n = \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}$. دراین‌صورت،

$$C_p = \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} f_n(k), \quad (۲۴)$$

که در آن

$$f_n(k) = \begin{cases} a_k b_{n-k}, & \text{اگر } n \geqslant k \\ 0, & \text{اگر } n < k \end{cases}.$$

1. Mertens

دراین‌صورت، رابطهٔ (۲۴) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$C_p=\sum_{k=0}^{p}\sum_{n=0}^{p}f_n(k)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{n=k}^{p}a_kb_{n-k}=\sum_{k=0}^{p}a_k\sum_{m=0}^{p-k}b_m=\sum_{k=0}^{p}a_kB_{p-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{p}a_k(B-d_{p-k})=A_pB-e_p.$$

برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم که وقتی‌که $p\to\infty$، $e_p\to 0$. چون $B=\sum b_n$، دنبالهٔ $\{d_n\}$ همگرا به صفر است. $M>0$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که به‌ازای هر n، $|d_n|\leqslant M$، و قرار می‌دهیم $K=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$. اگر $\varepsilon>0$ مفروض باشد، N را بقسمی اختیارمی‌کنیم‌که به‌ازای هر $n>N$، $|d_n|<\varepsilon/(2K)$، و نیز

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot$$

دراین‌صورت، به‌ازای $p>2N$، می‌توان نوشت

$$|e_p|\leqslant\sum_{k=0}^{N}|a_kd_{p-k}|+\sum_{k=N+1}^{p}|a_kd_{p-k}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2K}\sum_{k=0}^{N}|a_k|+M\sum_{k=N+1}^{p}|a_k|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2K}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|+M\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\cdot$$

این ثابت می‌کند که وقتی‌که $p\to\infty$، $e_p\to 0$، و در نتیجه وقتی‌که $p\to\infty$، $C_p\to AB$.

قضیهٔ دیگری در این مورد، که منسوب به آبل است، در فصل آینده ثابت خواهد شد. (ر. ک. قضیهٔ ۱۲.۲۳.) در این قضیه قید همگرائی مطلق وجود ندارد.

حاصل ضرب دیگری، که در نظریهٔ اعداد اهمیت بخصوصی دارد، حاصل‌ضرب دیریکله است. فرض می‌کنیم $a_0=b_0=0$، وبه‌جای آن که c_n را با معادلهٔ (۲۲) تعریف کنیم، از دستور زیر استفاده می‌نمائیم:

$$c_n=\sum_{d|n}a_db_{n/d},\quad (n=1,2,\ldots),\qquad (۲۵)$$

که در آن $\sum_{d|n}$ یعنی مجموعی‌که روی همهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت n (به‌انضمام ۱ و n) گرفته شده باشد. مثلاً،

$$c_6=a_1b_6+a_2b_3+a_3b_2+a_6b_1\text{، و } c_7=a_1b_7+a_7b_1.$$

مشابه قضیهٔ مرتنس برای این حاصل‌ضرب نیز برقرار است. اگر دو رشتهٔ دیریکله

را درهم ضرب کنیم، حاصل ضرب دیریکله بطور طبیعی ظاهر می‌شود. (ر. ک. تمرین ۸.۳۴).

۸.۲۵ مجموعپذیری چزارو[1]

تعریف ۸.۴۷ فرض کنیم s_n مجموع جزئی nم رشتهٔ $\sum a_n$ باشد، و $\{\sigma_n\}$ دنبالهٔ میانگینهای حسابی باشدکه با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\text{اگر} \quad n = ۱, ۲, \ldots ,\quad \sigma_n = \frac{s_۱ + \cdots + s_n}{n}. \qquad (۲۶)$$

رشتهٔ $\sum a_n$ را مجموعپذیر چزارو (یا مجموعپذیر از نوع $(C, ۱)$) نامیم درصورتی‌که $\{\sigma_n\}$ همگرا باشد. هرگاه $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$، آنگاه S را مجموع چزاروی (یا مجموع از نوع $(C, ۱)$) $\sum a_n$ می‌نامیم، و می‌نویسیم

$$\sum a_n = S \quad (C, ۱).$$

مثال ۱ فرض می‌کنیم $a_n = z^n$، $|z| = ۱$، و $z \neq ۱$. دراین‌صورت،

$$s_n = \frac{۱}{۱-z} - \frac{z^n}{۱-z} \quad \text{و} \quad \sigma_n = \frac{۱}{۱-z} - \frac{۱}{n}\frac{z(۱-z^n)}{(۱-z)^۲}.$$

بنابراین،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} z^{n-۱} = \frac{۱}{۱-z} \ (C, ۱).$$

خصوصاً،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱} = \frac{۱}{۲} \ (C, ۱).$$

مثال ۲ فرض می‌کنیم $a_n = (-۱)^{n+۱}\, n$. دراین حالت،

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{۱}{۲} \ , \quad \liminf_{n\to\infty} \sigma_n = ۰,$$

و در نتیجه $\sum (-۱)^{n+۱} n$ مجموعپذیر از نوع $(C, ۱)$ نیست.

قضیهٔ ۸.۴۸ هرگاه رشته‌ای همگرا با مجموع S باشد، آنگاه این رشته مجموعپذیر از نوع $(C, ۱)$ نیز هست و مجموع چزاروی آن S است.

---
1. Cesàro

برهان. فرض‌کنیم s_n مجموع جزئی nام رشته‌باشد. σ_n را با رابطهٔ (۲۶) تعریف می‌کنیم، وقرار می‌دهیم $t_n = s_n - S$ و $\tau_n = \sigma_n - S$. دراین‌صورت،

$$\tau_n = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}, \tag{۲۷}$$

و باید ثابت‌کنیم وقتی‌که $n \to \infty$، $\tau_n \to 0$. $A > 0$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که همواره $|t_n| \leqslant A$. همچنین، به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که‌اگر $n > N$، $|t_n| < \varepsilon$. با فرض $n > N$ در (۲۷)، خواهیم داشت

$$|\tau_n| \leqslant \frac{|t_1| + \cdots + |t_N|}{n} + \frac{|t_{N+1}| + \cdots + |t_n|}{n}$$
$$< \frac{NA}{n} + \varepsilon.$$

از این روی، $\limsup_{n\to\infty} |\tau_n| \leqslant \varepsilon$. چون ε دلخواه است، پس

$$\lim_{n\to\infty} |\tau_n| = 0.$$

تبصره. در حقیقت، ثابت کرده‌ایم که هرگاه دنبالهٔ $\{s_n\}$ همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{\sigma_n\}$، یعنی دنبالهٔ میانگیهای حسابی s_nها، نیز همگرا است و حد آن همان حد دنبالهٔ $\{s_n\}$ می‌باشد.

روش مجموعپذیری چزارو یکی از «روشهای مجموعپذیری» بسیار است که ممکن است برای نسبت دادن یک «مجموع» به‌یک رشتهٔ نامتناهی بکار روند. قضیهٔ ۴۸.۸ ومثال ۱ (بعد ازتعریف ۴۷.۸) نشان می‌دهندکه روش چزاروحوزهٔ عمل‌وسیعتری از همگرائی معمولی دارد. نظریهٔ روشهای مجموعپذیری مبحث مهم و جالبی است، ولی ما در این‌جا نمی‌توانیم وارد‌آن شویم. برای بررسی یک پژوهش عالی دربارهٔ این موضوع خواننده می‌تواند به‌کتاب رشته‌های واگرا[1] نوشتهٔ هاردی[2] (کتاب‌مرجع ۱.۸) مراجعه کند. بعداً خواهیم دید که مجموعپذیری از نوع $(C, 1)$ نقش مهمی‌در نظریهٔ رشته‌های فوریه دارد. (ر. ک. قضیهٔ ۱۵.۱۱.)

۲۶.۸ حاصل‌ضربهای نامتناهی

در این بخش نظریهٔ حاصل‌ضربهای نامتناهی را باختصار معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴۹.۸ اگر دنبالهٔ حقیقی یا مختلط $\{u_n\}$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم

$$p_1 = u_1\ ,\ p_2 = u_1 u_2\ ,\ p_n = u_1 u_2 \cdots u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k. \tag{۲۸}$$

1. Divergent Series 2. Hardy

جفت مرتب $(\{u_n\}, \{p_n\})$ یك حاصل‌ضرب نامتناهی (یا مختصراً، یك حاصل‌ضرب) نامیده می‌شود. عدد p_n را حاصل‌ضرب جزئی nام، و u_n را سازهٔ nام حاصل‌ضرب می‌نامند. علامتهای زیرین برای نمایش حاصل ضربی که به‌وسیلهٔ (۲۸) تعریف شده است بکار می‌روند:

$$u_1 u_2 \cdots u_n \cdots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{۲۹}$$

تبصره. منظور از علامت $\prod_{n=N+1}^{\infty} u_n$ یعنی $\prod_{n=1}^{\infty} u_{N+n}$. همچنین، وقتی خطر ابهام نباشد، می‌نویسیم $\prod u_n$.

اگر دنبالهٔ $\{p_n\}$ همگرا باشد، طبیعی بنظر می‌رسد که، همانند رشته‌های نامتناهی، حاصل ضرب موجود در (۲۹) همگرا نامیده شود. اما این تعریف نامناسب است زیرا هر حاصل‌ضرب با داشتن یک سازهٔ مساوی صفر، بی‌توجه به‌رفتار سازه‌های دیگر، همگرا می‌شود. تعریف زیر مفیدتر واقع می‌شود:

تعریف ۸.۵۵ فرض کنیم $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ یك حاصل‌ضرب نامتناهی مفروض باشد. قرار می‌دهیم $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

آ) اگر تعدادی نامتناهی از سازه‌های u_n صفر باشند، گوئیم این حاصل ضرب واگرا به‌صفر است.

ب) اگر هیچ‌یك از سازه‌های u_n صفر نباشد، گوئیم این حاصل ضرب همگرا است در صورتی که عددی مانند $p \neq 0$ وجود داشته باشد بقسمی که $\{p_n\}$ به p همگرا باشد. در این حالت، p را مقدار حاصل‌ضرب نامیده، می‌نویسیم $p = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$. در حالتی که $\{p_n\}$ همگرا به صفر باشد، گوئیم این حاصل‌ضرب واگرا به‌صفر است.

ج) اگر عددی مانند N باشد بقسمی که به‌ازای هر $n > N$، $u_n \neq 0$، گوئیم $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا است به‌شرط آن که $\prod_{n=N+1}^{\infty} u_n$، به‌وجهی که در (ب) توصیف شده است، همگرا باشد. دراین‌حالت، مقدار حاصل‌ضرب $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ مساوی

$$u_1 u_2 \cdots u_N \prod_{n=N+1}^{\infty} u_n$$

تعریف می‌شود.

د) اگر $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ به‌صورتی که در (ب) یا (ج) توصیف شده است همگرا نباشد،

در این صورت گوئیم که $\prod_{n=۱}^{\infty} u_n$ واگرا است.

توجه داشته باشید که مقدار یک حاصل‌ضرب نامتناهی همگرا می‌تواند صفر باشد. اما این وقتی، و فقط وقتی، اتفاق می‌افتد که تعدادی متناهی از سازه‌ها مساوی صفر باشند. درج یا حذف تعدادی متناهی از سازه‌ها (صفر یا ناصفر) در یک حاصل ضرب نامتناهی تأثیری برهمگرائی آن ندارد. از این‌رو است که تعریف ۵۰.۸ تعریف بسیار مناسبی است.

مثال. $\prod_{n=۱}^{\infty}(۱ + ۱/n)$ و $\prod_{n=۲}^{\infty}(۱ - ۱/n)$ هردو واگرا هستند. در اولی، $p_n = n + ۱$ و در دومی، $p_n = ۱/n$.

قضیهٔ ۵۱.۸ (شرط‌کشی برای حاصل‌ضربها). حاصل‌ضرب نامتناهی $\prod u_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مانند N باشد بقسمی که $n > N$ ایجاب کند که

$$|u_{n+۱}\, u_{n+۲} \cdots u_{n+k} - ۱| < \varepsilon, \quad k = ۱, ۲, ۳, \ldots \text{ به‌ازای} \tag{۳۰}$$

برهان. فرض کنیم حاصل‌ضرب $\prod u_n$ همگرا باشد. می‌توان (در صورت لزوم با حذف چند جمله) فرض کرد که هیچ u_nی صفر نباشد. قرار می‌دهیم $p_n = u_۱ \cdots u_n$ و $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. در این صورت $p \neq ۰$، و در نتیجه عددی مانند $M > ۰$ هست بقسمی که $|p_n| > M$. حال، چون $\{p_n\}$ در شرط‌کشی برای دنباله‌ها صدق می‌کند، پس به‌ازای $\varepsilon > ۰$ مفروض، عددی مانند N وجود دارد بقسمی که به‌ازای $n > N$ و $k = ۱, ۲, \ldots$، خواهیم داشت $|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon M$. با تقسیم نامساوی اخیر بر $|p_n|$، شرط (۳۰) حاصل می‌شود.

حال فرض کنیم شرط (۳۰) برقرار باشد. در این صورت، به‌ازای $n > N$، $u_n \neq ۰$. [چرا؟] در (۳۰)، ε را مساوی ۱/۲ اختیارمی‌کنیم. اگر $N_۰$ متناظر این ε برای N باشد، به‌ازای هر $n > N_۰$، قرار می‌دهیم $q_n = u_{N_۰+۱} u_{N_۰+۲} \cdots u_n$. ازشرط (۳۰) نتیجه می‌شود که $۳/۲ > |q_n| > ۱/۲$. بنابراین، اگر $\{q_n\}$ همگرا باشد، این دنباله نمی‌تواند به‌صفر همگرا باشد. برای اثبات همگرا بودن $\{q_n\}$، فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد و نامساوی (۳۰) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left|\frac{q_{n+k}}{q_n} - ۱\right| < \varepsilon.$$

از این نتیجه می‌شود که $|q_{n+k} - q_n| < \varepsilon |q_n| < (۳/۲)\varepsilon$. بنابراین، $\{q_n\}$ در شرط‌کشی برای دنباله‌ها صدق می‌کند، و در نتیجه همگرا است. یعنی حاصل ضرب

$\prod u_n$ همگرا است.

تبصره. با فرض ۱ $= k$ در (۳۰)، دیده می‌شود که از همگرائی $\prod u_n$ مـی‌توان ۱ $= \lim_{n\to\infty} u_n$ را نتیجه گرفت. به‌این دلیل است که سازه‌های یک حاصل ضرب را به‌صورت $u_n = ۱ + a_n$ مـی‌نویسند. بنابراین، از همگرائـی $\prod(۱ + a_n)$ نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

قضیهٔ ۵۲۰۸ فـرض کنیم هر $a_n > ۰$. در ایـن صورت، حاصل‌ضرب $\prod(۱ + a_n)$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که رشتهٔ $\sum a_n$ همگرا باشد.

برهان. در قسمتی از برهان از نامساوی

$$۱ + x \leqslant e^x \qquad (۳۱)$$

استفاده می‌کنیم. اگرچه نامساوی (۳۱) به‌ازای هر عدد حقیقی x برقرار است، ولـی دراین‌جا برقراری‌آن فقط به‌ازای xهای نامنفی مورد لزوم است. وقتی که $x > ۰$، (۳۱) نتیجهٔ سادهٔ قضیهٔ مقدار میانگین است، که نتیجه می‌دهد که

$e^x - ۱ = xe^{x_۰}$ ، که درآن $۰ < x_۰ < x$.

چون ۱ $\leqslant e^{x_۰}$، نامساوی (۳۱) بی‌درنگ از معادلهٔ بالا حاصل می‌شود.
حال فرض می‌کنیم

$$s_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n,\ p_n = (۱ + a_۱)(۱ + a_۲)\cdots(۱ + a_n).$$

هردو دنبالهٔ $\{s_n\}$ و $\{p_n\}$ صعودیند، پس برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که دنبالهٔ $\{s_n\}$ وقتی، و فقط وقتی، کراندار است که $\{p_n\}$ کراندار باشد.

واضح است که نامساوی $p_n > s_n$ برقرار است. حال، چون در رابطهٔ (۳۱) x را مساوی a_k اختیارکنیم $(k = ۱, ۲, \ldots, n)$ وآنها را درهم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود که $p_n < e^{s_n}$. از این روی، $\{s_n\}$ وقتی، و فقط وقتی، کـراندار است کـه $\{p_n\}$ کـراندار باشد. توجه داشته باشید که چون هر ۱ $\geqslant p_n$، پس دنبالـهٔ $\{p_n\}$ نمی‌تواند همگرا به‌صفر باشد. همچنین

اگر $s_n \to +\infty$ ، $p_n \to +\infty$.

تعریف ۵۳۰۸ حـاصل‌ضرب $\prod(۱ + a_n)$ را همگـرای مطلق نامند در صورتـی که $\prod(۱ + |a_n|)$ همگرا باشد.

قضیهٔ ۵۴۰۸ همگرائی مطلق $\prod(۱ + a_n)$ همگرائی آن را ایجاب می‌کند.

برهان. از شرط‌کشی و نامساوی زیر استفاده کنید:

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2})\cdots(1 + a_{n+k}) - 1| \leqslant (1 + |a_{n+1}|)(1 + |a_{n+2}|)\cdots(1 + |a_{n+k}|) - 1.$$

تبصره. بنا بر قضیهٔ ۵۲.۸، $\prod(1 + a_n)$ وقتی، و فقط وقتی، همگرای مطلق است که $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد. در تمرین ۴۳.۸ مثالی می‌آوریم که در آن $\prod(1 + a_n)$ همگرا است ولی $\sum a_n$ واگرا است.

قضیهٔ زیر شبیه قضیهٔ ۵۲.۸ است:

قضیهٔ ۵۵.۸ فرض کنیم هر $a_n \geqslant 0$. در این صورت، حاصل ضرب $\prod(1 - a_n)$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که رشتهٔ $\sum a_n$ همگرا باشد.

برهان. از همگرائی $\sum a_n$ همگرائی مطلق $\prod(1 - a_n)$ (و در نتیجه همگرائی آن) نتیجه می‌شود.

برای اثبات عکس آن، فرض کنیم $\sum a_n$ واگرا باشد. هرگاه $\{a_n\}$ همگرا به صفر نباشد، آنگاه $\prod(1 - a_n)$ نیز واگرا است. بنابراین، می‌توان فرض کرد که وقتی‌که $n \to \infty$، $a_n \to 0$. با حذف چند جمله (در صورت لزوم)، می‌توان فرض کرد که هر $a_n \leqslant 1/2$. در این صورت، به‌ازای هر n، $1 - a_n \geqslant 1/2$ (و در-نتیجه $1 - a_n \neq 0$). قرار می‌دهیم

$$p_n = (1 - a_1)(1 - a_2)\cdots(1 - a_n),$$
$$q_n = (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n).$$

چون

$$(1 - a_k)(1 + a_k) = 1 - a_k^2 \leqslant 1,$$

می‌توان نوشت $p_n \leqslant 1/q_n$. اما در برهان قضیهٔ ۵۲.۸ دیدیم که اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $q_n \to +\infty$. بنابراین، وقتی که $n \to \infty$، $p_n \to 0$، و از قسمت (ب) تعریف ۵۰.۸ نتیجه می‌شود که $\prod(1 - a_n)$ واگرا به‌صفر است.

۲۷.۸ حاصل‌ضرب اویلر برای تابع زتای ریمان

این فصل را با قضیه‌ای از اویلر خاتمه می‌دهیم. دراین قضیه تابع زتای ریمان $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ به‌صورت حاصل‌ضربی نامتناهی بیان‌شده است، که این‌حاصل‌ضرب روی همهٔ عددهای اول گرفته شده است.

قضیهٔ ۵۶.۸ فرض کنیم p_k عبارت باشد از k امین عدد اول. در این صورت، اگر

$s>1$، خواهیم داشت

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}}.$$

و حاصل‌ضرب همگرای مطلق است.

برهان. حاصل‌ضرب جزئی $P_m = \prod_{k=1}^{m} (1-p_k^{-s})^{-1}$ را درنظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که وقتی که $m \to \infty$، $P_m \to \zeta(s)$. با نوشتن هر سازه به صورت یک رشتهٔ هندسی، رابطهٔ

$$P_m = \prod_{k=1}^{m} \left(1+\frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \cdots\right)$$

را نتیجه می‌گیریم، که حاصل‌ضرب تعدادی متناهی رشتهٔ همگرای مطلق است. اگر این رشته‌ها را درهم ضرب کرده جمله‌های حاصل‌را برحسب صعودی بودن مخرجهای آنها تجدید آرایش نمائیم، رشتهٔ همگرای مطلق دیگری بدست می‌آید، که جملهٔ نمونهٔ آن بدین صورت است:

$$\frac{1}{p_1^{a_1 s} p_2^{a_2 s} \cdots p_m^{a_m s}} = \frac{1}{n^s}$$ ، که در آن $n = p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}$،

و هر $a_i \geqslant 0$. بنابراین،

$$P_m = \sum_1 \frac{1}{n^s},$$

که در آن $\sum_1$ روی n هائی جمعبندی شده است که همهٔ سازه‌های اول آنها از p_m نابیشتر باشند. بنابر قضیهٔ یکتائی تجزیه (قضیهٔ ۹.۱)، هریک از این nها یک، و فقط یک، بار در $\sum_1$ ظاهر می‌شود. با تفریق P_m از $\zeta(s)$ رابطه‌های

$$\zeta(s) - P_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_1 \frac{1}{n^s} = \sum_2 \frac{1}{n^s}$$

بدست می‌آیند، که در آنها $\sum_2$ روی nهائی جمعبندی شده است که دست‌کم یک سازهٔ اول بزرگتر از p_m دارند. چون این چنین nهائی در میان عددهای صحیح بزرگتر از p_m قرار دارند، پس

$$|\zeta(s) - P_m| \leqslant \sum_{n>p_m} \frac{1}{n^s}.$$

وقتی که $m \to \infty$، چون $\sum n^{-s}$ همگرا است، مجموع مذکوردر نامساوی‌بالا همگرا

به صفر می‌شود، پس $P_m \to \zeta(s)$.

برای اثبات همگرای مطلق بودن حاصلضرب، قضیهٔ ۵۲.۸ را بکار می‌بریم. این حاصلضرب به‌شکل $\prod(1+a_k)$ است، که در آن

$$a_k = \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \cdots$$

چون رشتهٔ $\sum a_k$ تحت تسلط $\sum n^{-s}$ است، پس $\sum a_k$ همگرای مطلق است. بنا براین $\prod(1+a_k)$ نیز همگرای مطلق می‌باشد.

تمرین

دنباله‌ها

۱.۸ آ) $\{a_n\}$ دنبالهٔ مفروضی است حقیقی و از بالا کراندار. قرار دهید $u_n = \sup\{a_k | k \geqslant n\}$. دراین‌صورت $u_n \searrow$، و در نتیجه $U = \lim_{n\to\infty} u_n$ یا متناهی است یا مساوی $-\infty$. ثابت کنید که

$$U = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k \mid k \geqslant n\}).$$

ب) بهمین نحو، اگر $\{a_n\}$ از پائین کراندار باشد، ثابت کنید که

$$V = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf\{a \mid k \geqslant n\}).$$

در حالتی که U و V متناهی باشند، نشان دهید که:

ج) دو زیردنبالهٔ $\{a_n\}$ وجود دارند که یکی به U و دیگری به V همگرا می‌باشند.

د) اگر $U = V$، هر زیردنبالهٔ $\{a_n\}$ به U همگرا است.

۲.۸ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ حقیقی مفروض هستند که از پائین کراندارند. ثابت کنید که

آ) $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

ب) اگر به ازای هر n، $a_n > 0$ و $b_n > 0$، و دو عدد

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \text{ و } \limsup_{n\to\infty} b_n$$

هر دو متناهی یا هر دو نامتناهی باشند،

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) \leqslant (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)\cdot$$

۳.۸ قضیه‌های ۳.۸ و ۴.۸ را ثابت کنید.

۴.۸ اگر هر $a_n > 0$، ثابت کنید که

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot$$

۵.۸ فرض کنید $a_n = n^n/n!$. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = e$، و با استفاده از تمرین ۴.۸، نتیجه بگیرید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e\cdot$$

۶.۸ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد حقیقی و $\sigma_n = (a_1 + \cdots + a_n)/n$. نشان دهید که

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n\cdot$$

۷.۸ اگر a_n یکی از عبارتهای زیرین باشد،

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \text{ و } \limsup_{n\to\infty} a_n$$

را بیابید.

آ) $\cos n$ ، ب) $(1 + 1/n)\cos n\pi$،

ج) $n \sin(n\pi/3)$ ، د) $\sin(n\pi/2)\cos(n\pi/2)$،

هـ) $(-1)^n n/(1+n)^n$ ، و) $n/3 - [n/3]$.

تبصره. در (و)، منظور از $[x]$ یعنی بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x.

۸.۸ فرض کنید که $a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k}$. ثابت کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ به حدی مانند p در بازهٔ $1 < p < 2$ همگرا است.

در هر یک از تمرینهای ۹.۸ تا ۱۴.۸ ، نشان دهید که دنبالهٔ حقیقی $\{a_n\}$ همگرا است. فرض براین استکه شرطهای داده شده به‌ازای هر $n \geqslant 1$ برقرارند. در تمرینهای ۱۰.۸ تا ۱۴.۸، نشان دهید که $\{a_n\}$ دارای همان حد L است که تعیین

شده است.

۹.۸ $|a_n| \leqslant 2$، $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{8}|a_{n+1}^2 - a_n^2|$.

۱۰.۸ $a_1 \geqslant 0$، $a_2 \geqslant 0$، $a_{n+2} = (a_n a_{n+1})^{1/2}$، و $L = (a_1 a_2^2)^{1/3}$.

۱۱.۸ $a_1 = 2$، $a_2 = 8$،

$$\text{و} \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n+1})\ ،$$

$$a_{2n+2} = \frac{a_{2n}a_{2n-1}}{a_{2n+1}}\text{، و } L = 4.$$

۱۲.۸ $a_1 = -\frac{3}{2}$، $3a_{n+1} = 2 + a_n^3$، و $L = 1$. a_1 را بقسمی اصلاح کنید که L مساوی ۲ – شود.

۱۳.۸ $a_1 = 3$، $a_{n+1} = \frac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}$ ، و $L = \sqrt{3}$.

۱۴.۸ $a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ، که در آن $b_1 = b_2 = 1$،

$$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}\text{، و } L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

راهنمائی. نشان دهید که $b_{n+2}b_n - b_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$، و از این نتیجه بگیرید که اگر $n > 4$، $|a_n - a_{n+1}| < n^{-2}$.

رشته‌ها

۱۵.۸ همگرائی رشته های زیر را آزمایش کنید (p و q عددهای حقیقی ثابتی می باشند).

آ) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$، ب) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^p$،

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^p \quad (p > 0)$، د) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q} \quad (0 < q < p)$،

ه) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-1/n}$، و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n} \quad (0 < q < p)$،

ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(1+1/n)}$، ح) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$،

ط) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^{p}}$، ی) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\log \log n}\right)^{\log \log n}$،

ک) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$، ل) $\sum_{n=2}^{\infty} n^{p}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$،

م) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{n}$،

ن) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p}(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$.

۱۶.۸ فرض کنید $S = \{n_1, n_2, \ldots\}$ دستهٔ عددهای صحیح مثبتی باشد که در نمایش اعشاری آنها رقم ۰ وجود ندارد. (مثلاً، $7 \in S$ ولی $101 \notin S$.) نشان دهید که $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ همگرا است و مجموع آن از ۹۰ کوچکتر است.

۱۷.۸ فرض کنید عددهای صحیح a_1، a_2، ... داده شده باشند بقسمی که $1 \leqslant a_n \leqslant n-1$، $n = 2, 3, \ldots$. نشان دهیدکه مجموع رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n!$ وقتی، و فقط وقتی، گویا است که عددی صحیح مانند N وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر $n \geqslant N$، $a_n = n-1$.

راهنمائی. برای کفایت حکم، نشان دهید که $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)/n!$ یک رشتهٔ توی هم رونده است که مجموع آن ۱ است.

۱۸.۸ فرض کنید که $p \geqslant q \geqslant 1$ عددهای صحیح ثابتی باشند، و نیز

$$x_n = \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

آ) با استفاده از دستور (۸)، ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \log(p/q).$$

ب) در حالتی که $q = 1$ و $p = 2$، نشان دهید که $s_{2n} = x_n$ و نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

ج) رشتهٔ مذکور در (ب) را تجدید آرایش دهید بدین‌صورت که، متناوباً p جملهٔ مثبت و سپس q جملهٔ منفی پشت سرهم نوشته شوند، و با استفاده از (آ) نشان دهید که مجموع این تجدید آرایش مساوی

$$\log ۲ + \frac{۱}{۲}\log (p/q)$$

است.

د) مجموع رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\,(۱/(۳n-۲)-۱/(۳n-۱))$ را پیدا کنید.

۱۹.۸ فرض‌کنید $c_n = a_n + ib_n$، که درآن $a_n = (-۱)^n/\sqrt{n}$ و $b_n = ۱/n^۲$. نشان دهیدکه $\sum c_n$ همگرای مشروط است.

۲۰.۸ با استفاده از قضیهٔ ۲۳.۸ دستورهای زیرین را نتیجه بگیرید:

آ) $\displaystyle\sum_{k=۱}^{n}\frac{\log k}{k} = \frac{۱}{۲}\log^۲ n + A + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ (A پایا است).

ب) $\displaystyle\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k\log k} = \log(\log n) + B + O\left(\frac{۱}{n\log n}\right)$ (B پایا است).

۲۱.۸ اگر $۰ < a \leqslant ۱$ و $s > ۱$، تعریف کنید $\zeta(s, a) = \sum_{n=۰}^{\infty}(n+a)^{-s}$.

آ) نشان دهیدکه این رشته به‌ازای $s > ۱$ همگرای مطلق است، و ثابت‌کنید

اگر $k = ۱, ۲, \ldots$، $\displaystyle\sum_{h=۱}^{k}\zeta\left(s, \frac{h}{k}\right) = k^s\,\zeta(s)$،

که درآن $\zeta(s) = \zeta(s, ۱)$ تابع زتای ریمان است.

ب) ثابت کنید اگر $s > ۱$،

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}/n^s = (۱-۲^{۱-s})\,\zeta(s).$$

۲۲.۸ فرض کنید در رشتهٔ همگرای مفروض $\sum a_n$ هر a_n نامنفی باشد. ثابت کنید اگر $p > ۱/۲$، $\sum \sqrt{a_n}\,n^{-p}$ همگرا است. برای $p = ۱/۲$ مثال ناقضی ارائه دهید.

۲۳.۸ فرض کنید رشتهٔ $\sum a_n$ واگرا باشد. ثابت‌کنید که $\sum na_n$ نیز واگرا است.

۲۴.۸ فرض کنید رشتهٔ $\sum a_n$ همگرا باشد، و هر a_n مثبت باشد. ثابت‌کنید که

$$\sum (a_n a_{n+۱})^{۱/۲}$$

نیز همگرا است. نشان دهیدکه عکس این مطلب برای حالتی که $\{a_n\}$ یکنوا باشد نیز درست است.

۲۵.۸ فرض‌کنید رشتهٔ $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد. نشان‌دهیدکه هریک از رشته‌های زیرین نیز همگرای مطلق است:

آ) $\sum a_n^2$، ب) $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ $(a_n \neq -1)$،

ج) $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$.

۲۶.۸ همهٔ مقدارهای حقیقی x را که به‌ازای آنها رشتهٔ زیر همگرا است مشخص کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}.$$

۲۷.۸ گزاره‌های زیرین را ثابت کنید:

آ) اگر $\sum a_n$ همگرا، و $\sum(b_n - b_{n+1})$ همگرای مطلق باشد، $\sum a_n b_n$ همگرا است.

ب) اگرمجموعهای جزئی $\sum a_n$ کراندار باشند، و $\sum(b_n - b_{n+1})$ همگرای مطلق باشد، و وقتی که $n \to \infty$، $b_n \to 0$، $\sum a_n b_n$ همگرا خواهد بود.

دنباله‌های مضاعف و رشته‌های مضاعف

۲۸.۸ در وجود دو حد مکرر و حد مضاعف دنبالهٔ مضاعف f در هریک از موردهای زیر تحقیق کنید:

آ) $f(p,q)=\frac{1}{p+q}$، ب) $f(p,q)=\frac{p}{p+q}$،

ج) $f(p,q)=\frac{(-1)^p p}{p+q}$، د) $f(p,q)=(-1)^{p+q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$،

ه) $f(p,q)=\frac{(-1)^p}{q}$، و) $f(p,q)=(-1)^{p+q}$،

ز) $f(p,q)=\frac{\cos p}{q}$، ح) $f(p,q)=\frac{p}{q^2}\sum_{n=1}^{q}\sin\frac{n}{p}$.

جواب. حد مضاعف در (آ)، (د)، (ه)، (ز)، و هر دو حد مکرر در (آ)، (ب)، و (ح) وجود دارند. در (ج) و (ه) فقط یکی از حدهای مکرر وجود دارد، و در (د) و (و) هیچ یک از حدهای مکرر موجود نیست.

۲۹.۸ گزاره‌های زیرین را ثابت کنید:

آ) یک رشتهٔ مضاعف با جمله‌های مثبت وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که مجموعهٔ مجموعهای جزئی آن کراندار باشد.

ب) اگر یک رشتهٔ مضاعف همگرای مطلق باشد، همگرا نیز هست.

ج) $\sum_{m,n} e^{-(m^2+n^2)}$ همگرا است.

۳۰.۸ فرض‌کنید رشتهٔ مضاعف $\sum_{m,n} a(n)\, x^{mn}$ به‌ازای $|x|<1$ همگرای مطلق باشد. مجموع آن را $S(x)$ بنامید. نشان دهید که هریک از رشته‌های زیرین نیز به‌ازای $|x|<1$ همگرای مطلق است، و مجموع آن $S(x)$ می‌باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\,\frac{x^n}{1-x^n}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} A(n)\, x^n\ \text{، که در آن}\ A(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

۳۱.۸ اگر α حقیقی باشد، نشان دهیدکه رشتهٔ مضاعف $\sum_{m,n}(m+in)^{-\alpha}$ وقتی، و فقط وقتی، همگرای مطلق است که $\alpha > 2$.

راهنمائی. قرار دهید $s(p,q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} |m+in|^{-\alpha}$. مجموعهٔ

$$\{m+in \mid m = 1, 2, \ldots, p, n = 1, 2, \ldots, p\}$$

از p^2 عدد مختلط تشکیل شده است که قدر مطلق یکی $\sqrt{2}$ است، سه‌تای آنها در نامساویهای $|1+2i| \leqslant |m+in| \leqslant 2\sqrt{2}$، پنج‌تای آنها درنامساویهای $|1+3i| \leqslant |m+in| \leqslant 3\sqrt{2}$ صدق می‌نمایند، و مانند اینها. این مطلب را به‌طریقهٔ هندسی تحقیق کنید و نامساوی زیررا نتیجه بگیرید:

$$2^{-\alpha/2} \sum_{n=1}^{p} \frac{2n-1}{n^\alpha} \leqslant s(p,p) \leqslant \sum_{n=1}^{p} \frac{2n-1}{(n^2+1)^{\alpha/2}}.$$

۳۲.۸ آ) نشان دهیدکه حاصل ضرب‌کشی $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}/\sqrt{n+1}$ باخودش یک رشتهٔ واگرا است.

ب) نشان دهید که حاصلضرب کشی $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}/(n+1)$ با خودش مساوی رشتهٔ زیر است:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

آیا این رشته همگرا است؟ چرا؟

۳۳.۸ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ دو رشتهٔ توانی همگرای مطلق مفروض باشند، و مجموعهای آنها، بترتیب، $A(x)$ و $B(x)$ باشند، نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(x)\,B(x)$، که در آن

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

۳۴.۸ رشته‌ای به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ را یک رشتهٔ دیریکله می‌نامند. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n^s$ دو رشتهٔ دیریکلهٔ همگرای مطلق مفروض باشند، و مجموعهای آنها، بترتیب، $A(s)$ و $B(s)$ باشند، نشان‌دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n/n^s = A(s)\,B(s)$$ ، که در آن $$c_n = \sum_{d|n} a_d\, b_{n/d}.$$

۳۵.۸ اگر $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$، $s > 1$، نشان دهید که

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)/n^s,$$

که در آن $d(n)$ تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n (به‌انضمام ۱ و n) می‌باشد.

مجموعپذیری چزارو

۳۶.۸ نشان دهید که مجموع از نوع $(C, 1)$ هریک از رشته‌های زیرین مساوی صفر است:

آ) $1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - - + + \cdots$.

ب) $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + + - \cdots$.

ج) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots$ (x حقیقی است و $x \neq m\pi$).

۳۷.۸ $\sum a_n$ رشته‌ای است مفروض. قرار دهید

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k, \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k.$$

ثابت کنید که

آ) $t_n = (n+1)\,s_n - n\sigma_n$.

ب) هرگاه $\sum a_n$ مجموعپذیر از نوع $(C, 1)$ باشد، آنگاه $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که وقتی‌که $n \to \infty$، $t_n = o(n)$.

ج) $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، مجموعپذیر از نوع $(C, 1)$ است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n/n(n+1)$$

همگرا باشد.

۳۸.۸ فرض کنید در دنبالهٔ یکنوای $\{a_n\}$ جمله‌ها مثبت باشند، بقسمی که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. قرار دهید

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k s_k.$$

ثابت‌کنید که:

آ) $v_n = \frac{1}{2} u_n + (-1)^n s_n/2$.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n$ مجموعپذیر از نوع $(C, 1)$ است ومجموع چزاروی آن مساوی $(1/2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ می‌باشد.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = -\log \sqrt{2} \; (C, 1)$.

حاصلضربهای نامتناهی

۳۹.۸ همگرائی و واگرائی هریک از حاصل ضربهای نامتناهی زیر را مشخص نموده، مقدار هریک از حاصلضربهای همگرا را معین کنید:

آ) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$، ب) $\prod_{n=2}^{\infty}(1 - n^{-2})$،

ج) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$، د) اگر $|z| < 1$، $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n})$.

۴۰.۸ اگر هیچ یک از مجموعهای جزئی رشتهٔ همگرای $\sum a_n$، یعنی s_n، صفر نباشد و خود مجموع رشته نیز غیر از صفر باشد، نشان دهید که حاصلضرب نامتناهی $a_1 \prod_{n=2}^{\infty}(1 + a_n/s_{n-1})$ همگرا است و مقدار آن مساوی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌باشد.

۴۱.۸ مقادیر حاصل‌ضربهای زیر را با اثبات اتحادهای زیر وجمعبندی رشته‌های موجود در آنها بیابید:

آ) $$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n-2}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$$

ب) $$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

۴۲.۸ همهٔ مقدارهای حقیقی x راکه به‌ازای آنها حاصل‌ضرب $\prod_{n=1}^{\infty}\cos(x/2^n)$ همگرا باشد پیدا نموده، مقدار این حاصل‌ضرب را وقتی که همگرا باشد بیابید.

۴۳.۸ آ) به‌ازای $n=1, 2, \ldots$، فرض کنید $a_n=(-1)^n/\sqrt{n}$. نشان دهیدکه $\prod(1+a_n)$ واگرا است ولی $\sum a_n$ همگرا است.

ب) فرض کنید به‌ازای

$n=1, 2, \ldots$، $a_{2n-1}=-1/\sqrt{n}$ و $a_{2n}=1/\sqrt{n}+1/n$.

نشان دهیدکه $\prod(1+a_n)$ همگرا است ولی $\sum a_n$ واگرا است.

۴۴.۸ فرض‌کنید به‌ازای هر $n=1, 2, \ldots$، $a_n\geqslant 0$. همچنین به‌ازای

$$n=1, 2, \ldots,\quad a_{2n+2}<a_{2n+1}<\frac{a_{2n}}{1+a_{2n}}.$$

نشان دهید که $\prod_{k=1}^{\infty}(1+(-1)^k a_k)$ وقتی، وفقط وقتی، همگرا است که $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ همگرا باشد.

۴۵.۸ دنبالهٔ مختلط $\{f(n)\}$ را یک دنبالهٔ ضربپذیر نامیم در صورتی که $f(1)=1$، و اگر m و n نسبت به هم اول باشند، $f(mn)=f(m)f(n)$. (ر.ک. بخش ۱.۷.۱) اگر $f(1)=1$ و به‌ازای هر m و هر n،

$$f(mn)=f(m)f(n),$$

گوئیم که $\{f(n)\}$ یک دنبالهٔ ضربپذیر تام است.

آ) اگر $\{f(n)\}$ ضربپذیر، ورشتهٔ $\sum f(n)$ همگرای مطلق باشد، ثابت‌کنیدکه

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_{k=1}^{\infty}\{1+f(p_k)+f(p_k^2)+\cdots\},$$

که درآن p_k، kامین عدداول است، وحاصل ضرب بالاهمگرای مطلق‌می‌باشد.

ب) بعلاوه، اگر $\{f(n)\}$ ضربپذیر تام باشد، ثابت کنید که‌دستور مذکور در

(آ) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - f(p_k)}.$$

ملاحظه می‌شودکه حاصل‌ضرب اویلر برای $\zeta(s)$ (قضیهٔ ۵۶.۸) حالت خاصی از رابطهٔ بالا است که به‌ازای $f(n) = n^{-s}$ بدست می‌آید.

۴۶.۸ دراین تمرین برهان ساده‌ای ازدستور $\zeta(2) = \pi^2/6$ مختصراً بیان‌می‌شود. با نامساوی $\sin x < x < \tan x$، که به‌ازای $0 < x < \pi/2$ معتبر است، شروع می‌کنیم. باگرفتن متقابل از جمله‌های آن و مربع کردن آنها، خواهیم داشت

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x.$$

حال در نامساویهای بالا $x = k\pi/(2m+1)$ (k و m عددهائی صحیح هستند و $1 \leqslant k \leqslant m$) را قرار داده، سپس بر k جمعبندی می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}.$$

با استفاده از دستور تمرین ۴۹.۱ (ج)، نامساویهای زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{2m(m+1)\pi^2}{3(2m+1)^2}.$$

اکنون اگر $m \to \infty$، تساوی $\zeta(2) = \pi^2/6$ بدست می‌آید.

۴۷.۸ با دلیلی مشابه مذکور در تمرین ۴۶.۸، ثابت کنید که $\zeta(4) = \pi^4/90$.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

8.1 Hardy, G. H., *Divergent Series*. Oxford University Press, Oxford, 1949.

8.2 Hirschmann, I. I., *Infintie Series*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.

8.3 Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, 2nd ed. R. C. Young, translator. Hafner, New York, 1948.

۹

دنباله‌های توابع

۱.۹ همگرائی نقطه‌وار دنباله‌های توابع

در این فصل با دنباله‌هائی مانند $\{f_n\}$ سروکار داریم که جمله هایشان تابعهائی حقیقی یا مختلط هستند که دارای قلمرو مشترک بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ یا در صفحهٔ مختلط $\mathbf{C}$ می‌باشند. به‌ازای هر x در قلمرو مشترک، می‌توان دنباله‌ای دیگر مانند $\{f_n(x)\}$ ساخت که جمله‌هایش مقدارهای متناظر تابعها باشند. فرض کنیم S مجموعهٔ x هائی باشد که به ازای آنها این دنبالهٔ دوم، یعنی $\{f_n(x)\}$، همگرا باشد. تابع f را که با معادلهٔ

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ ،} x \in S.$$

تعریف شود تابع حد دنبالهٔ $\{f_n\}$ نامیده، گوئیم که $\{f_n\}$ برمجموعهٔ S نقطه‌وار به f همگرا است.

توجه اصلی ما در این فصل به این مسأله است: اگر هر یک از تابعهای دنبالهٔ $\{f_n\}$ خاصیت معینی، مثلاً، پیوستگی، مشتقپذیری، یا انتگرالپذیری، داشته باشد، این خاصیت تا چه اندازه به تابع حد این دنباله منتقل می‌شود؟ مثلاً، اگر هریک از f_n ها در c پیوسته باشد، آیا تابع حد f نیز در c پیوسته است؟ خواهیم دید که عموماً چنین نیست. در واقع خواهیم دید که همگرائی نقطه‌وار معمولاً آن‌قدر قوی نیست که هر یک از خاصیتهائی را که بالاتر به آنها اشاره شد از جمله‌های فردی f_n به تابع حد f منتقل سازد. این امر ما را به مطالعهٔ روشهای قویتر همگرائی که

بتوانند این خاصیتها را حفظ کنند سوق می‌دهد. مهمترین اینها مفهوم همگرائی یکشکل است.

پیش از معرفی همگرائی یکشکل، یکی از سؤالهای اساسی خود را به‌صورتی دیگر تنظیم می‌کنیم: وقتی که می‌پرسیم آیا پیوستگی هر f_n در c پیوستگی تابع حد f در c را نتیجه می‌دهد یا خیر، در حقیقت می‌خواهیم بدانیم که آیا صحت معادلهٔ

$$\lim_{x \to c} f_n(x) = f_n(c),$$

به ازای هر مقدار n، صحت معادلهٔ

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \tag{۱}$$

را ایجاب می‌کند؟ اما معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\lim_{x \to c} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c} f_n(x). \tag{۲}$$

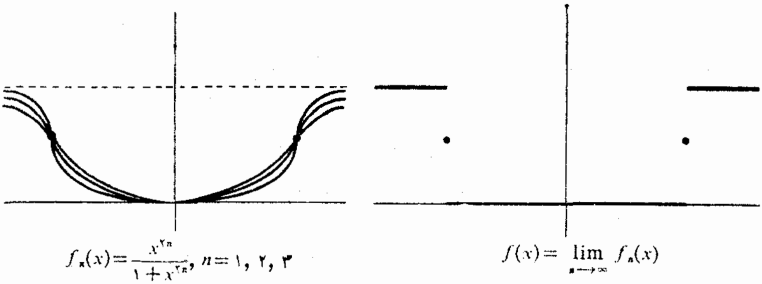
بنابراین، سؤال ما دربارهٔ پیوستگی بدین صورت درمی‌آید: آیا در (۲) می‌توان جای علامتهای حدگیری را با یکدیگر عوض کرد؟ خواهیم دید که این عمل، در حالت کلی، امکان پذیر نیست. اولاً ممکن‌است که حد مذکور در (۱) وجود نداشته باشد. ثانیاً، حتی اگر این حد وجود داشته باشد، لزومی ندارد که با $f(c)$ مساوی باشد. در فصل ۸ در مورد رشته‌های مکرر با وضع مشابهی روبرو شدیم. در آنجا دیدیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ لزوماً مساوی $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ نیست.

در آنالیز ریاضی مکرر با این سؤالِ کلی مواجه می‌شویم که آیا می‌توان جای دو حد را باهم عوض کرد؟ خواهیم دید که همگرائی یکشکل دامنه‌دارترین شرط کافی برای اعتبار تعویض برخی از حدها است، ولی جواب کامل به سؤال ما را نمی‌دهد. به مثالهائی برخواهیم خورد که هر چند در آنها دنباله همگرای یکشکل نیست باز می‌توان جای دو حد را معاوضه کرد.

۲.۹ مثالهائی از دنباله‌های توابع حقیقی

مثالهای زیرین بعضی از آنچه را که ممکن است به هنگام تشکیل تابع حد دنباله‌ای از تابعهای حقیقی روی دهد مصور می‌سازند.

مثال ۱ دنباله‌ای از تابعهای پیوسته با تابع حد ناپیوسته. فرض می‌کنیم اگر $x \in \mathbf{R}$ و $n = ۱, ۲, \ldots$، $f_n(x) = x^{۲n}/(۱ + x^{۲n})$. نمودارهای تعدادی از



شکل ۱.۹

جمله‌ها در شکل ۱.۹ نشان داده شده است. در این حالت، به ازای هر عدد حقیقی x، $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ وجود دارد، و تابع حد f با رابطه‌های زیر مشخص می‌شود:

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ، } |x| < 1 & \text{اگر} \\ \frac{1}{2} \text{ ، } |x| = 1 & \text{اگر} \\ 1 \text{ ، } |x| > 1 & \text{اگر} \end{cases}$$

هر f_n بر $\mathbf{R}$ پیوسته است، ولی f در $x = 1$ و $x = -1$ ناپیوسته می‌باشد.

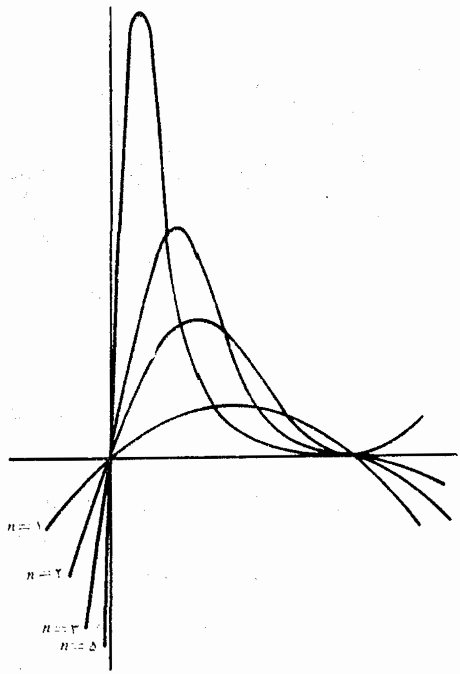
مثال ۲ دنباله‌ای از تابعها که در آن

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

فرض می‌کنیم اگر $x \in \mathbf{R}$ و $n = 1, 2, \ldots$ ، $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$. اگر $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ وجود دارد و مساوی 0 است. (ر.ک. شکل ۲.۹). از این روی $\int_0^1 f(x)dx = 0$. ولی

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n\,dx$$
$$= n^2 \int_0^1 (1-t)t^n\,dt = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)},$$

پس $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$. با بیان دیگر می‌توان گفت که، حد انتگرالها مساوی انتگرال تابع حد نیست. بنابراین، عملهای «حدگیری» و «انتگرالگیری»



شکل ۲.۹

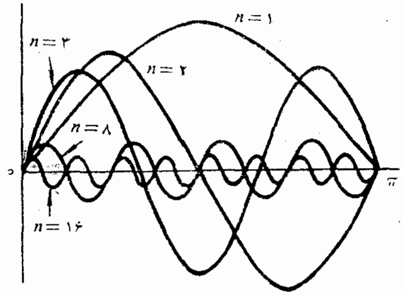
همواره قابل تعویض نمی‌باشند.

مثال ۳ دنباله‌ای از تابعهای مشتقپذیر $\{f_n\}$ با حد صفر که در آن $\{f'_n\}$ واگـرا است. فرض می‌کنیم اگر $x \in \mathbf{R}$ و $n = ۱, ۲, \ldots$، $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$. دراین صورت، به‌ازای هر x، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۰$. اما $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos nx$، پس $\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ به ازای هیچ مقدار x وجود ندارد. (ر. ك. شکل ۳.۹.)

۳.۹ تعریف همگرائی یکشکل

فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد که بر مجموعهٔ S نقطه‌وار به تابع حد f همگرا باشد. یعنی به ازای هر نقطهٔ x در S و هر $۰ < \varepsilon$، عـددی مانند N (که هم به x و هم به ε بستگی دارد) وجود داشته باشد بقسمی که

هرگاه $n > N$، آنگاه $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.



شکل ۳.۹

در حالتی که یک مقدار N برای همهٔ نقطه‌های در S صدق کند، همگرائی را بر S یکشکل نامند. یعنی،

تعریف ۱.۹ گویند دنباله‌ای از تابعها مانند $\{f_n\}$ بر S به f همگرای یکشکل است وقتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N (فقط تابع ε) وجود داشته باشد بقسمی که $n > N$ ایجاب کند که به ازای هر x در S،

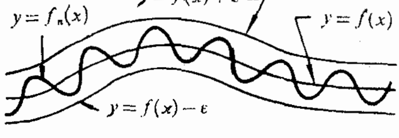
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

ما آن را به صورت علامتی $f_n \to f$ به طور یکشکل بر S نشان می‌دهیم.

در حالتی که هر جملهٔ دنبالهٔ $\{f_n\}$ تابعی حقیقی باشد، تعبیر هندسی مفیدی از همگرائی یکشکل وجود دارد. در این صورت، نامساوی $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ هم‌ارز است با دو نامساوی

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon. \qquad (۳)$$

برقرار بودن (۳) به ازای هر $n > N$ و هر x در S بدین معنی است که، تمام نمودار f_n (یعنی، مجموعهٔ $\{(x, y) \mid y = f_n(x), x \in S\}$) در «نواری» به ارتفاع 2ε، که به طور متقارن در اطراف نمودار f در نظر گرفته می‌شود، واقع می‌گردد. (ر. ک. شکل ۴.۹.)



شکل ۴.۹

دنبالهٔ $\{f_n\}$ را بر S کراندار یکشکل نامیم در صورتی که عدد پایائی مانند $M > \circ$ بتوان یافت بقسمی که به ازای هر x در S و هر مقدار n،

$$| f_n(x) | \leqslant M.$$

عدد M را یک کران یکشکل برای $\{f_n\}$ می‌نامیم. هرگاه هر تابع f_n کراندار باشد و $f_n \to f$ به طور یکشکل بر S، آنگاه بآسانی می‌توان ثابت کرد که $\{f_n\}$ بر S کرانـدار یکشکل است. (ر. ک. تمرین ۹.۱۰) این مطلب اغلب ما را قادر می‌سازد که نتیجه بگیریم که یک دنباله همگرای یکشکل نیست. مثلاً، با نگاهی به شکل ۹.۲ می‌توان بفوریت دریافت که دنبالهٔ مذکور در مثال ۲ نمی‌تواند برهیچ زیرمجموعه‌ای که حاوی یکی از همسایگیهای مبدأ است همگـرای یکشکل باشد. اما، در همین مثال، همگرائی دنبالـه بر هر زیربازهٔ فشرده‌ای که حـاوی مبدأ نباشد یکشکل است.

۹.۴ همگرائی یکشکل و پیوستگی

قضیهٔ ۹.۲ فرض کنیم $f_n \to f$ به طور یکشکل بر S. هـرگاه هر f_n در نقطهٔ c از S پیوسته باشد، آنگاه تابع حد f نیز در c پیوسته است.

تبصره. اگر c یک نقطهٔ انباشتگی S باشد، از این حکم نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to c} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c} f_n(x).$$

برهان. هرگاه c یک نقطهٔ تنهای S باشد، آنگاه f خود بخود در c پیوسته است. پس، فرض کنیم کـه c یک نقطهٔ انباشتگی S باشد. بنا به فرض قضیه، به ازای هر $\varepsilon > \circ$، یک مقدار M وجود دارد بقسمی که اگر $n \geqslant M$،

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ در } S،\quad | f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{۳}.$$

چون f_M در c پیوسته است، پس یک همسایگی مانند $B(c)$ وجـود دارد بقسمی که اگر $x \in B(c) \cap S$،

$$| f_M(x) - f_M(c) | < \frac{\varepsilon}{۳}.$$

امـا

$$| f(x) - f(c) | \leqslant | f(x) - f_M(x) | + | f_M(x) - f_M(c) | + | f_M(c) - f(c) |.$$

اگر $x \in B(c) \cap S$، هر جملهٔ طرف راست نامساوی بالا از $\varepsilon/۳$ کمتر است، و در نتیجه $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. از این قضیه باثبات می‌رسد.

تبصره. همگرائی یکشکل $\{f_n\}$ شرطی است کافی، اما نه لازم، برای انتقال پیوستگی از جمله‌های دنباله به تابع حد. در مثال ۲ (بخش ۲.۹)، دنباله‌ای از تابعهای پیوسته با تابع حد پیوسته ارائه شده است که همگرای یکشکل نیست.

۵.۹ شرط کشی برای همگرائی یکشکل

قضیهٔ ۳.۹ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابعها که بر مجموعهٔ S تعریف شده باشند. تابعی مانند f که $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر S وقتی، وفقط وقتی، وجود دارد که شرط زیر (به نام شرط‌کشی) صادق باشد: به ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مانند N باشد بقسمی که هرگاه $m > N$ و $n > N$، آنگاه

به ازای هر x در S، $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

برهان. فرض کنیم $f_n \to f$ به طور یکشکل بر S . در این صورت، به ازای $\varepsilon > ۰$ مفروض، عددی مانند N می‌توان یافت بقسمی که هرگاه $n > N$، آنگاه به ازای هر x در S، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/۲$. با فرض $m > N$، این رابطه را هم داریم $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/۲$، و درنتیجه به ازای هر x در S،

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

برعکس، فرض کنیم شرط‌کشی برقرار باشد. در این صورت، به ازای هر x در S، دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ همگرا است. اگر $x \in S$، قرار می‌دهیم

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

باید نشان دهیم که $f_n \to f$ به طور یکشکل بر S. اگر $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، N را می‌توان بقسمی اختیار کرد که به ازای $n > N$ و هر $k = ۱, ۲, \ldots$ و هر x در S، داشته باشیم $|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon/۲$. بنابراین،

$$\lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲}.$$

از این روی، $n > N$ ایجاب می‌کند که به ازای هر x در S،

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

این ثابت می‌کند که $f_n \to f$ به طور یکشکل بر S.

تبصره. همگرائی نقطهوار و همگرائی یکشکل را می‌توان در محدوده‌های کلیتر فضاهای متری تنظیم کرد. اگر f_n و f تابعهائی از مجموعهٔ ناتهی S به فضای متری (T, d_T) باشند، گوئیم $f_n \to f$ به طور یکشکل بر S، در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N (فقط تابع ε) باشد بقسمی که هرگاه $n \geqslant N$ آنگاه

به ازای هر x در S، $d_T(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

قضیهٔ ۳.۹ برای این حالت کلیتر معتبراست، و همچنین، اگر S یک فضای متری باشد، قضیهٔ ۲.۹ نیز معتبر خواهد بود. برهان قضیه‌ها مانند حالتهای خاص آنهاست، فقط کافی است در آن برهانها متر اقلیدسی را با هریک از مترهای d_S و d_T، که مناسب باشد، عوض کرد. چون توجه ما اصولاً به تابعهای حقیقی یا مختلطی است که بر زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}$ یا $\mathbf{C}$ تعریف شده باشند، جز مثال زیرین، دربارهٔ این توسیع صحبتی نخواهیم کرد.

مثال. $(B(S), d)$، یعنی فضای متری همهٔ تابعهای حقیقی و کرانداری که بر مجموعهٔ ناتهی S تعریف شده‌اند، را در نظر می‌گیریم. متر d در آن به صورت $d(f, g) = \| f - g \|$ است، که در آن $\| f \| = \sup_{x\in S} | f(x) |$ هنج سوپرمم می‌باشد. (ر. ک. تمرین ۶۶.۴.) در این صورت، در فضای متری $(B(S), d)$، $f_n \to f$ وقتی، و فقط وقتی، که $f_n \to f$ به طور یکشکل بر S. با بیان دیگر می‌توان گفت‌که، همگرائی یکشکل بر S همان همگرائی معمولی درفضای متری $(B(S), d)$ است.

۶.۹ همگرائی یکشکل رشته‌های نامتناهی از تابعها

تعریف ۴.۹ $\{f_n\}$ دنباله‌ای ازتابعها انگاشته می‌شودکه برمجموعهٔ S تعریف شده‌اند. به‌ازای هر x در S، قرار می‌دهیم

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (۴)$$

اگر تابعی مانند f وجود داشته باشد بقسمی که $s_n \to f$ به طور یکشکل بر S، گوئیم که رشتهٔ $\sum f_n(x)$ بر S همگرای یکشکل است و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \text{ (به طور یکشکل بر } S\text{)}.$$

قضیهٔ ۵.۹ (شرط کشی برای همگرائی یکشکل رشته‌ها). رشتهٔ نامتناهی $\sum f_n(x)$ بر S وقتی، و فقط وقتی، همگرای یکشکل است که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N

وجود داشته باشد بقسمی که اگر $n > N$،

$$\text{به ازای هر } p = ۱, ۲, \ldots \text{ و هر } x \text{ در } S،\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

برهان. s_n را با رابطهٔ (۴) تعریف نموده، سپس قضیهٔ ۳.۹ را بکار برید.

قضیهٔ ۶.۹ (آزمون M وایراشتراس). فرض کنیم دنبالهٔ $\{M_n\}$ از عددهای نامنفی بقسمی داده شده باشد که

$$\text{به‌ازای } n = ۱, ۲, \ldots \text{ و هر } x \text{ در } S،\ ۰ \leqslant |f_n(x)| \leqslant M_n.$$

در این صورت اگر $\sum M_n$ همگرا باشد، رشتهٔ $\sum f_n(x)$ بر S همگرای یکشکل است.

برهان. قضیه‌های ۱۱.۸ و ۵.۹ را توأم با نامساوی زیر بکار ببرید:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k.$$

قضیهٔ ۷.۹ فرض کنیم $\sum f_n(x) = f(x)$ (به‌طور یکشکل بر S). هرگاه هر f_n در یك نقطهٔ S مانند $x_۰$ پیوسته باشد، آنگاه f نیز در $x_۰$ پیوسته است.

برهان. s_n را با رابطهٔ (۴) تعریف می‌کنیم. از پیوستگی هر f_n در $x_۰$ نتیجه می‌شود که s_n در $x_۰$ پیوسته است. حال قضیه بی‌درنگ از قضیهٔ ۲.۹ نتیجه می‌شود.

تبصره. اگر $x_۰$ نقطهٔ انباشتگی S باشد، به‌موجب این قضیه می‌توان حدها و مجموعهای نامتناهی را با هم به‌صورت زیر عوض کرد:

$$\lim_{x \to x_۰} \sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \lim_{x \to x_۰} f_n(x).$$

۷.۹ يك خم فضا پرکن

با بکار بردن قضیهٔ ۷.۹ می‌توان خمی ساخت که فضا را پر کند. یک خم فضا پرکن خمی است در $\mathbf{R}^۲$ که از هر نقطهٔ مربع یکهٔ $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ می‌گذرد. پئانو[1] (۱۸۹۰) اولین کسی بود که مثالی برای این نوع خمها عرضه کرد. مثالی که در اینجا می‌آوریم از شنبرگ[2] است و بدین‌صورت توصیف می‌شود:

1. Peano
2. I. J. Schoenberg (Bulletin of the American Methematical Society, 1938)

فرض کنیم φ بر بازهٔ $[۰, ۲]$ با دستورهای زیرین تعریف شده باشد:

$$\cdot\varphi(t) = \begin{cases} ۰ & \text{،}\ \text{اگر}\ ۰ \leqslant t \leqslant \frac{۱}{۳}\ \text{یا}\ \frac{۵}{۳} \leqslant t \leqslant ۲ \\ ۳t - ۱ & \text{،}\ \text{اگر}\ \frac{۱}{۳} \leqslant t \leqslant \frac{۲}{۳} \\ ۱ & \text{،}\ \text{اگر}\ \frac{۲}{۳} \leqslant t \leqslant \frac{۴}{۳} \\ -۳t + ۵ & \text{،}\ \text{اگر}\ \frac{۴}{۳} \leqslant t \leqslant \frac{۵}{۳} \end{cases}$$

تعریف φ را به‌تمام $\mathbf{R}$ با معادلهٔ زیر وسعت می‌دهیم:

$$\varphi(t + ۲) = \varphi(t)\cdot$$

در نتیجه φ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ می‌شود. (نمودار φ در شکل ۵.۹ نشان داده شده است.)

شکل ۵.۹

حال دو تابع $f_۱$ و $f_۲$ را با معادله‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_۱(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\varphi(۳^{۲n-۲}t)}{۲^n}, \quad f_۲(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\varphi(۳^{۲n-۱}t)}{۲^n}.$$

هردورشتهٔ بالا به‌ازای هر t حقیقی همگرای مطلق هستند و بر $\mathbf{R}$ همگرای یکشکل می‌باشند. درواقع، چون به‌ازای هر t، $|\varphi(t)| \leqslant ۱$، می‌توان آزمون M وایراشتراس را به‌ازای $M_n = ۲^{-n}$ بکار برد. چون φ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است، بنابرقضیهٔ ۷.۹، $f_۱$ و $f_۲$ نیز بر $\mathbf{R}$ پیوسته خواهند بود. فرض کنیم $f = (f_۱, f_۲)$ و Γ نقش بازهٔ یکهٔ $[۰, ۱]$ با f باشد. نشان می‌دهیم که Γ مربع یکه را «پر» می‌کند؛ یعنی، $\cdot\Gamma = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$

اولاً، واضح است که به‌ازای هر t، $۰ \leqslant f_۱(t) \leqslant ۱$ و $۰ \leqslant f_۲(t) \leqslant ۱$، زیرا $\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n} = ۱$. پس Γ یک زیرمجموعهٔ مربع یکه است. حال، باید نشان داد که هرگاه $(a, b) \in [۰, ۱] \times [۰, ۱]$، آنگاه $(a, b) \in \Gamma$. برای این منظور a و b را در دستگاه عددها در پایهٔ دو بیان می‌کنیم. یعنی، می‌نویسیم

$$a = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{۲^n}, \quad b = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{b_n}{۲^n},$$

که در آنها هر a_n و هر b_n مساوی ۰ یا ۱ است. (ر. ک. تمرین ۲۲۰۱.) حال قرار می‌دهیم

$$c = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{c_n}{۳^n}،\ \text{که درآن}\ c_{۲n-۱} = a_n \ \text{و}\ c_{۲n} = b_n ،\ n = ۱, ۲, \ldots.$$

چون $۲\sum_{n=۱}^{\infty} ۳^{-n} = ۱$، پس واضح است که $۰ \leqslant c \leqslant ۱$. نشان می‌دهیم که $f_۱(c) = a$ و $f_۲(c) = b$.

هرگاه بتوان ثابت کرد که

$$\text{به‌ازای هر}\ k = ۰, ۱, ۲, \ldots ،\ \varphi(۳^k c) = c_{k+۱}، \qquad (۵)$$

آنگاه خواهیم‌داشت $\varphi(۳^{۲n-۲}c) = c_{۲n-۱} = a_n$ و $\varphi(۳^{۲n-۱}c) = c_{۲n} = b_n$، و از اینها دو رابطهٔ $f_۱(c) = a$ و $f_۲(c) = b$ نتیجه خواهند شد. برای اثبات (۵)، می‌نویسیم

$$۳^k c = ۲\sum_{n=۱}^{k} \frac{c_n}{۳^{n-k}} + ۲\sum_{n=k+۱}^{\infty} \frac{c_n}{۳^{n-k}} = (\text{عددی صحیح و زوج}) + d_k،$$

که درآن $d_k = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} c_{n+k}/۳^n$. چون φ دارای دورهٔ تناوب ۲ است، پس

$$\varphi(۳^k c) = \varphi(d_k).$$

هرگاه $c_{k+۱} = ۰$، آنگاه $۰ \leqslant d_k \leqslant ۲\sum_{n=۲}^{\infty} ۳^{-n} = ۱/۳$، و در نتیجه $\varphi(d_k) = ۰$. بنابراین، در این حالت $\varphi(۳^k c) = c_{k+۱}$. تنها حالتی می‌ماند که $c_{k+۱} = ۱$. در این حالت $۲/۳ \leqslant d_k \leqslant ۱$، و در نتیجه $\varphi(d_k) = ۱$. پس در همه‌حال $\varphi(۳^k c) = c_{k+۱}$ و این ثابت می‌کند که $f_۱(c) = a$ و $f_۲(c) = b$. از این روی، Γ مربع یکه را پر می‌کند.

۸۰۹ همگرائی یکشکل و انتگرالگیری ریمان ـ اشتیل‌یس

قضیهٔ ۸۰۹ فرض کنیم α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، و نیز هر جملهٔ دنبالهٔ $\{f_n\}$ تابعی‌حقیقی باشد بقسمی که به‌ازای هر $n = ۱, ۲, \ldots$، $f_n \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد. بعلاوه $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$. اگر $x \in [a, b]$ و $n = ۱, ۲, \ldots$، تعریف می‌کنیم $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t)$. در این صورت:

آ) $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است.

ب) هرگاه $g(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t)$، آنگاه $g_n \to g$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$.

تبصره. بنابراین، به‌ازای هر x در $[a, b]$، می‌توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t) = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, d\alpha(t).$$

این خاصیت را معمولاً این‌طور توصیف می‌کنند که از یک دنبالهٔ همگرای یکشکل می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت.

برهان. می‌توان فرض‌کرد که α صعودی باشد و $\alpha(a)<\alpha(b)$. برای اثبات (آ)، نشان می‌دهیم کـه f در شرط ریمان بـرحسب α بر $[a, b]$ صدق می‌کند. (ر. ک. قضیهٔ ۱۹.۷.)

به ازای $\varepsilon > ۰$ داده شده، N را بقسمی اختیار می‌کنیم کـه

به ازای هر x در $[a, b]$، $|f(x) - f_N(x)| < \dfrac{\varepsilon}{۳[\alpha(b) - \alpha(a)]}$.

در این صورت، به ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P، داریم

$$|U(P, f - f_N, \alpha)| \leqslant \frac{\varepsilon}{۳} \quad و \quad |L(P, f - f_N, \alpha)| \leqslant \frac{\varepsilon}{۳}$$

(در این‌جا نمادهای تعریف ۱۴.۷ بکار گرفته شده‌اند). برای این N، P_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که اگر P از P_ε ظریفتر باشد،

$$U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha) < \varepsilon/۳.$$

در این صورت ، به ازای این چنین P هائی، داریم

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &\leqslant U(P, f - f_N, \alpha) - L(P, f - f_N, \alpha) \\ &\quad + U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha) \\ &< |U(P, f - f_N, \alpha)| + |L(P, f - f_N, \alpha)| + \frac{\varepsilon}{۳} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

این ثابت می‌کند که (آ) برقرار است. برای اثبات (ب)، فـرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده بـاشد و N را بقسمی اختیـار می‌کنیـم که به‌ازای هـر $n > N$ و هـر t در $[a, b]$،

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{۲[\alpha(b) - \alpha(a)]}.$$

اگر $x \in [a, b]$، خواهیم داشت

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)| d\alpha(t)$$

$$\leqslant \frac{\alpha(x) - \alpha(a)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \frac{\varepsilon}{۲} \leqslant \frac{\varepsilon}{۲} < \varepsilon.$$

این ثابت می‌کند که $g_n \to g$ به طور یکشکل بر $[a, b]$.

قضیهٔ ۹.۹ فرض کنیم α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. همچنین،

$$\sum f_n(x) = f(x)$$

به‌طور یکشکل بر $[a, b]$، که در آن هر f_n تابعی حقیقی، و $f_n \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد. در این صورت:

آ) $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است.

ب) $\int_a^x \sum_{n=۱}^{\infty} f_n(t)\, d\alpha(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t)$ (به طور یکشکل بر $[a, b]$).

برهان. قضیهٔ ۸.۹ را در مورد دنبالهٔ مجموعهای جزئی بکار برید.

تبصره. این قضیه را این طور توصیف می‌کنند که در یک رشتهٔ همگرای یکشکل می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

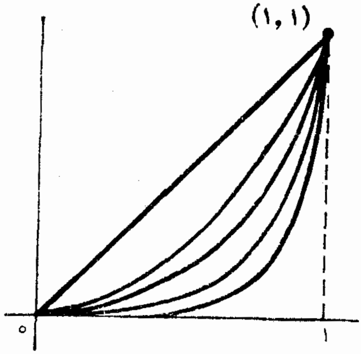
۹.۹ دنباله‌هائی که همگرائی آنها یکشکل نیست ولی می‌توان از آنها جمله به جمله انتگرال گرفت

همگرائی یکشکل شرطی کافی برای انتگرالگیری جمله به جمله است، ولی، همان‌طور که در مثال زیر دیده می‌شود، این شرط لازم نیست.

مثال. فرض می‌کنیم اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$، $f_n(x) = x^n$. (ر. ک. شکل ۶.۹.) مقدار تابع حد f در هر نقطهٔ $[۰, ۱[$ صفر است و $f(۱) = ۱$. چون $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای پیوسته با حد ناپیوسته است، پس همگرائی آن بر $[۰, ۱]$ یکشکل نخواهد بود. با وجود این، در این دنباله می‌توان بر $[۰, ۱]$ جمله به جمله انتگرال گرفت. در حقیقت،

وقتی‌که $n \to \infty$، $\int_۰^۱ f_n(x)dx = \int_۰^۱ x^n dx = \frac{۱}{n+۱} \to ۰$،

پس $\lim_{n\to\infty} \int_۰^۱ f_n(x)dx = \int_۰^۱ f(x)dx = ۰$.



شکل ۶.۹

دنباله‌ای‌که دراین مثال دیده‌شد، اگرچه‌بر[۱ و۰] همگرای یکشکل نیست، ولی همین دنباله بر هر زیربازهٔ بستهٔ [۱ و۰] که حاوی یک نباشد همگرای یکشکل است. قضیهٔ زیر مجوزی کلی برای انتگرالگیری جمله به جمله در این گونه مثالهاست. فرض اضافی این است که $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ کراندار یکشکل، و تابع حد f انتگرالپذیر باشد.

تعریف ۱۰.۹ دنبالهٔ $\{f_n\}$ از تابعها را بر T همگرای کراندار گوئیم در صورتی که $\{f_n\}$ بر T همگرای نقطه‌وار و کراندار یکشکل باشد.

قضیهٔ ۱۱.۹ فرض کنیم دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ همگرای کراندار باشد، و نیز هر $f_n \in R$ بر $[a, b]$ باشد، و تابع حد $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. همچنین یک افراز $[a, b]$ مانند P، مثلاً

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\},$$

وجود داشته باشد بقسمی که دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر هر زیربازهٔ $[a, b]$ چون $[c, d]$، که حاوی هیچ یک از x_k ها نباشد، به f همگرای یکشکل باشد. در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{۶}$$

برهان. چون f کراندار، و $\{f_n\}$ کراندار یکشکل است، پس عددی مثبت مانند M هست بقسمی که به ازای هر x در $[a, b]$ و هر $n \geqslant 1$، $|f(x)| \leqslant M$ و $|f_n(x)| \leqslant M$. اگر $\varepsilon > 0$ مفروض بقسمی باشد که $\|p\| < 2\varepsilon$، قرار

می‌دهیم $h = \varepsilon/(2m)$، که در آن m تعداد زیربازه‌های P است. افــراز جدید P' را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$P' = \{x_0, x_0 + h, x_1 - h, x_1 + h, \ldots, x_{m-1} - h, x_{m-1} + h, x_m - h, x_m\}.$$

چون $|f - f_n|$ بر $[a, b]$ انتگرالپذیر، و به $2M$ کراندار است، پس مجموع انتگرالهای $|f - f_n|$ روی بازه‌های

$$[x_0, x_0 + h], [x_1 - h, x_1 + h], \ldots, [x_{m-1} - h, x_{m-1} + h], [x_m - h, x_m]$$

حداکثر مساوی $2M(2mh) = 2M\varepsilon$ خـواهد بود. قسمت باقیمـاندهٔ $[a, b]$ (آن را S می‌نامیم) مساوی اجتماع تعدادی متناهی بازهٔ بسته است، که در هر یک ازآنها $\{f_n\}$ همگرای یکشکل به f می‌باشد. بنابراین، عددی صحیح مانند N (فقط تابع ε) هست بقسمی که به‌ازای هر x در S،

هرگاه $n \geqslant N$، آنگاه $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

ازاین روی، مجموع انتگرالهای $|f - f_n|$ روی بازه‌های موجود در S حداکثر مساوی $\varepsilon(b - a)$ می‌باشد. پس

هرگاه $n \geqslant N$، آنگاه $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leqslant (2M + b - a)\varepsilon$.

این ثابت می‌کند که وقتی که $n \to \infty$،

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

در این مورد، قضیـه‌ای منتسب به آرزلا[1]، قویتر از قضیهٔ گـذشته وجود دارد، که در آن به همگرائی یکشکل اشاره‌ای نشده است:

قضیهٔ ۱۲.۹ (آرزلا). فـرض کنیم $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ همگرای کـراندار بـاشد، و هر f_n بر $[a, b]$ دارای انتگرال ریمان باشد. همچنین، تابع حد f نیز بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد. در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

اثبات قضیهٔ آرزلا به طور قابل ملاحظه‌ای از قضیهٔ ۱۱.۹ مشکلتر است، و در

1. Arzelà

این‌جا گفته نخواهد شد. در فصل آینده قضیه‌ای را دربارهٔ انتگرالهای لبگ ثابت می‌کنیم که قضیهٔ آرزلا حالت خاصی از آن است. (ر. ک. قضیهٔ ۲۹.۱۰.)

تبصره. بآسانی می‌توان مثالی از یک دنبالهٔ همگرای کراندار $\{f_n\}$ نشان داد که هرجملهٔ آن انتگرال ریمان داشته باشد اما تابع حد آن، یعنی f، دارای انتگرال ریمان نباشد. اگر $\{r_1, r_2, \ldots\}$ مجموعهٔ عددهای گویا در $[0, 1]$ باشد، $f_n(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر n، $k = 1, 2, \ldots$، اگر $x = r_k$، $f_n(x)$ را مساوی ۱ قرار می‌دهیم، والا $f_n(x) = 0$. در این صورت، به‌ازای هر n، $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$، ولی تابع حد نقطه‌وار این دنباله، یعنی f، بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان ندارد.

۱۰.۹ همگرائی یکشکل و مشتقگیری

شاید با قیاس به‌قضیه‌های ۲.۹ و ۸.۹ انتظار رود که نتیجهٔ زیر برقرار باشد: هرگاه $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$، و هرگاه به‌ازای هر n، f_n' وجود داشته باشد، آنگاه f' وجود دارد و $f_n' \to f'$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$. اما، مثال ۳ بخش ۲.۹ نشان می‌دهد که چنین نتیجه‌ای نمی‌تواند درست باشد. اگرچه دنبالهٔ $\{f_n\}$ مثال ۳ بر $\mathbf{R}$ همگرای یکشکل است، ولی دنبالهٔ $\{f_n'\}$ حتی نقطه‌وار نیز بر $\mathbf{R}$ همگرا نیست. مثلاً، دنبالهٔ $\{f_n'(0)\}$ واگرا است زیرا $f_n'(0) = \sqrt{n}$. بنابراین، نظایر قضیه‌های ۲.۹ و ۸.۹ برای مشتقگیری باید شکل دیگری داشته باشند.

قضیهٔ ۱۳.۹ فرض‌کنیم هرجملهٔ $\{f_n\}$ تابعی حقیقی بوده، در هرنقطهٔ بازهٔ باز $]a, b[$ مشتق متناهی داشته باشد، و نیز به‌ازای دست‌کم یك نقطه در $]a, b[$ مانند x_0، دنبالهٔ $\{f_n(x_0)\}$ همگرا باشد. بعلاوه، تابعی مانند g باشد بقسمی که $f_n' \to g$ به‌طور یکشکل بر $]a, b[$. در این صورت:

آ) تابعی مانند f وجود دارد بقسمی که $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر $]a, b[$.
ب) به‌ازای هر x در $]a, b[$، $f'(x)$ وجود دارد و مساوی $g(x)$ است.

برهان. فرض می‌کنیم $c \in]a, b[$، و دنبالهٔ جدید $\{g_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} & \text{اگر } x \neq c \\ f_n'(c) & \text{اگر } x = c \end{cases} \qquad (8)$$

دنبالهٔ $\{g_n\}$ بستگی به‌انتخاب نقطهٔ c دارد. چون $g_n(c) = f_n'(c)$، پس همگرائی

$\{g_n(c)\}$ از فرض نتیجه می‌شود. حال ثابت می‌کنیم که $\{g_n\}$ بر $]a, b[$ همگرای یکشکل است. اگر $x \neq c$، داریم

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{h(x) - h(c)}{x - c}, \tag{۹}$$

که درآن $h(x) = f_n(x) - f_m(x)$. به‌ازای هر x در $]a, b[$، $h'(x)$ وجود دارد و مساوی $f'_n(x) - f'_m(x)$ است. با بکار بردن قضیهٔ مقدار میانگین در (۹)، نتیجه می‌شود که

$$g_n(x) - g_m(x) = f'_n(x_1) - f'_m(x_1), \tag{۱۰}$$

که درآن x_1 بین x و c قرار دارد. چون (بنا برفرض) $\{f'_n\}$ بر $]a, b[$ همگرای یکشکل است، می‌توان با استفاده از (۱۰) و شرط‌کشی (قضیهٔ ۳.۹) نتیجه گرفت که $\{g_n\}$ بر $]a, b[$ همگرای یکشکل می‌باشد.

اینک می‌توان نشان داد که $\{f_n\}$ بر $]a, b[$ همگرای یکشکل است. دنبالهٔ خاص $\{g_n\}$ را برای نقطهٔ بخصوص $c = x_0$ تشکیل می‌دهیم. می‌دانیم که $\{f_n(x_0)\}$ همگرا فرض شده است. از رابطهٔ (۸) می‌توان نوشت

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x),$$

که معادله‌ای است که به‌ازای هر x در $]a, b[$ برقرار است. از این روی، داریم

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)[g_n(x) - g_m(x)].$$

از این معادله و شرط‌کشی همگرائی یکشکل $\{f_n\}$ بر $]a, b[$ نتیجه می‌شود. پس (آ) برقرار است.

برای اثبات (ب)، به‌دنبالهٔ $\{g_n\}$، که به‌ازای نقطهٔ دلخواه c در $]a, b[$ با رابطهٔ (۸) تعریف شده است، باز می‌گردیم و قرار می‌دهیم $G(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. فرض این که f'_n وجود دارد بدین‌معنی است که $\lim_{x\to c} g_n(x) = g_n(c)$. با بیان دیگر می‌توان گفت که، هر g_n در c پیوسته است. چون $g_n \to G$ به‌طور یکشکل بر $]a, b[$، پس تابع حد G نیز در c پیوسته خواهد بود. یعنی

$$G(c) = \lim_{x\to c} G(x), \tag{۱۱}$$

که درآن وجود حد مذکور قسمتی از نتیجهٔ بدست‌آمده است. اما، به‌ازای $x \neq c$، داریم

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

از این روی، بنابر (۱۱)، $f'(c)$ وجود دارد و مساوی $G(c)$ است. ولی

$$G(c) = \lim_{n\to\infty} g_n(c) = \lim_{n\to\infty} f'_n(c) = g(c),$$

درنتیجه $f'(c) = g(c)$. چون c یک نقطهٔ دلخواه $]a, b[$ است، پس (ب) برقرار می‌باشد.

اگر قضیهٔ ۱۳.۹ را برای رشته‌ها مجدداً تنظیم کنیم، خواهیم داشت

قضیهٔ ۱۴.۹ فرض کنیم هرتابع حقیقی f_n بر بازهٔ $]a, b[$ تعریف شده باشد بقسمی که به ازای هر x در $]a, b[$، $f'_n(x)$ وجود داشته باشد، و نیز به‌ازای دست کم یك نقطه در $]a, b[$ مانند x_0، رشتهٔ $\sum f_n(x_0)$ همگرا باشد. بعلاوه، تابعی مانند g وجود داشته باشد بقسمی که $\sum f'_n(x) = g(x)$ (به‌طور یکشکل بر $]a,b[$). در این صورت:

آ) تابعی مانند f وجود دارد بقسمی که $\sum f_n(x) = f(x)$ (به‌طور یکشکل بر $]a, b[$).

ب) اگر $x \in]a, b[$، $f'(x)$ وجود دارد و مساوی $\sum f'_n(x)$ است.

۱۱.۹ شرطهای کافی برای همگرائی یکشکل یك رشته

برخی از قضیه‌هائی‌که دیدیم به‌قدرکافی اهمیت همگرائی یکشکل را مصور ساخته‌اند. بنابراین، طبیعی است که برای احتراز از مراجعه به‌تعریف در هر مورد، آزمونهائی ساده برای آزمایش همگرائی یکشکل پیدا کنیم. یکی از این‌آزمونها آزمون M وایراشتراس است، که در قضیهٔ ۶.۹ توصیف شد. آزمونهای دیگری نیز وجود دارند که ممکن است برای حالتهائی که آزمون M وایراشتراس را نتوان بکار برد مفید باشند. یکی از این آزمونها شبیه قضیهٔ ۲۸.۸ است.

قضیهٔ ۱۵.۹ (آزمون دیریکله برای همگرائی یکشکل). فرض‌کنیم در رشتهٔ $\sum f_n(x)$ هر f_n تابعی باشد مختلط که بر مجموعهٔ S تعریف شده باشد، و $F_n(x)$ مجموع جزئی nم آن باشد. همچنین، $\{F_n\}$ بر S کراندار یکشکل باشد. بعلاوه، $\{g_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابعهای حقیقی بقسمی که به‌ازای هر x در S و هر

$$n = 1, 2, \dots, \quad g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x), \quad g_n \to 0$$

به‌طور یکشکل بر S. در این صورت، رشتهٔ $\sum f_n(x)\, g_n(x)$ بر S همگرای یکشکل است.

برهان. قرارمی‌دهیم $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, g_k(x)$. با توجه به‌دستور جمعبندی

جزئی، خواهیم داشت

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x)\, F_n(x),$$

و در نتیجه اگر $n > m$، می‌توان نوشت

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x) F_n(x) - g_{m+1}(x)\, F_m(x).$$

بنابراین، اگر M یک کران یکشکل برای $\{F_n\}$ باشد، داریم

$$\begin{aligned}|s_n(x) - s_m(x)| &\leqslant M \sum_{k=m+1}^{n} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + M g_{n+1}(x) \\ &+ M g_{m+1}(x) = M(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) \\ &+ M g_{n+1}(x) + M g_{m+1}(x) = ۲ M g_{m+1}(x).\end{aligned}$$

چون $g_n \to ۰$ به‌طور یکشکل بر S، از این نامساوی (با انضمام شرطکشی) نتیجه می‌شود که $\sum f_n(x) g_n(x)$ بر S همگرای یکشکل است.

خواننده می‌تواند بدون هیچ اشکال قضیهٔ ۲۹.۸ (آزمون آبل) را به‌طریقی مشابه وسعت داده، آزمونی برای همگرائی یکشکل بدست‌آورد. (تمرین ۱۳.۹.)

مثال. فرض می‌کنیم $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$. در فصل گذشته (ر. ک. قضیهٔ ۳۰.۸)، نامساوی $|F_n(x)| \leqslant ۱ / |\sin(x/۲)|$ را بدست‌آوردیم، که به ازای هر عدد حقیقی $x \neq ۲m\pi$ (m عددی است صحیح) معتبر است. بنابراین، اگر $۰ < \delta < \pi$، تخمین زیر را خواهیم داشت:

$$\text{اگر } \delta \leqslant x \leqslant ۲\pi - \delta \text{ ،} \quad |F_n(x)| \leqslant ۱/\sin(\delta/۲).$$

از این روی، $\{F_n\}$ بر بازهٔ $[\delta, ۲\pi - \delta]$ کراندار یکشکل است. اگر $\{g_n\}$ در شرطهای قضیهٔ ۱۵.۹ صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت که رشتهٔ $\sum g_n(x) e^{inx}$ بر $[\delta, ۲\pi - \delta]$ همگرای یکشکل است. در حالت خاص‌که $g_n(x) = ۱/n$، اگر $۰ < \delta < \pi$، همگرائی یکشکل رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

بر $[\delta, ۲\pi - \delta]$ نتیجه می‌شود. ملاحظه می‌شود که چون $|e^{inx}| = ۱$، آزمون M

وایراشتراس را نمی‌توان در این حالت برای اثبات همگرائی یکشکل رشتهٔ بالا بکار برد.

۱۲.۹ همگرائی یکشکل و دنباله‌های مضاعف

قضیهٔ زیرین دربارهٔ دنباله‌های مضاعف، که می‌توان آن را به‌عنوان عکسی از قضیهٔ ۳۹.۸ دانست، نمونهٔ متفاوت دیگری است از کاربرد همگرائی یکشکل.

قضیهٔ ۱۶.۹ فرض کنیم f دنباله‌ای مضاعف باشد، و $\mathbf{Z}^+$ مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت‌را نشان دهد. به ازای هر $n = ۱, ۲, \dots$، تابع g_n را بر $\mathbf{Z}^+$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر}\ m \in \mathbf{Z}^+ \text{،}\quad g_n(m) = f(m, n)\cdot$$

فرض کنیم $g_n \to g$ به طور یکشکل بر $\mathbf{Z}^+$، که درآن $g(m) = \lim_{n\to\infty} f(m, n)$. هرگاه حدمکرر $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f(m, n))$ وجود داشته باشد، آنگاه حدمضاعف $\lim_{m,n\to\infty} f(m, n)$ نیز وجود دارد و با آن مساوی است.

برهان. در مقابل هر $\varepsilon > ۰$ داده شده، $N_۱$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که اگر $n > N_۱$،

$$\text{به ازای هر}\ m\ \text{در}\ \mathbf{Z}^+ \text{،}\ |f(m, n) - g(m)| < \varepsilon/۲\cdot$$

فرض کنیم $a = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f(m, n)) = \lim_{m\to\infty} g(m)$. به ازای همان ε، $N_۲$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$\text{به ازای}\ m > N_۲ \text{،}\ |g(m) - a| < \varepsilon/۲\cdot$$

در این صورت، اگر N از $N_۱$ و $N_۲$ بزرگتر باشد، وقتی که هم $m > N$ و هم $n > N$، داریم $|f(m, n) - a| < \varepsilon$. با بیان دیگر می‌توان گفت که،

$$\lim_{m,n\to\infty} f(m, n) = a\cdot$$

۱۳.۹ همگرائی میانگینی

در این بخش تابعها یا حقیقی هستند یا مختلط.

تعریف ۱۷.۹ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد که هر یک بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده و بر آن انتگرال ریمان داشته باشد. همچنین $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد.

گوئیم دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ به طور میانگینی به f همگرا است، و می‌نویسیم

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\ f_n = f$$ بر $[a, b]$ است،

در صورتی که

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^۲ dx = ۰.$$

هرگاه به ازای هر x در $[a, b]$ نامساوی $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ برقرار باشد، آنگاه $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^۲ dx \leqslant \varepsilon^۲(b-a)$. بنابراین، از همگرائی یکشکل $\{f_n\}$ به f بر $[a, b]$ همگرائی میانگینی آن نتیجه می‌شود، بشرط آن که هر f_n بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد. مطلبی که تا حدی تعجب‌آور است این است که از همگرائی میانگینی لزوماً همگرائی نقطه‌وار در هر نقطه از بازه را نمی‌توان نتیجه گرفت. برای اثبات آن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم: به ازای هر عدد صحیح $n \geqslant ۰$، بازهٔ $[۰, ۱]$ را به ۲^n زیربازهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم، و فرض می‌کنیم $\mathrm{I}_{۲^n+k}$ زیر بازه‌ای را نشان دهد که نقطهٔ انتهائی راست آن $(k+۱)/۲^n$ $(k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۲^n - ۱)$ باشد. بدین ترتیب دستهٔ $\{I_۱, I_۲, \ldots\}$ از زیربازه‌های $[۰, ۱]$ حاصل می‌شود، که چند عضو اول آن به صورت زیرند:

$$I_۱ = \left[۰, ۱\right],\quad I_۲ = \left[۰, \frac{۱}{۲}\right],\quad I_۳ = \left[\frac{۱}{۲}, ۱\right],$$
$$I_۴ = \left[۰, \frac{۱}{۴}\right],\quad I_۵ = \left[\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}\right],\quad I_۶ = \left[\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}\right],$$

و مانند اینها. تابع f_n را بر $[۰, ۱]$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \in I_n، \\ ۰ & \text{اگر } x \in [۰, ۱] - I_n، \end{cases}$$

چون $\int_۰^۱ |f_n(x)|^۲\, dx$ مساوی درازای I_n است، و وقتی که $n \to \infty$، این درازا به‌صفر می‌گراید، پس $\{f_n\}$ به‌طور میانگینی به ۰ همگرا خواهد بود. از سوی‌دیگر، به‌ازای هر x در $[۰, ۱]$،

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = ۱ \quad \text{و} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = ۰.$$

[چرا؟] از این روی، به‌ازای هر x در $[\text{۰}, \text{۱}]$، $\{f_n(x)\}$ همگرا نیست.

قضیهٔ زیرین اهمیت همگرائی میانگینی را مصور می‌سازد.

قضیهٔ ۱۸.۹ فرض‌کنیم $\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty} f_n = f$ بر $[a, b]$ باشد. اگر$g \in R$ بر $[a, b]$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$h_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, g(t)\, dt \quad \text{و} \qquad \text{به‌ازای } x \in [a, b]$$

$$h(x) = \int_a^x f(t)\, g(t) dt.$$

در این صورت، $h_n \to h$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$.

برهان. برهان براساس نامساوی زیرین قرار دارد:

$$\text{۰} \leqslant \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)|\, |g(t)|\, dt\right)^{\text{۲}}$$

$$\leqslant \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)|^{\text{۲}}\, dt\right)\left(\int_a^x |g(t)|^{\text{۲}}\, dt\right). \qquad (\text{۱۲})$$

ایــن نامساوی کاربرد مستقیمی از نامساوی‌کشی‌ـشوارتز است در مــورد انتگرالها. (برای ملاحظهٔ نامساوی‌کشی‌ـشوارتز و شرح مختصری از برهان آن، ر. ک. تمریـن ۱۶.۷.) به‌ازای $\varepsilon > \text{۰}$ داده شده، N را می‌توان بقسمی اختیارکردکه به‌ازای $n > N$،

$$\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^{\text{۲}}\, dt < \frac{\varepsilon^{\text{۲}}}{A}, \qquad (\text{۱۳})$$

کـه در آن $A = \text{۱} + \int_a^b |g(t)|^{\text{۲}}\, dt$. اگر (۱۳) را در رابطهٔ (۱۲) قـرار دهیم، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n > N$ و هر x در $[a, b]$،

$$\text{۰} \leqslant |h(x) - h_n(x)| < \varepsilon.$$

قضیهٔ بالا مخصوصاً درنظریهٔ رشته‌های‌فوریه مفید است. (ر. ک. قضیهٔ ۱۶.۱۱.) قضیهٔ زیر تعمیمی از قضیهٔ بالا است و این نیز نتیجه سودمندی است.

قضیهٔ ۱۹.۹ فـرض کنیـم $\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty} f_n = f$ و $\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty} g_n = g$ بـر $[a, b]$ باشند. تعریف می‌کنیم:

$$h_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, g_n(t)\, d_t \quad \text{و} \qquad \text{به‌ازای } x \in [a, b]\text{،}$$

$$h(x) = \int_a^x f(t)\, g(t)\, dt.$$

در این صورت، $h_n \to h$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$.

برهان. داریم

$$h_n(x)-h(x)=\int_a^x (f-f_n)(g-g_n)\,dt$$
$$+\left(\int_a^x f_n g\,dt-\int_a^x fg\,dt\right)+\left(\int_a^x fg_n dt-\int_a^x fg\,dt\right).$$

با بکار بردن نامساوی‌کشی-شوارتز، می‌توان نوشت

$$0 \leqslant \left(\int_a^x |f-f_n|\,|g-g_n|\,dt\right)^2$$
$$\leqslant \left(\int_a^b |f-f_n|^2\,dt\right)\left(\int_a^b |g-g_n|^2\,dt\right).$$

حال می‌توان قضیه را بآسانی از قضیهٔ ۱۸.۹ نتیجه گرفت.

۱۴.۹ رشته‌های توانی

رشته‌ای نامتناهی به‌شکل

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

یا به صورت مختصرتر

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{۱۴}$$

را یک رشتهٔ توانی برحسب $(z-z_0)$ می‌نامند. در این‌جا z، z_0، و $a_n(n=0, 1, 2, \ldots)$ عددهائی مختلط هستند. به هر رشتهٔ توانی به‌صورت (۱۴) گرده‌ای به‌نام گردهٔ همگرائی مربوط می‌شود. این‌رشته به‌ازای هر z درون این گرده همگرای مطلق است و به‌ازای هر z خارج آن واگرا است. مرکز این‌گرده در z_0 است و شعاع آن‌را شعاع همگرائی رشتهٔ توانی می‌نامند. (شعاع همگرائی ممکن است ۰ یا $+\infty$ نیز باشد.) قضیهٔ زیر موجودیت گردهٔ همگرائی را تصریح نموده، راه محاسبهٔ شعاع آن را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲۰.۹ رشتهٔ توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ داده شده است. فرض کنیم

$$\lambda=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}, \quad r=\frac{1}{\lambda},$$

(که درآنها اگر $\lambda = +\infty$، $r = 0$، و اگر $\lambda = 0$، $r = +\infty$). دراین‌صورت، اگر $|z - z_\circ| < r$، رشته همگرای مطلق است، و اگر $|z - z_\circ| > r$، رشته واگرا خواهد بود. بعلاوه، رشته بر هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ درون گردهٔ همگرائی همگرای یکشکل است.

برهان. با بکار بردن آزمون ریشه (قضیهٔ ۲۶.۸)، داریم

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_\circ)^n|} = \frac{|z-z_\circ|}{r},$$

و در نتیجه اگر $|z - z_\circ| < r$، $\sum a_n(z - z_\circ)^n$ همگرای مطلق است، و اگر $|z - z_\circ| > r$، این رشته واگرا خواهد بود.

برای اثبات دومین مطلب، ملاحظه می‌کنیم که اگر T یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ گردهٔ‌همگرائی باشد، نقطه‌ای مانند p در T هست بقسمی که به‌ازای هر $z \in T$،

$$|z - z_\circ| \leqslant |p - z_\circ| < r \cdot$$

از این روی، به‌ازای هر z در T، $|a_n(z - z_\circ)^n| \leqslant |a_n(p - z_\circ)^n|$، ودر نتیجه می‌توان آزمون M وایراشتراس را بکار برد.

تبصره. اگر $\lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|$ وجود داشته‌باشد (یا اگراین حد مساوی $+\infty$ باشد)، مقدارآن مساوی شعاع همگرائی رشتهٔ (۱۴) نیز خواهد بود. (ر. ک. تمرین ۳۰.۹).

مثال ۱ دو رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ دارای یک شعاع همگرائی‌اند، یعنی، برای هردو r مساوی یک است. برکرانهٔ گردهٔ همگرائی، رشتهٔ اولی در هیچ نقطه همگرا نیست و رشتهٔ دومی در همه‌جا همگرا است.

مثال ۲ رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ دارای شعاع همگرائی $r = 1$ است، ولی در $z = 1$ همگرا نیست. اما، بنا برآزمون دیریکله (قضیهٔ ۲۸.۸)، این رشته همه‌جای دیگرکرانهٔ گردهٔ همگرائی همگرا است.

این‌مثالها مصور می‌سازند که چرا قضیهٔ ۲۰.۹ در بارهٔ رفتار یک رشتهٔ‌توانی برکرانهٔ گردهٔ همگرائی‌آن اطلاعاتی بدست نمی‌دهد.

قضیهٔ ۲۱.۹ فرض کنیم رشتهٔ توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_\circ)^n$ به‌ازای هر z در $B(z_\circ; r)$ همگرا باشد. در این صورت، تابع f تعریف شده با معادلهٔ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_\circ)^n, \quad z \in B(z_\circ; r), \tag{۱۵}$$

بر $B(z_\circ; r)$ پیوسته است.

برهان. چون هرنقطه در $B(z_\circ; r)$ به‌یکی از زیرمجموعه‌های فشردهٔ $B(z_\circ; r)$ تعلق دارد، پس قضیه را می‌توان بی‌درنگ از قضیهٔ ۷.۹ نتیجه گرفت.

تبصره. گوئیم رشتهٔ مذکور در (۱۵)، f را در $B(z_\circ; r)$ نمایش می‌دهد. همچنین، این رشته را یک بسط f به‌صورت رشتهٔ توانی حول $z_\circ$ نیز می‌نامند. تابعهائی که دارای بسط به‌صورت رشتهٔ توانی باشند. در داخـــل گردهٔ همگرائی خود پیوسته‌اند. یک چنین تابعها دارای خاصیت قویتر از این هستند. بعداً ثابت می‌کنیم که این تابعها در داخل گردهٔ همگرائی خود از هرمرتبه مشتق دارند. در اثبات این مطلب از قضیهٔ زیر استفاده می‌شود:

قضیهٔ ۲۲.۹ فـرض کنیم $\sum a_n(z - z_\circ)^n$ به‌ازای هر $z \in B(z_\circ; r)$ همگرا باشد. همچنین، معادلهٔ

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z - z_\circ)^n,$$

به‌ازای هر z در یك زیرمجموعهٔ باز $B(z_\circ; r)$ مانند S، معتبر باشد. در این صورت، به‌ازای هـر $z_\backslash$ در S، یك همسایگی مانند $B(z_\backslash; R) \subseteq S$ هست کـه در آن f دارای بسط به‌صورت رشتهٔ توانی به‌شکل زیرخواهد بود:

$$f(z) = \sum_{k=\circ}^{\infty} b_k(z - z_\backslash)^k, \tag{۱۶}$$

که در آن

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k} a_n(z_\backslash - z_\circ)^{n-k} \quad (k = \circ, \backslash, \text{۲}, \ldots). \tag{۱۷}$$

برهان. اگر $z \in S$،

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z - z_\circ)^n &= \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z - z_\backslash + z_\backslash - z_\circ)^n \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \sum_{k=\circ}^{n}\binom{n}{k} (z - z_\backslash)^k(z_\backslash - z_\circ)^{n-k} \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \sum_{k=\circ}^{\infty} c_n(k), \end{aligned}$$

که درآن

$$c_n(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} a_n(z - z_\backslash)^k(z_\backslash - z_\circ)^{n-k} & \text{اگر } k \leqslant n، \\ \circ & \text{اگر } k > n \end{cases}.$$

حال R را بقسمی اختیار می‌کنیم که $B(z_1; R) \subseteq S$، و فرض می‌کنیم که $z \in B(z_1; R)$. در این صورت، رشتهٔ مکرر $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k)$ همگرای مطلق است، زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_n(k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z-z_1| + |z_1 - z_0|)^n \tag{18}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(z_2 - z_0)^n,$$

که درآن

$$z_2 = z_0 + |z - z_1| + |z_1 - z_0|.$$

اما

$$|z_2 - z_0| < R + |z_1 - z_0| \leqslant r,$$

و در نتیجه رشتهٔ مذکور در (۱۸) همگرا است. بنابراین، بنابرقضیهٔ ۴۳۰۸، می‌توان ترتیب جمعبندی را عوض کرد. از این عمل نتیجهٔ زیر بدست می‌آید:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k,$$

که در آن b_k با رابطهٔ (۱۷) داده شده است. بدین ترتیب برهان قضیه تمام است.

تبصره. در برهان بالا نشان داده شده است که این نتیجه برای هر $R > 0$ که به‌ازای آن

$$B(z_1; R) \subseteq S \tag{19}$$

نیز برقرار است.

قضیهٔ ۲۳۰۹ فرض کنیم $\sum a_n(z-z_0)^n$ به‌ازای هر z در $B(z_0; r)$ همگرا باشد. در این صورت، اگر

$$\text{به‌ازای } z \in B(z_0; r)\text{،}\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\text{،} \tag{20}$$

$f'(z)$ به‌ازای هر z در $B(z_0; r)$ وجود دارد، و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}. \tag{21}$$

تبصره. رشته‌های مذکور در (۲۰) و (۲۱) هر دو دارای یک شعاع همگرائی می‌باشند.

برهان. فرض‌کنیم $z_1 \in B(z_0; r)$، و همان‌طور که در (۱۶) نشان داده شده است، f را به‌صورت یک رشتهٔ توانی حول z_1 بسط می‌دهیم. در این صورت، اگر $z \in B(z_1; R)$ و $z \neq z_1$، خواهیم داشت

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} (z - z_1)^k. \qquad (۲۲)$$

بنابر خاصیت پیوستگی، عضو طرف راست (۲۲)، وقتی که $z \to z_1$، به b_1 می‌گراید. از این روی، $f'(z_1)$ وجود دارد و مساوی b_1 است. اگر از رابطهٔ (۱۷) برای محاسبهٔ b_1 استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1}.$$

چون z_1 یک نقطهٔ دلخواه $B(z_0; r)$ است، پس رابطهٔ (۲۱) برقرار می‌باشد. هر دو رشته دارای یک شعاع همگرائی‌اند زیرا وقتی که $n \to \infty$، $\sqrt[n]{n} \to 1$.

تبصره. با بکار بردن مکرر (۲۱)، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots$، $f^{(k)}(z)$ در $B(z_0; r)$ وجود دارد و با رشتهٔ زیر بدست می‌آید:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}. \qquad (۲۳)$$

اگر در رابطهٔ (۲۳) قرار دهیم $z = z_0$، دستور مهم زیرین حاصل می‌شود:

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (۲۴)$$

بنابر معادلهٔ بالا، هرگاه دو رشتهٔ توانی $\sum a_n (z - z_0)^n$ و $\sum b_n (z - z_0)^n$ هر دو در یک همسایگی مانند $B(z_0; r)$ یک تابع را نمایش دهند، آنگاه به‌ازای هر n، $a_n = b_n$. یعنی، بسط تابع f به‌صورت رشتهٔ توانی حول نقطهٔ داده شدهٔ z_0 (در صورت وجود) منحصر به‌فرد است، و با دستور زیر داده می‌شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

این دستور به‌ازای هر z واقع در گردهٔ همگرائی معتبر است.

۱۵.۹ ضرب رشته‌های توانی

قضیهٔ ۲۴.۹ دو بسط به‌صورت رشتهٔ توانی حول مبدأ، یعنی

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \ z \in B(0; r),$$

و

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n , \ z \in B(0; R)$$

داده شده‌اند. در این صورت، حاصلضرب $f(z)\, g(z)$ از رشتهٔ توانی زیر بدست می‌آید:

اگر $z \in B(0; r) \cap B(0; R)$، $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$،

که در آن

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

برهان. حاصلضرب‌کشی دو رشتهٔ داده شده به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

و حکم قضیه با استفاده از قضیهٔ ۴۶.۸ (قضیهٔ مرتنس) حاصل می‌شود.

تبصره. اگر دو رشتهٔ مورد بحث با هم مساوی باشند، خواهیم داشت

$$f(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

که در آن $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{m_1+m_2=n} a_{m_1} a_{m_2}$. علامت $\sum_{m_1+m_2=n}$ نشان می‌دهد که جمعبندی روی همهٔ عددهای صحیح نامنفی m_1 و m_2 گرفته شده است که مجموع آنها مساوی n باشد. بهمین نحو، به ازای هر عدد صحیح $p > 0$، داریم

$$f(z)^p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p) z^n,$$

که در آن

$$c_n(p) = \sum_{m_1+\cdots+m_p=n} a_{m_1} \cdots a_{m_p}.$$

۱۶.۹ قضیهٔ جا نشانی

قضیهٔ ۲۵.۹ فرض کنیم دو بسط به‌صورت رشتهٔ توانی حول مبدأ، مثلاً

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in B(0; r)$$

و

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad z \in B(0; R),$$

داده شده باشند. هرگاه به‌ازای یك مقدار ثابت z در $B(0; R)$ داشته باشیم $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$، آنگاه به‌ازای این z، می‌توان نوشت

$$f[g(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

که درآن ضریبهای c_k به‌صورت زیر بدست می‌آیند: هرگاه $b_k(n)$ها با معادلهٔ

$$g(z)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(n) z^k$$

تعریف شوند، آنگاه به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots$، $c_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)$.

تبصره. رشتهٔ $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ رشته‌ای است توانی، که به‌طور صوری چنین بدست می‌آید که در بسط f به‌جای z رشتهٔ نمایش دهندهٔ $g(z)$ را قرار داده، سپس جمله‌های آن را برحسب توانهای صعودی z مجدداً آرایش دهیم.

برهان. بنابرفرض، z را می‌توان بقسمی اختیار کرد که $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$. برای این z داریم $|g(z)| < r$، و در نتیجه می‌توان نوشت

$$f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k(n) z^k.$$

اگر بتوان ترتیب جمعبندی را در بالا عوض کرد، خواهیم داشت

$$f[g(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)\right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

که همان حکمی است که بایستی ثابت کنیم. برای اثبات این که تعویض ترتیب جمعبندی بالا امکان‌پذیر است، ثابت می‌کنیم که رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_n b_k(n) z^k| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k|. \qquad (۲۵)$$

همگرا است. گوئیم هر $b_k(n)$ مجموعی است متناهی به‌شکل زیر:

$$b_k(n) = \sum_{m_1+\dots+m_n=k} b_{m_1}\cdots b_{m_n},$$

و در نتیجه $|b_k(n)| \leqslant \sum_{m_1+\dots+m_n=k} |b_{m_1}|\cdots|b_{m_n}|$. از سوی دیگر، داریم

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| z^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n) z^k,$$

که درآن $B_k(n) = \sum_{m_1+\dots+m_n=k} |b_{m_1}|\cdots|b_{m_n}|$. با مراجعه به (۲۵)، بدست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n)|z^k|$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k z^k|\right)^n,$$

یعنی رشتهٔ مذکور در (۲۵) همگرا است.

۱۷.۹ متقابل یك رشتهٔ توانی

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ جانشانی رشتهٔ توانی در دیگری، نشان می‌دهیم که هرگاه در یک رشتهٔ توانی برحسب z جملهٔ پایا صفر نباشد، آنگاه متقابل این رشته نیز رشته‌ای توانی برحسب z خواهد بود.

قضیهٔ ۲۶.۹ فرض کنیم

اگر $z \in B(0; h)$، $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$،

که درآن $p(0) \neq 0$. در این صورت، یك همسایگی مانند $B(0;\delta)$ هست که در آن متقابل p دارای بسطی به‌صورت رشتهٔ توانی به‌شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n.$$

بعلاوه، $q_0 = 1/p_0$.

برهان. بی‌آن‌که به‌کلیت خللی واردآید می‌توان فرض کرد که $p_0 = 1$. [چرا؟] در این صورت $p(0) = 1$. اگر $z \in B(0; h)$، قرار می‌دهیم

$$P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |p_n z^n|.$$

بنا بر پیوستگی، یک همسایگی مانند $B(\circ;\delta)$ هست بقسمی که اگر

$$z \in B(\circ;\delta) \text{ ،} \quad |P(z)-1| < 1 \text{ .}$$

حال قضیه را می‌توان با بکار بردن قضیهٔ ۲۵.۹ و رابطه‌های

$$g(z) = 1 - p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \quad \text{و} \quad f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=\circ}^{\infty} z^n$$

نتیجه گرفت.

۱۸.۹ رشته‌های توانی حقیقی

اگـر x ،$x_\circ$، و a_n عددهائـی حقیقی باشند، رشتهٔ $\sum a_n(x-x_\circ)^n$ را یک رشتهٔ توانی حقیقی می‌نامند. گردهٔ همگرائی این رشته محور حقیقی را در بازه‌ای مـانند $]x_\circ - r, x_\circ + r[$، به‌نام بازهٔ همگرائی، قطع می‌کند.

بـه ازای هـر رشتهٔ توانی حقیقی، تابعی حقیقی (به‌نام تابـع مجموع رشته) تعریف مـی‌شود که مقدار آن در هرنقطهٔ x در بازهٔ همگرائی از دستور زیـر بدست می‌آید:

$$f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(x-x_\circ)^n.$$

گوئیم ایـن رشته f را دربـازهٔ همگرائی نمـایش می‌دهـد، وآن را یک بسط f به صورت رشتهٔ توانی حول $x_\circ$ می‌نامیم.

در این‌جا دو مسأله مورد نظر است:

۱) رشته‌ای داده شده است، مطلوب است تعیین خاصیتهای تابع مجموع f .

۲) تابـع f مفروض است، مطلوب است تحقیق امکان نمایش‌آن به‌صورت یک رشتهٔ توانی.

معلوم می‌شود که فقط تابعهای نسبتاً خاصی دارای بسط به‌صورت رشتهٔ توانی هستند. باوجود این، چـون ردهٔ این‌گونه تابعها شامل تعداد زیادی مثال است که در عمل پدیدار می‌شوند، مطالعهٔ آنها دارای اهمیت بسیار است.

به‌مسألـه (۱) به‌وسیلهٔ قضیه‌هائی که پیشتر برای رشته‌های تـوانی مختلط ثابت شده‌اند جـواب داده شده است. یک رشتهٔ توانی به‌ازای هـر x در زیـربازهٔ بـاز همگرائی $]x_\circ - r, x_\circ + r[$ همگرای مطلق است، و بر هرزیرمجموعهٔ فشردهٔ این بازه همگـرای یکشکل است. چون هرجملهٔ رشتهٔ توانی بر $\mathbf{R}$ پیـوسته است، تابـع

مجموع f برهرزیرمجموعهٔ فشردهٔ بازهٔ همگرائی، و در نتیجه بر $]x_\circ-r, x_\circ+r[$ پیوسته است.

براثر همگرائی یکشکل، از قضیهٔ ۹.۹ معلوم می‌شود کـه برهرزیربازهٔ فشردهٔ داخل بازهٔ همگرائی یک رشتهٔ توانی، می‌توان ازآن جمله به‌جمله انتگرال گـرفت. بنا براین، به‌ازای هر x در $]x_\circ - r, x_\circ + r[$، داریم

$$\int_{x_\circ}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \int_{x_\circ}^{x} (t - x_\circ)^n\, dt$$

$$= \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{a_n}{n+۱} (x - x_\circ)^{n+۱}.$$

رشتهٔ انتگرالگیری شده دارای همان شعاع همگرائی رشتهٔ اولی است.

تابـع مجموع رشته در بازهٔ همگرائی دارای مشتق از هرمرتبه است، و ایـن مشتقها را مـی‌توان با مشتقگیـری جمله بـه‌جمله از رشته بـدست آورد. بعـلاوه، $f^{(n)}(x_\circ) = n!a_n$، پس تابع مجموع رشته با رشتهٔ توانی زیر نمایش داده‌می‌شود:

$$f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!} (x - x_\circ)^n. \tag{۲۶}$$

حال به مسألهٔ (۲) توجه می کنیم. فرض کنیم f تابعـی باشد حقیقی کـه بـر بازهٔ بازی مانند $]x_\circ - r, x_\circ + r[$ تعریف شده باشد، و در این بازه مشتق از هـر مرتبه را دارا باشد. در این صورت، واضح است که می‌تـوان رشتهٔ توانـی مذکـور در طرف راست (۲۶) را تشکیل داد. آیا این رشته به‌ازای xهائی علاوه بر $x = x_\circ$ نیز همگرا است؟ اگر چنین است، آیا مجمـوع آن مساوی $f(x)$ خـواهـد بـود؟ در حالت کلی، جـواب هر دو سؤال «منفی» است. (بـرای مثال نـاقض، ر.ک. تمریـن ۳۳.۹) در بخش آینده، به‌کمک دستور تیلـور (قضیهٔ ۱۹.۵)، شرطـی لازم و کافی برای جواب مثبت دادن به دو سؤال بالا داده می‌شود.

۱۹.۹ رشتهٔ تیلوری که از یك تابع تولید می‌شود

تعریف ۲۷.۹ فرض‌کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر بازهٔ I در $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد. اگر در هر نقـطهٔ I مشتقهای f از هـر مرتبه وجود داشته باشند، می‌نویسیم $f \in C^\infty$ بر I است.

اگر $f \in C^\infty$ بر یکی از همسایگیهای نقطهٔ c باشد، رشتهٔ توانی

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

را رشتهٔ تیلور تولید شده به‌وسیلهٔ f حول c می‌نامند. برای این که نشان دهیم f این رشته را تولید کرده است، می‌نویسیم

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n .$$

این پرسش برای ما مطرح است: چه وقت می‌توان به جای علامت $\sim$ علامت $=$ را گذاشت؟ بنا به‌دستور تیلور، هرگاه $f \in C^\infty$ بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ باشد و $c \in [a, b]$، آنگاه به‌ازای هر x در $[a, b]$ و هر n،

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n , \tag{۲۷}$$

که در آن x_1 نقطه‌ای است بین x و c. نقطهٔ x_1 به x، c، و n بستگی دارد. از این روی، شرط لازم و کافی برای آن که رشتهٔ تیلور بالا به $f(x)$ همگرا شود آن است که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n = 0 . \tag{۲۸}$$

چون جای x_1 نامشخص است، عملاً بررسی حد بالا ممکن است خیلی مشکل باشد. اما در بعضی از حالتها می‌توان کران بالائی مناسبی برای $f^{(n)}(x_1)$ پیدا نموده، نشان‌داد که حد بالاصفر است. چون به‌ازای هر A، وقتی‌که $n \to \infty$، $A^n/n! \to 0$، پس اگر عدد پایا و مثبتی مانند M باشد بقسمی که به‌ازای هر x در $[a, b]$،

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M^n ,$$

معادلهٔ (۲۸) محققاً برقرار خواهد بود. با بیان دیگر می‌توان گفت که، اگر $f^{(n)}$ از توان nم عدد مثبتی سریعتر رشد نکند، رشتهٔ تیلور تابع f همگرا خواهد بود. این مطلب به شکل صوریتر در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۲۸.۹ فرض کنیم $f \in C^\infty$ بر $[a, b]$ باشد و $c \in [a, b]$ و نیز یک همسایگی مانند $B(c)$ و عدد پایائی مانند M (که ممکن است تابع c باشد) وجود داشته باشند بقسمی که به‌ازای هر x در $B(c) \cap [a, b]$ و هر $n = 1, 2, \cdots$، $|f^{(n)}(x)| \leqslant M^n$. در این صورت، به‌ازای هر x در $B(c) \cap [a, b]$،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n .$$

۲۰.۹ قضیهٔ برنشتاین[1]

در این بخش شرط کافی دیگری را برای همگرائی رشتهٔ تیلور f ثابت می‌کنیم، که به‌وسیلهٔ برنشتاین تنظیم شده است. برای ساده کردن برهان آن، ابتدا شکل دیگر دستور تیلور را بدست می‌آوریم که در آن جملهٔ نماینده خطا برحسب انتگرال بیان شده است.

قضیهٔ ۲۹.۹ فرض‌کنیم f بر بازه‌ای باز مانند I حاوی نقطهٔ c دارای مشتق مرتبهٔ $(n+۱)$م پیوسته باشد. به‌ازای x در I، $E_n(x)$ را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x) \,. \qquad (۲۹)$$

در این صورت، $E_n(x)$ از انتگرال زیر نیز بدست می‌آید:

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \,. \qquad (۳۰)$$

برهان. قضیه را به‌وسیلهٔ استقرا بر n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n=۱$، داریم

$$E_1(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) = \int_c^x [f'(t) - f'(c)]\, dt$$
$$= \int_c^x u(t)\, dv(t),$$

که در آن $u(t) = f'(t) - f'(c)$ و $v(t) = t - x$. با انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء، نتیجه می‌شود که

$$\int_c^x u(t)\, dv(t) = u(x)\, v(x) - u(c)\, v(c) - \int_c^x v(t)\, du(t)$$
$$= \int_c^x (x-t)\, f''(t)\, dt.$$

این رابطهٔ (۳۰) را به‌ازای $n=۱$ ثابت می‌کند. حال فرض می‌کنیم که (۳۰) به‌ازای n درست باشد، و ثابت می‌کنیم این رابطه برای $n+۱$ نیز برقرار است. از رابطهٔ (۲۹) داریم

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

1. S. Bernstein

اگر $E_n(x)$ را به‌صورت یک انتگرال بنویسیم و توجه کنیم که

$$(x-c)^{n+1} = (n+1)\int_c^x (x-t)^n\, dt,$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_c^x (x-t)^n\, dt \\ &= \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n[f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(c)]\, dt \\ &= \frac{1}{n!}\int_c^x u(t)\, dv(t), \end{aligned}$$

که در آن

$u(t) = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(c)$ و $v(t) = -(x-t)^{n+1}/(n+1)$.

با انتگرالگیری به‌طریقهٔ جزء به جزء، نتیجه می‌شود که

$$E_{n+1}(x) = -\frac{1}{n!}\int_c^x v(t)du(t) = \frac{1}{(n+1)!}\int_c^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt.$$

از این رابطهٔ (۳۰) ثابت می‌شود.

تبصره. با تغییر متغیر $t = x + (c-x)u$، انتگرال مذکور در (۳۰) به شکل زیر درمی‌آید:

$$(۳۱)\quad E_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}[x + (c-x)u]\, du.$$

قضیهٔ ۳۰.۹ (برنشتاین). فرض کنیم تابع f وهمهٔ مشتقهای آن بربازهٔ فشردهٔ $[b, b+r]$ نامنفی باشند. در این صورت، اگر $b \leqslant x < b+r$، رشتهٔ تیلور

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k$$

به $f(x)$ همگرا خواهد بود.

برهان. با یک انتقال معلوم می‌شود که می‌توان فرض کرد که $b = 0$. به‌ازای

$x = ٠$، نتیجه واضح است. پس فرض می‌کنیم $٠ < x < r$. دستور تیلور با باقیمانده را بکار برده، می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{k=٠}^{n} \frac{f^{(k)}(٠)}{k!} x^k + E_n(x). \tag{۳۲}$$

ثابت می‌کنیم که جملهٔ نمایندهٔ خطا در نامساویهای زیرین صدق می‌کند:

$$٠ \leqslant E_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+١} f(r). \tag{۳۳}$$

چون اگر $٠ < x < r$، $٠ \to (x/r)^{n+١}$. پس از (۳۳) نتیجه می‌شود که وقتی که $n \to \infty$، $E_n(x) \to ٠$.

برای اثبات (۳۳)، رابطهٔ (۳۱) را با $c = ٠$ بکار می‌بریم. نتیجه آن که به‌ازای هر x در $[٠, r]$،

$$E_n(x) = \frac{x^{n+١}}{n!} \int_٠^١ u^n f^{(n+١)}(x - xu)\, du.$$

اگر $x \neq ٠$، قرار می‌دهیم

$$F_n(x) = \frac{E_n(x)}{x^{n+١}} = \frac{١}{n!} \int_٠^١ u^n f^{(n+١)}(x - xu)\, du.$$

تابع $f^{(n+١)}$ بر $[٠, r]$ صعودی‌است زیرا مشتق‌آن بر $[٠, r]$ نامنفی‌است. بنابراین، اگر $٠ \leqslant u \leqslant ١$،

$$f^{(n+١)}(x - xu) = f^{(n+١)}[x(١ - u)] \leqslant f^{(n+١)}[r(١ - u)],$$

و از این نتیجه می‌شود که اگر $٠ < x \leqslant r$، $F_n(x) \leqslant F_n(r)$. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، $E_n(x)/x^{n+١} \leqslant E_n(r)/r^{n+١}$، یا

$$E_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+١} E_n(r). \tag{۳۴}$$

با قراردادن $x = r$ در (۳۲)، ملاحظه می‌شود که چون هرجمله در مجموع نامنفی است، پس $E_n(r) \leqslant f(r)$. با بکار بردن این نامساوی در (۳۴)، رابطهٔ (۳۳) بدست می‌آید. پس قضیه برقرار است.

۲۱.۹ رشتهٔ دوجمله‌ای

به‌عنوان مثالی که‌کاربرد قضیهٔ برنشتاین‌را نشان‌دهد، بسط زیرین را بدست‌می‌آوریم،

که به‌رشتهٔ دو جمله‌ای معروف است:

$$(\text{۳۵}) \qquad \text{اگر } -۱ < x < ۱ \text{، } (۱ + x)^a = \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \text{،}$$

که درآن a عدد حقیقی دلخواهی است و $\binom{a}{n} = a(a-۱)\ldots(a-n+۱)/n!$.
برای اثبات بسط بالا قضیهٔ برنشتاین مستقیماً قابل بکار بردن نیست. اما می‌توان استدلال زیر را انجام داد: قرار می‌دهیم $f(x) = (۱ - x)^{-c}$، که درآن $c > ۰$ و $x < ۱$. در این صورت،

$$f^{(n)}(x) = c(c+۱)\cdots(c+n-۱)(۱-x)^{-c-n},$$

و در نتیجه اگر $x < ۱$، بـه‌ازای هـر n، $f^{(n)}(x) \geqslant ۰$. با بکار بـردن قضیهٔ بـرنشتاین با $b = -۱$ و $r = ۲$، معلوم می‌شود که $f(x)$ دارای بسط به‌صورت رشتهٔ توانی حول نقطهٔ $b = -۱$ است، که به‌ازای $-۱ \leqslant x < ۱$ همگـرا است. بنابرایـن، بنابـرقضیهٔ ۲۲.۹، $f(x)$ نیز دارای بسط به‌صورت رشتهٔ تـوانی حول ۰ است، یعنی $f(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} f^{(k)}(۰)x^k/k!$، که به‌ازای $-۱ < x < ۱$ همگرا است. اما $f^{(k)}(۰) = \binom{-c}{k}(-۱)^k k!$، پس

$$(\text{۳۶}) \qquad \text{اگر } -۱ < x < ۱ \text{، } \frac{۱}{(۱-x)^c} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{-c}{k} (-۱)^k x^k.$$

اگر دررابطهٔ (۳۶)، c را با $-a$ و x را با $-x$ عوض کنیم، نتیجه می‌شود که رابطهٔ (۳۵) به‌ازای هر $a < ۰$ معتبر است. اینک با انتگرالگیری متوالی، می‌توان‌ثابت کرد که رابطهٔ (۳۵) به‌ازای هر عدد حقیقی a برقرار است.

البته، هرگاه a عدد صحیح مثبتی باشد، مثلاً $a = m$، آنگاه بـرای $n > m$، $\binom{m}{n} = ۰$، و رابطهٔ (۳۵) به‌یک مجموع متناهی (قضیهٔ دو جمله‌ای) تحویل خواهد شد.

۲۲.۹ قضیهٔ حدی آبل

اگر $-۱ < x < ۱$، با انتگرالگیری از رشتهٔ هندسی

$$\frac{۱}{۱-x} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

نتیجه می‌شود که بسط به‌صورت رشتهٔ

$$(\text{۳۷}) \qquad \log(۱-x) = -\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

نیز به‌ازای $-1 < x < 1$ معتبر است. با قراردادن $x = -1$ در طرف راست (۳۷)، رشتهٔ متناوب وهمگرای $\sum (-1)^{n+1}/n$ بدست می‌آید. آیا می‌توان $x = -1$ را در طرف چپ رابطهٔ (۳۷) نیز قرار داد؟ قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که جواب این سؤال مثبت است.

قضیهٔ ۳۱.۹ (قضیهٔ حدی آبل). فرض کنیم

$$\text{اگر } -r < x < r \text{ ،} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{.} \qquad (۳۸)$$

هرگاه این رشته در $x = r$ نیز همگرا باشد، آنگاه حد $\lim_{x \to r-} f(x)$ وجود دارد و

$$\lim_{x \to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

برهان. برای ساده کردن کار، فرض می‌کنیم $r = 1$ (این کار با تغییر مقیاس امکان پذیر است). دراین‌صورت، به‌ازای $-1 < x < 1$ ، $f(x) = \sum a_n x^n$ و $\sum a_n$ همگرا است. می‌نویسیم $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. باید ثابت کنیم که $\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$ ؛ یا به بیانی دیگر، باید نشان دهیم که f از چپ در $x = 1$ پیوسته است.

اگر رشتهٔ متناظر $f(x)$ را در رشتهٔ هندسی ضرب نموده، سپس ازقضیهٔ ۲۴.۹ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ ، که در آن } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ .}$$

از این روی،

$$f(x) - f(1) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} [c_n - f(1)] x^n, \qquad (۳۹)$$

اگر $-1 < x < 1$.

بنابر فرض، $\lim_{n \to \infty} c_n = f(1)$. بنابراین، به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توان N را بقسمی اختیارکرد که اگر $n \geqslant N$ ، $|c_n - f(1)| < \varepsilon/2$. اگر مجموع مذکور در (۳۹) را به دو قسمت تقسیم کنیم، بدست می‌آید

$$f(x) - f(1) = (1 - x) \sum_{n=0}^{N-1} [c_n - f(1)] x^n \qquad (۴۰)$$

$$+ (1 - x) \sum_{n=N}^{\infty} [c_n - f(1)] x^n.$$

فرض کنیم M ماکزیمم N عــدد $|c_n - f(1)|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$
باشد. اگر $0 < x < 1$ ، از رابطهٔ (۴۰) خواهیم داشت

$$|f(x) - f(1)| \leqslant (1 - x)NM + (1 - x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N}^{\infty} x^n$$
$$= (1 - x)NM + (1 - x)\frac{\varepsilon}{2}\frac{x^N}{1-x} < (1 - x)NM + \frac{\varepsilon}{2}.$$

حال قرار می‌دهیم $\delta = \varepsilon/2NM$. در ایـن صورت ، اگر $0 < 1 - x < \delta$ ،
$|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ ، یعنی $\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$ ، پس برهــان
قضیه تمام است .

مثال . در رابطهٔ (۳۷) می‌توان x را مساوی ۱ — قرار داد ، نتیجه می‌شود که

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

(برای بدست آوردن این دستور از راه دیگر، ر. ک. تمرین ۱۸.۸ .)
به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ آبل، می‌توان نتیجهٔ زیر را دربارهٔ ضرب رشته‌ها
بدست آورد :

قضیهٔ ۳۲.۹ فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو رشتهٔ همگرا باشند، و $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ حاصلضرب کشی آنها را نشان دهد. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگرا باشد، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

تبصره . این نتیجه شبیه قضیهٔ ۴۶.۸ است جز این که فرضی دربارهٔ همگرائی مطلق
یــکی از دو رشتــهٔ داده شــده نشــده است. اما، دراین‌جــا فــرض شده است کــه
حاصلضرب‌کشی آنها همگرا باشد .

برهان. رشتهٔ توانی $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ هر دو به ازای $x = 1$ همگرا هستند ،
ودر نتیجه در همسایگی $B(0\,;\,1)$ همگــرا خواهند بـود . اگر $|x| < 1$ ، بـا
استفاده از قضیهٔ ۲۴.۹ می‌توان نوشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

حال فرض می‌کنیم $x \to 1-$ و قضیهٔ آبل را بکار می‌بریم.

۲۳.۹ قضیهٔ تاوبر[1]

درحالت کلی عکس قضیهٔ حدی آبل درست نیست. یعنی، اگر f با رابطهٔ (۳۸) داده شده باشد، حد $f(r-)$ ممکن است وجود داشته باشد ولی رشتهٔ $\sum a_n r^n$ همگرا نباشد. مثلاً، فرض می‌کنیم $a_n = (-1)^n$. دراین صورت، اگر $-1 < x < 1$، $f(x) = 1/(1+x)$، و وقتی که $x \to 1-$، $f(x) \to 1/2$. اما، $\sum(-1)^n$ واگرا است .

تاوبر (۱۸۹۷) دریافت که با قراردادن قید هائی بر ضریبهای a_n، می‌توان عکسی برای قضیهٔ آبل بدست آورد. تا کنون تعداد زیادی از این نتیجه ها شناخته شده‌اند، وهمهٔ آنها به‌نام قضیه‌های تاوبری معروفند. ساده‌ترین این نتیجه‌ها به‌صورت زیر است. این نتیجه را گاهی قضیهٔ اول تاوبر نیز می‌نامند .

قضیهٔ ۲۳.۹ (تاوبر) . فرض کنیم به‌ازای $-1 < x < 1$،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ، و } \lim_{n\to\infty} n a_n = 0 \cdot$$

هرگاه وقتی که $x \to 1-$، $f(x) \to S$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا است و دارای مجموع S خواهد بود .

برهان . قرار می‌دهیم $n\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k|$. در این صورت، وقتی که $n \to \infty$، $\sigma_n \to 0$. (ر. ک. تبصرهٔ بعد از قضیهٔ ۴۸.۸ .) همچنین، اگر $x_n = 1 - 1/n$، $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$. از این روی، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توان N را بقسمی اختیار کرد که اگر $n \geqslant N$،

$$|f(x_n) - S| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sigma_n < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n\,|a_n| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot$$

حال قرار می‌دهیم $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. دراین‌صورت، به‌ازای $-1 < x < 1$، می‌توان نوشت

$$s_n - S = f(x) - S + \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \cdot$$

حال x را در بازهٔ $]0, 1[$ اختیار می‌کنیم . در این‌صورت، به‌ازای هر k،

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leqslant k(1 - x)\cdot$$

1. A. Tauber

بنابراین، اگر $N \geqslant n$ و $\circ < x < ۱$، خواهیم داشت

$$|s_n - S| \leqslant |f(x) - S| + (۱ - x)\sum_{k=\circ}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{۳n(۱-x)}.$$

با فرض $x = x_n = ۱ - ۱/n$، نتیجه می‌شود که

$$|s_n - S) < \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{\varepsilon}{۳} = \varepsilon,$$

و برهان قضیه تمام است.

تبصره. برای یک قضیهٔ دیگر تاوبری، ر.ک. تمرین ۳۷.۹.

تمرین

همگرائی یکشکل

۱.۹ فرض کنید $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر S، و هر f_n بر S کراندار باشد. ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر S کراندار یکشکل است.

۲.۹ دو دنبالهٔ $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

اگر $x \in \mathbf{R}$ و $n = ۱, ۲, \ldots$، $f_n(x) = x\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)$،

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{۱}{n} & \text{اگر } x = \circ \text{ یا } x \text{ گنگ باشد،} \\ b + \frac{۱}{n} & \text{اگر } x \text{ گویا باشد، مثلاً به صورت } x = \frac{a}{b} \text{ و } b > \circ \end{cases}.$$

قرار دهید $h_n(x) = f_n(x)\, g_n(x)$.

آ) ثابت کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ هر دو بر هر بازهٔ کراندار همگرای یکشکل هستند.

ب) ثابت کنید که $\{h_n\}$ بر هیچ بازهٔ کرانداری همگرای یکشکل نیست.

۳.۹ فرض کنید $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر S، و $g_n \to g$ به‌طور یکشکل بر S.

آ) ثابت کنید که $f_n + g_n \to f + g$ به‌طور یکشکل بر S.

ب) فرض کنید اگر $x \in S$ ،

$$h(x) = f(x)\, g(x) \quad \text{و} \quad h_n(x) = f_n(x)\, g_n(x).$$

تمرین ۲.۹ نشان می‌دهد که حکم $h_n \to h$ به‌طور یکشکل بر S ، در حالت کلی، صحیح نیست. ثابت کنید که این حکم درصورتی صحیح است که هر f_n و هر g_n بر S کراندار باشد.

۴.۹ فرض کنید $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر S، و نیز عدد پایائی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر x در S و هر n ، $|f_n(x)| \leqslant M$. بعلاوه، تابع g بر بست گردهٔ $B(0\,; M)$ پیوسته باشد. اگر $x \in S$ ، تعریف کنید $h_n(x) = g[f_n(x)]$ و $h(x) = g[f(x)]$. ثابت‌کنیدکه $h_n \to h$ به‌طور یکشکل بر S.

۵.۹ آ) فرض‌کنید اگر $0 < x < 1$ و $n = 1, 2, \ldots$ ، $f_n(x) = 1/(nx+1)$. ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر $]0, 1[$ نقطه‌وار همگرا است ولی بر این بازه همگرای یکشکل نیست.

ب) فرض‌کنید اگر $0 < x < 1$ و $n = 1, 2, \ldots$ ، $g_n(x) = x/(nx+1)$. ثابت کنید که $g_n \to 0$ به‌طور یکشکل بر $]0, 1[$.

۶.۹ فرض کنید $f_n(x) = x^n$. دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار همگرااست ولی همگرای یکشکل نیست. فرض کنید g بر $[0, 1]$ پیوسته باشد و $g(1) = 0$. ثابت کنید که دنبالهٔ $\{g(x)x^n\}$ بر $[0, 1]$ همگرای یکشکل است.

۷.۹ فرض کنید $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر S. همچنین، هر f_n بر S پیوسته باشد. اگر $x \in S$ ، فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقطه‌ها در S باشد بقسمی که $x_n \to x$. ثابت کنید که $f_n(x_n) \to f(x)$.

۸.۹ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابعهای پیوسته که بر مجموعهٔ فشردهٔ S تعریف شده باشند. همچنین، $\{f_n\}$ بر S نقطه‌وار به تابع حد f همگرا باشد. ثابت کنید که $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر S وقتی، و فقط وقتی، که دو شرط زیر برقرار باشند:

یکم) تابع حد f بر S پیوسته باشد.

دوم) به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، دو عدد مانند $m > 0$ و $\delta > 0$ وجود داشته باشند بقسمی که هرگاه $n > m$ و به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots$ و هر x

در S، $\delta > |f_k(x)-f(x)$ ، آنگاه $\varepsilon > |f_{k+n}(x)-f(x)|$.

راهنمائی. برای اثبات کفایت (یکم) و (دوم)، نشان دهید که به‌ازای هر $x_\circ$ در S ، یک همسایگی مانند $B(x_\circ)$، و عددی صحیح مانند k (تابع $x_\circ$) هست بقسمی که اگر $x \in B(x_\circ)$ ، $|f_k(x)-f(x)| < \delta$.

بنا بر خاصیت فشردگی، مجموعه‌ای متناهی از عددهای صحیح، مثلاً $A = \{k_1, \ldots, k_r\}$، دارای این خاصیت است که به‌ازای هر x در S، kای در A وجود دارد بقسمی که $\delta > |f_k(x)-f(x)|$. همگرائی یکشکل نتیجهٔ ساده‌ای است از آنچه گفته شد.

۹.۹ آ) با استفاده از تمرین ۸.۹ قضیهٔ زیر را، که متعلق به دینی[1] است، ثابت کنید: هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای پیوسته و حقیقی باشد که برمجموعهٔ فشردهٔ S نقطه‌وار به تابع حد پیوسته‌ای چون f همگرا باشد، و به‌ازای هر x در S و هر $n = 1, 2, \ldots$ ، $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$، آنگاه $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر S.

ب) با استفاده از دنبالهٔ مذکور در تمرین ۵.۹ (آ)، نشان دهید که شرط فشردگی S در قضیهٔ دینی ضروری است.

۱۰.۹ فرض کنید به‌ازای x حقیقی و $n \geqslant 1$ ، $f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n$. ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی c ، دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار همگرا است. c هائی را بیابید که به‌ازای آنها همگرائی این دنباله بر $[0, 1]$ یکشکل باشد. همچنین، cهائی را معین کنید که به‌ازای آنها بتوان از این دنباله بر $[0, 1]$ جمله به جمله انتگرال گرفت.

۱۱.۹ ثابت‌کنیدکه $\sum x^n(1-x)$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار همگرا است ولی همگرای یکشکل نیست، حال آن که $\sum (-1)^n x^n(1-x)$ بر $[0, 1]$ همگرای یکشکل می‌باشد. این مطلب مصور می‌سازد که از همگرائی یکشکل $\sum f_n(x)$ و همگرائی نقطه‌وار $\sum |f_n(x)|$ همگرائی یکشکل $\sum |f_n(x)|$ لزوماً نتیجه نمی‌شود.

۱۲.۹ فرض‌کنید به‌ازای هر x در T وهر $n = 1, 2, \ldots$ ، $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$. همچنین $g_n \to 0$ به‌طور یکشکل بر T. ثابت کنید که $\sum (-1)^{n+1} g_n(x)$ بر T همگرای یکشکل است.

۱۳.۹ آزمون آبل برای همگرائی یکشکل را ثابت کنید: فرض کنید $\{g_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای حقیقی باشد بقسمی‌که به‌ازای هر x در T و هر $n = 1, 2, \ldots$،

1. Dini

$g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$. هرگاه $\{g_n\}$ بر T کراندار یکشکل، و $\sum f_n(x)$ بر T همگرای یکشکل باشد، آنگاه $\sum f_n(x)\, g_n(x)$ نیز بر T همگرای یکشکل است.

۱۴.۹ فرض کنید اگر $x \in \mathbf{R}$ و $n = ۱, ۲, \ldots$، $f_n(x) = x/(۱ + nx^۲)$. تابع حد f دنبالهٔ $\{f_n\}$، و تابع حد g دنبالهٔ $\{f_n'\}$ را بیابید.

آ) ثابت‌کنید به‌ازای هر x، $f'(x)$ وجود دارد ولی $f'(۰) \neq g(۰)$. به‌ازای چه مقدارهائی از x، $f'(x) = g(x)$؟

ب) در کدام زیربازه‌های $\mathbf{R}$، $f_n \to f$ به‌طور یکشکل؟

ج) در کدام زیربازه‌های $\mathbf{R}$، $f_n' \to g$ به‌طور یکشکل؟

۱۵.۹ فرض کنید اگر $x \in \mathbf{R}$ و $n = ۱, ۲, \ldots$، $f_n(x) = (۱/n)e^{-n^۲x^۲}$. ثابت کنید که $f_n \to ۰$ به‌طور یکشکل بر $\mathbf{R}$، $f_n' \to ۰$ به طور نقطه‌وار بر $\mathbf{R}$، ولی همگرائی $\{f_n'\}$ بر هیچ بازه‌ای حاوی مبدأ یکشکل نیست.

۱۶.۹ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابعهای پیوسته و حقیقی که بر بازهٔ $[۰, ۱]$ تعریف شده باشند. همچنین، $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر $[۰, ۱]$. برقراری رابطهٔ زیر را ثابت یا رد کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \int_۰^{۱-۱/n} f_n(x)\, dx = \int_۰^۱ f(x)\, dx.$$

۱۷.۹ ریاضیدانان اسلوبوویا[1] فتوا دادند که انتگرال ریمان خیلی پیچیده است، و در نتیجه به‌جای آن انتگرال اسلوبووی را قرار دادند، که به صورت زیر تعریف می‌شود: اگر f تابعی باشد که بر مجموعهٔ عددهای گویا در $[۰, ۱]$، یعنی $\mathbf{Q}$، تعریف شده باشد، انتگرال اسلوبووی f، که با $S(f)$ نشان داده می‌شود، با حد زیر تعریف می‌گردد:

$$S(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

وقتی که این حد وجود داشته باشد. فرض‌کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد بقسمی که n هر چه باشد $S(f_n)$ وجود داشته باشد، و $f_n \to f$ بـه طور یکشکل بر $\mathbf{Q}$. ثابت کنید که $\{S(f_n)\}$ همگرا است، $S(f)$ وجود دارد، و وقتی کـه $n \to \infty$، $S(f_n) \to S(f)$.

۱۸.۹ فرض‌کنید اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ و $n = ۱, ۲, \ldots$، $f_n(x) = ۱/(۱ + n^۲x^۲)$.

---
1. Slobbovia

ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر $[\circ, 1]$ نقطه‌وار همگرا است ولی بر این بازه همگرای یکشکل نیست. آیا در این مورد انتگرالگیری جمله به جمله مجاز است؟

۱۹.۹ ثابت‌کنید اگر $\alpha > 1/2$، $\sum_{n=1}^{\infty} x/n^{\alpha}(1 + nx^2)$ بر هر بازهٔ متناهی در $\mathbf{R}$ همگرای یکشکل است. آیا همگرائی این رشته بر $\mathbf{R}$ یکشکل است؟

۲۰.۹ ثابت کنید که رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n/\sqrt{n})\sin(1 + (x/n))$ بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}$ همگرای یکشکل است.

۲۱.۹ ثابت کنید که رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1}/(2n + 1) - x^{n+1}/(2n + 2))$ بر $[\circ, 1]$ نقطه‌وار همگرا است ولی همگرای یکشکل نیست.

۲۲.۹ ثابت کنیداگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ بر $\mathbf{R}$ همگرای یکشکل هستند.

۲۳.۹ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی با جمله‌های مثبت باشد. ثابت کنید که رشتهٔ $\sum a_n \sin nx$ بر $\mathbf{R}$ وقتی، و فقط وقتی، همگرای یکشکل است که وقتی که $n \to \infty$، $na_n \to \circ$.

۲۴.۹ رشتهٔ همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مفروض است. ثابت کنید که رشتهٔ دیریکلهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ بر بازهٔ نیمه نامتناهی $\circ \leqslant s < +\infty$ همگرای یکشکل است. با استفاده از این خاصیت، ثابت کنید که $\lim_{s \to \circ+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

۲۵.۹ اگر $h > \circ$، ثابت کنید که رشتهٔ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ بر بازهٔ نیمه نامتناهی $1 + h \leqslant s < +\infty$ همگرای یکشکل است. نشان دهید که معادلهٔ

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

به‌ازای هر $s > 1$ معتبر است، و دستور مشابهی برای مشتق kام، یعنی $\zeta^{(k)}(s)$، پیدا کنید.

همگرائی میانگینی

۲۶.۹ فرض کنید $f_n(x) = n^{3/2} x e^{-n^2 x^2}$. ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر $[-1, 1]$ نقطه‌وار به $\circ$ همگرا است ولی $\text{l.i.m.}_{n \to \infty} f_n \neq \circ$ بر $[-1, 1]$ است.

۲۷.۹ فرض کنید دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ نقطه‌وار به f همگرا باشد و $\text{l.i.m.}_{n \to \infty} f_n = g$ بر $[a, b]$ باشد. ثابت کنید اگر f و g هردو بر $[a, b]$

پیوسته باشند، $f = g$.

۲۸.۹ فرض کنید اگر $0 \leqslant x \leqslant \pi$، $f_n(x) = \cos^n x$.

آ) ثابت کنید $\text{l.i.m.}_{n\to\infty} f_n = 0$ بر $[0, \pi]$ است ولی دنبالهٔ $\{f_n(\pi)\}$ همگرا نیست.

ب) ثابت کنید دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[0, \pi/2]$ نقطه‌وارهمگرا است ولی‌همگرای یکشکل نیست.

۲۹.۹ اگر $0 \leqslant x \leqslant 1/n$ یا $2/n \leqslant x \leqslant 1$، $f_n(x) = 0$، و اگر $1/n < x < 2/n$، $f_n(x) = n$. ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار به 0 همگرا است ولی $\text{l.i.m.}_{n\to\infty} f_n \neq 0$ بر $[0, 1]$ است.

رشته‌های توانی

۳۰.۹ اگر r شعاع همگرائی $\sum a_n(z - z_0)^n$ باشد، که در آن هر $a_n \neq 0$، نشان دهید که

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqslant r \leqslant \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

۳۱.۹ فرض کنید شعاع همگرائی رشتهٔ توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ مساوی ۲ باشد. شعاع همگرائی هریک از رشته‌های زیرین را بیابید:

آ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$، ب) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$، ج) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$

در (آ) و (ب)، k عدد صحیح مثبت و ثابتی است.

۳۲.۹ ضریبهای رشتهٔ توانی مفروض $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با معادله‌ای بدین شکل مربوطند:

$$a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

نشان دهید که به‌ازای هر xی که رشتهٔ بالا همگرا باشد، مجموع آن مساوی

$$\frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}$$

است.

۳۳.۹ فرض کنید اگر $x \neq 0$، $f(x) = e^{-1/x^2}$، و $f(0) = 0$.

آ) نشان دهید که به‌ازای هر $n \geqslant ۱$، $f^{(n)}(\circ)$ وجود دارد.

ب) نشان دهید که رشتهٔ تیلورتولیدشده به‌وسیلهٔ f حول ۰ همه‌جا بر $\mathbf{R}$ همگرا است ولی فقط f را در مبدأ نمایش می‌دهد.

۳۴.۹ نشان دهید که رشتهٔ دو جمله‌ای $(۱ + x)^\alpha = \sum_{n=\circ}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ در نقطه‌های $x = \pm ۱$ دارای این رفتارها است:

آ) اگر $x = -۱$، رشته به‌ازای $\alpha \geqslant \circ$ همگرا، و به‌ازای $\alpha < \circ$ واگرا است.

ب) اگر $x = ۱$، رشته به‌ازای $\alpha \leqslant -۱$ واگرا، به‌ازای α در بازهٔ $-۱ < \alpha < \circ$ همگرای مشروط، و به‌ازای $\alpha \geqslant \circ$ همگرای مطلق است.

۳۵.۹ نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد ، رشتهٔ $\sum a_n x^n$ بر $[\circ , ۱]$ همگرای یکشکل است . با استفادهٔ از این مطلب ، برهان دیگری برای قضیهٔ حدی آبل بیابید .

۳۶.۹ اگر هر $a_n \geqslant \circ$ و رشتهٔ $\sum a_n$ واگرا باشد ، نشان دهید که وقتی که $x \to ۱-$ ، $\sum a_n x^n \to +\infty$. (فرض کنید $\sum a_n x^n$ به‌ازای $|x| < ۱$ همگرا باشد .)

۳۷.۹ اگر هر $a_n \geqslant \circ$ و $\lim_{x\to ۱-}\sum a_n x^n$ وجودداشته باشد ومساوی A باشد، ثابت کنید که $\sum a_n$ همگرا، ومجموع آن A است . (با قضیهٔ ۳۳.۹ مقایسه کنید.)

۳۸.۹ به‌ازای هر عدد حقیقی t ، اگر $x \in R$ و $x \neq \circ$ ، تعریف کنید

$$f_t(x) = \frac{xe^{xt}}{(e^x - ۱)} \quad \text{و} \quad f_t(\circ) = ۱ \; .$$

آ) نشان دهید که گرده‌ای مانند $B(\circ ; \delta)$ هست که در آن f_t را می‌توان به‌صورت یک رشتهٔ توانی برحسب x نمایش داد .

ب) $P_\circ(t)$ ، $P_۱(t)$ ، $P_۲(t)$ ، . . . ، را با معادلهٔ زیرین تعریف کنید :

$$\text{اگر } x \in B(\circ ; \delta) \text{ ، } f_t(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} P_n(t)\, \frac{x^n}{n!} \text{ ،}$$

و با استفاده از اتحاد

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} P_n(t)\,\frac{x^n}{n!} = e^{tx}\sum_{n=\circ}^{\infty} P_n(\circ)\,\frac{x^n}{n!} \, ,$$

ثابت کنید که $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k(0)\, t^{n-k}$. این امر نشان می‌دهد کـه هـر تـابـع P_n یک چند جمله‌ای است . اینها را چند جمله‌ایهای برنولی[1]، و عـدد هـای $B_n = P_n(0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ را عددهـای برنولی می‌نامند. خاصیتهای دیگر زیر را بدست آورید :

ج) $B_0 = 1$ ، $B_1 = -1/2$ ، و اگر $n = 2, 3, \ldots$ ،

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = 0 .$$

د) اگر $n = 1, 2, \ldots$ ، $P_n'(t) = nP_{n-1}(t)$.

ه) اگر $n = 1, 2, \ldots$ ، $P_n(t+1) - P_n(t) = nt^{n-1}$.

و) $P_n(1-t) = (-1)^n P_n(t)$.

ز) اگر $n = 1, 2, \ldots$ ، $B_{2n+1} = 0$.

ح) $$1^n + 2^n + \cdots + (k-1)^n = \frac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n+1}$$

$$(n = 2, 3, \ldots) .$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی کـه برای کسب اطلاعات بیشتر مـی‌توان به آنها مراجعه کرد .

9.1 Hardy, G. H., *Divergent Series*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1949.

9.2 Hirschmann, I. I., *Infinite Series*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.

9.3 Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, 2nd ed. R. C. Young, translator. Hafner, New York, 1948 .

1. Bernoulli

۱۰
انتگرال لبگ

۱.۱۰ مقدمه

انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)\,dx$ ، که در فصل ۷ ظاهر شد، از انگیزه‌های کافی برای تعریف برخوردار است، توصیفی ساده دارد، و همهٔ نیازهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی را برمی‌آورد. اما ، این انتگرال برای همهٔ نیازهای آنالیز عالی کافی نیست. توسیع آن، به‌نام انتگرال لبگ، دراین فصل مورد بحث قرارمی‌گیرد. این مبحث تابعهای کلیتری را به عنوان انتگرالده می‌پذیرد، تابعهای کراندار و بی‌کران را باهم دربر می‌گیرد، و به‌ما امکان می‌دهد که به جای بازهٔ $[a, b]$ مجموعه های کلیتری را قرار دهیم.

همچنین ، برای انتگرال لبگ قضیه‌های همگرائی متقاعد کننده‌تری وجود دارند. اگر دنباله‌ای از تابعها مانند $\{f_n\}$ بر $[a , b]$ نقطه‌وار به تابع حد f همگرا باشد، مطلوب آن است که رابطهٔ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

با کمترین قیدهای اضافی برقرار باشد . نتیجهٔ قطعی این‌گونه احکام قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ است، که بنابرآن ، اگرهرجملهٔ $\{f_n\}$ انتگرال لبگ داشته باشد ودنباله تحت تسلط تابعی باشد که انتگرال لبگ دارد ، از این دنباله می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت . (ر. ک. قضیهٔ ۲۷.۱۰ .) در این‌جا انتگرال لبگ داشتن‌شرطی ضروری است. قضیه برای انتگرالهای ریمان درست نیست .

در روش ریمان بازهٔ انتگرالگیری به تعدادی متناهی زیربازه تقسیم می‌شد در روش لبگ بازه به مجموعه‌های کلیتری به نام مجموعه‌های اندازه‌پذیر تقسیم می‌شود. در مقاله‌ای عالی که لبگ در ۱۹۰۲ زیر عنـوان «انتگرال، دراز، وسعت»[1] منتشر ساخت، اندازه را برای مجموعه‌های نقطه‌ای تعریف کرد و این‌را برای نشان دادن انتگرال جدیدش بکار برد.

از زمان نخستین کارهای لبگ، نظریهٔ اندازه‌ها و نظریهٔ انتگرالگیری هر دو دستخوش تعمیمها و اصلاحهای متعدد شده‌اند. کارهای یانگ[2]، دانیل[3]، ریس، استن[4]، و دیگران نشان داده‌اند که انتگرال لبگ را می‌توان با روشی معرفی کرد که بستگی به‌نظریهٔ اندازه‌ها نداشته باشد، بلکه به‌طور مستقیم برتابعها وانتگرالهای آنها متمرکز باشد. در این فصل از این روش، به صورتی که درکتاب مرجع ۱۰.۱۰ طرح شده است، پیروی می‌کنیم. تنها مفهومی کــه از نظریهٔ اندازه‌ها مـورد نیاز است مفهوم مجموعهٔ دارای اندازهٔ صفر است، ایـن مفهوم ساده در فصل ۷ معرفـی شد. بعداً، با ختصار نشان خواهیم داد که چگونه نظریهٔ اندازه‌ها را مـی‌توان به کمک انتگرال لبگ بوجود آورد.

۲.۱۰ انتگرال تابع پله‌ای

روش کار در این‌جا چنین است‌که ابتدا انتگرال را برای تابعهای پله‌ای، سپس برای ردهٔ وسیعتری از تابعها (به نام تابعهای بالائی) که حاوی حدهای بعضی از دنباله‌های صعودی از تابعهای پله‌ای هستند، وسرانجام برای ردهٔ بازهم وسیعتری به‌نام تابعهائی که انتگرال لبگ دارند تعریف می‌نمائیم.

یادآوری می‌کنیم‌که تابع s را، که بربازهٔ فشردهٔ $[a , b]$ تعریف شده باشد، یک تابع پله‌ای نامند اگریک افراز $[a , b]$ مانند $P=\{x_0 , x_1 , \cdots , x_n\}$ وجود داشته باشد بقسمی که s بر هر زیـربازهٔ باز این افراز تابعی پایا باشد، یعنی

اگر $x \in]x_{k-1} , x_k[$ ، $s(x) = c_k$.

یک تابع پله‌ای برهر زیربازهٔ $[x_{k-1} , x_k]$ دارای انتگرال ریمان است، وانتگرال آن روی این‌زیربازه، بی‌توجه به مقـدارهای s در نقطه های انتهائی، از دستور زیر بدست می‌آید:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} s(x)\, dx = c_k(x_k - x_{k-1}) \cdot$$

1. Integrale, longueur, aire 2. Young 3. Daniell
4. Stone

بنابراین، انتگرال ریمان s روی $[a, b]$ مساوی مجموع زیر خواهد بود:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})\,. \qquad (1)$$

تبصره. اگرمعادلهٔ (۱) را به‌عنوان تعریف انتگرال یک تابع پله‌ای درنظربگیریم، می‌توان نظریهٔ لبگ را بی‌هرگونه اطلاع قبلی از انتگرالگیری ریمان بوجود آورد. باید توجه داشت که تاوقتی که s بر زیربازه های باز افراز P پایا باشد، مجموعی که در (۱) ذکرشده است از انتخاب P مستقل خواهد بود.

شایسته است که قید فشرده بودن را از قلمرو یک تابع پله‌ای برداریم.

تعریف ۱۰۱۵ فرض کنیم I یك بازهٔ کلی (کراندار، بی‌کران، باز، بسته، یا نیمباز) باشد. تابع s را بر I یک‌تابع پله‌ای نامند درصورتی‌که I زیربازهٔ فشرده‌ای مانند $[a, b]$ داشته باشد بقسمی که s بر آن پله‌ای باشد، و به‌ازای هر

$$s(x) = 0\,, \quad x \in I - [a, b].$$

انتگرال s روی I را به $\int_I s(x)\,dx$ یا به $\int_I s$ نشان می‌دهیم، و آن را مساوی انتگرال s روی $[a, b]$، که با رابطهٔ (۱) داده شده است، تعریف می‌نمائیم.

البته، تعداد زیادی بازهٔ فشرده مانند $[a, b]$ هستند که s در خارج آنها مساوی صفر می‌شود، اما انتگرال s به انتخاب $[a, b]$ بستگی ندارد.

البته، مجموع و حاصل ضرب دو تابع پله‌ای نیز تابعهائی پله‌ای هستند. خاصیتهای زیرین در مورد انتگرال تابعهای پله‌ای را می‌توان بآسانی از تعریف بالا نتیجه گرفت:

$\int_I (s+t) = \int_I s + \int_I t$، به‌ازای هر پایای c، $\int_I cs = c\int_I s$،

هرگاه به‌ازای هر x در I، $s(x) \leqslant t(x)$، آنگاه $\int_I s \leqslant \int_I t$.

همچنین، هرگاه I به صورت اجتماع مجموعه‌ای متناهی از زیربازه‌ها بیان شود، مثلاً، $I = \bigcup_{r=1}^{p} [a_r, b_r]$، بقسمی که هیچ دو زیربازه نقطهٔ درونی مشترک نداشته باشند، آنگاه

$$\int_I s(x)\,dx = \sum_{r=1}^{p} \int_{a_r}^{b_r} s(x)\,dx.$$

۳.۱۰ دنباله‌های یکنوا از تابعهای پله‌ای

دنبالهٔ $\{f_n\}$ از تابعهای حقیقی را که بر مجموعهٔ S تعریف شده باشند بر S صعودی نامیم در صورتی که

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ در } S \text{ و هر } n\text{،}\ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x).$$

دنبالهٔ نزولی آن است که در نامساوی بالا درجهت دیگر صدق کند.

تبصره. یادآوری می‌کنیم که یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند T را دارای اندازهٔ صفر گویند وقتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، T را بتوان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌ها پوشانید، که مجموع درازاهای آنها کمتر از ε باشد. اگر خاصیتی همه جا بر S برقرار باشد بجز در مورد مجموعه‌ای دارای اندازهٔ صفر، گوئیم این خاصیت تقریباً همه جا بر S برقرار است، (در این صورت می‌نویسیم: ت. ه. بر S).

نماد گذاری. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعها بر S باشد بقسمی که $f_n \to f$ تقریباً همه جا بر S، می‌نویسیم

$$f_n \nearrow f \text{ ت. ه. بر } S.$$

بهمین نحو، نماد $f_n \searrow f$ ت. ه. بر S، یعنی دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر S نزولی است و تقریباً همه جا بر S به f همگرا می‌باشد.

قضیهٔ زیرین مربوط است به دنباله‌های نزولی از تابعهای پله‌ای بر بازه‌ای کلی مانند I.

قضیهٔ ۲.۱۰ فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای نزولی از تابعهای پله‌ای نامنفی باشد بقسمی که $s_n \searrow 0$ ت. ه. بر بازه‌ای مانند I. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n = 0.$$

برهان. روش اثبات این است که انتگرال $\int_I s_n$ را به صورت

$$\int_I s_n = \int_A s_n + \int_B s_n$$

بنویسیم، که در آن A و B، هر یک، اجتماع تعدادی متناهی بازه باشد. مجموعهٔ A را طوری اختیار می‌کنیم که عبارت باشد از اجتماع بازه‌هائی که وقتی n به قدر کافی بزرگ باشد انتگرالده در آنها کوچک باشد. در B انتگرالده لزوماً

کوچک نیست ولی مجموع درازاهای همهٔ بازه‌های آن کوچک خواهد بود. برای انجام این کار چنین عمل می‌کنیم:

بازهٔ فشرده ای مانند $[a, b]$ وجود دارد که s_1 در خارج آن مساوی صفر می‌شود. چون

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ در } I\text{،}\quad 0 \leqslant s_n(x) \leqslant s_1(x)\text{،}$$

هر s_n در خارج $[a, b]$ مساوی صفر خواهد شد. اما s_n بر هر زیربازهٔ باز یکی از افرازهای $[a, b]$ پایا است. فرض می‌کنیم D_n مجموعهٔ نقطه‌های انتهائی این زیر-بازه‌ها را نشان دهد، و قرار می‌دهیم $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. چون هر D_n مجموعه‌ای متناهی است، D شمارشپذیر، و در نتیجه دارای اندازهٔ صفر است. فرض کنیم E مجموعهٔ نقطه‌هائی در $[a, b]$ را نشان دهد که در آنها دنبالهٔ $\{s_n\}$ به صفر همگرا نباشد. بنا بر فرض، E دارای اندازهٔ صفر است، پس مجموعهٔ

$$F = D \cup E$$

نیز دارای اندازهٔ صفر خواهد بود. بنابراین، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، F را می‌توان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های باز مانند F_1، F_2، ...، پوشانید، که مجموع درازاهای آنها از ε کمتر باشد.

اینک فرض می‌کنیم که $x \in [a, b] - F$. در این صورت $x \notin E$، پس وقتی که $n \to \infty$، $s_n(x) \to 0$. بنابراین، عددی صحیح مانند $N = N(x)$ هست بقسمی که $s_N(x) < \varepsilon$. همچنین، از این که $x \notin D$، نتیجه می‌شود که x نقطهٔ درونی یکی از زیربازه‌هائی است که s_N بر آن تابعی پایا است. از این روی، بازهٔ بازی مانند $B(x)$ هست بقسمی که به‌ازای هر t در $B(x)$، $s_N(t) < \varepsilon$. چون $\{s_n\}$ نزولی است، پس

$$\text{به‌ازای هر } n \geqslant N \text{ و هر } t \text{ در } B(x)\text{،}\quad s_n(t) < \varepsilon. \tag{۲}$$

مجموعهٔ همهٔ بازه‌های $B(x)$ که به ازای همهٔ عضوهای $[a, b] - F$ حاصل می‌شوند، به انضمام بازه‌های F_1، F_2، ...، تشکیل یک پوشش باز $[a, b]$ را خواهند داد. چون $[a, b]$ فشرده است، زیرپوششی متناهی از آن برای $[a, b]$ وجود دارد، مثلاً

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i) \cup \bigcup_{r=1}^{q} F_r.$$

فرض‌کنیم N_0 ماکزیمم عددهای صحیح $N(x_1)$، ...، $N(x_p)$ باشد. از رابطهٔ (۲) دیده می‌شود که

به‌ازای هر $n \geqslant N_{\circ}$ و هر t در $\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i)$، $s_n(t) < \varepsilon$. (۳)

اینک A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B = \bigcup_{r=1}^{q} F_r \,, A = [a\,,b] - B.$$

در این صورت، A مساوی اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌های از هم‌جدا است، و داریم

$$\int_I s_n = \int_a^b s_n = \int_A s_n + \int_B s_n.$$

ابتدا انتگرال روی B را تخمین می‌زنیم. فرض کنیم M یک کران بالائی برای s_1 بر $[a\,,b]$ باشد. چون $\{s_n\}$ نزولی است، به‌ازای هر x در $[a, b]$، داریم

$$s_n(x) \leqslant s_1(x) \leqslant M.$$

چون مجموع درازاهای بازه‌های موجود در B از ε کمتر است، پس

$$\int_B s_n \leqslant M\varepsilon.$$

حال انتگرال روی A را تخمین می‌زنیم. چون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i)$، نامساوی مذکور در (۳) نشان می‌دهد که اگر $x \in A$ و $n \geqslant N_{\circ}$، $s_n(x) < \varepsilon$. مجموع درازاهای بازه‌های موجود در A از $b - a$ بیشتر نیست، پس تخمین زیررا خواهیم داشت:

اگر $n \geqslant N_{\circ}$، $\int_A s_n \leqslant (b-a)\,\varepsilon$.

از دو تخمین بالا نتیجه می‌شود که اگر $n \geqslant N_{\circ}$، $\int_I s_n \leqslant (M + b - a)\,\varepsilon$، و این رابطه نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n = \circ.$$

قضیهٔ ۳.۱۵ فرض‌کنیم $\{t_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابعهای پله‌ای بر بازهٔ I بقسمی‌که:

آ) تابعی مانند f وجود داشته باشد که $t_n \nearrow f$ ت . ه . بر I؛

و

ب) دنبالهٔ $\{\int_I t_n\}$ همگرا باشد.

در این صورت، به‌ازای هر تابع پله‌ای مانند t که $t(x) \leqslant f(x)$ ت. ه. بر I، خواهیم داشت

$$\int_I t \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_I t_n \cdot \qquad (۴)$$

برهان. $\{s_n\}$، دنبالهٔ جدیدی از تابعهای پله‌ای نامنفی، را بر I به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\cdot \ s_n(x) = \begin{cases} t(x) - t_n(x) & \text{اگر} \quad t(x) \geqslant t_n(x) \\ 0 & \text{اگر} \quad t(x) < t_n(x) \end{cases}$$

توجه کنیدکه $s_n(x) = \max \{ t(x) - t_n(x) , 0 \}$. چون $\{t_n\}$ صعودی‌است، پس $\{s_n\}$ بر I نزولی می‌باشد، و $s_n(x) \to \max \{ t(x) - f(x) , 0 \}$ ت. ه. بر I. ولی $t(x) \leqslant f(x)$ ت. ه. بر I، بنابراین $s_n \searrow 0$ ت. ه. بر I. از این روی، بنابر قضیهٔ ۲.۱۰، $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n = 0$. چون به‌ازای هر x در I، $s_n(x) \geqslant t(x) - t_n(x)$، پس

$$\int_I s_n \geqslant \int_I t - \int_I t_n \cdot$$

حال اگر در نامساوی بالا $n \to \infty$، رابطهٔ (۴) بدست می‌آید.

۴.۱۰ تابعهای بالائی و انتگرالهای آنها

فرض کنیم $S(I)$ مجموعهٔ همهٔ تابعهای پله‌ای بر بازهٔ I را نشان دهد. مفهوم انتگرال را برای همهٔ تابعهای در $S(I)$ تعریف کردیم. حال این مفهوم را بـه رده‌ای بزرگتر وسعت می‌دهیم. این رده، کـه به $U(I)$ نشان داده می‌شود، حاوی حدهـای بعضی از دنباله‌های صعودی ازتابعهای پله‌ای است. تابعهای موجود دراین رده تابعهای بالائی نامیده، و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۴.۱۰ تابع حقیقی f راکه بر بازهٔ I تعریف شده باشد یك تابع بالائی بر I می‌نامیم، و می‌نویسیم $f \in U(I)$، در صورتی‌که دنباله‌ای صعودی ازتابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ وجود داشته باشد بقسمی که

آ) $s_n \nearrow f$ ت. ه. بر I؛

و

ب) $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n$ متناهی باشد.

در این صورت گوئیم دنبالهٔ $\{s_n\}$ تابع f را تولید می‌کند. انتگرال f روی I با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n. \tag{۵}$$

تبصره. چون $\{\int_I s_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای حقیقی است، شرط (ب) هم‌ارز این است که گفته شود $\{\int_I s_n\}$ از بالا کراندار است.

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که تعریف انتگرال در رابطهٔ (۵) فارغ از ابهام است.

قضیهٔ ۵.۱۰ فرض‌کنیم $f \in U(I)$ و $\{s_n\}$ و $\{t_m\}$ دو دنباله باشند که f را تولید کنند. در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n = \lim_{m\to\infty} \int_I t_m.$$

برهان. دنبالهٔ $\{t_m\}$ در فرضهای (آ) و (ب) ازقضیهٔ ۳.۱۰ صدق می‌کند. همچنین، به‌ازای هر n، داریم

$$s_n(x) \leqslant f(x) \quad \text{ت. هـ. بر } I،$$

پس از (۴) نتیجه می‌شود که

$$\int_I s_n \leqslant \lim_{m\to\infty} \int_I t_m.$$

چون نامساوی بالا به‌ازای هر n برقرار است، خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n \leqslant \lim_{m\to\infty} \int_I t_m.$$

با تعویض جای $\{s_n\}$ و $\{t_m\}$ با یکدیگر وتکرار استدلال بالا، نامساوی اخیردرجهت دیگر بدست می‌آید و برهان قضیه تمام می‌شود.

بسادگی می‌توان دید که هر تابع پله‌ای یک تابع بالائی است، و انتگرال آن، که با رابطهٔ (۵) معین می‌شود، مساوی انتگرال این تابع برحسب تعریف اولی است که در بخش ۲.۱۰ آمده است. خاصیتهای دیگر انتگرال تابعهای بالائی در قضیهٔ زیر توصیف می‌شوند.

قضیهٔ ۶.۱۰ فرض کنیم که $f \in U(I)$ و $g \in U(I)$. در این صورت:

آ) $(f+g) \in U(I)$ و

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g.$$

ب) به‌ازای هرپایای $c \geqslant 0$، $cf \in U(I)$، و

$$\int_I cf = c\int_I f.$$

ج) هرگاه $f(x) \leqslant g(x)$ ت. ه. بر I، آنگاه $\int_I f \leqslant \int_I g$.

تبصره. در قسمت (ب) شرط $c \geqslant 0$ شرطی است ضروری. تابعهائی مانند f وجود دارند که $f \in U(I)$ ولی $-f \notin U(I)$. (ر. ک. تمرین ۴.۱۰.) اما، هرگاه $f \in U(I)$ و $s \in S(I)$، چون $f - s = f + (-s)$، آنگاه $f - s \in U(I)$.

برهان. قسمتهای (آ) و (ب) نتیجه‌های ساده‌ای از خاصیتهای متناظر آنها برای تابعهای پله‌ای می‌باشند. برای اثبات (ج)، فرض کنیم $\{s_m\}$ و $\{t_n\}$ دنباله‌هائی باشند که، بترتیب، f و g را تولید می‌کنند. در این صورت، $s_m \nearrow f$ و $t_n \nearrow g$ ت. ه. بر I، و

$$\lim_{m\to\infty}\int_I s_m = \int_I f \,, \lim_{n\to\infty}\int_I t_n = \int_I g.$$

اما به‌ازای هر m،

$$s_m(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x) \text{ ت. ه. بر } I.$$

از این روی، بنا بر قضیهٔ ۳.۱۰،

$$\int_I s_m \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_I t_n = \int_I g.$$

حال، اگر در بالا $m \to \infty$، قسمت (ج) نتیجه خواهد شد.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ مهمی است از قسمت (ج).

قضیهٔ ۷.۱۰ هرگاه $f \in U(I)$ و $g \in U(I)$، و $f(x) = g(x)$ تقریباً همه جا بر I، آنگاه $\int_I f = \int_I g$.

برهان. چون هر دو نامساوی $f(x) \leqslant g(x)$ و $g(x) \leqslant f(x)$ تقریباً همه جا

بر I برقرارند، پس از قضیهٔ ۶.۱۰ (ج) نتیجه می‌شود که $\int_I f \leqslant \int_I g$ و $\int_I g \leqslant \int_I f$.

تعریف ۸.۱۰ فرض کنیم تابعهای حقیقی f و g بر I تعریف شده باشند. تابعهای $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که مقدارهای آنها به‌ازای هر x در I، بترتیب، مساوی $\max\{f(x), g(x)\}$ و $\min\{f(x), g(x)\}$ باشند.

بآسانی می‌توان وجود خاصیتهای زیر را در مورد max و min تحقیق کرد.

آ) $\max(f, g) + \min(f, g) = f + g$؛

ب) $\max(f + h, g + h) = \max(f, g) + h$
و $\min(f + h, g + h) = \min(f, g) + h$؛

هرگاه $f_n \nearrow f$ ت. ه. بر I، و $g_n \nearrow g$ ت. ه. بر I، آنگاه

ج) $\max(f_n, g_n) \nearrow \max(f, g)$ ت. ه. بر I، و $\min(f_n, g_n) \nearrow \min(f, g)$ ت. ه. بر I.

قضیهٔ ۹.۱۰ هرگاه $f \in U(I)$ و $g \in U(I)$، آنگاه $\max(f, g) \in U(I)$ و $\min(f, g) \in U(I)$.

برهان. فرض کنیم $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دنباله‌هائی از تابعهای پله‌ای باشند که، بترتیب، f و g را تولیدکنند. قرار می‌دهیم $u_n = \max(s_n, t_n)$ و $v_n = \min(s_n, t_n)$. در این صورت، u_n و v_n تابعهائی پله‌ای هستند بطوری که $u_n \nearrow \max(f, g)$ و $v_n \nearrow \min(f, g)$ ت. ه. بر I.

برای اثبات این که $\min(f, g) \in U(I)$، کافی است نشان دهیم که دنبالهٔ $\{\int_I v_n\}$ از بالا کراندار است. اما $v_n = \min(s_n, t_n) \leqslant f$ ت. ه. بر I، پس $\int_I v_n \leqslant \int_I f$. بنابراین، دنبالهٔ $\{\int_I v_n\}$ همگرا است. اما دنبالهٔ $\{\int_I u_n\}$ نیز همگرا است زیرا، بنابر خاصیت (آ)، $u_n = s_n + t_n - v_n$، و در نتیجه

$$\int_I u_n = \int_I s_n + \int_I t_n - \int_I v_n$$
$$\to \int_I f + \int_I g - \int_I \min(f, g).$$

قضیهٔ زیر خاصیت جمعپذیری انتگرال را برحسب بازهٔ انتگرالگیری نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۵.۱۰ فرض کنیم بازهٔ I به‌صورت اجتماع دو زیربازه باشد، مثلاً $I = I_1 \cup I_2$، بقسمی که I_1 و I_2 نقطهٔ درونی مشترک نداشته باشند.

آ) هرگاه $f \in U(I)$ و $f \geqslant 0$ ت. هـ. بر I، آنگاه $f \in U(I_1)$، $f \in U(I_2)$، و

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f. \tag{۶}$$

ب) فرض کنیم $f_1 \in U(I_1)$ و $f_2 \in U(I_2)$. تابع f را بر I به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) ، & x \in I_1 \text{ اگر} \\ f_2(x) ، & x \in I - I_1 \text{ اگر} \end{cases}$$

دراین صورت، $f \in U(I)$ و

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2.$$

برهان. اگر $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهائی پله‌ای باشد که f را بر I تولید کند، به‌ازای هر x در I، قرار می‌دهیم $s_n^+(x) = \max\{s_n(x), 0\}$. دراین‌صورت، چون $f \geqslant 0$، $\{s_n^+\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای نامنفی است که f را بر I تولید می‌کند. بعلاوه، به‌ازای هر زیربازهٔ J مانند I، $\int_J s_n^+ \leqslant \int_I s_n^+ \leqslant \int_I f$، پس $\{s_n^+\}$ تابع f را بر J تولید خواهد کرد. همچنین،

$$\int_I s_n^+ = \int_{I_1} s_n^+ + \int_{I_2} s_n^+.$$

حال اگر در رابطهٔ بالا $n \to \infty$، قسمت (آ) نتیجه خواهد شد. اثبات قسمت (ب) به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

تبصره. قضیه‌ای مشابه بالا برای حالتی که بازه به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی زیربازه باشد و هیچ دو بازه‌ای نقطهٔ مشترک درونی نداشته باشند وجود دارد. این قضیه را می‌توان به‌استقرا ثابت کرد.

۵.۱۰ تابعهائی که انتگرال ریمان دارند به‌عنوان مثالهائی از تابعهای بالائی

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که ردهٔ تابعهای بالائی، همهٔ تابعهائی که انتگرال ریمان دارند در برمی‌گیرد.

قضیهٔ ۱۱.۱۰ فرض‌کنیم f تابعی باشد که بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ تعریف شده وکراندار و تقریباً همه‌جا بر $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت، $f \in U([a,b])$ و انتگرال f، به‌عنوان تابعی در $U([a, b])$، مساوی انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)dx$ خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2^n}\}$ یک افراز $[a, b]$ باشدکه این بازه را به 2^n زیربازهٔ متساوی، هریک به درازای $(b-a)/2^n$، تقسیم کند. زیر-بازه‌های P_{n+1} از نصف کردن زیربازه‌های P_n حاصل می‌شوند. فرض می‌کنیم

به‌ازای $1 \leqslant k \leqslant 2^n$ ، $m_k = \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$،

و تابع پله‌ای s_n را بر $[a, b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $x_{k-1} < x \leqslant x_k$ ، $s_n(x) = m_k$ ، و $s_n(a) = m_1$.

دراین صورت، به‌ازای هر x در $[a, b]$، $s_n(x) \leqslant f(x)$. همچنین، $\{s_n\}$ صعودی است زیرا $\inf f$ در یک زیربازهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ از $\inf f$ در خود $[x_{k-1}, x_k]$ کوچکتر نمی‌تواند بود.

دیگرآن که، ثابت می‌کنیم که $s_n(x) \to f(x)$ در هرنقطهٔ درونی که نقطهٔ پیوستگی f باشد. چون مجموعهٔ ناپیوستگیهای f بر $[a, b]$ دارای اندازهٔ صفر است، پس ثابت می‌شود که $s_n \to f$ تقریباً همه‌جا بر $[a, b]$. هرگاه f در x پیوسته باشد، آنگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، مقداری مانند δ (وابسته به x و ε) وجود دارد بقسمی که

اگر $x - \delta < y < x + \delta$ ، $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$.

فرض می‌کنیم $m(\delta) = \inf\{f(y) | y \in]x-\delta, x+\delta[\}$. در این صورت $f(x) - \varepsilon \leqslant m(\delta)$، پس $f(x) \leqslant m(\delta) + \varepsilon$. افرازی مانند P_N زیربازه‌ای چون $[x_{k-1}, x_k]$ دارد که حاوی x است و در داخل بازهٔ $]x-\delta, x+\delta[$ قرار می‌گیرد. بنابراین،

$$s_N(x) = m_k \leqslant f(x) \leqslant m(\delta) + \varepsilon \leqslant m_k + \varepsilon = s_N(x) + \varepsilon.$$

اما به‌ازای هر n، $s_n(x) \leqslant f(x)$، و به‌ازای هر $n \geqslant N$ ، $s_N(x) \leqslant s_n(x)$. از این روی،

اگر $n \geqslant N$ ، $s_n(x) \leqslant f(x) \leqslant s_n(x) + \varepsilon$،

که از این معلوم می‌شود که وقتی که $n \to \infty$، $s_n(x) \to f(x)$.

دنبالهٔ $\{\int_a^b s_n\}$ از انتگرالها همگرا است زیرا که دنباله‌ای است صعودی، که از بالا به $M(b-a)$ کراندار است، که درآن $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. بعلاوه،

$$\int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k(x_k - x_{k-1}) = L(P_n, f),$$

که درآن $L(P_n, f)$ یک مجموع ریمان پائینی است. چون حد یک دنبالهٔ صعودی مساوی‌سوپرمم آن است، پس‌دنبالهٔ $\{\int_a^b s_n\}$ به‌انتگرال ریمان f روی $[a, b]$ همگرا خواهد بود. (به‌موجب محک لبگ، یعنی قضیهٔ ۴۸.۷، انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)dx$ وجود دارد.)

تبصره. همان طور که پیشتر گفته شد، در $U(I)$ تابعهائی مانند f وجود دارند بقسمی که $f \notin U(I)$ —. بنابراین، ردهٔ $U(I)$ عملاً از ردهٔ تابعهائی که بر I انتگرال ریمان دارند بزرگتر است، زیرا که اگر $f \in R$ بر I باشد، $f \in R$ — بر I خواهد بود.

۶.۱۰ ردهٔ تابعهائی که بر یك بازهٔ کلی انتگرال لبگ دارند

اگر u و v دو تابع بالائی باشند، تفاضل $u - v$ لزوماً تابعی بالائی نیست. این خاصیت نامطلوب را با وسیع کردن ردهٔ تابعهای انتگرالپذیر از بین می بریم.

تعریف ۱۲.۱۰ مجموعهٔ همهٔ تابعهائی به‌شکل $f = u - v$ را، که درآن

$$u \in U(I) \text{ و } v \in U(I)$$

با نماد $L(I)$ نشان می‌دهیم. گوئیم هر تابع مانند f در $L(I)$ بر I انتگرال لبگ دارد، و انتگرال آن‌را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v. \tag{۷}$$

اگر $f \in L(I)$، ممکن است f را به‌بیش از یک طریق به‌صورت تفاضل دو تابع بالائی، یعنی $u - v$، درآورد. قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که انتگرال f از انتخاب u و v مستقل است.

قضیهٔ ۱۳.۱۰ فرض کنیم u، v، u_1 و v_1 تابعهائی در $U(I)$ باشند بقسمی که $u - v = u_1 - v_1$. در این صورت

$$\int_I u - \int_I v = \int_I u_1 - \int_I v_1. \tag{۸}$$

برهان. تـابعهای $u + v_1$ و $u_1 + v$ در $U(I)$ هستند و $u + v_1 = u_2 + v$.
از این روی، بنا بـر قضیهٔ ۶.۱۰ (آ)، داریم $\int_I u + \int_I v_1 = \int_I u_1 + \int_I v$،
که از این رابطهٔ (۸) ثابت می‌شود.

تبصره. اگر $a \leqslant b$ و a و b نقطه‌های انتهائی بازهٔ I در دستگاه عـددهای حقیقی وسعت یافتهٔ $\mathbf{R}^*$ باشند، ما علامت

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b f$$

را برای انتگرال لبگ $\int_I f$ نیز بکار می‌بریم. و نیز تعریف می‌کنیم که

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

اگر $[a, b]$ بازه‌ای فشرده باشد، هر تابع که بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد در $U([a, b])$، و در نتیجه در $L([a, b])$ نیز خواهد بود.

۷.۱۰ خاصیتهای اساسی انتگرال لبگ

قضیهٔ ۱۴.۱۰ فرض کنیم $f \in L(I)$ و $g \in L(I)$. در این صورت:

آ) به ازای هر دو عدد حقیقی a و b، $(af + bg) \in L(I)$، و

$$\int_I (af + bg) = a\int_I f + b\int_I g.$$

ب) هرگاه $f(x) \geqslant 0$ ت. ه. بر I، آنگاه $\int_I f \geqslant 0$.

ج) هرگاه $f(x) \geqslant g(x)$ ت. ه. بر I، آنگاه $\int_I f \geqslant \int_I g$.

د) هرگاه $f(x) = g(x)$ ت. ه. بر I، آنگاه $\int_I f = \int_I g$.

برهان. قسمت (آ) بسادگی از قضیـهٔ ۶.۱۰ نتیجه می‌شود. بـرای اثبـات (ب) می‌نـویسیم $f = u - v$، که در آن $u \in U(I)$ و $v \in U(I)$. در ایـن صـورت، $u(x) \geqslant v(x)$ ت. ه. بر I، پس بنا بر قضیهٔ ۶.۱۰ (ج)، داریم $\int_I u \geqslant \int_I v$، ودر نتیجه،

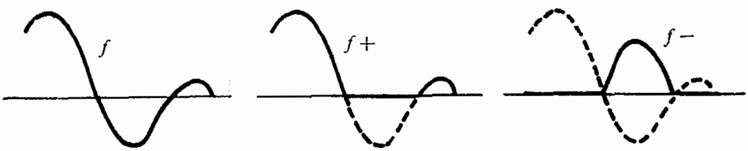
$$\int_I f = \int_I u - \int_I v \geqslant 0.$$

قسمت (ج) نتیجهٔ کاربرد قسمت (ب) است در مورد $f - g$، و قسمت (د) ازدوبار

کاربرد (ج) نتیجه می‌گردد.

تعریف ۱۵.۱۰ اگر f تابعی حقیقی باشد، قسمتهای مثبت و منفی آن، بترتیب، با علامتهای f^+ و f^- نشان داده، و با معادله‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$f^+ = \max(f, \circ) \ , \ f^- = \max(-f, \circ).$$



شکل ۱.۱۰

توجه داشته باشید که f^+ و f^- تابعهائی نامنفی هستند و

$$f = f^+ - f^- \ , \ |f| = f^+ + f^-.$$

در شکل ۱.۱۰ مثالهائی آورده شده‌اند.

قضیهٔ ۱۶.۱۰ هرگاه f و g در $L(I)$ باشند، آنگاه تابعهای f^+، f^-، $|f|$، $\max(f, g)$، و $\min(f, g)$ نیز در $L(I)$ هستند. بعلاوه،

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|. \tag{۹}$$

برهان. می‌نویسیم $f = u - v$، که درآن $u \in U(I)$ و $v \in U(I)$. در این صورت،

$$f^+ = \max(u - v, \circ) = \max(u, v) - v.$$

اما، بنابرقضیهٔ ۹.۱۰، $\max(u, v) \in U(I)$، و چون $v \in U(I)$، پس $f^+ \in L(I)$. چون $f^- = f^+ - f$، ملاحظه می‌شود که $f^- \in L(I)$. بالاخره، از $|f| = f^+ + f^-$ نتیجه می‌شود که $|f| \in L(I)$.

چون به‌ازای هر x در I، $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$، نتیجه می‌گیریم که

$$-\int_I |f| \leqslant \int_I f \leqslant \int_I |f|,$$

که ازآن (۹) ثابت می‌شود. برای اتمام برهان از رابطه‌های زیرین استفاده می‌کنیم:

$$\max(f, g) = \tfrac{۱}{۲}(f + g + |f - g|),$$
$$\min(f, g) = \tfrac{۱}{۲}(f + g - |f - g|).$$

در قضیهٔ زیرین رفتار انتگرال لبگ، وقتی بازهٔ انتگرالگیری درآن منتقل، منبسط یا منقبض شود، و یا نسبت به‌مبدأ منعکس گردد، شرح داده می‌شود. در این قضیه این نمادها را بکار می‌بریم. به‌ازای هرعدد حقیقی c،

$$I + c = \{x + c | x \in I\}, \ \ cI = \{cx | x \in I\}.$$

قضیهٔ ۱۷.۱۵ فرض کنیم که $f \in L(I)$. در این صورت:

آ) نامتغیر بودن انتگرال با انتقال بازهٔ انتگرالگیری. هرگاه به ازای هر x در $I + c$، $g(x) = f(x - c)$، آنگاه $g \in L(I + c)$، و

$$\int_{I+c} g = \int_I f.$$

ب) رفتار انتگرال با انبساط یا انقباض بازهٔ انتگرالگیری. هرگاه به ازای هر x در cI، $g(x) = f(x/c)$، که در آن $c > ۰$، آنگاه $g \in L(cI)$، و

$$\int_{cI} g = c \int_I f.$$

ج) نامتغیربودن انتگرال با انعکاس بازهٔ انتگرالگیری. هرگاه به‌ازای هر x در $-I$، $g(x) = f(-x)$، آنگاه $g \in L(-I)$ و

$$\int_{-I} g = \int_I f.$$

تبصره. اگر a و b، نقطه‌های انتهائی I، در دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافتهٔ R^* باشند و $a < b$، دستور مذکور در (آ) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x - c)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

خاصیتهای مذکور در (ب) و(ج) را می‌توان با دستور واحدی، که شامل cهای مثبت و منفی هردو باشد، بدین‌صورت بیان نمود:

اگر $c \neq ۰$، $\int_{ca}^{cb} f(x/c)dx = |c| \int_a^b f(x)dx$.

برهان. در اثبات قضیه‌ای از این نوع، روش استدلال همواره یکی است. نخست قضیه برای تابعهای پله‌ای، سپس برای تابعهای بالائی، و سرانجام برای تابعهائی که انتگرال لبگ دارند تحقیق می‌شود. در هرقدم استدلال سرراست است، بنابراین از ذکر جزئیات صرف‌نظر می‌شود.

قضیهٔ ۱۸.۱۰ فرض کنیم بازهٔ I اجتماع دو زیربازه، مثلاً $I = I_1 \cup I_2$، باشد، بقسمی که I_1 و I_2 نقطهٔ درونی مشترک نداشته باشند.

آ) هرگاه $f \in L(I)$، آنگاه $f \in L(I_1)$، $f \in L(I_2)$، و

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

ب) فرض کنیم $f_1 \in L(I_1)$، $f_2 \in L(I_2)$، و تابع f بر I به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{اگر } x \in I_1 \\ f_2(x) & \text{اگر } x \in I - I_1 \end{cases}.$$

در این صورت، $f \in L(I)$ و $\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2$.

برهان. می‌نویسیم $f = u - v$، که در آن $u \in U(I)$ و $v \in U(I)$. چون $u = u^+ - u^-$ و $v = v^+ - v^-$، پس $f = u^+ + v^- - (u^- + v^+)$. حال اگر قضیهٔ ۱۵.۱۰ را در مورد هر یک از تابعهای نامنفی $u^+ + v^-$ و $u^- + v^+$ بکار بریم، قسمت (آ) نتیجه می‌شود. اثبات قسمت (ب) به خواننده واگذار می‌گردد.

تبصره. قضیهٔ ۱۸.۱۰ را می‌توان برای بازه‌ای متشکل از اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌هائی که هیچ دوتای آنها نقطهٔ درونی مشترک نداشته باشند وسعت داد. خواننده می‌تواند این قضیه را برای خود تنظیم نماید.

این بخش را با دو خاصیت تقریب، که بعداً مورد نیاز خواهند بود، خاتمه می‌دهیم. خاصیت نخستین این است که هر تابع مانند f که انتگرال لبگ داشته باشد مساوی فزونی یک تابع بالائی مانند u بر تابعی بالائی و نامنفی با انتگرال کوچک مانند v است. خاصیت دوم این که f مساوی مجموع یک تابع پله‌ای‌مانند s و تابعی انتگرالپذیر با انتگرال کوچک مانند g است. با بیان دقیقتر می‌توان گفت:

قضیهٔ ۱۹.۱۰ فرض کنیم $f \in L(I)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت:

آ) تابعهائی مانند u و v در $U(I)$ وجود دارند بقسمی که $f = u - v$، که در آن v نامنفی است ت. ه. بر I و $\int_I v < \varepsilon$.

ب) تابعی‌پله‌ای‌مانند s و تابعی‌مانند g در $L(I)$ وجود دارند بقسمی‌که $f = s + g$ که در آن $\int_I |g| < \varepsilon$.

برهان. چون $f \in L(I)$، می‌توان نوشت $f = u_1 - v_1$ که در آن u_1 و v_1 در $U(I)$ باشند. فرض کنیم $\{t_n\}$ دنباله‌ای باشد که v_1 را تولیدکند. چون $\int_I t_n \to \int_I v_1$، می توان N را بقسمی اختیار کرد که $0 \leqslant \int_I (v_1 - t_N) < \varepsilon$. حال قرار می‌دهیم $v = v_1 - t_N$ و $u = u_1 - t_N$. در این صورت، u و v هر دو در $U(I)$ هستند و $u - v = u_1 - v_1 = f$. همچنین، v نامنفی است ت. ه. بر I و $\int_I v < \varepsilon$. از این (آ) ثابت می‌شود.

برای اثبات (ب) از قسمت (آ) استفاده نموده، u و v را در $U(I)$ بقسمی اختیار می‌کنیم که $v \geqslant 0$ ت. ه. بر I،

$$f = u - v \quad \text{و} \quad 0 \leqslant \int_I v < \frac{\varepsilon}{2}.$$

حال تابعی پله‌ای مانند s را چنان برمی‌گزینیم که $0 \leqslant \int_I (u - s) < \varepsilon/2$. در این صورت،

$$f = u - v = s + (u - s) - v = s + g,$$

که در آن $g = (u - s) - v$. از این روی، $g \in L(I)$، و

$$\int_I |g| \leqslant \int_I |u - s| + \int_I |v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

۸.۱۰ انتگرالگیری لبگ و مجموعه‌های دارای اندازهٔ صفر

قضیه‌های این بخش نشان می‌دهندکه رفتار تابعی‌که انتگرال لبگ دارد برمجموعه‌ای دارای اندازهٔ صفر به انتگرال آن تأثیری نمی‌گذارد.

قضیهٔ ۲۰.۱۰ فرض کنیم تابع f بر I تعریف شده باشد. هرگاه $f = 0$ تقریباً همه جا بر I، آنگاه $f \in L(I)$ و $\int_I f = 0$.

برهان. فرض کنیم به ازای هر x در I، $s_n(x) = 0$. در این صورت، $\{s_n\}$ دنباله‌ای است صعودی از تابعهای پله‌ای که همه جا بر I به صفر همگرا است. از این روی، $\{s_n\}$ تقریباً همه جا بر I به f همگرا خواهد بود. چون $\int_I s_n = 0$، پس

دنبالهٔ $\{\int_I s_n\}$ همگرا است. بنابراین، f یک تابع بالائی است، در نتیجهٔ $f \in L(I)$ و $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n = 0$.

قضیهٔ ۲۱.۱۰ فرض کنیم تابعهای f و g بر I تعریف شده باشند. هرگاه $f \in L(I)$ و $f = g$ تقریباً همه جا بر I، آنگاه $g \in L(I)$ و $\int_I f = \int_I g$.

برهان. قضیهٔ ۲۰.۱۰ را در مورد $f - g$ بکار می‌بریم. در این صورت، $f - g \in L(I)$ و $\int_I (f-g) = 0$. پس $g = f - (f - g) \in L(I)$ و $\int_I g = \int_I f - \int_I (f-g) = \int_I f$.

مثال. تابع f را بر بازهٔ $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد،} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد،} \end{cases}$$

در این صورت، $f = 0$ تقریباً همه جا بر $[0, 1]$، پس f بر $[0, 1]$ انتگرال لبگ دارد و انتگرال لبگ آن مساوی صفر است. همان طور که در فصل ۷ خاطر نشان شد، این تابع بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان ندارد.

تبصره. قضیهٔ ۲۱.۱۰ تعریفی برای انتگرال تابعهائی که تقریباً همه جا بر I تعریف شده باشند پیشنهاد می‌کند. اگر g یک چنین تابعی باشد، و به ازای تابعی مانند $f \in L(I)$، $g(x) = f(x)$ تقریباً همه جا بر I، می‌گوئیم که $g \in L(I)$ و

$$\int_I g = \int_I f.$$

۹.۱۰ قضیه‌های همگرائی یکنوای لوی[1]

اینک به قضیه‌های همگرائی مربوط به انتگرالگیری جمله به جملهٔ دنباله‌های یکنوا از تابعها می‌پردازیم. ما با سه روایت از قضیهٔ معروف لوی آغاز می‌کنیم. نخستین روایت دربارهٔ دنباله‌هائی از تابعهای پله‌ای است، دومین روایت دربارهٔ دنباله‌هائی از تابعهای بالائی، و سومین در بارهٔ دنباله‌هائی است از تابعهائی که انتگرال لبگ دارند. هرچند این قضیه‌ها برای دنباله‌هائی صعودی بیان می‌شوند، نتیجه‌هائی نظیر آنها برای دنباله‌های نزولی نیز معتبر خواهند بود.

قضیهٔ ۲۲.۱۰ (قضیهٔ لوی برای تابعهای پله‌ای). فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای باشد بقسمی که

1. Beppo Levi

(آ) $\{s_n\}$ بر بازهٔ I صعودی باشد، و

(ب) $\lim_{n\to\infty}\int_I s_n$ وجود داشته باشد.

در این صورت، $\{s_n\}$ تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند f در $U(I)$ همگرا است، و

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty}\int_I s_n.$$

برهان. بی آن که به کلیت خللی وارد آید، می‌توان فرض کرد که تابعهای پله‌ای s_n نامنفی باشند. (اگر چنین نباشد، دنبالهٔ $\{s_n - s_1\}$ را به جای $\{s_n\}$ در نظر می‌گیریم. هرگاه قضیه برای $\{s_n - s_1\}$ درست باشد، آنگاه برای $\{s_n\}$ نیز درست خواهد بود.) فرض کنیم D مجموعهٔ xهائی در I باشد که به ازای آنها $\{s_n(x)\}$ واگرا باشد، و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. ثابت می‌کنیم که D دارای اندازهٔ صفر است. برای این کار نشان می‌دهیم که D را می‌توان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌ها پوشانید، که مجموع درازاهای آنها از ε کمتر باشد.

چون دنبالهٔ $\{\int_I s_n\}$ همگرا است، پس به پایای مثبتی مانند M کراندار است. فرض کنیم

$$\text{اگر } x \in I\text{،}\quad t_n(x) = \left[\frac{\varepsilon}{2M} s_n(x)\right]\text{،}$$

که در آن $[y]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از y را نشان می‌دهد. دراین صورت، $\{t_n\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای است و هر $t_n(x)$ عددی صحیح و نامنفی است.

هرگاه $\{s_n(x)\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{s_n(x)\}$ کراندار است، پس $\{t_n(x)\}$ کراندار است، و در نتیجه، چون هر $t_n(x)$ عددی صحیح است، پس به ازای هر n به‌قدر کافی بزرگ، $t_{n+1}(x) = t_n(x)$.

هرگاه $\{s_n(x)\}$ واگرا باشد، آنگاه $\{t_n(x)\}$ نیز واگرا است، و به ازای تعدادی نامتناهی از مقدارهای n، $t_{n+1}(x) - t_n(x) \geqslant 1$. قرار می‌دهیم

$$D_n = \{x \mid t_{n+1}(x) - t_n(x) \geqslant 1 \quad \text{و} \quad x \in I\}.$$

در این‌صورت، D_n اجتماع تعدادی متناهی بازه است. مجموع درازاهای بازه‌های موجود درآن را به $|D_n|$ نشان می‌دهیم. چون

$$D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

پس اگر ثابت کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| < \varepsilon$ ، نشان داده‌ایم کـه D دارای انـدازهٔ صفر است .

بـرای این مطلب اگـر از تابع پله‌ای و نامنفی $t_{n+1} - t_n$ روی I انتگرال بگیریم، نامساویهای زیر نتیجه می‌شوند :

$$\int_I (t_{n+1} - t_n) \geqslant \int_{D_n} (t_{n+1} - t_n) \geqslant \int_{D_n} 1 = |D_n| \cdot$$

از این روی، به‌ازای هر $m \geqslant 1$ داریم

$$\sum_{n=1}^{m} |D_n| \leqslant \sum_{n=1}^{m} \int_I (t_{n+1} - t_n) = \int_I t_{m+1} - \int_I t_1$$
$$\leqslant \int_I t_{m+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \int_I s_{m+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

بنابراین، $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ ، پس D دارای اندازهٔ صفر می‌باشد.

پس ثابت شد که $\{s_n\}$ تقریباً همه‌جا بر I همگرا است . فرض می‌کنیم

$$\cdot\ f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} s_n(x) & \text{،} \quad x \in I - D \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{،} \quad x \in D \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در این صورت، f همه‌جا بر I تعریف شده است و $s_n \to f$ تقریباً همه‌جا بر I .

بنابراین، $f \in U(I)$ و $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n$.

قضیهٔ ۲۳.۱۵ (قضیهٔ لوی برای تابعهای بالائی). فـرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای بالائی باشد بقسمی که

آ) $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا بربازهٔ I صعودی باشد ؛

و

ب) $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ وجود داشته باشد .

در این صورت، $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مـانند f در $U(I)$ همگرا است ، و

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \cdot$$

برهان. به‌ازای هر k ، دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_{n,k}\}$ هست کـه f_k را تولید می‌کند. تابع پله‌ای جدید t_n را بر I با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم :

$$t_n(x) = \max\{s_{n,1}(x),\ s_{n,2}(x),\ \cdots,\ s_{n,n}(x)\} \cdot$$

دنبالهٔ $\{t_n\}$ بر I صعودی است زیرا

$$\begin{aligned} t_{n+1}(x) &= \max\{s_{n+1,1}(x), \cdots, s_{n+1,n+1}(x)\} \\ &\geqslant \max\{s_{n,1}(x), \cdots, s_{n,n+1}(x)\} \\ &\geqslant \max\{s_{n,1}(x), \cdots, s_{n,n}(x)\} = t_n(x) . \end{aligned}$$

اما $s_{n,k}(x) \leqslant f_k(x)$ و $\{f_k\}$ تقریباً همه‌جا بر I صعودی است، پس

$$t_n(x) \leqslant \max\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\} = f_n(x) \tag{۱۰}$$

تقریباً همه‌جا بر I . بنابراین، از قضیهٔ ۶.۱۰ (ج) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_I t_n \leqslant \int_I f_n . \tag{۱۱}$$

اما ، بنابر (ب)، دنبالهٔ $\{\int_I f_n\}$ از بالا کراندار است، پس دنبالـهٔ صعودی $\{\int_I t_n\}$ نیز از بالا کراندار بوده، در نتیجه همگرا خواهد بـود. به‌موجب قضیهٔ لـوی برای تابعهای پله‌ای، دنبالهٔ $\{t_n\}$ تقریباً همه‌جا بر I به‌تابع حدی مانند f در $U(I)$ همگرا است، و $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I t_n$. اینک ثابت می‌کنیم‌که $f_n \to f$ تقریباً همه‌جا بر I.

از تعریف $t_n(x)$ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $k \leqslant n$ و هر x در I ،

$$s_{n,k}(x) \leqslant t_n(x) .$$

اگر $n \to \infty$ ، خواهیم داشت

$$f_k(x) \leqslant f(x) \quad \text{تقریباً همه‌جا بر } I . \tag{۱۲}$$

بنابراین، دنبالهٔ صعودی $\{f_k(x)\}$ تقریباً همه‌جا بر I از بالا به $f(x)$ کراندار است، و در نتیجه این دنبالـه تقریباً همه‌جا بر I به تابع حدی مانند g همگـرا است کـه $g(x) \leqslant f(x)$ تقریباً همه‌جا بر I . اما، بنابه رابطهٔ(۱۰)، $t_n(x) \leqslant f_n(x)$ تقریباً همه‌جا بر I ، پس اگر $n \to \infty$ ، نتیجه می‌شود که $f(x) \leqslant g(x)$ تقریباً همه جا بر I. با بیان دیگر می‌توان گفت که،

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{تقریباً همه‌جا بر } I .$$

سرانجـام ، نشان می‌دهیم کـه $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$. اگـر در (۱۱) $n \to \infty$ ، خواهیم داشت

$$\int_I f \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_I f_n . \tag{۱۳}$$

حال ، با استفادهٔ دوباره از قضیهٔ ۶.۱۰ (ج) ، از رابطهٔ (۱۲) انتگرال می‌گیریـم ،

نتیجه می‌شود که $\int_I f_k \leqslant \int_I f$. اگر $k \to \infty$ ، خواهیم داشت

$$\lim_{k\to\infty}\int_I f_k \leqslant \int_I f,$$

که این نامساوی و نامساوی (۱۳) برهان حکم را تمام می‌کنند .

تبصره. ردهٔ تابعهای بالائی، یعنی $U(I)$. از ردهٔ تابعهای پله‌ای ، یعنی $S(I)$، بـا روشی ساخته شد که ما آن‌را P می‌نامیم. بنا بر قضیهٔ لوی، اگر این روش برعضوهای $U(I)$ اعمال شود ، تـابعهای حاصل بازهـم در $U(I)$ خواهند بود . قضیهٔ زیرنشان می‌دهد که وقتی P بـر عضو های $L(I)$ اعمال گردد ، تابعهای حاصل باز در $L(I)$ خواهند بود .

قضیهٔ ۲۴.۱۰ (قضیهٔ لوی برای دنباله‌های توابعی که انتگرال لبگ دارند). فـرض کنیـم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها در $L(I)$ باشد بقسمی که

آ) $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا بر I صعودی باشد ؛

و

ب) $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n$ وجود داشته باشد .

در این صورت ، $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جـا بـر I به تابع حدی مانند f در $L(I)$ همگرا خواهد بود ، و

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n \cdot$$

این قضیه را از قضیه‌ای هم‌ارز آن، که دربارهٔ رشته‌های توابع بیان می‌شود ، نتیجه می‌گیریم .

قضیهٔ ۲۵.۱۰ (قضیهٔ لوی برای رشته‌های توابعی که انتگرال لبگ دارند). فرض کنیم $\{g_n\}$ دنباله‌ای از تابعها در $L(I)$ باشد بقسمی که

آ) هر g_n تقریباً همه‌جا بر I نامنفی باشد ؛

و

ب) رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I g_n$ همگرا باشد .

در این صورت ، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جـا بر I به تابع مجموعی مانند g در $L(I)$ همگرا خواهد بود، و

$$\int_I g = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I g_n \cdot \tag{۱۴}$$

برهان. چون $g_n \in L(I)$، بنا بر قضیهٔ ۱۰.۱۹، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان نوشت

$$g_n = u_n - v_n ,$$

که در آن $u_n \in U(I)$، $v_n \in U(I)$، $v_n \geqslant 0$ تقریباً همه‌جا بر I، و $\int_I v_n < \varepsilon$. u_n و v_n را متناظر با $\varepsilon = (1/2)^n$ اختیار می‌کنیم. در این صورت،

$$u_n = g_n + v_n \quad \text{،} \quad \text{که در آن} \quad \int_I v_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

نامساوی بالا در مورد $\int_I v_n$ اطمینان می‌دهدکه رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I v_n$ همگرا است. حال گوئیم چون $u_n \geqslant 0$ تقریباً همه‌جا بر I، پس مجموعهای جزئی

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

تشکیل دنبالهٔ $\{U_n\}$ از تابعهای بالائی را می‌دهد که تقریباً همه‌جا بر I صعودی است. چون

$$\int_I U_n = \int_I \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_I u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_I g_k + \sum_{k=1}^{n} \int_I v_k ,$$

دنبالهٔ $\{\int_I U_n\}$ از انتگرالها همگرا است زیرا هر دو رشتهٔ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_I g_k \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_I v_k$$

همگرا هستند. بنابراین، بنا بر قضیهٔ لوی برای تابعهای بالائی، دنبالهٔ $\{U_n\}$ تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند U در $U(I)$ همگرا خواهد بود، و

$$\int_I U = \lim_{n\to\infty} \int_I U_n .$$

اما

$$\int_I U_n = \sum_{k=1}^{n} \int_I u_k ,$$

پس

$$\int_I U = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k .$$

بهمین نحو، دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{V_n\}$، که به صورت

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$$

داده می‌شود، تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند V در $U(I)$ همگرا است، و

$$\int_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I v_k.$$

بنابراین، $U - V \in L(I)$ و دنبالهٔ $\{U_n - V_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} g_k\}$ تقریباً همه جا بر I به $U - V$ همگرا خواهد بود. فرض کنیم که $g = U - V$. در این‌صورت، $g \in L(I)$ و

$$\int_I g = \int_I U - \int_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I (u_k - v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k.$$

با این برهان قضیهٔ ۲۵.۱۰ تمام می‌شود.

برهان قضیهٔ ۲۴.۱۰ فرض کنیم $\{f_n\}$ در مفروضات قضیهٔ ۲۴.۱۰ صدق کند. فرض می‌کنیم که $g_1 = f_1$، و به ازای $n \geqslant 2$، $g_n = f_n - f_{n-1}$، پس

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k.$$

با بکار بردن قضیهٔ ۲۵.۱۰ درمورد $\{g_n\}$، نتیجه می‌شودکه $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جا بر I به تابع مجموعی مانند g در $L(I)$ همگرا است، و معادلهٔ (۱۴) برقرار است. بنابراین، $f_n \to g$ تقریباً همه جا بر I و $\int_I g = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

در روایتی از قضیهٔ لوی برای رشته‌ها کــه ذیلاً گفته می‌شود، جمله‌هـای رشته نامنفی فرض نشده‌اند.

قضیهٔ ۲۶.۱۰ فرض کنیم $\{g_n\}$ دنباله‌ای از تابعها در $L(I)$ بـاشد بقسمی کــه رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I |g_n|$$

همگرا باشد. در ایـن صورت، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جا بر I به تابع مجموعی مانند g در $L(I)$ همگرا است، و

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n.$$

برهان. می‌نـویسیم $g_n = g_n^+ - g_n^-$ و قضیهٔ ۲۵.۱۰ را در مـورد دنباله‌های $\{g_n^+\}$ و $\{g_n^-\}$ جداگانه بکار می‌بریم.

مثالهای زیرین کاربرد قضیهٔ لوی در دنباله‌ها را مصور می‌سازند.

مثال ۱ فرض کنید به ازای $x > 0$، $f(x) = x^s$، و $f(0) = 0$. ثابت‌کنید

که اگر $s > -۱$، انتگرال لبگ $\int_۰^۱ f(x)dx$ وجود دارد و مقدار آن مساوی $۱/(s+۱)$ است.

حل. هرگاه $s \geqslant ۰$، آنگاه f بر $[۰, ۱]$ کراندار است و انتگرال ریمان دارد، و انتگرال ریمان آن مساوی $۱/(s+۱)$ می‌باشد.

هرگاه $s < ۰$، آنگاه f بر $[۰, ۱]$ کراندار نیست، و در نتیجه بر $[۰, ۱]$ انتگرال ریمان ندارد. دنباله‌ای از تابعها مانند $\{f_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^s & \text{اگر } x \geqslant ۱/n \text{،} \\ ۰ & \text{اگر } ۰ \leqslant x < ۱/n \text{،} \end{cases}$$

در این صورت، $\{f_n\}$ صعودی است و $f_n \to f$ همه جا بر $[۰, ۱]$. چون هر f_n بر $[۰, ۱]$ انتگرال ریمان دارد، پس براین بازه دارای انتگرال لبگ است و

$$\int_۰^۱ f_n(x)dx = \int_{۱/n}^۱ x^s dx = \frac{۱}{s+۱}\left(۱ - \frac{۱}{n^{s+۱}}\right).$$

اگر $s+۱ > ۰$، دنبالهٔ $\{\int_۰^۱ f_n\}$ به $۱/(s+۱)$ همگرا خواهد بود. بنابراین، قضیهٔ لوی برای دنباله‌ها نشان می‌دهد که $\int_۰^۱ f$ وجود دارد و مساوی $۱/(s+۱)$ است.

مثال ۲ با بحثی مشابه معلوم می‌شودکه، به ازای هر عدد حقیقی $y > ۰$، انتگرال لبگ $\int_۰^۱ e^{-x}x^{y-۱}dx$ وجود دارد. این انتگرال بعداً در بحث تابع گاما مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۱۰.۱۰ قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ

قضیه‌های لوی نتیجه‌های مهم متعدد دارند. اولین نتیجه قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ است، که پایهٔ نظریهٔ انتگرالگیری لبگ می‌باشد.

قضیهٔ ۲۷.۱۰ (قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ). فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهائی باشد که بر بازه‌ای چون I انتگرال لبگ داشته باشند. همچنین،

آ) $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند f همگرا باشد؛

و

ب) تابعی نامنفی مانند g در $L(I)$ وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر $n \geqslant ۱$،

$|f_n(x)| \leqslant g(x)$ ت. هـ. بر I.

در این صورت، $f \in L(I)$، دنبالهٔ $\{\int_I f_n\}$ همگرا است، و

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n. \qquad (۱۵)$$

تبصره. خاصیت (ب) را این‌طور توصیف می‌کنند که دنبالهٔ $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر I تحت تسلط g است.

برهان. روش اثبات این است که دو دنباله مانند $\{g_n\}$ و $\{G_n\}$، یکی صعودی و دیگری نزولی، بقسمی پیدا می‌کنیم که

$$g_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant G_n(x), \qquad (۱۶)$$

و این دو دنباله تقریباً همه جا بر I به تابع حد f همگرا باشند. سپس با بکار بردن قضیهٔ لوی نشان می‌دهیم که $f \in L(I)$ و $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n = \lim_{n\to\infty} \int_I G_n$، که از این رابطهٔ (۱۵) نتیجه خواهد شد.

برای ساختن $\{g_n\}$ و $\{G_n\}$، قضیهٔ لوی را چندین بار برای دنباله‌های موجود در $L(I)$ بکار می‌بریم. نخست دنبالهٔ $\{G_{n,1}\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_{n,1}(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}.$$

بنابر قضیهٔ ۱۰.۱۶، هر تابع $G_{n,1} \in L(I)$. همچنین، دنبالهٔ $\{G_{n,1}\}$ بر I صعودی است. چون $|G_{n,1}(x)| \leqslant g(x)$ تقریباً همه جا بر I، پس

$$\left|\int_I G_{n,1}\right| \leqslant \int_I |G_{n,1}| \leqslant \int_I g. \qquad (۱۷)$$

بنابراین، دنبالهٔ صعودی عددی $\{\int_I G_{n,1}\}$ ازبالا به $\int_I g$ کراندار بوده، در نتیجه $\lim_{n\to\infty}\int_I G_{n,1}$ وجود دارد. بنابر قضیهٔ لوی، دنبالهٔ $\{G_{n,1}\}$ تقریباً همه جا بر I به تابعی مانند G_1 در $L(I)$ همگرا است، و

$$\int_I G_1 = \lim_{n\to\infty} \int_I G_{n,1} \leqslant \int_I g.$$

بنابر (۱۷)، همچنین داریم که $-\int_I g \leqslant \int_I G_1$. توجه داشته باشید که هرگاه به‌ازای نقطهٔ x در I، $G_{n,1}(x) \to G_1(x)$، آنگاه نیز داریم

$$G_1(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}.$$

بهمین نحو، به‌ازای هر عدد ثابت $r \geqslant 1$ و هر $n \geqslant r$، قرار می‌دهیم

$$G_{n,r}(x) = \max\{f_r(x), f_{r+1}(x), \cdots, f_n(x)\}$$

در این‌صورت، دنبالهٔ $\{G_{n,r}\}$ صعودی است، و تقریباً همه‌جا بر I به‌تابع حدی مانند G_r در $L(I)$ همگرا خواهد بود، بطوری که

$$-\int_I g \leqslant \int_I G_r \leqslant \int_I g \cdot$$

همچنین، در نقطه‌هائی که $G_{n,r}(x) \to G_r(x)$ ، داریم

$$G_r(x) = \sup\{f_r(x), f_{r+1}(x), \cdots\},$$

پس

$f_r(x) \leqslant G_r(x)$ ت. ه. بر I.

اینک خاصیتهای دنبالهٔ $\{G_n(x)\}$ را بررسی می‌کنیم. چون $A \subseteq B$ ایجاب می‌کند که $\sup A \leqslant \sup B$، دنبالهٔ $\{G_r(x)\}$ تقریباً همه‌جا بر I نزولی است، و درنتیجه تقریباً همه‌جا بر I همگرا خواهد بود. اکنون نشان می‌دهیم که هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{۱۸}$$

آنگاه $G_n(x) \to f(x)$. گوئیم هرگاه (۱۸) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند N وجود دارد بقسمی که

به‌ازای هر $n \geqslant N$ ، $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$.

از این روی، اگر $m \geqslant N$ ،

$$f(x) - \varepsilon \leqslant \sup\{f_m(x), f_{m+1}(x), \cdots\} \leqslant f(x) + \varepsilon \cdot$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که،

$m \geqslant N$ ایجاب می‌کند که $f(x) - \varepsilon \leqslant G_m(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$ ،

و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{m\to\infty} G_m(x) = f(x) \text{ تقریباً همه جا بر } I . \tag{۱۹}$$

از سوی دیگر، دنبالهٔ نزولی عددی $\{\int_I G_n\}$ از پائین به $-\int_I g$ کراندار است، پس همگرا است. از رابطهٔ (۱۹) و قضیهٔ لوی معلوم می‌شود که $f \in L(I)$ و

$$\lim_{n\to\infty}\int_I G_n = \int_I f \cdot$$

با بکار بردن استدلالی مشابه بالا در مورد دنبالهٔ

$$g_{n,r}(x)=\min\{f_r(x),\ f_{r+1}(x),\ \cdots,\ f_n(x)\},\ n\geqslant r,$$

نتیجه می‌شود که دنبالهٔ $\{g_{n,r}\}$ نزولی است و تقریباً همه جا به‌تابع حدی مانند g_r در $L(I)$ همگرا است، که در آن

$$g_r(x)=\inf\{f_r(x),\ f_{r+1}(x),\ \cdots\}$$ ت . ه . بر I .

همچنین، تقریباً همه‌جا بر I، $g_r(x)\leqslant f_r(x)$، $\{g_r\}$ صعودی است، $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)$، و

$$\lim_{n\to\infty}\int_I g_n=\int_I f\cdot$$

چون رابطهٔ (۱۶) تقریباً همه‌جا بر I برقرار است، پس $\int_I g_n\leqslant\int_I f_n\leqslant\int_I G_n$. حال اگر $n\to\infty$، نتیجه می‌شود که دنبالهٔ $\{\int_I f_n\}$ همگرا است و

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=\int_I f\cdot$$

۱۱.۱۰ کاربرد های قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ

اولین‌کاربرد این قضیه مربوط است به‌انتگرال گرفتن جمله به‌جمله از یک رشته، و آن را می‌توان لنگهٔ قضیهٔ لوی برای رشته‌ها بحساب آورد .

قضیهٔ ۳۸.۱۰ فرض‌کنیم $\{g_n\}$ دنباله‌ای از تابعها در $L(I)$ باشد بقسمی که :

آ) هر g_n تقریباً همه‌جا بر I نامنفی باشد ؛

و

ب) رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه‌جا بر I به‌تابعی چون g همگرا باشد، که g از بالا به‌تابعی در $L(I)$ کراندار باشد .

در این صورت، $g\in L(I)$، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I g_n$ همگرا است، و

$$\int_I\sum_{n=1}^{\infty} g_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_I g_n\cdot$$

برهان، فرض می‌کنیم

اگر $x\in I$، $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$.

در این صورت، $f_n\to g$ تقریباً همه‌جا بر I، و $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا بر I تحت تسلط

تابعی در $L(I)$ است‌که g از بالا به‌آن کراندار است. بنابراین، بنا برقضیهٔ‌همگرائی تسلطی لبگ، $g \in L(I)$، دنبالهٔ $\{\int_I f_n\}$ همگرا است، و $\int_I g = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$. از این حکم ثابت می‌شود.

کاربرد دیگر، که گاهی قضیهٔ همگرائی کراندار لبگ نامیده می‌شود، مربوط است به‌بازه های کراندار.

قضیهٔ ۲۹.۱۰ فرض‌کنیم I بازه‌ای‌کراندار باشد. همچنین، $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها در $L(I)$ باشد که تقریباً همه‌جا بر I همگرای کراندار باشد. یعنی، تابع حدی مانند f و عددی پایا و مثبت مانند M وجود داشته باشند بقسمی که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ و } |f_n(x)| \leqslant M \text{ تقریباً همه‌جا بر } I.$$

در این صورت، $f \in L(I)$ و $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

برهان. به‌ازای هر x در I، قرار می‌دهیم $g(x) = M$، و قضیهٔ ۲۷.۱۰ را بکار می‌بریم. چون I بازهٔ کرانداری است، پس $g \in L(I)$.

تبصره. حالت خاصی از قضیهٔ ۲۹.۱۰ قضیهٔ آرزلا است که قبلاً (قضیهٔ ۱۲.۹) ذکر شده است. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهائی باشد که بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشند و این دنباله بر این بازه همگرای کراندار باشد، آنگاه هر $f_n \in L([a, b])$، تابع حد $f \in L([a ,b])$، و

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

هرگاه (همان طورکه درقضیهٔ آرزلا فرض شده بود) تابع حد f انتگرال ریمان داشته باشد، آنگاه انتگرال لبگ $\int_a^b f$ همان انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)dx$ خواهد بود.

قضیهٔ زیرین اغلب برای اثبات انتگرال لبگ داشتن تابعها بکار می‌رود.

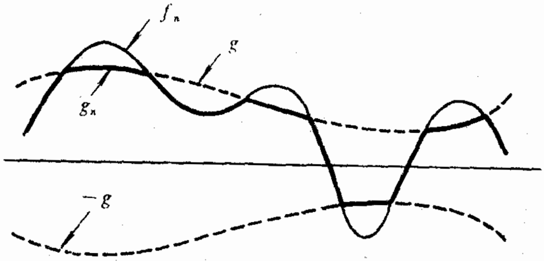
قضیهٔ ۳۰.۱۰ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابعها در $L(I)$ که تقریباً همه‌جا بر I به‌تابع حدی مانند f همگرا باشد. همچنین، تابعی‌نامنفی مانند g در $L(I)$ باشد بقسمی که

$$|f(x)| \leqslant g(x) \text{ ت. ه. بر } I.$$

در این صورت، $f \in L(I)$.

برهان. دنباله‌ای جدید از تابعها مانند $\{g_n\}$ را بر I به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_n = \max\{\min(f_n, g), -g\}.$$



شکل ۲.۱۰

تابع g_n از f_n به‌طور هندسی این‌طور بدست می‌آید که نمودار f_n را ازبالا به‌وسیلهٔ g و از پائین به‌وسیلهٔ $-g$ قطع کنیم، بقسمی‌که درمثال مذکور در شکل ۲.۱۰ نشان داده شده است. در این صورت، $|g_n(x)| \leqslant g(x)$ تقریباً همه‌جا بـر I، و بسادگی می‌توان تحقیق کرد که $g_n \to f$ تقریباً همه‌جا بر I. بنابراین، بنابر قضیهٔ همگـرائی تسلطی لبگ، $f \in L(I)$.

۱۲.۱۰ انتگرالهـای لبگ بربازه های بی‌کران به‌عنوان حدود انتگرالهـا بر بازه‌های کراندار

قضیهٔ ۳۱.۱۰ فـرض کنیم f بر بـازهٔ نیمه نـامتناهی $I = [a, +\infty[$ تعریف شده باشد، همچنین، به‌ازای هر $b \geqslant a$، f بربازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ انتگرال‌لبگ داشته باشد، و عدد پایا و مثبتی مانند M وجود داشته بقسمی که

$$\text{به‌ازای هر } b \geqslant a\text{،}\quad \int_a^b |f| \leqslant M. \tag{۲۰}$$

در این صورت، $f \in L(I)$، حد $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$ وجود دارد، و

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f. \tag{۲۱}$$

برهان. فرض کنیم $\{b_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عـدد های حقیقی باشد بقسمی کـه $b_n \geqslant a$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. دنبالهٔ $\{f_n\}$ را بر I به‌صورت زیـر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } a \leqslant x \leqslant b_n\text{،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}.$$

بنا بر قضیهٔ ۱۸.۱۰، هر $f_n \in L(I)$، و $f_n \to f$ بر I. از این‌روی، $|f_n| \to |f|$ بر I. ولی $|f_n|$ صعودی است، و، بنا بر (۲۰)، دنبالهٔ $\{\int_I |f_n|\}$ از بالا به M کراندار است. بنا براین، $\lim_{n\to\infty} \int_I |f_n|$ وجود دارد. بنا بر قضیهٔ لوی، تابع حد $|f| \in L(I)$. حال‌گوئیم چون به‌ازای هر n، $|f_n| \leqslant |f|$، و $f_n \to f$ بر I، پس بنا بر قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ، $f \in L(I)$ و $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int_I f$.
بنا براین، به‌ازای همهٔ دنباله‌هائی مانند $\{b_n\}$ که به $+\infty$ صعود کنند،

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f = \int_a^{+\infty} f.$$

از این برهان قضیه تمام می‌شود.

البته قضیه‌ای نظیر قضیهٔ بالا برای بازهٔ $]-\infty$ و $a]$ وجود دارد که درصورتی که به‌ازای هر $c \leqslant a$، $\int_c^a |f| \leqslant M$، بدین نتیجه می‌رسد:

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f.$$

اگر به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی c و b با شرط $c \leqslant b$، داشته باشیم $\int_c^b |f| \leqslant M$ از دو قضیهٔ بالا برمی‌آید که $f \in L(\mathbf{R})$ و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f + \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f.$$

مثال ۱ فرض می‌کنیم به‌ازای هر x در $\mathbf{R}$، $f(x) = ۱/(۱+x^۲)$. ثابت می‌کنیم که $f \in L(\mathbf{R})$ و $\int_R f = \pi$. گوئیم f نامنفی است، و اگر $c \leqslant b$،

$$\int_c^b f = \int_c^b \frac{dx}{۱+x^۲} = \operatorname{arc\,tan} b - \operatorname{arc\,tan} c \leqslant \pi.$$

بنا براین، $f \in L(\mathbf{R})$ و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{c\to-\infty} \int_c^۰ \frac{dx}{۱+x^۲} + \lim_{b\to+\infty} \int_۰^b \frac{dx}{۱+x^۲} = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} = \pi.$$

مثال ۲ در این مثال حد طرف راست (۲۱) وجود دارد اما $f \notin L(I)$. فرض می‌کنیم که $I = [۰, +\infty[$، و تابع f را بر I به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، اگر $n-۱ \leqslant x < n$، $f(x) = \frac{(-۱)^n}{n}$.

اگر $b > ۰$، قرار می‌دهیم $m = [b]$، یعنی بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از b.

در این صورت،

$$\int_0^b f = \int_0^m f + \int_m^b f = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(b-m)(-1)^{m+1}}{m+1}$$

وقتی که $b \to +\infty$، آخرین جملهٔ طرف راست رابطهٔ بالا به صفر می‌گراید، و در نتیجه

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

حال فرض می‌کنیم که $f \in L(I)$ و تناقضی بدست می‌آوریم. f_n را چنین تعریف می‌کنیم:

$$.f_n(x) = \begin{cases} |f(x)|، & \text{به ازای } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 ، & \text{به ازای } x > n \end{cases}$$

در این صورت، $\{f_n\}$ صعودی است و $f_n(x) \to |f(x)|$ همه جا بر I. چون $f \in L(I)$، همچنین داریم $|f| \in L(I)$. اما $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$ همه جا بر I، پس، بنابرقضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ، دنبالهٔ $\{\int_I f_n\}$ همگرا است. ولی این یک تناقض است زیرا

$$\text{وقتی که } n \to \infty \text{،} \quad \int_I f_n = \int_0^n |f| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty.$$

۱۳.۱۰ انتگرالهای ریمان مجازی

تعریف ۳۲.۱۰ هرگاه به ازای هر $b \geqslant a$، تابع f بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد، و حد

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

نیز وجود داشته باشد، آنگاه گوئیم که f بر بازهٔ $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی دارد، و انتگرال ریمان مجازی f با $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ یا $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ نشان داده می‌شود و با معادلهٔ زیرین تعریف می‌گردد:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

در مثال ۲ بخش پیشین، انتگرال ریمان مجازی $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ وجود دارد

اما f بر $]\circ, +\infty[$ انتگرال لبگ ندارد. آن مثال را باید با قضیهٔ زیرین مقابله و مقایسه کرد.

قضیهٔ ۳۳.۱۰ فرض کنیم به ازای هر $b \geqslant a$، تابع f بر $[a,b]$ انتگرال ریمان داشته باشد. همچنین، عددی پایا و مثبت مانند M وجود داشته باشد بقسمی که

$$\text{به ازای هر } b \geqslant a \quad ، \quad \int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant M. \tag{۲۲}$$

در این صورت، f و $|f|$ هر دو بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی دارند. همچنین، f بر $[a, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد و انتگرال لبگ f مساوی است با انتگرال ریمان مجازی f.

برهان. قرار می‌دهیم $F(b) = \int_a^b |f(x)|\, dx$. F تابعی است صعودی که از بالا به M کراندار است، پس $\lim_{b\to+\infty} F(b)$ وجود دارد. بنابراین، $|f|$ بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی خواهد داشت. چون

$$\circ \leqslant |f(x)| - f(x) \leqslant ۲\,|f(x)|,$$

پس حد

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \{|f(x)| - f(x)\}\, dx$$

نیز وجود دارد؛ از این روی، $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ وجود دارد. این ثابت می‌کند که f بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی دارد. حال با استفاده از نامساوی (۲۲) و قضیهٔ ۳۱.۱۰، می‌توان نتیجه گرفت که f بر $[a, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد و انتگرال لبگ f مساوی است با انتگرال ریمان مجازی f.

تبصره. نتایجی نظیر آنچه دیدیم برای انتگرالهای ریمان مجازی به شکل

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{b\to c-} \int_a^b f(x)\, dx,$$

و

$$\int_c^b f(x)\, dx = \lim_{a\to c+} \int_a^b f(x)\, dx$$

وجود دارند، که خواننده می‌تواند آنها را برای خود تنظیم نماید.

اگر هر دو انتگرال $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ و $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ وجود داشته باشند، گوئیم انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ وجود دارد، و مقدار آن مساوی مجموع دو انتگرال بالا تعریف می‌شود، یعنی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

اگر انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ وجود داشته باشد، مقدار آن نیز مساوی است با حد تقارنی

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx.$$

در هر حال، توجه به این نکته مهم است که ممکن است حد تقارنی وجود داشته باشد حتی اگر انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ وجود پیدا نکند (مثلاً، به ازای هر x، فرض کنید که $f(x) = x$). در این حالت حد تقارنی مقدار عمدهٔ کشی $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ نامیده می‌شود. بنابراین، $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ دارای مقدار عمدهٔ کشی ۰ است، اما خود انتگرال وجود ندارد.

مثال ۱ فرض می‌کنیم $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$، که در آن y عدد حقیقی ثابتی باشد. چون وقتی که $x \to +\infty$، $e^{-x/2}x^{y-1} \to 0$، عددی پایا مانند M وجود دارد بقسمی که به‌ازای هر $x \geqslant 1$، $e^{-x/2}x^{y-1} \leqslant M$. چون

$$e^{-x}x^{y-1} \leqslant Me^{-x/2},$$

پس

$$\int_{1}^{b} |f(x)|\,dx \leqslant M \int_{0}^{b} e^{-x/2}\,dx = 2M(1-e^{-b/2}) < 2M.$$

از این روی، به‌ازای هرعدد حقیقی y، انتگرال $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\,dx$، هم به عنوان یک انتگرال ریمان مجازی و هم به‌عنوان یک انتگرال لبگ، وجود دارد.

مثال ۲ انتگرال تابع گاما. اگر انتگرال مثال ۱ را به انتگرال

$$\int_{0}^{1} e^{-x}x^{y-1}\,dx$$

مذکور در مثال ۲ از بخش ۹.۱۰ اضافه کنیم، می‌بینیم که انتگرال لبگ

$$\Gamma(y) = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\,dx$$

به‌ازای هر عدد حقیقی $y > 0$ وجود دارد. تابع Γ که بدین‌صورت تعریف می‌شود

به تابع گاما معروف است. مثال ۴ در زیر رابطهٔ آن را با تابع زتای ریمان نشان می‌دهد.

تبصره. بسیاری از قضیه‌های فصل ۷ درمورد انتگرالهای ریمان را می‌توان به‌قضیه‌هائی دربارهٔ انتگرالهای ریمان مجازی بدل کرد. برای مصور کردن روش سرراستی که با آن بتوان بعضی از این توسیعها را انجام داد، به دستور انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء توجه می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx\,.$$

چون b در سه جملهٔ معادلهٔ بالا ظاهر شده است، وقتی که $b \to +\infty$، در این معادله سه حد ظاهر خواهند شد. اگر دوتا از این حدها وجود داشته باشند، سومی نیز وجود دارد و دستور زیر بدست می‌آید:

$$\int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^\infty g(x)\,f'(x)\,dx\,.$$

قضیه‌های دیگر انتگرالهای ریمان را می‌توان تقریباً به‌همین روش به انتگرال‌های ریمان مجازی وسعت داد. اما برای این کار نیازی به‌توضیح بیش‌از این‌نیست، زیرا که در هر مورد خاص، کافی است قضیهٔ موردنظر را ابتدا درمورد بازهٔفشرده‌ای مانند $[a, b]$ بکار برد و سپس $b \to +\infty$.

مثال ۳ معادلهٔ تابعی $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$. اگر $0 < a < b$، باانتگرال‌گیری به طریقهٔ جزء به جزء بدست می‌آید:

$$\int_a^b e^{-x}x^y\,dx = a^y e^{-a} - b^y e^{-b} + y\int_a^b e^{-x}x^{y-1}\,dx\,.$$

اگر $a \to 0+$ و $b \to +\infty$، نتیجه می‌شود که $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$.

مثال ۴ نمایش انتگرالی برای تابع زتای ریمان. تابع زتای ریمان ζ به‌ازای $s > 1$ با معادلهٔ

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

تعریف می‌شود. این مثال نشان می‌دهدکه چگونه می‌توان قضیهٔ همگرائی لوی برای

رشته‌ها را بکار برد تا نمایش انتگرالی زیر بدست آید :

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \cdot$$

انتگرال دستور بالا به‌عنوان انتگرال لبگ وجود دارد.

در انتگرال برای $\Gamma(s)$ تغییر متغیر $t = nx$ با $n > 0$ را می‌دهیم، نتیجه می‌شود که

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt = n^s \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx.$$

از این روی، اگر $s > 0$،

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx.$$

اگر $s > 1$، رشتهٔ $\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ همگرا است، پس

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx,$$

و رشتهٔ طرف راست رابطهٔ بالا همگرا است. چون انتگرالده نامنفی است، بنا بر قضیهٔ همگرائی لوی (قضیهٔ ۲۵.۱۰)، رشتهٔ $\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{s-1}$ تقریباً همه جا بر $]0, +\infty[$ به تابع مجموعی همگرا است، و این تابع مجموع بر این بازه انتگرال لبگ دارد، و

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx.$$

اما اگر $x > 0$، داریم $0 < e^{-x} < 1$، و در نتیجه

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1},$$

زیرا رشتهٔ بالا یک رشتهٔ هندسی است. بنابراین،

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{s-1} = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$$

تقریباً همه جا بر $]0, +\infty[$، در حقیقت همه جا جز در 0، پس

$$\zeta(s)\,\Gamma(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \cdot$$

۱۴.۱۰ تابعهای اندازه‌پذیر

هر تابع مانند f که بر بازه‌ای مانند I انتگرال لبگ داشته باشد، تقریباً همه جا بر I، تابع حد دنباله‌ای است از تابعهای پله‌ای. اما! عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً، تابع پایای $f = 1$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ تابع حد دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای است، اما این تابع در $L(\mathbf{R})$ نیست. بنابراین، ردهٔ تابعهائی که حد دنباله‌هائی از تابعهای پله‌ای هستند از ردهٔ تابعهائی که انتگرال لبگ دارند وسیعتر است. تابعهای موجود در این ردهٔ وسیعتر تابعهای اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند.

تعریف ۳۴.۱۰ تابع f را که بر I تعریف شده باشد اندازه‌پذیر می‌نامیم، و می‌نویسیم $f \in M(I)$، در صورتی که دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ بر I وجود داشته باشد بقسمی که

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \text{ تقریباً همه جا بر } I.$$

تبصره. هرگاه f بر I اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f بر هر زیربازهٔ I نیز چنین است.

همان طور که قبلاً ذکر شد، هر تابع در $L(I)$ بر I اندازه‌پذیر است، ولی عکس این مطلب صحیح نیست. قضیهٔ زیر عکس جزئی حکم بالا است.

قضیهٔ ۳۵.۱۰ هرگاه $f \in M(I)$ و بهازای تابعی نامنفی مانند g در $L(I)$، $|f(x)| \leqslant g(x)$ تقریباً همه جا بر I، آنگاه $f \in L(I)$.

برهان. دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ هست بقسمی که $s_n(x) \to f(x)$ تقریباً همه جا بر I. اینک با بکار بردن قضیهٔ ۳۰.۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که

$$f \in L(I).$$

نتیجهٔ ۱. هرگاه $f \in M(I)$ و $|f| \in L(I)$، آنگاه $f \in L(I)$.

نتیجهٔ ۲. هرگاه f بر بازهٔ کراندار I اندازه‌پذیر و کراندار باشد، آنگاه

$$f \in L(I).$$

خاصیتهای دیگر تابعهای اندازه‌پذیر در قضیهٔ زیر داده شده‌اند.

قضیهٔ ۳۶.۱۰ فرض کنیم تابع حقیقی φ بر $\mathbf{R}^2$ پیوسته باشد. اگر $f \in M(I)$ و $g \in M(I)$، تابع h را بر I با معادلهٔ زیرین تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \varphi[f(x), g(x)].$$

در این صورت، $h \in M(I)$. خصوصاً، $f + g$، $f \cdot g$، $|f|$، $\max(f, g)$، و

$\min(f, g)$ در $M(I)$ هستند. همچنین، اگر $f(x) \neq ۰$ تقریباً همه جا بر I،

$$\frac{۱}{f} \in M(I)\cdot$$

برهان. فرض کنیم $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دنباله‌هائی از تابعهای پله‌ای را نشان دهند که $s_n \to f$ و $t_n \to g$ تقریباً همه جا بر I. در این‌صورت، تابع $u_n = \varphi(s_n, t_n)$ تابعی است پله‌ای و $u_n \to h$ تقریباً همه جا بر I. از این روی $h \in M(I)$.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که اگر حدود دنباله‌های توابع موجود در $M(I)$ را به این مجموعه بیفزائیم، $M(I)$ وسیعتر نخواهد شد.

قضیهٔ ۳۷.۱۰ فرض کنیم f بر I تعریف شده باشد و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای اندازه‌پذیر بر I باشد، که $f_n(x) \to f(x)$ تقریباً همه جا بر I. در این صورت، f بر I اندازه‌پذیر است.

برهان. تابع مثبت و دلخواهی مانند g در $L(I)$، مثلاً،

$$g(x) = \frac{۱}{(۱ + x^۲)}, \qquad x \in I،$$

را اختیار می‌کنیم. فرض کنیم

به ازای هر x در I، $\qquad F_n(x) = g(x)\dfrac{f_n(x)}{۱ + |f_n(x)|}$.

در این صورت،

$$F_n(x) \to \frac{g(x)f(x)}{۱ + |f(x)|} \text{ تقریباً همه جا بر } I\cdot$$

فرض می‌کنیم که $F(x) = g(x)f(x)/\{۱ + |f(x)|\}$. چون هر F_n بر I اندازه‌پذیر است و به ازای هر x، $|F_n(x)| < g(x)$، پس، بنا بر قضیهٔ ۳۵.۱۰، هر $F_n \in L(I)$. همچنین، به ازای هر x در I، $|F(x)| < g(x)$، پس، به موجب قضیهٔ ۳۰.۱۰، $F \in L(I)$، و در نتیجه $F \in M(I)$. چون به ازای هر x در I،

$$f(x)\{g(x) - |F(x)|\} = f(x)g(x)\left\{۱ - \frac{|f(x)|}{۱ + |f(x)|}\right\}$$
$$= \frac{f(x)g(x)}{۱ + |f(x)|} = F(x),$$

پس

$$f(x)=\frac{F(x)}{g(x)-|F(x)|}.$$

بنابراین، چون هر F، g، و $|F|$ در $M(I)$ است و به ازای هر x در I،

$$g(x)-|F(x)|>0$$

پس $f\in M(I)$.

تبصره . تابعهائی هستند که اندازه‌ناپذیرند، ولی قضیه های قبل نشان می‌دهند که ساختن مثالهائی از آنها آسان نیست . اگر اعمال متداول در آنالیز بر تابعهای اندازه‌پذیر انجام شوند، حاصلها توابعی اندازه‌پذیر خواهند بود . بنابراین، هر تابعی که در عمل با آن مواجه می‌شویم محتملاً اندازه‌پذیر است. (برای مشاهدهٔ مثالی از تابعهای اندازه ناپذیر، ر. ک. تمرین ۳۷.۱۰.)

۱۵.۱۰ پیوستگی تابعهائی که به وسیلهٔ انتگرالهای لبگ تعریف شده‌اند

فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی از دومتغیر حقیقی که بریک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^2$ به‌شکل $Y\times X$ ، که در آن X و Y یک زیربازهٔ کلی $\mathbf{R}$ است، تعریف شده باشد.بسیاری از تابعها در آنالیز به‌صورت انتگرالهائی به شکل

$$F(y)=\int_X f(x,y)\,dx$$

ظاهر می‌شوند . ما سه قضیه را مورد بحث قرار می‌دهیم که پیوستگی ، مشتقپذیری ، و انتگرالپذیری از انتگرالدهٔ f به تابع F را انتقال می‌دهند . اولین قضیه راجع به‌پیوستگی است .

قضیهٔ ۳۸.۱۰ فرض کنیم X و Y دو زیر بازهٔ $\mathbf{R}$ باشند، و تابع f بر $Y\times X$ تعریف شده باشد و در شرطهای زیرین صدق کند:

آ) به‌ازای هر y ثابت در Y ، تابع f_y که بر X با معادلهٔ

$$f_y(x)=f(x,y)$$

تعریف شده باشد بر X اندازه‌پذیر باشد؛

ب) تابعی نامنفی مانند g در $L(X)$ باشد بقسمی که به‌ازای هر y در Y ،

$$|f(x,y)|\leqslant g(x) \quad \text{ت . هـ . بر } X\text{؛}$$

ج) به‌ازای هر y ثابت در Y،

$\lim_{t\to y} f(x, t) = f(x, y)$ ت . ه . بر X .

دراین‌صورت، انتگرال لبگ $\int_X f(x, y)\, dx$ به‌ازای هر y در Y وجوددارد، وتابع F که با معادلهٔ

$$F(y) = \int_X f(x, y)\, dx$$

تعریف می‌شود بر Y پیوسته است . یعنی، اگر $y \in Y$،

$$\lim_{t\to y} \int_X f(x, t)\, dx = \int_X \lim_{t\to y} f(x, t)\, dx \cdot$$

برهان. چون f_y بر X اندازه‌پذیر است و تقریباً همه جا بر X تحت تسلط تابعی نامنفی مانند g در $L(X)$ است، پس بنا بر قضیهٔ ۳۵.۱۰، $f_y \in L(X)$. بـا بیان دیگر می‌توان گفت که، به ازای هـر y در Y، انتگـرال لبـگ $\int_X f(x, y)\, dx$ وجود دارد.

حال y ثابتی در Y اختیار نموده ، فرض می‌کنیم که $\{y_n\}$ دنباله‌ای از نقطه‌ها در Y باشد بقسمی که $\lim y_n = y$. ثابت می‌کنیم که $\lim F(y_n) = F(y)$. قرار می‌دهیم $G_n(x) = f(x, y_n)$. هر $G_n \in L\,(X)$ ، و از فـرض (ج) معلوم می‌شود که $G_n(x) \to f(x, y)$ تقریباً همه جـا بـر X . تـوجه داشته بـاشید کـه $F(y_n) = \int_X G_n(x) dx$. چون (ب) برقرار است، بنا بر قضیهٔ همگرائـی تسلطی لبگ، دنبالهٔ $\{F(y_n)\}$ همگرا است و

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \int_X f(x, y)\, dx = F(y) \cdot$$

مثال ۱ پیوستگی تابع گاما:

$$\text{به‌ازای } y > 0 \text{ ،} \quad \Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} dx \cdot$$

قضیهٔ ۳۸.۱۰ را با $X = [0, +\infty[$ و $Y =]0, +\infty[$ بکار می‌بـریـم. به‌ازای $y > 0$، انتگرالده، به‌عنوان تابعی‌از x ، تقـریباً همه جا بر X پیوسته (و در نتیجه اندازه‌پذیر) است، پس (آ) برقرار است. به‌ازای هر $x > 0$ ثابت، انتگرالده، به‌عنوان تابعی‌از y، بر Y پیوسته‌است، پس (ج) برقرار خواهد بود. بالاخره، صحت (ب) را تحقیق می‌کنیم، و این کار را نه بر Y بلکه بر هر زیربـازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ ، که در آن $0 < a < b$، انجام می‌دهیم. گوئیم به‌ازای هر y در $[a, b]$ ، انتگرالده تحت تسلط تابع زیر است:

$$\text{، } g(x)=\begin{cases} x^{a-1} & \text{، اگر } 0<x\leqslant 1 \\ Me^{-x/2} & \text{، اگر } x\geqslant 1 \end{cases}$$

که در آن M پایای مثبتی است. بنا بر قضیهٔ ۱۸.۱۰، تابع g بر X انتگرال لبگ دارد، پس از قضیهٔ ۳۸.۱۰ معلوم می‌شود که Γ بر $[a, b]$ پیوسته است. اما چون این مطلب برای هر زیر بازهٔ $[a, b]$ درست است، پس Γ بر $Y =]0, +\infty[$ پیوسته خواهد بود.

مثال ۲ پیوستگی

$$F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$$

به‌ازای $y > 0$. در این مثال فرض بر این است که خارج قسمت $(\sin x)/x$ به‌ازای $x = 0$ مساوی ۱ باشد. فرض می‌کنیم

$$X = [0, +\infty[\quad \text{و} \quad Y =]0, +\infty[.$$

شرطهای (آ) و (ج) قضیهٔ ۳۸.۱۰ در این جا برقرار هستند. مانند مثال ۱، صحت شرط (ب) را بر هر زیربازه مانند $Y_a = [a, +\infty[$، که در آن $a > 0$، تحقیق می‌کنیم. چون $|(\sin x)/x| \leqslant 1$، انتگرالده بر Y_a تحت تسلط تابع

$$g(x)=e^{-ax}\ ,\ x\geqslant 0,$$

است. چون g بر X انتگرال لبگ دارد، پس به‌ازای هر $a > 0$، تابع F بر Y_a پیوسته است؛ از این روی F بر $Y =]0, +\infty[$ پیوسته خواهد بود.

برای آن که مورد استعمال دیگری از قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ را مصور کنیم ثابت می‌کنیم که وقتی که $y \to +\infty$، $F(y) \to 0$.

فرض کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای حقیقی باشد بقسمی که $y_n \geqslant 1$، و وقتی که $n \to \infty$، $y_n \to +\infty$. ثابت می‌کنیم که وقتی که $n \to \infty$، $F(y_n) \to 0$. فرض می کنیم

$$\text{به‌ازای هر } x \geqslant 0 \text{ ،} \quad f_n(x)=e^{-xy_n}\frac{\sin x}{x}.$$

دراین صورت، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ تقریباً همه جا بر $]0, +\infty[$؛ در حقیقت، به‌ازای هر x جز 0. اما

اگر $y_n \geqslant 1$، به‌ازای هر $x \geqslant 0$، لازم می‌آید که $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}$.

و نیز، به‌ازای هر $b > \circ$، هر f_n بر $[\circ, b]$ انتگرال ریمان دارد و

$$\int_\circ^b |f_n| \leqslant \int_\circ^b e^{-x}\, dx < ۱ \cdot$$

بنابراین، به‌موجب قضیهٔ ۳۳.۱۰، f_n بر $[\circ, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد. چون دنبالهٔ $\{f_n\}$ تحت تسلط تابع $g(x) = e^{-x}$ است و این تابع بر $[\circ, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد، پس، بنا بر قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ، دنبالهٔ $\{\int_\circ^{+\infty} f_n\}$ همگرا است و

$$\lim_{n\to\infty} \int_\circ^{+\infty} f_n = \int_\circ^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n = \circ \cdot$$

اما $\int_\circ^{+\infty} f_n = F(y_n)$، پس وقتی که $n \to \infty$، $F(y_n) \to \circ$. ازاین روی، وقتی که $y \to +\infty$، $F(y) \to \circ$.

تبصره. در اکثر مطالب زیر، با انتگرالهائی سروکار خواهیم داشت که در آنها خارج قسمت $(\sin x)/x$ وجود دارد. فرض براین است که همیشه به جای این خارج قسمت در $x = \circ$ مقدار ۱ را قرار دهیم. بهمین نحو، به جای خارج قسمتی به شکل $(\sin xy)/x$ در $x = \circ$ مقدار y، یعنی حد آن وقتی که $x \to \circ$، درنظر گرفته خواهد شد. به‌طور کلیتر، اگر انتگرالدهی در بعضی از نقطه‌های تنها در بازهٔ انتگرالگیری دارای ناپیوستگیهای رفع شدنی باشد، قرار بر این است که با تعریف مجدد آن به طور مناسب در این نقطه‌های استثنائی این ناپیوستگیها را «از بین ببریم». در نقطه‌هائی که انتگرالده تعریف نشده باشد، مقدار آن صفر فرض می‌شود.

۱۶.۱۰ مشتقگیری زیر علامت انتگرال

قضیهٔ ۳۹.۱۰ فرض کنیم X و Y دو زیربازهٔ $\mathbf{R}$ باشند، و f را تابعی می‌انگاریم که بر $X \times Y$ تعریف شده باشد و در شرطهای زیرین صدق کند:

آ) به ازای هر y ثابت در Y، تابع f_y که بر X با معادلهٔ

$$f_y(x) = f(x, y)$$

تعریف شود بر X اندازه‌پذیر باشد، و به‌ازای aای در Y، $f_a \in L(X)$؛

ب) به ازای هر نقطهٔ درونی $X \times Y$ مانند (x, y)، مشتق جزئی $D_2 f(x, y)$ وجود داشته باشد؛

ج) تابعی نامنفی مانند G در $L(X)$ باشد بقسمی که

به ازای هر نقطهٔ درونی $X \times Y$، $|D_2 f(x, y)| \leqslant G(x)$.

در این صورت، به ازای هر y در Y، انتگرال لبگ $\int_X f(x, y)\, dx$ وجود دارد، و تابع F که با معادلهٔ

$$F(y) = \int_X f(x, y)\, dx$$

تعریف شود در هر نقطهٔ درونی Y مشتقپذیر است. بعلاوه، مشتق آن از دستور زیرین بدست می‌آید:

$$F'(y) = \int_X D_2 f(x, y) dx.$$

تبصره. گفته می‌شود که $F'(y)$ با مشتقگیری زیر علامت انتگرال بدست آمده است.

برهان. ابتدا نامساوی زیر را ثابت می‌کنیم: به‌ازای هر نقطهٔ درونی $X \times Y$ مانند (x, y)،

$$| f_y (x) | \leqslant | f_a(x) | + | y - a | G(x). \qquad (۲۳)$$

از قضیهٔ مقدار میانگین معلوم می‌شود که مقداری، مانند c بین a و y وجود دارد که به‌ازای آن

$$f(x, y) - f(x, a) = (y - a) D_2 f(x, c).$$

چون $| D_2 f(x, c) | \leqslant G(x)$، از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که

$$| f(x, y) | \leqslant | f(x, a) | + | y - a | G(x),$$

که همان رابطهٔ (۲۳) است. چون f_y بر X اندازه‌پذیر است و تقریباً همه جا بر X تحت تسلط تابعی نامنفی در $L(X)$ است، بنا بر قضیهٔ ۱۰.۳۵، $f_y \in L(X)$. با بیان دیگر می‌توان گفت که به ازای هر y در Y، انتگرال $\int_X f(x, y)\, dx$ وجود دارد.

حال دنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ از نقطه‌ها در Y بقسمی اختیار می‌کنیم که هر $y_n \neq y$ اما $\lim y_n = y$. دنبالهٔ $\{q_n\}$ از تابعها بر X را با معادلهٔ زیرین تعریف می‌کنیم:

$$q_n(x) = \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}.$$

دراین صورت، $q_n \in L(X)$، و در هر نقطهٔ درونی X، $D_2 f(x, y)$ $q_n(x) \to D_2 f(x, y)$.
از قضیهٔ مقدار میانگین معلوم می‌شود که نقطه‌ای مانند c_n بین y_n و y هست که به ازای آن $q_n = D_2 f(x, c_n)$. از این، بنا بر (ج)، $|q_n(x)| \leqslant G(x)$ تقریباً همه جا بر X. قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ نشان می‌دهد که دنبالهٔ $\{\int_X q_n\}$ همگرا است، انتگرال $\int_X D_2 f(x, y)\, dx$ وجود دارد، و

$$\lim_{n\to\infty} \int_X q_n = \int_X \lim_{n\to\infty} q_n = \int_X D_2 f(x, y) dx.$$

اما

$$\int_X q_n = \frac{1}{y_n - y} \int_X \{f(x, y_n) - f(x, y)\}\, dx = \frac{F(y_n) - F(y)}{y_n - y}.$$

چون به ازای هر دنباله مانند $\{y_n\}$، آخرین خارج قسمت مذکور در بالا به حدی می‌گراید؛ پس $F'(y)$ وجود دارد و

$$F'(y) = \lim_{n\to\infty} \int_X q_n = \int_X D_2 f(x,y)\, dx.$$

مثال ۱ مشتق تابع گاما. به ازای هر $y > 0$، $\Gamma'(y)$ وجود دارد و از انتگرال

$$\Gamma'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} \log x\, dx$$

بدست می‌آید، که با مشتقگیری زیر علامت انتگرال موجود برای تابع Γ حاصل شده است. این مطلب نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۳۹.۱۰ زیرا به ازای هر y در $[a, b]$، $0 < a < b$، مشتق جزئی $D_2(e^{-x} x^{y-1})$ تقریباً همه جا تحت تسلط تابعی مانند g است که بر $]0, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد. در واقع،

اگر $x > 0$، $D_2(e^{-x} x^{y-1}) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x} x^{y-1}) = e^{-x} x^{y-1} \log x$.

پس اگر $a \leqslant y$، مشتق جزئی (بجز در ۰) تحت تسلط تابع زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} x^{a-1} |\log x| & \text{اگر } 0 < x \leqslant 1، \\ M e^{-x/2} & \text{اگر } x > 1، \\ 0 & \text{اگر } x = 0، \end{cases}$$

که در آن M عددی پایا و مثبت است. بآسانی می‌توان تحقیق کرد که g بر $]0, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد.

مثال ۲ ارزیابی انتگرال

$$F(y) = \int_{0}^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

با بکاربردن قضیهٔ ۳۹.۱۰، نتیجه می‌شود که

$$F'(y) = -\int_{0}^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx \quad ، \quad y > 0 \text{ اگر}.$$

(مانند مثال ۱، این مطلب را بر هر بازهٔ $Y_a = [a, +\infty[$، $a > 0$، ثابت می‌کنیم.) در این مثال، انتگرال ریمان $\int_0^b e^{-xy} \sin x\, dx$ را می‌توان با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی (با دو بار استفاده از انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء) محاسبه نمود. در نتیجه، به‌ازای هر عدد حقیقی y،

$$(۲۴) \quad \int_{0}^{b} e^{-xy} \sin x\, dx = \frac{e^{-by}(-y \sin b - \cos b)}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + y^2}.$$

حال با فرض $b \to +\infty$، معلوم می‌شود که

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx = \frac{1}{1 + y^2} \quad ، y > 0 \text{ اگر}.$$

بنابراین، اگر $y > 0$، $F'(y) = -1/(1 + y^2)$. با انتگرالگیری از این معادله معلوم می‌شود که

به‌ازای $y > 0$ و $b > 0$،

$$F(y) - F(b) = -\int_{b}^{y} \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan b - \arctan y.$$

حال فرض کنیم که $b \to +\infty$. در این صورت، $\arctan b \to \pi/2$ و $F(b) \to 0$ (ر. ک. مثال ۲، بخش ۱۵.۱۰)، پس

$$F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که،

$$(۲۵) \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \arctan y \quad ، \quad y > 0 \text{ اگر}.$$

معادلهٔ بالا به‌ازای $y = 0$ نیز معتبر است. یعنی، دستور زیر را داریم :

$$\int_{\circ}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{۲}\,. \qquad (۲۶)$$

اما این رابطه را نمی‌توان با قراردادن $y=\circ$ در (۲۵) بدست آورد، زیرا ثابت نشده است که F در صفر پیوسته است . در حقیقت ، انتگرال موجود در (۲۶) به‌عنوان یک انتگرال‌ریمان مجازی وجوددارد، اما به‌عنوان یک انتگرال‌لبگ وجود ندارد . (ر. ک. تمرین ۹۰۱۰.)

مثال ۳ برهان دستور

$$\int_{\circ}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{\circ}^{b}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{۲}\,.$$

فرض کنیم $\{g_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد که به‌ازای هر y حقیقی با معادلهٔ زیر تعریف شود :

$$g_n(y)=\int_{\circ}^{n}e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx\,. \qquad (۲۷)$$

نخست می‌بینیم که وقتی‌که $n\to\infty$ ، $g_n(n)\to\circ$ زیرا

$$|g_n(n)|\leqslant\int_{\circ}^{n}e^{-xn}\,dx=\frac{۱}{n}\int_{\circ}^{n^۲}e^{-t}\,dt<\frac{۱}{n}\,.$$

حال اگرازرابطهٔ (۲۷) مشتق بگیریم و از (۲۴) استفاده کنیم، به‌ازای هر عددحقیقی y خواهیم داشت

$$g_n'(y)=-\int_{\circ}^{n}e^{-xy}\sin x\,dx$$
$$=-\frac{e^{-ny}(-y\sin n-\cos n)+۱}{۱+y^۲}\,.$$

این نشان می‌دهد که

به‌ازای هر y ، $g_n'(y)\to-۱/(۱+y^۲)$

و به‌ازای هر $y\geqslant\circ$ ، $|g_n'(y)|\leqslant\dfrac{e^{-y}(y+۱)+۱}{۱+y^۲}$.

بنابراین، تابع f_n، که به‌صورت زیر تعریف شود:

$$f_n(y)=\begin{cases} g_n'(y) & \text{اگر } \circ\leqslant y\leqslant n\,،\\ \circ & \text{اگر } y>n\,،\end{cases}$$

بر بازهٔ $]\circ, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد و تحت تسلط تابع نامنفی

$$g(y) = \frac{e^{-y}(y+1)+1}{1+y^{2}}$$

است. همچنین، g بر $]\circ, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد. چون

$f_n(y) \to -1/(1+y^{2})$ بر $]\circ, +\infty[$،

پس بنابر قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\circ}^{+\infty} f_n = -\int_{\circ}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^{2}} = -\frac{\pi}{2}.$$

اما

$$\int_{\circ}^{+\infty} f_n = \int_{\circ}^{n} g_n'(y)dy = g_n(n) - g_n(\circ).$$

اگر $n \to \infty$، نتیجه می‌شود که $g_n(\circ) \to \pi/2$.

حال اگر $b > \circ$ و $n = [b]$، چنین خواهیم داشت

$$\int_{\circ}^{b} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\circ}^{n} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{n}^{b} \frac{\sin x}{x} dx$$
$$= g_n(\circ) + \int_{n}^{b} \frac{\sin x}{x} dx.$$

چون

$$\circ \leqslant \left| \int_{n}^{b} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leqslant \int_{n}^{b} \frac{1}{n} dx = \frac{b-n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to \circ,$$

وقتی که $b \to +\infty$،

پس

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{\circ}^{b} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} g_n(\circ) = \frac{\pi}{2}.$$

این دستور در فصل ۱۱ در مطالعهٔ رشته‌های فوریه مورد حاجت خواهد بود.

۱۷.۱۰ تعویض ترتیب عمل انتگرالگیری

قضیهٔ ۴۰.۱۰ فرض‌کنیم X و Y دو زیربازهٔ $\mathbf{R}$ باشند، وتابع k تعریف شده بر $X \times Y$

بر این مجموعه پیوسته و کراندار باشد، مثلاً،

به‌ازای هر (x, y) در $X \times Y$، $M \geqslant |k(x, y)|$.

همچنین $f \in L(X)$ و $g \in L(Y)$. در این صورت:

آ) به ازای هر y در Y، انتگرال لبگ $\int_X f(x)\, k(x, y) dx$ وجود دارد، و تابع F تعریف شده بر Y با معادلهٔ

$$F(y) = \int_X f(x)\, k(x, y) dx$$

بر Y پیوسته است.

ب) به‌ازای هر x در X، انتگرال لبگ $\int_Y g(y)\, k(x, y) dy$ وجود دارد، و تابع G تعریف شده بر X با معادلهٔ

$$G(x) = \int_Y g(y)\, k(x, y) dy$$

بر X پیوسته است.

ج) دو انتگرال لبگ $\int_Y g(y)\, F(y)\, dy$ و $\int_X f(x)\, G(x)\, dx$ وجود دارند و با هم مساویند. یعنی،

$$\int_X f(x) \left[\int_Y g(y)\, k(x, y)\, dy \right] dx = \int_Y g(y) \left[\int_X f(x)\, k(x, y)\, dx \right] dy. \tag{۲۸}$$

برهان. به‌ازای هر y ثابت در Y، قرار می‌دهیم $f_y(x) = f(x)\, k(x, y)$. در این صورت، f_y بر X اندازه‌پذیر است و در نامساوی زیر صدق می‌کند:

به‌ازای هر x در X، $|f_y(x)| = |f(x)\, k(x, y)| \leqslant M\, |f(x)|$.

و نیز، چون k بر $X \times Y$ پیوسته است،

به‌ازای هر x در X، $\lim\limits_{t \to y} f(x)\, k(x, t) = f(x)\, k(x, y)$.

بنابراین، قسمت (آ) از قضیهٔ ۳۸۰۱۰ نتیجه می‌شود. با بیانی مشابه می‌توان (ب) را ثابت کرد.

حال توجه می‌کنیم که حاصل‌ضرب $f \cdot G$ بر X اندازه‌پذیر است و در نامساوی

$$|f(x)G(x)| \leqslant |f(x)| \int_Y |g(y)|\,|k(x, y)|\,dy \leqslant M'\,|f(x)|$$

صدق می‌کند، که در آن $M' = M \int_Y |g(y)|\,dy$. پس، بنا بر قضیهٔ ۳۵.۱۰، $f \cdot G \in L(X)$. با بیانی مشابه معلوم می‌شود که $g \cdot F \in L(Y)$.

اینک رابطهٔ (۲۸) را ثابت می‌کنیم. نخست ملاحظه می‌کنیم که اگر f و g تابعهائی پله‌ای باشند، رابطهٔ (۲۸) درست است. در این حالت، چون هر یک از تابعهای f و g درخارج بازه‌ای فشرده صفر می‌شود، پس هریک برآن بازه انتگرال ریمان دارد و رابطهٔ (۲۸) بفوریت از قضیهٔ ۴۲.۷ نتیجه خواهد شد.

حال با استفاده از قضیهٔ ۱۹.۱۰ (ب)، هر یک از تابعهای f و g را به تابعی پله‌ای نزدیک می‌کنیم. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، تابعهائی پله‌ای مانند s و t هستند که به ازای آنها

$$\int_X |f - s| < \varepsilon \quad \text{و} \quad \int_Y |g - t| < \varepsilon.$$

بنا براین،

$$\int_X f \cdot G = \int_X s \cdot G + A_1, \tag{۲۹}$$

که در آن

$$|A_1| = \left|\int_X (f - s) \cdot G\right| \leqslant \int_X |f - s| \int_Y |g(y)|\,|k(x, y)|\,dy < \varepsilon M \int_Y |g|.$$

همچنین،

$$G(x) = \int_Y g(y)k(x, y)\,dy = \int_Y t(y)k(x, y)\,dy + A_2,$$

که در آن

$$|A_2| = \left|\int_Y (g - t)k(x, y)\,dy\right| \leqslant M \int_Y |g - t| < \varepsilon M.$$

بنا براین،

$$\int_X s \cdot G = \int_X s(x)\left[\int_Y t(y)k(x, y)\,dy\right] dx + A_3,$$

که در آن

$$|A_3| = \left| A_2 \int_X s(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon M \int_X |s|$$
$$\leqslant \varepsilon M \int_X \{|s-f| + |f|\} < \varepsilon^2 M + \varepsilon M \int_X |f|,$$

و پس (۲۹) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(۳۰)\qquad \int_X f \cdot G = \int_X s(x)\left[\int_Y t(y)k(x, y)\,dy\right]dx + A_1 + A_3.$$

بهمین نحو، معلوم می‌شود که

$$(۳۱)\qquad \int_Y g \cdot F = \int_Y t(y)\left[\int_X s(x)k(x, y)\,dx\right]dy + B_1 + B_3,$$

که در آن

$$|B_1| < \varepsilon M \int_X |f|$$

و

$$|B_3| \leqslant \varepsilon M \int_Y |t| < \varepsilon^2 M + \varepsilon M \int_Y |g|.$$

اما چون انتگرالهای مکرر طرفهای راست رابطه‌های (۳۰) و (۳۱) با یکدیگر متساویند، داریم

$$\left| \int_X f \cdot G - \int_Y g \cdot F \right| \leqslant |A_1| + |A_3| + |B_1| + |B_3|$$
$$< 2\varepsilon^2 M + 2\varepsilon M \left\{ \int_X |f| + \int_Y |g| \right\}.$$

چون نامساویهای بالا به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است، پس

$$\int_X f \cdot G = \int_Y g \cdot F,$$

یعنی رابطهٔ مطلوب، صادق است.

تبصره. در فصل ۱۵ با استفاده از انتگرالهای مضاعف روایت کلیتری از قضیهٔ ۴۰.۱۰ ثابت خواهد شد. (ر. ک. قضیهٔ ۶.۱۵.)

۱۸.۱۰ مجموعه‌های اندازه‌پذیر بر خط حقیقی

تعریف ۴۱.۱۰ فرض کنیم یک زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbf{R}$ مانند S داده شده باشد. تابع χ_S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} ۱ \text{ ،} & \text{اگر } x \in S \\ ۰ \text{ ،} & \text{اگر } x \in \mathbf{R} - S \end{cases}.$$

χ_S را تابع مشخص کنندهٔ S می‌نامند. اگر S تهی باشد، به ازای هر x تعریف می‌کنیم $\chi_S(x) = ۰$.

قضیهٔ ۴۲.۱۰ قرار می‌دهیم $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$. در این صورت:

آ) هرگاه S دارای اندازهٔ صفر باشد، آنگاه $\chi_S \in L(\mathbf{R})$ و $\int_{\mathbf{R}} \chi_S = ۰$.

ب) هرگاه $\chi_S \in L(\mathbf{R})$ و $\int_{\mathbf{R}} \chi_S = ۰$، آنگاه S دارای اندازهٔ صفر خواهد بود.

برهان. اگر در قضیهٔ ۲۰.۱۰، f را مساوی χ_S بگیریم، قسمت (آ) نتیجه می‌شود. برای اثبات (ب)، فرض می‌کنیم به‌ازای هر n، $f_n = \chi_S$. در این صورت $|f_n| = \chi_S$، پس

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n| = \sum_{n=۱}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \chi_S = ۰ .$$

بنا بر قضیهٔ لوی برای رشته‌های همگرای مطلق، رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ همه‌جا بر $\mathbf{R}$، بجز بر مجموعه‌ای مانند T دارای اندازهٔ صفر، همگرا است. اگر $x \in S$، این رشته نمی‌تواند همگرا باشد زیرا هر جملهٔ آن مساوی یک است. اگر $x \notin S$، رشته همگرا است زیرا هر جملهٔ آن مساوی صفر است. از این روی $S = T$، پس S دارای اندازهٔ صفر خواهد بود.

تعریف ۴۳.۱۰ یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند S را اندازه‌پذیر نامیم در صورتی که تابع مشخص کنندهٔ χ_S اندازه‌پذیر باشد. هرگاه، علاوه بر این، χ_S بر $\mathbf{R}$ انتگرال لبگ داشته باشد، آنگاه اندازهٔ مجموعهٔ S را با $\mu(S)$ نشان می‌دهیم و با معادلهٔ

$$\mu(S) = \int_{\mathbf{R}} \chi_S$$

تعریف می‌کنیم. اگر χ_S اندازه‌پذیر باشد ولی بر $\mathbf{R}$ انتگرال لبگ نداشته باشد، تعریف می‌کنیم $\mu(S) = +\infty$. تابع μ راکه به‌این طریق تعریف می‌شود اندازهٔ لبگ می‌نامند.

چند مثال

۱. قضیهٔ ۴۲.۱۰ نشان می‌دهد که هرمجموعه مانند S دارای اندازهٔ صفر اندازه پذیر است و $\mu(S) = 0$.

۲. هر بازه مانند I (کراندار یا بی‌کران) اندازه‌پذیر است. هرگاه I بازه‌ای کراندار با نقطه های انتهائی $a \leqslant b$ باشد، آنگاه $\mu(I) = b - a$. هرگاه I بازه‌ای بی‌کران باشد، آنگاه $\mu(I) = +\infty$.

۳. هرگاه A و B اندازه‌پذیر باشند و $A \subseteq B$، آنگاه $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

قضیهٔ ۴۴.۱۰ آ) اگر S و T اندازه پذیر باشند، $S - T$ نیز اندازه‌پذیر است.

ب) اگر S_1، S_2، . . . اندازه پذیر باشند، $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ نیز چنین‌اند.

برهان. برای اثبات (آ)، ملاحظه می‌کنیم که تابع مشخص کنندهٔ $S - T$ مساوی $\chi_S - \chi_S\chi_T$ است. برای اثبات (ب)، قرارمی‌دهیم

$$U_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i, \quad V_n = \bigcap_{i=1}^{n} S_i, \quad U = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \quad V = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i \,.$$

در این صورت،

$$\chi_{U_n} = \max(\chi_{S_1}, \ldots, \chi_{S_n}) \text{ و } \chi_{V_n} = \min(\chi_{S_1}, \ldots, \chi_{S_n})،$$

پس هر U_n و هر V_n اندازه پذیر است. همچنین، $\chi_U = \lim_{n\to\infty} \chi_{U_n}$ و $\chi_V = \lim_{n\to\infty} \chi_{V_n}$، پس U و V اندازه‌پذیر خواهند بود.

قضیهٔ ۴۵.۱۰ هرگاه A و B دو مجموعهٔ اندازه‌پذیر از هم جدا باشند، آنگاه

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \,. \tag{۳۲}$$

برهان. قرارمی‌دهیم $S = A \cup B$. چون A و B از هم جدا هستند، داریم

$$\chi_S = \chi_A + \chi_B.$$

فرض کنیم χ_S انتگرالپذیر باشد. چون χ_A و χ_B هردو اندازه پذیرند و به‌ازای هر x، $0 \leqslant \chi_A(x) \leqslant \chi_S(x)$ و $0 \leqslant \chi_B(x) \leqslant \chi_S(x)$، بنا برقضیهٔ ۳۵.۱۰، هردو تابع χ_A و χ_B انتگرالپذیرمی‌باشند. بنابراین،

$$\mu(S) = \int_{\mathbf{R}} \chi_S = \int_{\mathbf{R}} \chi_A + \int_{\mathbf{R}} \chi_B = \mu(A) + \mu(B) \,.$$

در این حالت رابطهٔ (۳۲) برقرار است و دو طرف آن متناهی‌اند.

هرگاه χ_S انتگرالپذیر نباشد، آنگاه دست کم یکی از دو تابع χ_A یا χ_B انتگرالپذیر نخواهد بود، که در این حالت (۳۲) برقرار است در حالی که دو طرف آن نامتناهی‌اند.

قضیهٔ زیررا که توسیع قضیهٔ ۴۵.۱۰ شمرده می‌شود می‌توان به استقرا ثابت کرد.

قضیهٔ ۴۶.۱۰ هرگاه $\{A_1, \ldots, A_n\}$ دسته‌ای متناهی از مجموعه های اندازه‌پذیر از هم جدا باشد، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot$$

تبصره. این خاصیت را این طور توصیف می‌کنند که اندازهٔ لبگ جمعپذیر متناهی است. درقضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم‌که اندازهٔ لبگ جمعپذیر شمارشپذیر است.

قضیهٔ ۴۷.۱۰ هرگاه $\{A_1, A_2, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه های اندازه پذیر از هم جدا باشد، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \tag{۳۳}$$

برهان. قرار می‌دهیم $T_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ، $\chi_n = \chi_{T_n}$ ، $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. چون μ جمعپذیرمتناهی است،

$$\text{به‌ازای هر } n \text{ ،} \quad \mu(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot$$

باید ثابت کنیم که وقتی که $n \to \infty$ ، $\mu(T_n) \to \mu(T)$. ملاحظه می‌کنیم‌که چون $\mu(T_n) \leqslant \mu(T_{n+1})$ ، پس $\{\mu(T_n)\}$ دنباله‌ای صعودی است.

دو حالت درنظر می‌گیریم. هرگاه $\mu(T)$ متناهی باشد، آنگاه χ_T و هر یک از χ_n ها انتگرالپذیرند. همچنین، دنبالهٔ $\{\mu(T_n)\}$ از بالابه $\mu(T)$ کراندار است و درنتیجه همگرا است. پس، بنابرقضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ، $\mu(T_n) \to \mu(T)$.

هرگاه $\mu(T) = +\infty$، آنگاه χ_T انتگرالپذیرنیست. ازقضیهٔ ۲۴.۱۰ نتیجه می‌شودکه‌یا χ_nی انتگرالپذیرنیست یاهر χ_n انتگرالپذیر است ولی $\mu(T_n) \to +\infty$. در هرصورت رابطهٔ (۳۳) درحالی که دوطرف آن نامتناهی‌اند برقرار است.

برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ نظریهٔ اندازه‌ها و رابطهٔ آن با نظریهٔ انتگرالگیری، خواننده می‌تواند به‌کتابهای مرجع مذکور در انتهای این فصل مراجعه نماید.

۱۹.۱۰ انتگرال لبگ روی زیرمجموعه های دلخواه R

تعریف. ۴۸.۱۰ فرض کنیم f بر یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ مانند S تعریف شده باشد. تابع جدید $\bar{f}$ را بر $\mathbf{R}$ بدین صورت تعریف می‌کنیم :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{، اگر } x \in S \\ 0 \text{، اگر } x \in \mathbf{R} - S \end{cases}.$$

اگر $\bar{f}$ بر $\mathbf{R}$ انتگرال لبگ داشته باشد، گوئیم که f بر S انتگرال لبگ دارد ومی‌نویسیم $f \in L(S)$. انتگرال f روی S با معادلهٔ زیرین تعریف می‌شود :

$$\int_S f = \int_{\mathbf{R}} \bar{f}.$$

از این تعریف خاصیتهای زیر بی‌درنگ نتیجه می‌شوند :

هرگاه $f \in L(S)$، آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعهٔ S مانند T، $f \in L(T)$.

هرگاه S دارای اندازهٔ متناهی باشد، آنگاه $\mu(S) = \int_S 1$.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که انتگرال لبگ جمعپذیر شمارشپذیر است. اثبات آن به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذارمی‌شود .

قضیهٔ ۴۹.۱۰ فرض کنیم $\{A_1, A_2, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر ازمجموعه های از هم‌جدا در $\mathbf{R}$ باشد، و $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. همچنین تابع f بر S تعریف شده باشد.

آ) هرگاه $f \in L(S)$، آنگاه به‌ازای هر i، $f \in L(A_i)$ و

$$\int_S f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f.$$

ب) هرگاه به‌ازای هر i، $f \in L(A_i)$ و رشتهٔ مذکور در (آ) همگرا باشد، آنگاه $f \in L(S)$ و معادلهٔ مذکور در (آ) برقرار خواهد بود .

۲۰.۱۰ انتگرالهای لبگ تابعهای مختلط

هرگاه تابع مختلط f بر بازهٔ I تعریف شده باشد، آنگاه $f = u + iv$، که درآن u و v تابعهائی حقیقی‌اند. گوئیم f بر I انتگرال لبگ دارد در صورتی که u و v هردو بر I انتگرال لبگ داشته باشند، وتعریف می‌کنیم

$$\int_I f = \int_I u + i\int_I v.$$

همچنین، f را بر I اندازه پذیرنامیم درصورتی که u و v هردو در $M(I)$ باشند .

بسادگی می‌توان تحقیق کرد که مجموع و حاصل‌ضرب تابعهای اندازه پذیر مختلط نیز تابعهائی اندازه پذیرند. بعلاوه، چون

$$|f| = (u^۲ + v^۲)^{۱/۲},$$

بنا برقضیهٔ ۳۶.۱۰، اگر f اندازه پذیر باشد، $|f|$ نیزچنین است.

بسیاری از قضیه های مربوط به‌انتگرالهای لبگ تابعهای حقیقی را می‌توان به تابعهای مختلط وسعت داد. اما، چون در هرمورد خاص، معمولاً کافی است بنویسیم $f = u + iv$ وقضیه‌ها را درمورد u و v بکاربریم، در این‌جا دربارهٔ این توسیعها بحثی نخواهد شد. تنها مطلبی که لازم است به‌صراحت در این‌جا ازآن یاد شودقضیهٔ زیرین است.

قضیهٔ ۵۰.۱۰ هرگاه‌تابع مختلط f بر I انتگرال لبگ داشته باشد،آنگاه $|f| \in L(I)$ و

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

برهان. می‌نویسیم $f = u + iv$. چون f اندازه پذیر است و

$$|f| \leqslant |u| + |v|,$$

بنا بر قضیهٔ ۳۵.۱۰، $|f| \in L(I)$.

قرار می‌دهیم $a = \int_I f$. در این صورت $a = re^{i\theta}$، که درآن $r = |a|$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $r \leqslant \int_I |f|$. فرض کنیم

$$b = \begin{cases} e^{-i\theta} & \text{اگر } r > ۰ \\ ۱ & \text{اگر } r = ۰ \end{cases}.$$

در این صورت، $|b| = ۱$ و $r = ba = b\int_I f = \int_I bf$. حال می‌نویسیم $bf = U + iV$، که در آن U و V حقیقی‌اند. چون $\int_I bf$ حقیقی است، پس $\int_I bf = \int_I U$. ازاین روی،

$$r = \int_I bf = \int_I U \leqslant \int_I |U| \leqslant \int_I |bf| = \int_I |f|.$$

۲۱.۱۰ حاصل‌ضربهای داخلی و هنجها

دراین بخش حاصل‌ضربهای داخلی و هنجها را معرفی می‌کنیم. این‌مفهومها نقش مهمی در نظریهٔ رشته های فوریه، که در فصل ۱۱ مورد بحث قرار می‌گیرد، بعهده دارند.

تعریف ۵۱.۱۰ فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی در $L(I)$ باشند که حاصل‌ضرب

آنها $g \cdot f$ نیز در $L(I)$ باشد. در این صورت، انتگرال

$$\int_I f(x)\, g(x)\, dx \qquad (۳۴)$$

را حاصلضرب داخلی f و g نامیده، با نماد (f, g) نشان می‌دهند. اگر $f^2 \in L(I)$، عدد نامنفی $(f, f)^{1/2}$ را با $\| f \|$ نشان داده، آن را هنج L^2 تابع f نامند.

تبصره. انتگرال (۳۴) مشابه به مجموع $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ است که در واقع حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ می‌باشد. مقدارهای تابعی $f(x)$ و $g(x)$ در (۳۴) نقش مؤلفه‌های x_k و y_k را دارند، و عمل انتگرالگیری به‌جای عمل جمعبندی بکار رفته است. هنج L^2 تابع f با درازای یک بردار مشابهت دارد.

اولین قضیهٔ مذکور در زیر شرطی کافی برای این که یک تابع در $L(I)$ هنج L^2 داشته باشد بیان می‌کند.

قضیهٔ ۵۲.۱۰ هرگاه $f \in L(I)$ و f تقریباً همه‌جا بر I کراندار باشد، آنگاه $f^2 \in L(I)$.

برهان. چون $f \in L(I)$، پس f اندازه‌پذیر و درنتیجه f^2 بر I اندازه‌پذیر است و تقریباً همه‌جا بر I درنامساوی $| f(x) |^2 \leqslant M \, | f(x) |$ صدق می‌کند، که درآن M کرانی بالائی برای $| f |$ است. حال، بنا برقضیهٔ ۳۵.۱۰، می‌توان نتیجه گرفت که $f^2 \in L(I)$.

۲۲.۱۰ مجموعهٔ $L^2(I)$ ازتابعهائی که مربعهایشان انتگرالپذیرند

تعریف ۵۳.۱۰ مجموعهٔ همهٔ تابعهای حقیقی اندازه‌پذیر مانند f بر I را که $f^2 \in L(I)$ با نماد $L^2(I)$ نشان می‌دهیم. گوئیم هر تابع در $L^2(I)$ مربعش انتگرالپذیر است.

تبصره. مجموعهٔ $L^2(I)$ نه از $L(I)$ بزرگتر است نه کوچکتر. مثلاً، تابع f که به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\text{به‌ازای } 0 < x \leqslant 1 \text{، } f(x) = x^{-1/2} \text{، و } f(0) = 0\text{،}$$

در $L([0, 1])$ است اما در $L^2([0, 1])$ نیست. همچنین، تابع

$$g(x) = 1/x \text{، } x \geqslant 1\text{،}$$

در $L([1, +\infty[)$ است ولی در $L^2([1, +\infty[)$ نیست.

قضیهٔ ۵۴.۱۰ هرگاه $f \in L^{2}(I)$ و $g \in L^{2}(I)$، آنگاه $f \cdot g \in L(I)$ و به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b، $(af + bg) \in L^{2}(I)$.

برهان. از اندازه‌پذیری f و g نتیجه می‌شود که $f \cdot g \in M(I)$. چون

$$|f(x)\ g(x)| \leqslant \frac{f^{2}(x) + g^{2}(x)}{2},$$

بنا بر قضیهٔ ۳۵.۱۰، $f \cdot g \in L(I)$. همچنین، $(af + bg) \in M(I)$ و

$$(af + bg)^{2} = a^{2}f^{2} + 2abf \cdot g + b^{2}g^{2},$$

پس $(af + bg) \in L^{2}(I)$.

بنابراین، حاصلضرب داخلی (f, g) به‌ازای هر جفت از تابعهای f و g در $L^{2}(I)$ تعریف شده است. خاصیتهای اساسی حاصلضربهای داخلی و هنجها در قضیهٔ زیر توصیف می‌شوند.

قضیهٔ ۵۵.۱۰ اگر f، g، و h در $L^{2}(I)$ باشند و c عددی حقیقی باشد:

آ) $(f, g) = (g, f)$ (تعویضپذیری).

ب) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ (خطی).

ج) $(cf, g) = c(f, g)$ (شرکتپذیری).

د) $\|cf\| = |c|\, \|f\|$ (همگنی).

ه) $|(f, g)| \leqslant \|f\|\, \|g\|$ (نامساوی کشی ـ شوارتز).

و) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ (نامساوی مثلثی).

برهان. قسمتهای (آ) تا (د) نتیجه‌های فوری تعریف هستند. قسمت (ه) بی‌درنگ از نامساوی

$$\int_{I}\left[\int_{I} |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^{2}\, dy\right] dx \geqslant 0$$

نتیجه می‌شود. برای اثبات (و) می‌توان از قسمت (ه) و رابطهٔ

$$\begin{aligned}\|f + g\|^{2} &= (f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g)\\ &= \|f\|^{2} + \|g\|^{2} + 2(f, g)\end{aligned}$$

استفاده کرد.

تبصره. مفهوم حاصلضرب داخلی را می‌توان برای تابعهای مختلطی مانند f که

$f \mid f \mid \in L^2(I)$ وسعت داد. در این حالت، (f, g) بـا معادلهٔ زیرین تعریف می‌شود:

$$(f, g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}dx,$$

که در آن منظور از $\overline{g(x)}$ مزدوج مختـلط $g(x)$ است. استفاده از مـزدوج مختـلط برای این است که حاصل‌ضرب داخلی f بـا خودش مقداری نـامنفی باشد، یعنی، $(f, f) = \int_I |f|^2$. هنج L^2 تابع f، مـانند قبل، عبارت است از

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}.$$

قضیهٔ ۵۵.۱۰ برای تابعهای مختلط نیز معتبر است، بجز آن که در قسمت (آ) باید نوشت

$$(f, g) = \overline{(g, f)}. \qquad (۳۵)$$

از این تغییر نتیجهٔ زیر که لنگهٔ قسمت (ب) است بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}(f, g + h) &= \overline{(g + h, f)} = \overline{(g, f)} + \overline{(h, f)}\\ &= (f, g) + (f, h).\end{aligned}$$

در قسمتهای (ج) و (د) پایای c می‌تواند مختلط باشد. از (ج) و (۳۵) رابطهٔ زیـر بدست می‌آید:

$$(f, cg) = \bar{c}(f, g).$$

نامساوی کشی ـ شوارتز و نامساوی مثلثی برای تابعهای مختلط نیز معتبرند.

۲۳.۱۰ مجموعهٔ $L^2(I)$ به‌عنوان یك فضای نیمه متری

یـادآوری مـی‌کنیم (تعریف ۳۲.۳) که یک فضای متری مجموعـه‌ای است مانند T به‌انضمام تـابعی نامنفی مانند d بر $T \times T$ کـه به‌ازای هر x، y، و z در T دارای خاصیتهای زیرین باشد:

۱. $d(x, x) = 0$؛

۲. اگر $x \neq y$، $d(x, y) > 0$؛

۳. $d(x, y) = d(y, x)$؛

۴. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

با تعریف فاصلهٔ $d(f, g)$ بین هر دو تابع مختلط در $L^2(I)$ با معادلهٔ

$$d(f, g) = \|f - g\| = (\int_I |f - g|^2)^{1/2},$$

سعی مـی‌کنیم این مجموعـه را تبدیل بـه‌یک فضای متری کنیم. این تـابع دارای

خاصیتهای ۱، ۳، و ۴ هست، ولی خاصیت ۲ را ندارد. هر گاه f و g تابعهائی در $L^{2}(I)$ باشند و بر مجموعه‌ای ناتهی که دارای اندازهٔ صفر است با یکدیگر متفاوت باشند آنگاه $f \neq g$، اما چون $f - g = 0$ تقریباً همه جا بر I، پس

$$d(f, g) = 0 .$$

تابعی مانند d که در شرطهای ۱، ۳، و ۴ صدق کند، ولی در ۲ صادق نباشد، یک نیمه‌متر نامیده می‌شود. مجموعهٔ $L^{2}(I)$، به‌انضمام نیمه متر d، را یک فضای نیمه متری می‌نامند.

۲۴.۱۰ قضیهٔ همگرائی برای رشته های توابع در $L^{2}(I)$

قضیهٔ همگرائی زیر مشابه قضیهٔ لوی برای رشته ها (قضیهٔ ۲۶.۱۰) است.

قضیهٔ ۵۶.۱۰ فرض کنیم $\{ g_n \}$ دنباله‌ای از تابعها در $L^{2}(I)$ باشد بقسمی که رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| g_n \|$$

همگرا باشد، در این صورت، رشتهٔ تابعهای $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه‌جا بر I به تابعی مانند g در $L^{2}(I)$ همگرا است، و

$$\| g \| = \lim_{n \to \infty} \| \sum_{k=1}^{n} g_k \| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \| . \qquad (۳۶)$$

برهان. فرض کنیم که $M = \sum_{n=1}^{\infty} \| g_n \|$. بنابر توسیع نامساوی مثلثی به‌مجموعهای متناهی، خواهیم داشت

$$\| \sum_{k=1}^{n} | g_k | \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| g_k \| \leqslant M .$$

از این نتیجه می‌شود که

$$\int_I \left(\sum_{k=1}^{n} | g_k(x) | \right)^{2} dx = \| \sum_{k=1}^{n} | g_k | \|^{2} \leqslant M^{2} . \qquad (۳۷)$$

اگر $x \in I$، قرار می‌دهیم

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} | g_k(x) | \right)^{2} .$$

دنبالهٔ $\{ f_n \}$ صعودی است، هر $f_n \in L(I)$ (زیرا هر $g_k \in L^{2}(I)$)، و از (۳۷) معلوم می‌شود که $\int_I f_n \leqslant M^{2}$. بنابراین، دنبالهٔ $\{ \int_I f_n \}$ همگرا خواهد بود. بنابر قضیهٔ لوی برای دنباله‌ها (قضیهٔ ۲۴.۱۰)، تابعی مانند f در $L(I)$ هست بقسمی که $f_n \to f$ تقریباً همه‌جا بر I، و

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \leqslant M^2.$$

بنابراین، رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ تقریباً همه‌جا بر I همگرای مطلق است. فرض کنیم در نقطه هائی که در آنها حد زیر وجود داشته باشد،

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k(x).$$

و نیز فرض کنیم که

$$G_n(x) = \left| \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \right|^2.$$

دراین صورت، هر $G_n \in L(I)$ و $G_n(x) \to |g(x)|^2$ تقریباً همه‌جا بر I. بعلاوه،

$$G_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$$ ت. ه. بر I.

بنابراین، به‌موجب قضیهٔ همگرائی تسلطی لیگ، $|g|^2 \in L(I)$ و

$$\int_I |g|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_I G_n. \qquad (38)$$

چون g اندازه پذیراست، پس معلوم می‌شود که $g \in L^2(I)$. همچنین، داریم

$$\int_I G_n = \int_I \left| \sum_{k=1}^{n} g_k \right|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|^2, \quad \text{و} \quad \int_I G_n \leqslant \int_I f_n \leqslant M^2,$$

نتیجه آن که رابطهٔ (۳۸) ایجاب می‌کند که

$$\|g\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|^2 \leqslant M^2,$$

واین، به‌نوبهٔ خود، رابطهٔ (۳۶) را نتیجه می‌دهد.

۲۵.۱۰ قضیهٔ ریس ـ فیشر[1]

با استفاده از قضیهٔ همگرائی که هم اکنون ثابت شد می‌توان اثبات کرد که هر دنبالهٔ کشی درفضای نیمه متری $L^2(I)$ به‌تابعی‌در $L^2(I)$ همگرااست. با بیان دیگرمی‌توان گفت که،فضای نیمه متری $L^2(I)$ تام است. این نتیجه که به قضیهٔ ریس ـ فیشر معروف است، نقشی مهم در نظریهٔ رشته های فوریه دارد.

قضیهٔ ۵۷.۱۰ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای کشی از تابعهای مختلط در $L^2(I)$ باشد. یعنی، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیحی مانند N باشد بقسمی که

1. Fischer

هرگاه $N \leqslant n \leqslant m$ ، آنگاه $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ ‎.‏ (۳۹)

در این صورت، تابعی مانند f در $L^2(I)$ هست بقسمی که

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0 \,. \tag{۴۰}$$

برهان. اگر فرض (۳۹) را مکرر بکار بریم، می‌توان دنباله‌ای صعودی از عددهای صحیح مانند $n(1) < n(2) < \ldots$ را بقسمی بدست آورد که

هرگاه $m \geqslant n(k)$ ، آنگاه $\|f_m - f_{n(k)}\| < \frac{1}{2^k}$ ‎.‏

فرض کنیم که $g_1 = f_{n(1)}$ ، و به‌ازای $k \geqslant 2$ ، $g_k = f_{n(k)} - f_{n(k-1)}$ ‎.‏ در این صورت، رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|$ همگرا است، زیرا

$$\| f_{n(1)} \| + \sum_{k=2}^{\infty} \| f_{n(k)} - f_{n(k-1)} \| < \| f_{n(1)} \| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$
$$= \| f_{n(1)} \| + 1 \,.$$

هر g_n در $L^2(I)$ است. از این روی، بنابرقضیهٔ ۵۶.۱۰ ، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جا بر I به تابعی مانند f در $L^2(I)$ همگرا خواهد بود. برای اتمام برهان نشان می‌دهیم که وقتی‌که $m \to \infty$ ، $\|f_m - f\| \to 0$ ‎.‏

برای این منظور نامساوی مثلثی را بکار برده، می‌نویسیم

$$\|f_m - f\| \leqslant \|f_m - f_{n(k)}\| + \|f_{n(k)} - f\| . \tag{۴۱}$$

اگر $m \geqslant n(k)$ ، جملهٔ اول سمت راست نامساوی بالا از $1/2^k$ کوچکتر است. برای تخمین جملهٔ دوم ملاحظه می‌کنیم که

$$f - f_{n(k)} = \sum_{r=k+1}^{\infty} \{ f_{n(r)} - f_{n(r-1)} \},$$

و رشتهٔ $\sum_{r=k+1}^{\infty} \|f_{n(r)} - f_{n(r-1)}\|$ همگرا است. بنابراین، با استفاده از نامساوی (۳۶) در قضیهٔ ۵۶.۱۰ ، می‌توان نوشت

$$\|f - f_{n(k)}\| \leqslant \sum_{r=k+1}^{\infty} \|f_{n(r)} - f_{n(r-1)}\| < \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^{k-1}} .$$

از این روی، (۴۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

اگر $m \geqslant n(k)$ ، $\|f_m - f\| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k}$ ‎.‏

چون وقتی که $k \to \infty$ ، $n(k) \to \infty$ ، رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که وقتی که $m \to \infty$ ، $\|f_m - f\| \to 0$ ‎.‏

تبصره. در طول اثبات بالا نشان داده شد که هر دنبالهٔ کشی از تابعها در $L^2(I)$ دارای زیردنباله‌ای است که تقریباً همه جا بر I نقطه‌وار به تابع حدی مانند f در $L^2(I)$ همگرا است. اما نمی‌توان نتیجه گرفت که دنبالهٔ $\{f_n\}$ خودش نیز تقریباً همه جا بر I نقطه‌وار به f همگرا است. (در بخش ۱۳.۹ مثال ناقضی آمده است.) اگر چه $\{f_n\}$ در فضای نیمه متری $L^2(I)$ به f همگرا است، اما این همگرائی همان همگرائی نقطه‌وار نیست.

تمرین

تابعهای بالائی

۱۰.۱۰ ثابت کنید که $\max(f, g) + \min(f, g) = f + g$، و

$$\max(f + h, g + h) = \max(f, g) + h,$$
$$\min(f + h, g + h) = \min(f, g) + h.$$

۱۰.۲ فرض کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هائی صعودی از تابعها بر بازهٔ I باشند. قرار دهید $u_n = \max(f_n, g_n)$ و $v_n = \min(f_n, g_n)$.

آ) ثابت کنید که $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ بر I صعودیند.

ب) اگر $f_n \nearrow f$ ت. ه. بر I و $g_n \nearrow g$ ت. ه. بر I، ثابت کنید که $u_n \nearrow \max(f, g)$ و $v_n \nearrow \min(f, g)$ ت. ه. بر I.

۱۰.۳ فرض کنید که $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای باشد که بر بازهٔ I نقطه‌وار به تابع حدی مانند f همگرا باشد. اگر I بی‌کران باشد و $f(x) \geqslant ۱$ تقریباً همه جا بر I، ثابت کنید که دنبالهٔ $\{\int_I s_n\}$ واگرا است.

۱۰.۴ در این تمرین تابعی بالائی مانند f بر بازهٔ $I = [۰, ۱]$ می‌سازیم که $-f \notin U(I)$. برای اینکار فرض کنیم که $\{r_1, r_2, \ldots\}$ مجموعهٔ عددهای گویا در بازهٔ $[۰, ۱]$ را نشان دهد و $I_n = [r_n - ۴^{-n}, r_n + ۴^{-n}] \cap I$. تابع f را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر به‌ازای یک مقدار n، $x \in I_n$، قرار می‌دهیم $f(x) = ۱$، و در غیر این صورت $f(x)$ را مساوی صفر تعریف می‌کنیم.

آ) فرض کنید اگر $x \in I_n$، $f_n(x) = ۱$، واگر $x \notin I_n$، $f_n(x) = ۰$، و نیز فرض کنید که $s_n = \max(f_1, \ldots, f_n)$. نشان دهید که $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای است که f را تولید می‌کند. این مطلب نشان می‌دهد که $f \in U(I)$.

ب) ثابت کنید که $\int_I f \leqslant ۲/۳$.

ج) اگر تابع پله‌ای s بر I در رابطهٔ $s(x) \leqslant -f(x)$ صدق کند، نشان دهید که $s(x) \leqslant -۱$ تقریباً همه جا بر I، و درنتیجه $\int_I s \leqslant -۱$.

د) فرض کنید $f \in U(I)$ — و با استفاده از (ب) و (ج) تناقضی بدست آورید.

تبصره. در تمرینهای زیر، در هر نقطه که انتگرالده تعریف نشده باشد، مقدارش صفر فرض می‌شود.

قضیه‌های همگرائی

۵.۱۰ اگر $f_n(x) = e^{-nx} - ۲e^{-۲nx}$، نشان دهید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \int_{۰}^{\infty} f_n(x)dx \neq \int_{۰}^{\infty} \sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)dx.$$

۶.۱۰ معادله‌های زیر را توجیه کنید:

آ) $\int_{۰}^{۱} \log \frac{۱}{۱-x} dx = \int_{۰}^{۱} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \int_{۰}^{۱} x^n dx = ۱$.

ب) $\int_{۰}^{۱} \frac{x^{p-۱}}{۱-x} \log\left(\frac{۱}{x}\right) dx = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{(n+p)^۲}$ $(p > ۰)$.

۷.۱۰ قضیهٔ همگرائی تانری[1] برای انتگرالهای ریمان را ثابت کنید: فرض کنید $\{f_n\}$ دنبالهٔ داده شده‌ای از تابعها باشد، و $\{p_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای حقیقی باشد بقسمی که وقتی‌که $n \to \infty$، $p_n \to +\infty$. همچنین فرض کنید

آ) به‌ازای هر $b \geqslant a$، $f_n \to f$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$.

ب) به‌ازای هر $b \geqslant a$، f_n بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد.

ج) تابعی نامنفی مانند g باشد که بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی داشته باشد و $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ تقریباً همه جا بر $[a, +\infty[$.

در این صورت، f و $|f|$ هر دو بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی دارند، دنبالهٔ $\{\int_a^{p_n} f_n\}$ همگرا است، و

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{p_n} f_n(x)dx.$$

1. Tannery

د) بااستفاده از قضیهٔ تانری ثابت کنید که

اگر $p > -1$ ، $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p \, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx$.

۸.۱۰ لم فاتو[1] را ثابت کنید: فرض کنید $\{f_n\}$ دنبالهٔ داده شده‌ای از تابعهای نامنفی در $L(I)$ باشد بقسمی که (آ) $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر I به‌تابع حدی مانند f همگرا باشد، و (ب) به‌ازای عددی مانند $A > 0$ و هر $n \geqslant 1$ ، $\int_I f_n \leqslant A$. در این‌صورت، تابع حد $f \in L(I)$ و $\int_I f \leqslant A$.

تبصره. در این جا قید نشده است که $\{\int_I f_n\}$ همگرا باشد. (با قضیهٔ ۲۴.۱۰ مقایسه کنید.)

راهنمائی. قراردهید $g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\}$. دراین صورت، $g_n \nearrow f$ ت. ه. بر I و $\int_I g_n \leqslant \int_I f_n \leqslant A$ پس $\lim_{n\to\infty} \int_I g_n$ وجود دارد و از A نابیشتر است. حال قضیهٔ ۲۴.۱۰ را بکار برید.

انتگرالهای ریمان مجازی

۹.۱۰ آ) اگر $p > 1$ ، ثابت کنید که انتگرال $\int_1^{+\infty} x^{-p} \sin x dx$ هم به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی و هم به‌عنوان انتگرال لبگ وجود دارد.

راهنمائی. انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء را بکار برید.

ب) اگر $0 < p \leqslant 1$ ، ثابت کنید که انتگرال مذکور در (آ) به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی وجوددارد ولی به‌عنوان انتگرال لبگ وجودندارد.

راهنمائی. فرض کنید

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2x} & \text{اگر به‌ازای } n = 1, 2, \ldots \text{ ،} \ n\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant n\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ ،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

و نشان دهید که

$$\int_1^{n\pi} x^{-p} |\sin x| \, dx \geqslant \int_\pi^{n\pi} g(x) dx \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \cdot$$

۱۰.۱۰ آ) با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و دستور $\int_0^\infty \sin x / x \, dx = \pi/2$ ، نشان دهید که

1. Fatou

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x}\, dx = \frac{\pi}{۴}.$$

ب) با انتگرالگیری به‌طریقهٔ جزء به جزء در (آ) دستور زیررا نتیجه بگیرید:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin^{۲} x}{x^{۲}}\, dx = \frac{\pi}{۲}.$$

ج) با استفاده از اتحاد $\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱$ و قسمت (ب)، دستور زیر را بدست آورید:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin^{۴} x}{x^{۲}}\, dx = \frac{\pi}{۴}.$$

د) با استفاده از نتیجهٔ (ج)، دستور زیر را بدست آورید:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin^{۴} x}{x^{۴}}\, dx = \frac{\pi}{۳}.$$

۱۱.۱۰ اگر $a > ۱$، ثابت‌کنید به‌ازای هر q و $p < -۱$، یا به‌ازای $q < -۱$ و $p = -۱$، انتگرال $\int_{a}^{+\infty} x^{p}(\log x)^{q}\, dx$ هم به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی و هم به‌عنوان انتگرال لبگ وجود دارد.

۱۲.۱۰ ثابت کنید هریک از انتگرالهای زیر، هم به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی و هم به‌عنوان انتگرال لبگ، وجود دارد.

آ) $\int_{۱}^{\infty} \sin^{۲} \frac{۱}{x}\, dx$ ، ب) $\int_{\circ}^{\infty} x^{p} e^{-x^{q}}\, dx$ $(p > \circ, q > \circ)$.

۱۳.۱۰ تعیین کنید کدام یک از انتگرالهای زیر، به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی یا به‌عنوان انتگرال لبگ، وجود دارد.

آ) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-(t^{۲}+t^{-۲})}\, dt$ ، ب) $\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ ،

ج) $\int_{۱}^{\infty} \frac{\log x}{x(x^{۲}-۱)^{۱/۲}}\, dx$ ، د) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-x} \sin \frac{۱}{x}\, dx$ ،

ه) $\int_{\circ}^{۱} \log x \sin \frac{۱}{x}\, dx$ ، و) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-x} \log (\cos^{۲} x)\, dx$.

۱۴.۱۰ آن مقدارهای p و q را تعیین کنید که به‌ازای آنها انتگرالهای لبگ زیرین وجود داشته باشند.

آ) $\int_0^1 x^p(1-x^2)^q\,dx$ ، ب) $\int_0^\infty x^x e^{-x^p}\,dx$ ،

ج) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx$ ، د) $\int_0^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^q}\,dx$ ،

ه) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx$ ، و) $\int_\pi^\infty (\log x)^p(\sin x)^{-1/3}\,dx$.

۱۵.۱۰ ثابت کنید که انتگرالهای ریمان مجازی زیرین مساوی مقدارهای داده شده‌اند (m و n عددهای صحیح مثبتی می‌باشند).

آ) $$\int_0^\infty \frac{\sin^{2n+1} x}{x}\,dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$$ ،

ب) $$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^{n+1}}\,dx = n^{-2}$$ ،

ج) $$\int_0^\infty x^n(1+x)^{-n-m-1}\,dx = \frac{n!\,(m-1)!}{(m+n)!}$$.

۱۶.۱۰ فرض کنید تابع داده شدهٔ f بر بازهٔ $[0, 1]$ انتگرال ریمان داشته باشد، f متناوب با دورهٔ تناوب ۱ باشد، و $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. ثابت کنید که اگر $s > 0$، انتگرال ریمان مجازی $\int_1^{+\infty} x^{-s} f(x)\,dx$ وجود دارد. راهنمائی. فرض کنید که $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ و بنویسید $\int_1^b x^{-s} f(x)\,dx = \int_1^b x^{-s}\,dg(x)$.

۱۷.۱۰ فرض کنید به‌ازای هر $0 < a < b$، $f\in R$ بر $[a, b]$ باشد. تابع g را با معادلهٔ زیر تعریف کنید: اگر $x > 0$، $xg(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. فرض کنید $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ وجود داشته، مقدار آن B باشد. اگر a و b عددهای مثبت ثابتی باشند، ثابت کنید که

آ) $$\int_a^b \frac{f(x)}{x}\,dx = g(b) - g(a) + \int_a^b \frac{g(x)}{x}\,dx$$.

ب) $$\lim_{T\to+\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x}\,dx = B\log\frac{b}{a}$$.

ج) $$\int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = B\log\frac{a}{b} + \int_a^b \frac{f(t)}{t}\,dt$$.

د) فرض کنید که $\lim_{x\to0+} x\int_x^1 f(t)t^{-2}\,dt$ وجود داشته، مقدار آن A

باشد. ثابت کنید که

$$\int_{\circ}^{\backslash} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = A\log\frac{b}{a} - \int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}dt.$$

ه) از تلفیق (ج) و (د) نتیجه بگیرید که

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (B-A)\log\frac{a}{b}$$

و با استفاده از این نتیجه انتگرالهای زیر را ارزیابی کنید:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx\ ,\ \int_{\circ}^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx.$$

انتگرالهای لبگ

۱۸.۱۰ ثابت کنید هر یک از انتگرالهای لبگ زیرین وجود دارد.

آ) $\int_{\circ}^{\backslash} \frac{x\log x}{(\backslash + x)^{\text{۲}}}\,dx$ ،

ب) $\int_{\circ}^{\backslash} \frac{x^{p}-\backslash}{\log x}\,dx \quad (p > -\backslash)$ ،

ج) $\int_{\circ}^{\backslash} \log x \log(\backslash + x)\,dx$ ،

د) $\int_{\circ}^{\backslash} \frac{\log(\backslash - x)}{(\backslash - x)^{\backslash/\text{۲}}}\,dx$.

۱۹.۱۰ فرض کنید f بر $[\circ, \backslash]$ پیوسته باشد، $f(\circ) = \circ$ ، و $f'(\circ)$ وجود داشته باشد. ثابت کنید که انتگرال لبگ $\int_{\circ}^{\backslash} f(x)\,x^{-\text{۳}/\text{۲}}\,dx$ وجود دارد.

۲۰.۱۰ ثابت کنید انتگرالهای مذکور در (آ) و (ج) به‌عنوان انتگرالهای لبگ وجود دارند ولی انتگرالهای (ب) و (د) وجود ندارند.

آ) $\int_{\circ}^{\infty} x^{\text{۲}}\,e^{-x^{\text{۸}}\sin^{\text{۲}}x}\,dx$ ، ب) $\int_{\circ}^{\infty} x^{\text{۳}}\,e^{-x^{\text{۸}}\sin^{\text{۲}}x}\,dx$ ،

ج) $\int_{\backslash}^{\infty} \frac{dx}{\backslash + x^{\text{۴}}\sin^{\text{۲}}x}$ ، د) $\int_{\backslash}^{\infty} \frac{dx}{\backslash + x^{\text{۲}}\sin^{\text{۲}}x}$.

راهنمائی. برای این انتگرالها کرانهائی بالائی و پائینی روی همسایگیهای

مناسبی از نقطه‌های $n\pi$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ بدست آورید.

تابعهائی که با انتگرالها تعریف می‌شوند

۲۱.۱۰ برای هر یک از انتگرالهای زیرین مجموعهٔ S از عددهای حقیقی را بقسمی بیابید کـه به‌ازای هر y عضو S، آن انتگرال به‌عنوان انتگرال لبگ وجود داشته باشد.

آ) $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}dx$، ب) $\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-1}\,dx$،

ج) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 xy}{x^2}dx$، د) $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx$.

۲۲.۱۰ فرض کنید اگر $y \in \mathbf{R}$، $F(y) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx$. نشان دهید که F در معادلهٔ دیفرانسیل $F'(y) + 2yF(y) = 0$ صدق می‌کند و از آن نتیجه بگیرید کـه $F(y) = (1/2)\sqrt{\pi}e^{-y^2}$. (از تساوی $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = (1/2)\sqrt{\pi}$، که در تمرین ۱۹.۷ بدست آمد، استفاده کنید.)

۲۳.۱۰ فرض‌کنید اگر $y > 0$، $F(y) = \int_0^\infty \sin xy/x(x^2+1)\,dx$. نشان دهید که F در معادلهٔ دیفرانسیل $F''(y) - F(y) + \pi/2 = 0$ صدق می‌کند واز این نتیجه بگیرید که $F(y) = (1/2)\pi(1-e^{-y})$. با استفاده ازاین نتیجه بگیرید که به‌ازای $y > 0$ و $a > 0$، معادله‌های زیر معتبرند:

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ay}),$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi e^{-ay}}{2a},$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin xy}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ay};$$

می‌توانید تساوی

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

را بکار برید.

۲۴.۱۰ فرض کنید f به یکی از دو صورت زیر باشد:

آ) $f(x, y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ ، ب) $f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

در هر مورد نشان دهید که

$$\int_1^\infty \left[\int_1^\infty f(x, y)\, dx\right] dy \neq \int_1^\infty \left[\int_1^\infty f(x, y)\, dy\right] dx.$$

۲۵.۱۰ نشان دهید که در انتگرالهای زیریـن نمی‌توان ترتیب عمل انتگرالگیری را عوض کرد:

آ) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\right] dy$ ،

ب) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\, dy\right] dx$.

۲۶.۱۰ فرض کنید اگر $(x, y) \neq (0, 0)$،

$$f(x, y) = \int_0^\infty dt/[(1+x^2 t^2)(1+y^2 t^2)].$$

نشان دهید (با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی) که

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\pi (x+y)^{-1}.$$

با ارزیابی انتگرال مکرر $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dx]\, dy$، دستور زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^\infty \frac{(\arctan x)^2}{x^2} dx = \pi \log 2 .$$

۲۷.۱۰ فرض کنید اگر $y \geqslant 0$ ، $f(y) = \int_0^\infty \sin x \cos xy / x\, dx$. نشان دهید (با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی) کـه اگـر $0 \leqslant y < 1$ ، $f(y) = \pi/2$، و اگر $y > 1$ ، $f(y) = 0$. با ارزیابی انتگرال $\int_0^a f(y)\, dy$، دستور زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin x}{x^2} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi a}{2} \text{ ، } & 0 \leqslant a \leqslant 1 \text{ اگر } \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} \text{ ، } & a \geqslant 1 \text{ اگر } \end{cases}$$

۲۸.۱۰ آ) اگر $s > 0$ و $a > 0$، نشان دهید که رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{x^s}\, dx$$

همگرا است و ثابت کنید که

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{x^s}\, dx = 0.$$

ب) فرض کنید که $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n\pi x)/n$. نشان دهید که اگر

$$0 < s < 1 ،\quad \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^s}\, dx = (2\pi)^{s-1} \zeta(2-s) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^s}\, dt \ ؛$$

که در آن ζ تابع زتای ریمان است.

۲۹.۱۰ آ) دستور زیر را، که مشتق nام تابع گاما را بدست می‌دهد، ثابت کنید:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t)^n\, dt \quad (x > 0).$$

ب) وقتی که $x = 1$، ثابت کنید که رابطهٔ بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Gamma^{(n)}(1) = \int_0^1 \left(t^2 + (-1)^n e^{t-1/t}\right) e^{-t} t^{-2} (\log t)^n\, dt.$$

ج) با استفاده از (ب)، نشان دهید که $\Gamma^{(n)}(1)$ و $(-1)^n$ هم علامتند.

در تمرینهای ۳۰.۱۰ و ۳۱.۱۰، Γ تابع گاما را نشان می‌دهد.

۳۰.۱۰ با استفاده از تساوی $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = (1/2)\sqrt{\pi}$، ثابت کنید که $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. ثابت کنید که $\Gamma(n+1) = n!$، و اگر $n = 0, 1, 2, \ldots$، $\Gamma(n+1/2) = (2n)!\sqrt{\pi}/4^n n!$.

۳۱.۱۰ آ) نشان دهید که به‌ازای $x > 0$، نمایش رشته‌ای زیر وجود دارد:

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

که در آن $c_n = (1/n!) \int_1^{\infty} t^{-1} e^{-t} (\log t)^n\, dt$. راهنمائی: بنویسید

$$\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$$

و سپس در هر یک از انتگرالها بسط مناسبی به‌صورت رشتهٔ توانی را بکار برید.

ب) نشان دهید که رشتهٔ توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ به‌ازای هر عدد مختلط z و رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n/n!]/(n+z)$ به‌ازای هرعدد مختلط $z \neq 0, -1, -2, \cdots$ همگرا است.

۳۲.۱۰ فرض کنید به‌ازای هر $b > 0$، تابع f بر $[0, b]$ با تغییرکراندار باشد، و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وجود داشته باشد. این حد را با $f(\infty)$ نشان داده، ثابت کنید که

$$\lim_{y\to 0+} y \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x)\, dx = f(\infty).$$

راهنمائی. انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء را بکار برید.

۳۳.۱۰ فرض کنید f بر بازهٔ $[0, 1]$ با تغییر کراندار باشد. ثابت کنید که

$$\lim_{y\to 0+} y \int_0^{1} x^{y-1} f(x)\, dx = f(0+).$$

تابعهای اندازه پذیر

۳۴.۱۰ اگر f بر بازهٔ باز I انتگرال لبگ داشته باشد و $f'(x)$ تقریباً همه جا بر I وجود داشته باشد، ثابت کنید که f' بر I اندازه‌پذیر است.

۳۵.۱۰ آ) فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای باشد بقسمی که $s_n \to f$ همه‌جا بر $\mathbf{R}$. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی a،

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} s_k^{-1}\left(\left]a + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right).$$

ب) اگر f بر $\mathbf{R}$ اندازه‌پذیر باشد، ثابت کنید که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}$ مانند A، مجموعهٔ $f^{-1}(A)$ اندازه پذیر است.

۳۶.۱۰ در این تمرین مجموعه‌ای در $\mathbf{R}$ می‌سازیم‌که اندازه‌ناپذیر باشد. اگر x و y عددهائی حقیقی دربازهٔ $[0, 1]$ باشند، گوئیم x و y هم‌ارزند، ومی‌نویسیم $x \sim y$، در صورتی که $x - y$ گویا باشد. رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است، و بازهٔ $[0, 1]$ را می‌توان به صورت اجتماعی از زیرمجموعه‌های از هم جدا (به‌نام رده‌های هم‌ارزی) بیان کردکه هیچ دونقطهٔ متمایزی درهریک ازآنها با یکدیگر هم‌ارز نیستند. از هر یک از رده‌های هم‌ارزی نقطه‌ای اختیار نموده، فرض می‌کنیم که E مجموعهٔ چنین نقاطی باشد. با فرض اندازه‌پذیر بودن E تناقضی بدست می‌آوریم. فرض

کنیم که $A=\{r_1, r_2, \ldots\}$ مجموعهٔ عددهای گویای موجود در $[-1, 1]$ را نشان دهد و $E_n = \{r_n + x \mid x \in E\}$.

آ) ثابت کنید هر E_n اندازه‌پذیر است و $\mu(E_n) = \mu(E)$.

ب) ثابت کنید $\{E_1, E_2, \ldots\}$ دسته‌ای از مجموعه‌های از هم‌جدا است که اجتماع آنها حاوی $[0, 1]$ و محتوا در $[-1, 2]$ است.

ج) بااستفاده ازقسمتهای (آ) و (ب) وهمچنین خاصیت جمعپذیری شمارشپذیر اندازهٔ لبگ، تناقضی بدست آورید.

۳۷.۱۰ به‌تمرین ۳۶.۱۰ بازگردید وثابت کنیدکه تابع مشخص کنندهٔ χ_E اندازه‌پذیر نیست. فرض‌کنید که $f=\chi_E-\chi_{I-E}$، که درآن $I = [0, 1]$. ثابت کنید که $|f| \in L(I)$ اما $f \notin M(I)$. (این‌مطلب را با نتیجهٔ ۱ ازقضیهٔ ۳۵.۱۰ مقایسه کنید.)

تابعهائی که مربعهایشان انتگرالپذیرند

از تمرین ۳۸.۱۰ تا ۴۲.۱۰ فرض براین است که همهٔ تابعها در $L^2(I)$ باشند. هنج L^2 تابع f، یعنی $\|f\|$، با دستور $\|f\| = (\int_I |f|^2)^{1/2}$ تعریف شده است.

۳۸.۱۰ اگر $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$، ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

۳۹.۱۰ اگر $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ و $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ تقریباً همه جا بر I، ثابت کنید که $f(x) = g(x)$ تقریباً همه جا بر I.

۴۰.۱۰ اگر $f_n \to f$ به‌طور یک شکل بربازهٔ فشردهٔ I، و هر f_n بر I پیوسته باشد، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$.

۴۱.۱۰ اگر $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$، ثابت کنید به‌ازای هر g در $L^2(I)$، $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n \cdot g = \int_I f \cdot g$.

۴۲.۱۰ اگر $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ و $\lim_{n\to\infty}\|g_n - g\| = 0$، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n \cdot g_n = \int_I f \cdot g$.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

10.1 Asplund, E., and Bungart, L., *A First Course in Integration*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

10.2 Bartle, R., *The Elements of Integration*. Wiley, New York, 1966.
10.3 Burkill, J. C., *The Lebesgue Integral*. Cambridge University Press, 1951.
10.4 Halmos, P., *Measure Theory*. Van Nostrand, New York, 1950.
10.5 Hawkins, T., *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origin and Development*. University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
10.6 Hildebrandt, T. H., *Introduction to the Theory of Integration*. Academic Press, New York, 1963.
10.7 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, 1937.
10.8 Korevaar, J., *Mathematical Methods*, Vol. 1. Academic Press, New-York, 1968.
10.9 Munroe, M. E., *Measure and Integration*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, 1971.
10.10 Riesz, F., and Sz.-Nagy, B., *Functional Analysis*. L. Boron, translator. Ungar, New York, 1955.
10.11 Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd. ed. McGraw-Hill, New York, 1964.
10.12 Shilov, G. E., and Gurevich, B. L., *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
10.13 Taylor, A. E., *General Theory of Functions and Integration*. Blaisdell, New York, 1965.
10.14 Zaanen, A. C.. *Integration*. North-Holland, Amsterdam, 1967.

۱۱
رشته‌های فوریه و انتگرالهای فوریه

۱.۱۱ مقدمه

در سال ۱۸۵۷ فوریه ادعا کرد که هر تابع «دلخواه» را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از سینوس و کسینوس بیان کرد. ادعای این مطلب در آن زمان باعث حیرت معاصران فوریه گردید. امروزه، یک چنین ترکیبهای خطی را رشته‌های فوریه می‌نامند. رشته‌های فوریه در تحلیل بعضی از پدیده‌های متناوب (مانند ارتعاشات، حرکت سیاره‌ها، و حرکت موج)، که در فیزیک و مهندسی مورد مطالعه‌اند، از وسایل ضروری بشمار می‌آیند. همچنین بسیاری ازسؤالهای مهم ریاضی براثر مطالعهٔ رشته‌های فوریه بوجود آمده‌اند. در واقع، قسمت اعظم گسترش آنالیز ریاضی نوین نتیجهٔ کوششهائی است که برای جواب دادن به این سؤالها شده است. برای مطالعهٔ شرحی مختصر اما عالی دربارهٔ تاریخ این مبحث، و همچنین اثر آن در گسترش ریاضیات، به کتاب مرجع ۱.۱۱ مراجعه نمائید.

۲.۱۱ دستگاههای توابع متعامد

مسأله‌های اساسی نظریهٔ رشته‌های فوریه را می‌توان در قالب یک نظام کلیتر، به‌نام نظریهٔ تابعهای متعامد، به بهترین وجه توصیف کرد. بنابراین، ما این فصل را با معرفی اصطلاحاتی چند مربوط به تابعهای متعامد آغاز می‌کنیم.

تبصره. در این‌جا هم، مانند فصل قبل، فرض براین است که تابعها بر یک زیربازهٔ کلی $\mathbf{R}$ مانند I تعریف شده باشند. این بازه ممکن است کراندار، بی‌کران،

باز، بسته، یانیمباز باشد. مجموعهٔ همهٔ تابعهای مختلط مانند f راکه بر I اندازه‌پذیر باشند و $|f|^2 \in L(I)$ با $L^2(I)$ نشان می‌دهیم. حاصل ضرب داخلی (f, g) دو چنین تابع، که به صورت

$$(f, g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}dx$$

تعریف می‌شود، همواره وجود دارد. عدد نامنفی $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ هنج L^2 تابع f می‌باشد.

تعریف ۱۰۱۱ فرض کنیم $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ دسته‌ای از تابعها در $L^2(I)$ باشد. اگر

$$\text{وقتی که } m \neq n \text{ ، } (\varphi_n, \varphi_m) = 0 \text{ ،}$$

دستهٔ S را یک دستگاه متعامد بر I می‌نامیم. هرگاه، علاوه بر این، هر φ_n دارای هنج ۱ باشد، آنگاه گوئیم که S یک دستگاه متعامد بهنجار بر I است.

تبصره. هر دستگاه متعامد را که در آن هر $\|\varphi_n\| \neq 0$ می‌توان با تقسیم کردن هر φ_n به هنج خود به یک دستگاه متعامد بهنجار تبدیل نمود.

دستگاه مثلثاتی خاص $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$، که در آن

$$\text{به‌ازای } n = 1, 2, \ldots \text{ ، } \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \text{ ، } \tag{1}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ ، و } \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \text{ ،}$$

بیش از هر دستگاه دیگر مورد توجه ما است. بآسانی می‌توان تحقیق کرد که S بر هر بازه به درازای 2π متعامد بهنجار است. (ر.ک. تمرین ۱۰۱۱). دستگاه (۱) از تابعهای حقیقی تشکیل شده است. اما تابعهای

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\cos nx + i\sin nx}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

بر هر بازه به درازای 2π دستگاهی متعامد بهنجار از تابعهای مختلط بوجود خواهند آورد.

۳۰۱۱ قضیهٔ بهترین تقریب

یکی از مسأله‌های اساسی در نظریهٔ تابعهای متعامد این است که چگونه تابع

داده شدهٔ f در $L^2(I)$ را به‌بهترین وجه ممکن به‌ترکیبی خطی ازعنصرهای دستگاهی متعامد بهنجار نزدیک نمائیم. با بیان دقیقتر، فرض‌کنیم که $S=\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد و قرار می‌دهیم

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k(x),$$

که درآن b_0، b_1، . . .، و b_n عددهای مختلط دلخواهی می‌باشند. ازهنج $\|f-t_n\|$ برای اندازه‌گیری خطای حاصل از تقریب f بـه t_n استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم پایاهای b_0، . . .، b_n بقسمی اختیار شوند که این خطا تا حد ممکن کوچک باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که می‌توان این پایاها را بقسمی اختیارکرد که این خطا مینیمم باشد. بعلاوه این انتخاب منحصر بفرد نیز هست.

برای مشاهدهٔ علت برقراری نتیجه‌های قضیهٔ زیر، مناسبترین حالت را درنظر می‌گیریم. هرگاه f قبلاً ترکیبی خطی از φ_0، φ_1، . . .، و φ_n باشد، مثلاً،

$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k,$$

آنگاه با انتخاب $t_n = f$، $\|f-t_n\|$ مساوی صفر خواهد شد. می‌توان پایاهای c_0، . . .، c_n را به صورت زیر تعیین کرد: به‌ازای $0 \leqslant m \leqslant n$، حاصل ضربهای داخلی (f, φ_m) را تشکیل می‌دهیم. چون اگر $k\neq m$، $0 = (\varphi_k, \varphi_m)$ و $1 = (\varphi_m, \varphi_m)$، پس با استفاده از خواص حاصل ضربهای داخلی داریم

$$(f, \varphi_m) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k, \varphi_m\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi_k, \varphi_m) = c_m.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت کـه، در مناسبترین حالت، به‌ازای $m=0, 1, \ldots, n$، داریم $c_m = (f, \varphi_m)$. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که انتخاب پایاها به‌صورت بالا برای همهٔ تابعها در $L^2(I)$ بهترین انتخاب خواهد بود.

قضیهٔ ۲۰۱۱ فرض کنیم $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد و $f \in L^2(I)$. دو دنبالهٔ $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ از تابعها بر I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x), \qquad t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k(x),$$

که درآنها

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad \text{به‌ازای} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{۲}$$

و b_0، b_1، b_2، ... عددهای مختلط دلخواهی باشند. در این صورت، به‌ازای هر n، داریم

$$\| f-s_n \| \leqslant \| f-t_n \|. \tag{۳}$$

بعلاوه، رابطهٔ (۳) وقتی، و فقط وقتی، به‌صورت تساوی است که

به‌ازای $k=0, 1, \ldots, n$، $b_k = c_k$.

برهان. نامساوی (۳) را از معادلهٔ

$$\| f-t_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} | c_k |^2 + \sum_{k=0}^{n} | b_k - c_k |^2 \tag{۴}$$

نتیجه می‌گیریم. واضح است که (۴) رابطهٔ (۳) را ایجاب می‌کند زیرا طرف راست (۴) وقتی کمترین مقدار خودرا می‌گیردکه به‌ازای هر k، $b_k = c_k$. برای اثبات (۴)، می‌نویسیم

$$\|f-t_n\|^2 = (f-t_n, f-t_n) = (f, f) - (f, t_n) - (t_n, f) + (t_n, t_n).$$

با استفاده از خواص حاصل‌ضربهای داخلی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(t_n, t_n) &= \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k, \quad \sum_{m=0}^{n} b_m \varphi_m\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} b_k \bar{b}_m (\varphi_k, \varphi_m) = \sum_{k=0}^{n} | b_k |^2,\end{aligned}$$

و

$$(f, t_n) = \left(f, \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k (f, \varphi_k) = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k c_k.$$

همچنین، $(t_n, f) = \overline{(f, t_n)} = \sum_{k=0}^{n} b_k \bar{c}_k$، و در نتیجه

$$\begin{aligned}\| f-t_n \|^2 &= \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k c_k - \sum_{k=0}^{n} b_k \bar{c}_k + \sum_{k=0}^{n} | b_k |^2 \\ &= \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} | c_k |^2 + \sum_{k=0}^{n} (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k) \\ &= \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} | c_k |^2 + \sum_{k=0}^{n} | b_k - c_k |^2.\end{aligned}$$

۴.۱۱ رشتهٔ فوریهٔ یك تابع نسبت به یک دستگاه متعامد بهنجار

تعریف ۳.۱۱ فرض کنیم $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد و $f \in L^2(I)$. منظور از نماد

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{۵}$$

یعنی عددهای c_0، c_1، c_2، . . .، که با دستورهای

$$c_n = (f, \varphi_n) = \int_I f(x)\, \overline{\varphi_n(x)}\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{۶}$$

مشخص می‌شوند. رشتهٔ مذکور در (۵) را رشتهٔ فوریهٔ f نسبت به S، و عددهای c_0، c_1، c_2، . . . را ضریبهای فوریهٔ f نسبت به S می‌نامند.

تبصره. در حالتی که $I = [0, 2\pi]$، و S دستگاه تابعهای مثلثاتی توصیف شده در (۱) باشد، این رشته مختصراً رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f نامیده می‌شود. در این حالت رابطهٔ (۵) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

که ضریبهای موجود در آن از دستورهای زیر بدست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\,dt\,. \tag{۷}$$

در این حالت، اگر $f \in L([0, 2\pi])$، انتگرالهائی که a_n و b_n به‌وسیلهٔ آنها تعریف می‌شوند وجود دارند.

۵.۱۱ خواص ضریبهای فوریه

قضیهٔ ۴.۱۱ فرض کنیم $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد، و $f \in L^2(I)$. همچنین فرض می‌کنیم که

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

در این صورت،

آ) رشتهٔ $\sum |c_n|^2$ همگرا است و در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \|f\|^2 \quad \text{(نامساوی بسل[1])}. \tag{۸}$$

ب) معادلهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2 \quad \text{(دستور پارسوال[2])}$$

1. Bessel 2. Parseval

وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که

$$\lim_{n\to\infty} \| f - s_n \| = 0,$$

که در آن $\{s_n\}$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی رشتهٔ مورد نظر است‌که با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x).$$

برهان. چون طرف چپ رابطهٔ (۴) نامنفی است، پس با فرض $b_k = c_k$ در آن خواهیم داشت

$$\sum_{k=0}^{n} | c_k |^2 \leqslant \| f \|^2,$$

که از آن (آ) نتیجه می‌شود. برای اثبات (ب)، دوباره در (۴) قرار می‌دهیم $b_k = c_k$، خواهیم داشت

$$\| f - s_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} | c_k |^2,$$

که از این معادله قسمت (ب) بی‌درنگ نتیجه خواهد شد.

به‌عنوان نتیجه‌ای دیگر از قسمت (آ) درقضیهٔ ۴.۱۱، ملاحظه می‌شود که چون $\sum | c_n |^2$ همگرا است، پس وقتی که $n \to \infty$، دنبالهٔ ضریبهای فوریه، یعنی c_n، به صفر می‌گراید. در حالت خاص، وقتی که $\varphi_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ و $I = [0, 2\pi]$، خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0,$$

که از آن دستورهای مهم زیر بدست خواهند آمد:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0. \tag{۹}$$

این دستورها حالتهای خاص لم ریمان ـ لبگ (قضیهٔ ۶.۱۱) نیز می‌باشند.

تبصره. دستور پارسوال، یعنی

$$\| f \|^2 = | c_0 |^2 + | c_1 |^2 + | c_2 |^2 + \cdots,$$

مشابه دستور

$$\| \mathbf{x} \|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

برای درازای بردار $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ در $\mathbf{R}^n$ است. هریک ازاین دو دستور را می‌توان به‌عنوان تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورس برای مثلثهای قائم‌الزاویه درنظر گرفت.

۶.۱۱ قضیهٔ ریس ـ فیشر

عکس قسمت (آ) در قضیهٔ ۴.۱۱ به نام قضیهٔ ریس ـ فیشر معروف است.

قضیهٔ ۵.۱۱ فرض کنیم $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد. همچنین $\{c_n\}$ دنباله‌ای از عددهای مختلط باشد بقسمی‌که $\sum |c_k|^2$ همگرا باشد. در این صورت، تابعی مانند f در $L^2(I)$ هست بقسمی که

آ) به‌ازای هر $k \geqslant 0$، $(f, \varphi_k) = c_k$،

ب) $\| f \|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} | c_k |^2$.

برهان. قرار می‌دهیم

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x).$$

ثابت می‌کنیم که تابعی مانند f در $L^2(I)$ وجود دارد بقسمی که $(f, \varphi_k) = c_k$ و

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n - f \| = 0.$$

در این صورت، از قسمت (ب) قضیهٔ ۴.۱۱ قسمت (ب) قضیهٔ ۵.۱۱ نتیجه خواهد شد.

ابتدا توجه می‌کنیم که $\{s_n\}$ در فضای نیمه متری $L^2(I)$ دنباله‌ای است کشی، زیرا که اگر $n > m$، داریم

$$\| s_n - s_m \|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{r=n+1}^{m} c_k \bar{c}_r (\varphi_k, \varphi_r)$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} | c_k |^2,$$

اگر m و n به‌قدر کافی بزرگ باشند، آخرین مجموع مذکور در بالا را می‌توان از ε کوچکتر کرد. بنا بر قضیهٔ ۵۷.۱۰، تابعی مانند f در $L^2(I)$ هست بقسمی که

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n - f \| = 0.$$

برای اثبات $(f, \varphi_k) = c_k$ ملاحظه می‌کنیم که اگر $n \geqslant k$، $(s_n, \varphi_k) = c_k$، پس، با استفاده از نامساوی کشی ـ شوارتز، داریم

$$\begin{aligned} |c_k - (f, \varphi_k)| &= |(s_n, \varphi_k) - (f, \varphi_k)| \\ &= |(s_n - f, \varphi_k)| \leqslant \| s_n - f \|. \end{aligned}$$

چون وقتی که $n \to \infty$ ، $\| s_n - f \| \to ۰$، پس قسمت (آ) برقرار است.

تبصره. اثبات قضیهٔ بالا به این واقعیت بستگی دارد که فضای نیمه متری $L^۲(I)$ تام است. برای تابعهائی که مربعهایشان انتگرال ریمان داشته باشند قضیه‌ای نظیر قضیهٔ بالا وجود ندارد.

۷.۱۱ مسأله‌های همگرائی و نمایش برای رشته‌های مثلثاتی

فرض کنیم f بر بازهٔ $I = [۰, ۲\pi]$ انتگرال لبگ داشته باشد. رشتهٔ فوریهٔ مثلثاتی که به‌وسیلهٔ تابع f تولید شده باشد، یعنی

$$f(x) \sim \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

را درنظر می‌گیریم. در این‌جا دو سؤال پیش می‌آیند: آیا این رشته در نقطه‌ای مانند x در I همگرا است؟ اگر این رشته در x همگرا باشد، آیامجموع آن مساوی $f(x)$ خواهد بود؟ سؤال اول را مسألهٔ همگرائی، و سؤال دوم را مسألهٔ نمایش، می‌نامند. درحالت کلی، جواب هر دوسؤال «منفی» است. در واقع، تابعهائی هستندکه انتگرال لبگ دارند ولی رشته‌های فوریهٔ آنها همه‌جا واگرا است، و تابعهائی پیوسته وجود دارند که رشته‌های فوریهٔ آنها بر مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر واگرا است.

از زمان فوریه تاکنون نوشته‌های زیادی دربارهٔ این مسأله‌ها بطبع‌رسیده است. منظور اکثر این تحقیقات پیدا کردن شرطهای کافی بوده است که f احراز کند تا رشتهٔ فوریهٔ آن در سراسر بازه یا در نقطه‌هائی خاص درآن همگرا باشد. بعداً ثابت می‌کنیم که همگرائی یا واگرائی رشته در نقطه‌ای خاص فقط به رفتار تابع در یکی ازهمسایگیهای کوچک و دلخواه‌آن نقطه بستگی دارد. (ر. ک. قضیهٔ ۱۱.۱۱، یعنی قضیهٔ تمرکز ریمان.)

کوششهای فوریه و دیریکله در اوایل قرن نوزدهم میلادی، و پس ازآن کارهای ریمان، لیپ شیتس، هاینه، کانتور، دوبوآ-ریموند[1]، دینی[2]، ژردان[3]، و دولا واله-پوسن[4] در نیمهٔ دوم آن قرن، منجر به کشف شرطهای کافی با میدانهای عمل وسیع برای همگرائی رشته‌ها، درنقطه‌هائی خاص یا، به‌طور کلی، در سراسر بازه گردیدند.

---

1. Du Bois-Reymond
2. Dini
3. Jordan
4. De la vallée-Poussin

پس از آن که لبگ در ۱۹۰۲ نظریهٔ عمومی اندازه‌ها و انتگرالگیری خود را کشف کرد، میدان پژوهش بسیار وسعت یافت و نامهائی که از آن پس در این زمینه برده می‌شوند عبارتند از فجر، هابسن[1]، یانگ، هاردی، و لیتل‌وود[2]. فجر، در ۱۹۰۳، نشان داد که اگر به جای دنبالهٔ مجموعهای جزئی رشته، یعنی $\{s_n\}$، دنبالهٔ میانگینهای حسابی جمله‌های آن، یعنی $\{\sigma_n\}$، که به‌وسیلهٔ رابطهٔ

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}$$

تعریف می‌شود، درنظر گرفته شود، رشته‌های فوریهٔ واگرا نیز ممکن است مفید واقع شوند. فجر قضیهٔ قابل ملاحظهٔ زیر را ثابت کرد: هرگاه در نقطهٔ x در $[0, 2\pi]$، $f(x+)$ و $f(x-)$ وجود داشته باشند، آنگاه دنبالهٔ $\{\sigma_n(x)\}$ همگرا است و حد آن مساوی $[f(x+) + f(x-)]/2$ است؛ تنها قید بر f این است که f بر $[0, 2\pi]$ انتگرال لبگ داشته باشد (قضیهٔ ۱۵.۱۱). همچنین ثابت کرد که از یک رشتهٔ فوریه، همگرا یا واگرا، می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت (قضیهٔ ۱۶.۱۱). مهمترین نتیجه‌ای که دربارهٔ رشته‌های فوریه اخیراً ثابت شده است مطلبی است که توسط لنارت کارلسون[3] ریاضیدان سوئدی بدست آمده است. این دانشمند ثابت کرده است که رشتهٔ فوریهٔ هر تابع در $L^2(I)$ تقریباً همه جا بر I همگرا است[4].

در این فصل بعضی از شرطهای کافی برای همگرائی رشته‌های فوریه در یک نقطهٔ خاص را نتیجه گرفته، سپس قضیه‌های فجر را ثابت می‌کنیم. این مطالب به دو دستور حدی اساسی بستگی دارند که ابتدا مورد بحث قرار خواهند گرفت. این دستورهای حدی، که درنظریهٔ انتگرالهای فوریه نیزمورد استعمال دارند، با انتگرالهائی سروکار دارند که تابع یک پرمای حقیقی α هستند، و ما به‌رفتار این انتگرالها وقتی که $\alpha \to +\infty$ علاقمند هستیم. اولین دستور، تعمیم‌رابطه‌های (۹) است، و به لم ریمان-لبگ معروف است.

۸.۱۱ لم ریمان - لبگ

قضیهٔ ۶.۱۱ فرض کنیم که $f \in L(I)$. در این صورت، به‌ازای هر عدد حقیقی β،

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta)\, dt = 0. \tag{10}$$

1. Hobson
2. Littlewood
3. Lennart Carleson
4. Acta Mathematica, 116 (1966), pp. 135-157.

برهان. اگر f تابع مشخص کنندهٔ بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ باشد، نتیجه واضح است زیرا اگر $\alpha > ۰$،

$$\left| \int_a^b \sin(\alpha t+\beta)\, dt \right| = \left| \frac{\cos(a\alpha+\beta) - \cos(b\alpha+\beta)}{\alpha} \right| \leqslant \frac{۲}{\alpha}.$$

و نیز اگر f بر بازهٔ باز $]a, b[$ پایا، و در خارج $[a, b]$ مساوی صفر باشد، باز نتیجه، بی‌توجه به‌نحوهٔ تعریف $f(a)$ و $f(b)$، حاصل است. بنابراین، اگر f تابعی پله‌ای باشد، رابطهٔ (۱۰) معتبر خواهد بود. حال بسادگی می‌توان رابطهٔ (۱۰) را برای هر تابعی مانند f که انتگرال لبگ داشته باشد ثابت نمود.

اگر $\varepsilon > ۰$ داده شده‌باشد، (به‌موجب قضیهٔ ۱۰.۱۹ (ب)) تابعی پله‌ای مانند s وجود دارد بقسمی که $\int_I |f - s| < \varepsilon/۲$. چون (۱۰) برای هر تابع پله‌ای برقرار است، پس عدد مثبتی مانند M وجود دارد بقسمی که

$$\text{اگر} \quad \alpha \geqslant M \text{،} \quad \left| \int_I s(t) \sin(\alpha t+\beta)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

بنابراین، اگر $\alpha \geqslant M$،

$$\begin{aligned} &\left| \int_I f(t) \sin(\alpha t+\beta)\, dt \right| \\ &\leqslant \left| \int_I (f(t) - s(t)) \sin(\alpha t+\beta)\, dt \right| \\ &\qquad + \left| \int_I s(t) \sin(\alpha t+\beta)\, dt \right| \\ &\leqslant \int_I \left| f(t) - s(t) \right| dt + \frac{\varepsilon}{۲} < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

بدین ترتیب صحت لم ریمان ـ لبگ ثابت می‌شود.

مثال. با فرض $\beta = ۰$ و $\beta = \pi/۲$، معلوم می‌شود که اگر $f \in L(I)$،

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_I f(t) \sin \alpha t\, dt = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_I f(t) \cos \alpha t\, dt = ۰.$$

به‌عنوان کاربردی از لم ریمان ـ لبگ، نتیجهٔ زیر را می‌گیریم که در بحث ما دربارهٔ انتگرالهای فوریه مورد حاجت خواهد بود.

قضیهٔ ۷.۱۱ اگر $f \in L(]-\infty, +\infty[)$، رابطهٔ

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt=\int_{0}^{\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{t}\,dt \tag{۱۱}$$

در صورتی برقرار است که انتگرال لبگ طرف راست آن وجود داشته باشد.

برهان. به‌ازای هرمقدار ثابت α، انتگرال‌طرف چپ رابطهٔ (۱۱) به‌عنوان انتگرال لبگ وجود دارد زیرا خارج قسمت $(1-\cos\alpha t)/t$ بر بازهٔ $]-\infty, +\infty[$ پیوسته و کراندار است. (در $t=0$ مقدار این خارج قسمت مساوی حد آن وقتی‌که $t\to 0$، یعنی 0، تعریف می‌شود.) از این روی، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt&=\int_{0}^{\infty} f(t)\,\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt\\&\quad+\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt\\&=\int_{0}^{\infty}\Big[f(t)-f(-t)\Big]\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt\\&=\int_{0}^{\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{t}\,dt\\&\quad-\int_{0}^{\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{t}\cos\alpha t\,dt.\end{aligned}$$

وقتی که $\alpha\to+\infty$، بنا بر لم ریمان ــ لبگ، انتگرال آخری به صفر می‌گراید، و قضیه برقرار خواهد بود.

۹.۱۱ انتگرالهای دیریکله

انتگرالهای به شکل $\int_0^\delta g(t)\,(\sin\alpha t)/t\,dt$ (به نام انتگرالهای دیریکله) نقش مهمی در نظریهٔ رشته‌های فوریه و همچنین نظریهٔ انتگرالهای فوریه بعهده دارند. در این انتگرالها فرض بر این است که تابع g در انتگرالده دارای حد دست راستی $g(0+)=\lim_{t\to 0+} g(t)$ متناهی می‌باشد. در مورد این انتگرالها می‌خواهیم شرطهای دیگری برای g پیدا کنیم که معتبر بودن معادلهٔ زیر را تضمین نمایند:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta} g(t)\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt=g(0+). \tag{۱۲}$$

برای این که بفهمیم چرا باید منتظر باشیم که دستوری مانند (۱۲) برقرار باشد، نخست حالتی را درنظر می‌گیریم که g بر $[0,\delta]$ تابعی پایا $(g(t)=g(0+))$

باشد. دراین‌صورت، (۱۲) نتیجه‌ای‌است بدیهی ازدستور $\int_0^\infty (\sin t)/t\,dt = \pi/2$ (ر. ک. مثال ۳، بخش ۱۰.۱۶)، زیرا

وقتی که $\alpha \to +\infty$ ، $\int_0^\delta \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt = \int_0^{\alpha\delta} \frac{\sin t}{t}\,dt \to \frac{\pi}{2}$.

به‌طور کلیتر، اگر $g \in L([0, \delta])$ ، و اگر $0 < \varepsilon < \delta$، بنا بر لم ریمان ـ لبگ،

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_\varepsilon^\delta g(t)\, \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt = 0.$$

از این روی، معتبر بودن (۱۲) کاملاً به رفتار موضعی g در نزدیکی 0 بستگی دارد. چون وقتی که t نزدیک به 0 باشد، $g(t)$ نزدیک به $g(0+)$ است، امید هست که بی‌گذاشتن قیدهای زیادی دیگری بر g بتوان رابطهٔ (۱۲) را ثابت کرد. بنظر می‌رسد که پیوستگی g در 0 یقیناً برای حصول اطمینان در وجود حد در (۱۲) کافی باشد. دیریکله نشان داد که اگر g علاوه برپیوستگی بر $[0, \delta]$ تعدادی متناهی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد، پیوستگی آن بر $[0, \delta]$ برای اثبات (۱۲) کافی خواهد بود. بعداً ژردان (۱۲) را با قید کمتری برای g، و فقط با شرط آن که g بر $[0, \delta]$ باتغییرکراندار باشد، ثابت نمود. اما، همهٔ کوششها برای اثبات (۱۲) تنها با شرط پیوستگی g بر $[0, \delta]$ با شکست مواجه شده‌اند. در حقیقت، دوبوا-ریموند مثالی از یک تابع پیوسته مانند g کشف کرد که به‌ازای آن حد مذکور در (۱۲) وجود ندارد. در این جا نتیجهٔ ژردان، و یک قضیهٔ مربوط به آن، که به دینی تعلق دارد، مورد بحث قرار خواهند گرفت.

قضیهٔ ۸.۱۱ (ژردان). هرگاه g بر $[0, \delta]$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t)\, \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt = g(0+). \tag{13}$$

برهان. کافی است حالتی را درنظر بگیریم که درآن g بر $[0, \delta]$ صعودی است. اگر $\alpha > 0$ و $0 < h < \delta$، داریم

$$\int_0^\delta g(t)\, \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt = \int_0^h \left[g(t) - g(0+) \right] \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt$$
$$+ g(0+) \int_0^h \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt + \int_h^\delta g(t)\, \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt$$
$$= I_1(\alpha, h) + I_2(\alpha, h) + I_3(\alpha, h). \tag{14}$$

چون انتگرال $\int_h^\delta g(t)/t\,dt$ وجود دارد، می‌توانیم لم ریمان ـ لبگ را در مورد $I_3(\alpha, h)$ بکار ببریم و بدست آوریم که وقتی که $\alpha \to +\infty$، $I_3(\alpha, h) \to 0$.
همچنین، وقتی که $\alpha \to +\infty$،

$$I_2(\alpha, h) = g(0+)\int_0^h \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt$$
$$= g(0+)\int_0^{h\alpha} \frac{\sin t}{t}\,dt \to \frac{\pi}{2} g(0+).$$

حال، $M > 0$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که به‌ازای هر $0 \leqslant a \leqslant b$، $|\int_a^b (\sin t)/t\,dt| < M$. ازاین جا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $0 \leqslant a \leqslant b$، اگر $\alpha > 0$، $|\int_a^b (\sin \alpha t)/t\,dt| < M$. حال فرض‌کنیم که $\varepsilon > 0$ داده شده باشد و h را در $]0, \delta[$ بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$|g(h) - g(0+)| < \varepsilon/(3M).$$

چون

اگر $0 \leqslant t \leqslant h$ ، $g(t) - g(0+) \geqslant 0$،

پس می‌توان قضیهٔ بونه (قضیهٔ ۳۷.۷) را در مورد $I_1(\alpha, h)$ بکار برده، نوشت

$$I_1(\alpha, h) = \int_0^h [g(t) - g(0+)]\frac{\sin \alpha t}{t}\,dt$$
$$= [g(h) - g(0+)]\int_c^h \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt,$$

که در آن $c \in [0, h]$. از تعریف h نتیجه می‌شود که

$$(۱۵)\quad |I_1(\alpha, h)| = |g(h) - g(0+)|\left|\int_c^h \frac{\sin \alpha t}{t}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3M} M = \frac{\varepsilon}{3}.$$

برای همین h ، A را می‌توان بقسمی اختیار کرد که به‌ازای $\alpha \geqslant A$،

$$(۱۶)\quad |I_3(\alpha, h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{و} \quad \left|I_2(\alpha, h) - \frac{\pi}{2} g(0+)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

دراین صورت، به‌ازای $\alpha \geqslant A$، می‌توان (۱۴)، (۱۵)، و (۱۶) را تلفیق نموده نتیجه گرفت که

$$\left|\int_0^\delta g(t)\frac{\sin \alpha t}{t}\,dt - \frac{\pi}{2} g(0+)\right| < \varepsilon.$$

پس رابطهٔ (۱۳) برقرار است.

شرط متفاوت دیگری برای معتبر بودن (۱۳)، که به‌وسیلهٔ دینی کشف شده است، به‌صورت زیر است:

قضیهٔ ۹.۱۱ (دینی). فرض کنیم $g(\circ +)$ وجود داشته باشد، و به‌ازای δی مثبتی، انتگرال لبگ

$$\int_\circ^\delta \frac{g(t) - g(\circ +)}{t}\, dt$$

وجود داشته باشد. در این صورت،

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\delta g(t)\frac{\sin \alpha t}{t}\, dt = g(\circ +).$$

برهان. می‌نویسیم

$$\int_\circ^\delta g(t)\frac{\sin \alpha t}{t}\, dt = \int_\circ^\delta \frac{g(t) - g(\circ +)}{t}\sin \alpha t\, dt + g(\circ +)\int_\circ^{\alpha\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

وقتی که $\alpha \to +\infty$، اولین جملهٔ سمت راست دستور بالا به صفر می‌گراید (بنا بر لم ریمان ـ لبگ)، دومین جمله به $\frac{۱}{۲}\pi\, g(\circ +)$ گرایش پیدا می‌کند.

تبصره. اگر به‌ازای هر aی مثبت کوچکتر از δ، $g \in L([a, \delta])$، بآسانی می‌توان نشان داد که هرگاه g در نقطهٔ $\circ$ در شرط لیپ شیتس «دست راستی» صدق کند، آنگاه شرط دینی برقرار است. شرط لیپ شیتس دست راستی در نقطهٔ $\circ$ یعنی، دو عدد پایا و مثبت M و p وجود داشته باشند بقسمی که

$$|g(t) - g(\circ +)| < M t^p \quad \text{به‌ازای هر } t \text{ در }]\circ, \delta],$$

(ر. ک. تمرین ۱۱. ۲۱.) بخصوص، وقتی که g در $\circ$ مشتق دست راستی داشته باشد، شرط لیپ شیتس با $p = ۱$ برقرار است. مطلب جالب توجه این است که تابعهائی هستند که در شرط دینی صدق می‌کنند ولی در شرط ژردان صدق نمی‌کنند. همچنین، تابعهائی هستند که شرط ژردان برای آنها برقرار است ولی شرط دینی نیست. (ر. ک. کتاب مرجع ۱۱. ۱۰.)

۱۰.۱۱ نمایش مجموعهای جزئی یك رشتهٔ فوریه به صورت انتگرال

تابع f را متناوب با دورهٔ تناوب $p \neq \circ$ نامیم در صورتی که f بر $\mathbf{R}$ تعریف شده

باشد، و به‌ازای هر x، $f(x+p)=f(x)$. قضیهٔ زیرین مجموعهای جزئی یک رشتهٔ فوریه را برحسب تابع زیر بیان می‌کند.

$$(۱۷)\quad D_n(t)=\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}\cos kt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin(n+\frac{۱}{۲})t}{۲\sin t/۲}، & \text{اگر } t\neq ۲m\pi \text{ (} m \text{ عددی است صحیح)}\\[2mm] n+\frac{۱}{۲}، & \text{اگر } t=۲m\pi \text{ (} m \text{ عددی است صحیح)}\end{cases}$$

این دستور در بخش ۱۶.۸، که مربوط به مجموعهای جزئی رشتهٔ هندسی بود، مورد بحث قرار گرفت. تابع D_n را هستهٔ دیریکله می‌نامند.

قضیهٔ ۱۰.۱۱ فرض کنیم‌که $f\in L([\circ, ۲\pi])$ و f متناوب با دورهٔ تناوب ۲π باشد. همچنین $\{s_n\}$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی رشتهٔ فوریه‌ای که به‌وسیلهٔ f تولید می‌شود باشد، یعنی

$$(۱۸)\quad s_n(x)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad (n=۱,۲,\dots).$$

در این صورت نمایش انتگرالی زیرین وجود دارد:

$$(۱۹)\quad s_n(x)=\frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}D_n(t)\,dt.$$

برهان. ضریبهای فوریهٔ f با انتگرالهای (۷) داده شده‌اند. اگر این انتگرالها را در (۱۸) قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم که

$$s_n(x)=\frac{۱}{\pi}\int_\circ^{۲\pi} f(t)\left\{\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right\}dt$$

$$=\frac{۱}{\pi}\int_\circ^{۲\pi} f(t)\left\{\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}\cos k(t-x)\right\}dt$$

$$=\frac{۱}{\pi}\int_\circ^{۲\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt.$$

چون f و D_n هر دو متناوب با دورهٔ تناوب ۲π هستند، می‌توان بازهٔ انتگرالگیری را با $[x-\pi, x+\pi]$ عوض‌کرد و سپس انتقال $u=t-x$ را بجا آورد تا

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\, D_n(t-x)\, dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\, D_n(u)\, du$$

حاصل شود. با استفاده ازمعادلهٔ $D_n(-u) = D_n(u)$، رابطهٔ (۱۹) بدست می‌آید.

۱۱.۱۱ قضیهٔ تمرکز ریمان

بنابردستور (۱۹)، رشتهٔ فوریه‌ای‌که به‌وسیلهٔ f تولید می‌شود وقتی، و فقط وقتی، در نقطهٔ x همگرا است که حد زیرین وجود داشته باشد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}\,\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})t}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}\,dt, \qquad (۲۰)$$

که در این صورت مقدار این حد مساوی مجموع رشته خواهد بود. انتگرال بالا اساساً یک انتگرال دیریکله از نوعی است کـه در بخش قبل درِ بارهٔ آن بحث شد، با این تفاوت کـه در مخرج به‌جای t جملهٔ $۲\sin\frac{۱}{۲}t$ ظـاهـر شـده است. امـا، لم ریمان ـ لبگ نشان می‌دهد که تعویض $۲\sin\frac{۱}{۲}t$ بـا t در (۲۰) تـأثیری در موجودیت یا مقدار این حد نخواهد داشت. با بیان دقیقتر می‌توان گفت کـه، بنا بر لم ریمان ـ لبگ،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\left(\frac{۱}{t}-\frac{۱}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}\right)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t\,dt = ۰,$$

زیرا تابع F که با معادله‌های زیر تعریف می‌شود:

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{۱}{t} - \dfrac{۱}{۲\sin\frac{۱}{۲}t}، & \text{اگر } ۰ < t \leqslant \pi \\ ۰ ، & \text{اگر } t = ۰ \end{cases}$$

بر بازهٔ $[۰, \pi]$ پیوسته است. بنابـراین، مسألهٔ همگرائی بـرای رشته‌هـای فوریه منجر به پیدا کردن شرطهائی برای f می‌شودکه وجود حد زیرین را تضمین نمایند:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}\,\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})t}{t}\,dt. \qquad (۲۱)$$

اگر بار دیگر از لم ریمان ـ لبگ استفاده کنیم، معلوم می‌شود کـه در رابطهٔ (۲۱) می‌توان به جای انتگرال $\int_{۰}^{\pi}$ انتگرال $\int_{۰}^{\delta}$ را قـرار داد کـه در آن δ عـدد مثبتی

کوچکتر از π باشد، زیـرا وقتی که $n \to \infty$، انتگرال $\int_\delta^\pi$ به صفر می‌گرایـد. بنابراین، می‌توان نتیجه‌های بخش قبل را با هم به صورت قضیهٔ زیرین بیان نمود:

قضیهٔ ۱۱.۱۱ فرض کنیم که $f \in L([\circ, \text{۲}\pi])$ و f دارای دورهٔ تناوب $\text{۲}\pi$ باشد. در این صورت، رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f وقتی، و فقط وقتی، در نقطهٔ معلوم x همگرا است که به‌ازای عدد مثبتی مانند $\delta < \pi$، حد زیرین وجود داشته‌باشد:

$$(\text{۲۲}) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\text{۲}}{\pi} \int_\circ^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\text{۲}} \frac{\sin(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})t}{t}\, dt,$$

که در این صورت مقدار این حد مساوی مجموع رشتهٔ فوریه خواهد بود.

این قضیه به قضیهٔ تمرکز ریمان معروف است. بنابراین قضیه، همگرائـی یـا واگرائی یک رشتهٔ فوریه دریک نقطهٔ خاص‌کاملاً به رفتار f در همسایگی‌کوچک و دلخواهی ازآن نقطه بستگی دارد. این مطلب، با توجه به این واقعیت که ضریبهای رشتهٔ فوریه به مقدارهـای تابع در سراسر بازهٔ $[\circ, \text{۲}\pi]$ بستگی دارنـد، تا حـدی تعجب‌آور است.

۱۲.۱۱ شرطهای‌کافی برای همگرائی یك رشتهٔ فوریه دریك نقطهٔ مخصوص

فرض کنیم کـه $f \in L([\circ, \text{۲}\pi])$ و f دارای دورهٔ تناوب $\text{۲}\pi$ بـاشد. نقطهٔ ثابتی مانند x در $[\circ, \text{۲}\pi]$، و عدد مثبتی مانند $\delta < \pi$ را اختیار می‌کنیم. فرض کنیم

$$\text{اگر}\quad t \in [\circ, \delta]\text{،}\quad g(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\text{۲}}\text{،}$$

و در صورت وجود حد زیر،

$$s(x) = g(\circ +) = \lim_{t\to\circ+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\text{۲}}.$$

توجه کنید که اگر f در x پیوسته باشد، $s(x) = f(x)$.

اگر قضیهٔ ۱۱.۱۱ را، بترتیب، با قضیه‌های ۸.۱۱ و ۹.۱۱ تلفیق نمائیم، این شرطهای کافی برای همگرائی یک رشتهٔ فوریه بدست می‌آیند:

قضیهٔ ۱۲.۱۱ (آزمون ژردان). هـر گـاه بـه ازای یك $\delta < \pi$، f بـر بـازهٔ فشردهٔ $[x-\delta, x+\delta]$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه $s(x)$ وجود دارد و رشتهٔ فوریه‌ای که به‌وسیلهٔ f تولید شود به $s(x)$ همگرا خواهد بود.

قضیهٔ ۱۳.۱۱ (آزمون دینی). هـر گـاه $s(x)$ وجـود داشته باشد و به‌ازای δای کـه

$\delta < \pi$، انتگرال لبگ

$$\int_{0}^{\delta} \frac{g(t)-s(x)}{t}\,dt$$

وجود داشته باشد، آنگاه رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f به $s(x)$ همگرا است.

۱۳.۱۱ مجموعپذیری چزاروی رشته‌های فوریه

در مطالعهٔ همگرائی رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f، پیوستگی f فرض خیلی ثمربخشی نیست. به سال ۱۸۷۳، دوبوآ-ریموند تابعی مثال زد، که در سراسر بازهٔ $[0, 2\pi]$ پیوسته است، ولی رشته فوریهٔ آن بریک زیرمجموعهٔ شمارش‌ناپذیر $[0, 2\pi]$ همگرا نمی‌تواند بود. از سوی دیگر، فرض پیوستگی برای اثبات مجموعپذیری چزاروی رشته‌کافی‌است. دراین‌جا این نتیجه (که منسوب به‌فجر است) و بعضی از نتیجه‌های آن مورد بحث قرار خواهند گرفت.

اولین وظیفهٔ ما این است‌که برای میانگینهای حسابی مجموعهای جزئی یک رشتهٔ فوریه نمایشی به صورت انتگرال بدست آوریم.

قضیهٔ ۱۴.۱۱ فرض کنیم که $f \in L([0, 2\pi])$ و f متناوب با دورهٔ تناوب 2π باشد، همچنین s_n مجموع جزئی n م رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f را نشان دهد و

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} \quad (n=1,2,\ldots). \tag{۲۳}$$

در این صورت، نمایش انتگرالی زیر وجود دارد:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,dt. \tag{۲۴}$$

برهان. اگر نمایش انتگرالی برای $s_n(x)$ مذکور در رابطهٔ (۱۹) را بکار بریم و مجموعی که با آن $\sigma_n(x)$ تعریف می‌شود تشکیل دهیم، به دلیل دستور (۱۶)، بخش ۱۶.۸، بی‌درنگ نتیجهٔ مورد نظر حاصل خواهد شد.

تبصره. اگر قضیهٔ ۱۴.۱۱ را در مورد تابع پایائی که در هرنقطه مقدارش ۱ است بکار بریم، معلوم می‌شود که به‌ازای هر n، $\sigma_n(x) = s_n(x) = 1$، و در نتیجه رابطهٔ (۲۴) به‌صورت زیرین درمی‌آید:

$$\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,dt = 1. \tag{۲۵}$$

بنابراین، به‌ازای هر s داده شده‌ای، می‌توان (۲۵) را با (۲۴) تلفیق نمود و نوشت

$$(۲۶)\quad \sigma_n(x)-s=\frac{۱}{n\pi}\int_۰^{\pi}\left\{\frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}-s\right\}\frac{\sin^۲ \frac{۱}{۲}nt}{\sin^۲ \frac{۱}{۲}t}\,dt.$$

اگر بتوان s را بقسمی اختیار کرد که وقتی‌که $n \to \infty$، انتگرال طرف راست (۲۶) به صفر بگراید، در این صورت، وقتی که $n \to \infty$ ، $\sigma_n(x) \to s$. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که برای این کار کافی است که $s = [f(x+) + f(x-)]/۲$.

قضیهٔ ۱۵.۱۱ (فجر). فرض کنیم که $f \in L([۰, ۲\pi])$ و f متناوب با دورهٔ تناوب ۲π باشد. تابع s را با معادلهٔ زیرین، در نقطه‌هائی که حد وجود داشته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$(۲۷)\qquad s(x) = \lim_{t\to ۰+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{۲}.$$

در این صورت، به‌ازای هر xی که $s(x)$ تعریف شده باشد، رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f مجموعپذیر چزارو است و مجموع از نوع $(C, ۱)$ آن $s(x)$ است. یعنی،

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = s(x),$$

که در آن $\{\sigma_n\}$ دنبالهٔ میانگینهای حسابی است‌که با (۲۳) تعریف می‌شود. بعلاوه، هرگاه f بر $[۰, ۲\pi]$ پیوسته باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{\sigma_n\}$ بر $[۰, ۲\pi]$ به طور یکشکل به f همگرا خواهد بود.

برهان. هر جا که $s(x)$ تعریف شده باشد، قرار می‌دهیم

$$g_x(t) = [f(x+t) + f(x-t)]/۲ - s(x).$$

در این صورت، وقتی که $t \to ۰+$ ، $g_x(t) \to ۰$. بنابراین، به‌ازای $\varepsilon > ۰$ داده شده، عدد مثبتی مانند $\delta < \pi$ هست بقسمی که به‌ازای $۰ < t < \delta$ ، $|g_x(t)| < \varepsilon/۲$. توجه کنید که δ به x و ε هر دو بستگی دارد. اما، هرگاه f بر $[۰, ۲\pi]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[۰, ۲\pi]$ پیوستهٔ یکشکل است، و در نتیجه δای هست که برای همهٔ نقطه‌ها مانند x در $[۰, ۲\pi]$ دارای خاصیت بالا است. حال از رابطهٔ (۲۶) استفاده نموده، بازهٔ انتگرالگیری را به دو زیربازهٔ $[۰, \delta]$ و $[\delta, \pi]$ تقسیم می‌کنیم. بر $[۰, \delta]$، بنابر (۲۵)، داریم

$$\left|\frac{۱}{n\pi}\int_۰^{\delta} g_x(t)\,\frac{\sin^۲ \frac{۱}{۲}nt}{\sin^۲ \frac{۱}{۲}t}\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲n\pi}\int_۰^{\pi} \frac{\sin^۲ \frac{۱}{۲}nt}{\sin^۲ \frac{۱}{۲}t}\,dt = \frac{\varepsilon}{۲}.$$

بر $[\delta, \pi]$ داریم

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi} g_x(t)\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n\pi \sin^2 \frac{1}{2}\delta}\int_{\delta}^{\pi} |g_x(t)|\,dt$$
$$\leqslant \frac{I(x)}{n\pi \sin^2 \frac{1}{2}\delta},$$

که در آن $I(x) = \int_0^\pi |g_x(t)|\,dt$. حال N را بقسمی اختیار می‌کنیم که $I(x)/(N\pi \sin^2 \frac{1}{2}\delta) < \varepsilon/2$. دراین صورت، اگر $n \geqslant N$،

$$|\sigma_n(x) - s(x)| = \left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} g_x(t)\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t}\,dt\right| < \varepsilon.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، وقتی که $n \to \infty$، $\sigma_n(x) \to s(x)$.

هرگاه f بر $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد، آنگاه، بنابرخاصیت تناوب، f بر $\mathbf{R}$ کراندار است وعددی مانند M هست بقسمی که به‌ازای هر x وهر t، $|g_x(t)| \leqslant M$، و در نتیجه در بحث بالا می‌توان به‌جای $I(x)$ مقدار πM را قرار داد. در این صورت، Nی که بدست می‌آید از x مستقل است، و در نتیجه $\sigma_n \to s = f$ به‌طور یکشکل بر $[0, 2\pi]$.

۱۴.۱۱ نتیجه‌های قضیهٔ فجر

قضیهٔ ۱۶.۱۱ فرض کنیم تابع f بر $[0, 2\pi]$ متناوب، با دورهٔ تناوب 2π، باشد. همچنین $\{s_n\}$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی رشتهٔ فوریه‌ای رانشان دهدکه به‌وسیلهٔ f تولید می‌شود، یعنی

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (28)$$

در این صورت:

آ) $\text{l.i.m.}_{n\to\infty} s_n = f$ بر $[0, 2\pi]$ است.

ب) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ (دستور پارسوال).

ج) از رشتهٔ فوریه می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، یعنی، به‌ازای هر x،

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,dt,$$

و حتی اگر رشتهٔ فوریهٔ (۲۸) واگرا باشد، رشتهٔ حاصل از انتگرالگیری بر هربازه

همگرای یکشکل است.

د) هرگاه رشتهٔ فوریهٔ (۲۸) در نقطه‌ای مانند x همگرا باشد، آنگاه این رشته به $f(x)$ همگرا خواهد بود.

برهان. با بکاربردن دستور (۳) درقضیهٔ ۲.۱۱، با

$$t_n(x) = \sigma_n(x) = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x),$$

این نامساوی بدست می‌آید:

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(x)|^2\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx. \qquad (۲۹)$$

اما، چون $\sigma_n \to f$ به‌طور یکشکل بر $[0, 2\pi]$، پس $\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty}\,\sigma_n = f$ بر $[0, 2\pi]$ است، و (آ) از (۲۹) نتیجه می‌شود. بنابر قضیهٔ ۴.۱۱، قسمت (ب) از قسمت (آ) بدست می‌آید. بنابر قضیهٔ ۱۸.۹، قسمت (ج) نیز از (آ) نتیجه می‌شود. بالأخره، هرگاه، به‌ازای x ی، $\{s_n(x)\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{\sigma_n(x)\}$ نیز باید به‌همان حد بگراید. اما، چون $\sigma_n(x) \to f(x)$، پس $s_n(x) \to f(x)$، یعنی (د) برقرار است.

۱۵.۱۱ قضیهٔ تقریب وایراشتراس

با استفاده از قضیهٔ فجر نیز می‌توان یکی از قضیه‌های مشهور وایراشتراس را ثابت کرد. این قضیه بدین صورت است که هر تابع پیوسته بر بازه‌ای فشرده را می‌توان به‌طور یکشکل به یک چند جمله‌ای نزدیک کرد. با بیان دقیقتر، می‌توان گفت‌که:

قضیهٔ ۱۷.۱۱ فرض کنیم‌تابع حقیقی f بر بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یک چند جمله‌ای مانند p (که ممکن است به ε بستگی داشته باشد) وجود دارد بقسمی که

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \text{به‌ازای هر } x \text{ در } [a, b] \text{ ،} \qquad (۳۰)$$

برهان. اگر $t \in [0, \pi]$، قرار می‌دهیم $g(t) = f[a + t(b-a)/\pi]$؛ اگر $t \in [\pi, 2\pi]$، قرارمی‌دهیم $g(t) = f[a + (2\pi - t)(b-a)/\pi]$، و g را درخارج $[0, 2\pi]$ بقسمی تعریف می‌کنیم که دارای دورهٔ تناوب 2π باشد. به‌ازای ε داده‌شده در قضیه، می‌توان با بکار بردن قضیهٔ فجر تابعی مانند σ بقسمی پیدا کرد که با معادله‌ای به شکل

$$\sigma(t) = A_\circ + \sum_{k=\text{۱}}^{N} (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

تعریف شده باشد، و به‌ازای هر t در $[\circ, \text{۲}\pi]$، $|g(t) - \sigma(t)| < \varepsilon/\text{۲}$. (توجه کنید که N، و در نتیجه σ، به ε بستگی دارد.) چون σ مجموع تعدادی متناهی تابع مثلثاتی است، پس دارای بسطی به‌صورت رشتهٔ توانی حول مبدأ است، که این بسط بر هر بازهٔ متناهی همگرای یکشکل است. مجموعهای جزئی این بسط دنباله‌ای از چند جمله‌ایها، مثلاً $\{p_n\}$، را بوجود می‌آورند، بقسمی که $p_n \to \sigma$ به‌طور یکشکل بر $[\circ, \text{۲}\pi]$. از این روی، برای همان ε، mی هست که

$$\text{به‌ازای هر } t \text{ در } [\circ, \text{۲}\pi]،\quad |p_m(t) - \sigma(t)| < \frac{\varepsilon}{\text{۲}}.$$

بنا براین،

$$\text{به‌ازای هر } t \text{ در } [\circ, \text{۲}\pi]،\quad |p_m(t) - g(t)| < \varepsilon. \qquad (\text{۳۱})$$

حال چند جمله‌ای p را بادستور $p(x) = p_m[\pi(x-a)/(b-a)]$ تعریف‌می‌کنیم. دراین صورت، اگر $t = \pi(x-a)/(b-a)$، نامساوی (۳۱) به (۳۰) تبدیل خواهد شد.

۱۶.۱۱ شکلهای دیگر رشتهٔ فوریه

با استفاده از دستورهای

$$\text{۲} \cos nx = e^{inx} + e^{-inx} \quad \text{و} \quad \text{۲}i \sin nx = e^{inx} - e^{-inx}،$$

رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f را می‌توان برحسب نماهای مختلط به‌صورت زیر درآورد:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_\circ}{\text{۲}} + \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{a_\circ}{\text{۲}} + \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} (\alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{-inx}), \end{aligned}$$

که در آن $\alpha_n = (a_n - ib_n)/\text{۲}$ و $\beta_n = (a_n + ib_n)/\text{۲}$. اگر قرار دهیم $\alpha_\circ = a_\circ/\text{۲}$ و $\alpha_{-n} = \beta_n$، می‌توان شکل نمائی را به‌صورت ساده‌تر زیر نوشت:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}.$$

در این صورت، دستورهای (۷) برای ضریبها به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \quad (n = 0, \pm 1, 2, \dots).$$

اگر f دارای دورهٔ تناوب 2π باشد، بازهٔ انتگرالگیری را می‌توان با هر بازهٔ دیگر به درازای 2π عوض کرد.

کلیتر بگوئیم، اگر $f \in L([0, p])$ و f دارای دورهٔ تناوب p باشد، منظور از

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{p} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{2} \right)$$

این است که ضریبهای موجود در آن از دستورهای زیرین بدست می‌آیند:

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi nt}{p} dt,$$
$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2\pi nt}{p} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

به شکل نمائی می‌توان نوشت

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx/p},$$

که در آن

اگر $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$، $\alpha_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(t)e^{-2\pi int/p} dt$.

با تغییر مناسب مقیاس، همهٔ قضیه‌های همگرائی برای رشتهٔ فوریه با دورهٔ تناوب 2π را می‌توان برای حالتی که در آن دورهٔ تناوب عدد دلخواه p است نیز بکار برد.

۱۷.۱۱ قضیهٔ انتگرال فوریه

فرض متناوب بودن، که در همهٔ قضیه‌های همگرائی مربوط به رشته‌های فوریه ظاهر می‌شود، قیدی است که آن قدر که در ابتدا ممکن است بنظر برسد جدی نیست. اگر تابعی اول بر یک بازهٔ متناهی، مثلاً $[a, b]$، تعریف شده باشد، همواره می‌توان با تحمیل نوعی شرط تناوب، تعریف f را در خارج $[a, b]$ وسعت داد. مثلاً، اگر $f(a) = f(b)$، می‌توانیم با شرط آن که معادلهٔ $f(x + p) = f(x)$، که درآن $p = b - a$، به‌ازای هرمقدار x صادق باشد، f را همه‌جا بر $]-\infty, +\infty[$ تعریف کنیم. (همیشه می‌توان، در صورت لزوم، با تغییر مقدار تابع در یکی از نقطه‌های انتهائی بازه، شرط $f(a) = f(b)$ را تأمین کرد. این تغییر در موجودیت

و یا مقادیر انتگرالهائی که برای محاسبهٔ ضریبهای فوریهٔ f بکار می‌روند تأثیری ندارد.) اما، اگر تابع داده شده از اول همه‌جا بر $]-\infty, +\infty[$ تعریف شده باشد و متناوب نباشد، امیدی نیست که بتوان رشتهٔ فوریه‌ای بدست آورد که همه جا بر $]-\infty, +\infty[$ آن تابع را نمایش دهد. با وجود این، در چنین حالتی، گاه می‌توان تابع را به جای نمایش دادن با رشته‌ای نامتناهی با انتگرالی نامتناهی نمایش داد. این انتگرالها، که از بسیاری جهات مشابه رشته‌های فوریه هستند، به انتگرالهای فوریه موسومند، و قضیه‌ای که شرطهای کافی برای نمایش تابعی به‌صورت این چنین انتگرالها را بیان کند قضیهٔ انتگرال فوریه نامیده می‌شود. ابزار‌های اساسی که در این نظریه بکار می‌روند، مانند مورد رشته‌های فوریه، عبارتند از انتگرالهای دیریکله و لم ریمان ـ لبگ.

قضیهٔ ۱۸.۱۱ (قضیهٔ انتگرال فوریه). فرض کنیم‌که $f \in L(]-\infty, +\infty[)$. همچنین نقطه‌ای در $\mathbf{R}$ مانند x، و بازه‌ای مانند $[x-\delta, x+\delta]$ حول x وجود داشته باشد بقسمی که

آ) f بر بازهٔ $[x-\delta, x+\delta]$ با تغییر کراندار باشد،

یا

ب) هر دو حد $f(x+)$ و $f(x-)$ و هر دو انتگرال لبگ

$$\int_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}\,dt \quad \text{و} \quad \int_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\,dt$$

وجود داشته باشند.

در این صورت، دستور

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos v(u-x)\,du\right]dv \tag{۳۲}$$

برقرار است، که در آن $\int_0^\infty$ یك انتگرال ریمان مجازی است.

برهان. ابتدا دستور زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}. \tag{۳۳}$$

برای این منظور می‌نویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\alpha t}{\pi t}\,dt = \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\circ} + \int_{\circ}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}.$$

وقتی که $\alpha \to +\infty$، اولین و چهارمین انتگرال طرف راست رابطهٔ بالا، بنا بــر لم ریمان ـ لبگ، به صفر می‌گرایند. در مــورد انتگرال سوم، می‌توان قضیهٔ ۸.۱۱ یا قضیهٔ ۹.۱۱ (بسته بـه‌آن که کدام یک از شرطهای (آ) یا (ب) برقرار باشد) را بکار برد، در نتیجه خواهیم داشت

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\circ}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin\alpha t}{\pi t}\,dt = \frac{f(x+)}{۲}.$$

بهمین نحو، وقتی که $\alpha \to +\infty$،

$$\int_{-\delta}^{\circ} f(x+t)\frac{\sin\alpha t}{\pi t}\,dt = \int_{\circ}^{\delta} f(x-t)\frac{\sin\alpha t}{\pi t}\,dt \to \frac{f(x-)}{۲}.$$

پس دستور (۳۳) برقرار است. با انجام یک انتقال، نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\frac{\sin\alpha\,(u-x)}{u-x}\,du,$$

و اگر از دستور مقدماتی

$$\frac{\sin\alpha\,(u-x)}{u-x} = \int_{\circ}^{\alpha} \cos v\,(u-x)\,dv$$

استفاده کنیم، رابطهٔ حد موجود در (۳۳) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\int_{\circ}^{\alpha} \cos v\,(u-x)\,dv\right]du = \frac{f(x+)+f(x-)}{۲}. \tag{۳۴}$$

اما دستوری که می‌خواهیم ثابت کنیم (۳۴) است که درآن فقط ترتیب انتگرالگیری، معکوس شده است. چون تابع کسینوس همه جا پیوسته و کراندار است، بنا بر قضیهٔ ۴۰.۱۰، به‌ازای هر $\alpha > \circ$، داریم

$$\int_{\circ}^{\alpha}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v\,(u-x)\,du\right]dv = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\circ}^{\alpha} f(u)\,\cos v\,(u-x)\,dv\right]du\,.$$

چون حد مذکور در (۳۴) وجود دارد، پس ثابت می‌شود که

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos v\,(u-x)\,du\right]dv = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

بنابر قضیهٔ ۴۰.۱۰، انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos v\,(u-x)\,du$ تابعی پیوسته از v بر $[0, \alpha]$ است، پس انتگرال $\int_0^\infty$ موجود در (۳۲) به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی وجود دارد. این انتگرال ممکن‌است به‌عنوان یک انتگرال لبگ وجود نداشته باشد.

۱۸.۱۱ شکل نمائی قضیهٔ انتگرال فوریه

قضیهٔ ۱۹.۱۱ هر گاه f در فرضهای قضیهٔ انتگرال فوریه صدق کند، آنگاه

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{iv(u-x)}du\right]dv. \tag{۳۵}$$

برهان. قرار می‌دهیم $F(v)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos v\,(u-x)\,du$. دراین صورت، F بر $]-\infty, +\infty[$ پیوسته است، $F(v)=F(-v)$، و در نتیجه

$$\int_{-\alpha}^{0}F(v)\,dv=\int_0^\alpha F(-v)\,dv=\int_0^\alpha F(v)\,dv.$$

بنابراین، (۳۲) بدین صورت درمی‌آید:

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha F(v)\,dv = \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}F(v)\,dv. \tag{۳۶}$$

حال تابع G را بر $]-\infty, +\infty[$ با معادلهٔ

$$G(v)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin v\,(u-x)\,du$$

تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت، G همه‌جا پیوسته‌است و $G(v)=-G(-v)$. ازاین‌روی، به‌ازای هر α، $\int_{-\alpha}^{\alpha}G(v)\,dv=0$، پس $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}G(v)\,dv=0$. از تلفیق این نتیجه با (۳۶) خواهیم داشت

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\{F(v)+iG(v)\}\,dv,$$

که همان دستور (۳۵) می‌باشد.

۱۹.۱۱ تبدیلهای انتگرالی

درآنالیز بسیاری ازتابعها را می‌توان به‌عنوان انتگرالهای لبگ یا انتگرالهای ریمان مجازی به شکل زیر بیان نمود:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\, f(x)\, dx. \tag{۳۷}$$

تابعی مانند g که با معادله‌ای از نوع بالا (که در آن y ممکن است عددی حقیقی یا مختلط باشد) تعریف شود، یک تبدیل انتگرالی f نامیده می‌شود. تابع Kی ظاهر شده در انتگرالده را هستهٔ تبدیل می‌نامیم.

تبدیلهای انتگرالی هم در ریاضیات محض و هم‌کاربسته موارد استعمال بی‌شمار دارند. مخصوصاً در حل بعضی‌از مسائل با مقدار کرانه‌ای، و همچنین بعضی از معادلات انتگرال، مفید هستند. بعضی از تبدیلهائی که بیشتر بکار می‌روند در زیر نشان داده می‌شوند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x)\, dx \qquad \text{(تبدیل فوریهٔ نمائی)؛}$$

$$\int_{0}^{\infty} \cos xy\, f(x)\, dx \qquad \text{(تبدیل کسینوسی فوریه)؛}$$

$$\int_{0}^{\infty} \sin xy\, f(x)\, dx \qquad \text{(تبدیل سینوسی فوریه)؛}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-xy} f(x)\, dx \qquad \text{(تبدیل لاپلاس[1])؛}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{y-1} f(x)\, dx \qquad \text{(تبدیل ملین[2]).}$$

چون $e^{-ixy} = \cos xy - i \sin xy$، تبدیلهای سینوسی وکسینوسی صرفاً حالتهای خاصی از تبدیل فوریهٔ نمائی می‌باشند که در آنها تابع f بر قسمت منفی محور حقیقی مساوی صفر می‌شود. تبدیل لاپلاس نیز با تبدیل فوریهٔ نمائی بستگی دارد. اگر y عدد مختلطی باشد، مثلاً $y = u + iv$، که درآن u و v حقیقی هستند، می‌توان نوشت

$$\int_{0}^{\infty} e^{-xy} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ixv}\, e^{-xu} f(x)\, dx$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-ixv} \varphi_u(x)\, dx,$$

1. Laplace 2. Mellin

کـه در آن $\varphi_u(x) = e^{-xu} f(x)$. بنابراین، تبدیل لاپلاس را نیز می‌توان حالت خاصی از تبدیل فوریهٔ نمائی تلقی کرد.

تبصره. گاهی معادله‌ای مانند (۳۷) را به شکل خلاصه‌تر $g = \mathcal{K}(f)$ یا $g = \mathcal{K}f$ می‌نویسند، کـه در آن $\mathcal{K}$ «عملگر»ی را نشان می‌دهد کـه f را به g تبدیل می‌کند. چون این معادله برحسب انتگرال بیان شده است،عملگر $\mathcal{K}$ را یک عملگر انتگرالی می‌نامند. واضح است کـه $\mathcal{K}$ یک عملگر خطی نیز هست. یعنی، اگـر a_1 و a_2 پایا باشند،

$$\mathcal{K}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \mathcal{K} f_1 + a_2 \mathcal{K} f_2.$$

عملگری کـه با تبدیل فوریه تعریف می‌شود غالباً با $\mathcal{F}$، و عملگر مـربوط به تبدیل لاپلاس را با $\mathcal{L}$ نشان می‌دهند.

شکل نمائی قضیهٔ انتگـرال فـوریه را می‌تـوان بـرحسب تبدیلهای فـوریه به‌صورت زیر بیان کرد. فرض کنیم g تبدیل فوریهٔ f را نشان دهد، یعنی

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-itu}\, dt. \qquad (۳۸)$$

در این صورت، دستور (۳۵) در نقطه‌های پیوستگی f به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x) = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} g(u)\, e^{ixu}\, du, \qquad (۳۹)$$

و این را دستور معکوس کردن بـرای تبدیلهای فوریـه می‌نـامند. این دستور مبین آن است که یک تابع پیوسته مانند f کـه در شرطهای قضیهٔ انتگرال فوریه صدق کند، به‌طـور منحصر بفرد با تبدیل فوریهٔ خود، یعنی g، مشخص خواهد شد.

تبصره. اگر $\mathcal{F}$ عملگری را نشان دهـد کـه به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۳۸) مشخص می‌شود، عملگری را که با (۳۹) تعریف شود معمولاً با $\mathcal{F}^{-1}$ نمایش می‌دهند. معادلـه‌هـای (۳۸) و (۳۹) را می‌توان به صورت نمادی $g = \mathcal{F} f$ و $f = \mathcal{F}^{-1} g$ بیان کـرد. دستور معکوس کردن به ما می‌گویـد کـه چگونه معادلـهٔ $g = \mathcal{F} f$ را بـرای f برحسب g حل کنیم.

پیش از ادامهٔ مطالعهٔ تبدیلهای فوریه، مفهوم جدید پیچش دو تابع را معرفـی می‌کنیم. این مفهوم را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از تبدیل انتگرالی کـه در آن هسته، یعنی $K(x, y)$، فقط به تفاضل $x - y$ بستگی دارد تفسیر نمود.

۲۰.۱۱ پیچشها

تعریف ۲۰.۱۱ فرض کنیم دو تابع دادهٔ شدهٔ f و g هر دو بر $]-\infty, +\infty[$ انتگرال لبگ داشته باشند. همچنین S مجموعهٔ x هائی را نشان دهد که بهازای آنها انتگرال لبگ

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt \qquad (۴۰)$$

وجود داشته باشد. این انتگرال تابعی مانند h را بر S تعریف میکند که پیچش f و g نامیده میشود. این تابع را با نماد $f * g$ نیز نشان میدهیم.

تبصره. بآسانی (بهوسیلهٔ انتقال) میتوان دید که هرجا انتگرال (۴۰) وجود داشته باشد، $f * g = g * f$.

حالت خاص ولی مهم وقتی است که f و g هردو بر قسمت منفی محورحقیقی صفر شوند. در این حالت، اگر $t > x$ و $g(x-t) = 0$، و (۴۰) بهصورت

$$h(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, g(x-t)\, dt \qquad (۴۱)$$

درمیآید. در این حالت واضح است که پیچش در هر نقطهٔ بازهای چون $[a, b]$ در صورتی قابل تعریف است که f و g هر دو بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشند. اما، اگر فقط فرض کنیم که f و g بر $[a, b]$ انتگرال لبگ دارند، لازم نیست مطلب چنین باشد. مثلاً،

$$\text{اگر}\quad 0 < t < 1 \ ،\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{و} \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}\ ؛$$

و اگر $t \leqslant 0$ یا $t \geqslant 1$، $f(t) = g(t) = 0$. در این صورت، f در $t = 0$ ناپیوستگی نامتناهی دارد. باوجود این، انتگرال لبگ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \int_0^1 t^{-1/2}\, dt$ وجود دارد. همچنین، با آن که g در $t = 1$ دارای ناپیوستگی نامتناهی است، ولی انتگرال لبگ $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = \int_0^1 (1-t)^{-1/2}\, dt$ وجود دارد. اما، اگر انتگرال پیچش این دو تابع را که در رابطهٔ (۴۰) گفته شد بهازای $x = 1$ تشکیل دهیم، نتیجه میشود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(1-t)\, dt = \int_0^1 t^{-1}\, dt \cdot$$

دیده میشود که دو ناپیوستگی f و g با هم «یکی شده» و به یک ناپیوستگی از نوعی بدل شدهاند که انتگرال پیچش وجود ندارد.

این مثال نشان می‌دهد که، حتی وقتی که f و g هر دو بر $]-\infty, +\infty[$ انتگرال لبگ داشته باشند، ممکن است نقطه‌هائی روی محور حقیقی باشند که در آنها انتگرال (۴۰) وجود نداشته باشد. این نقطه‌ها را نقطه‌های «استثنائی» h می‌نامیم. بسادگی می‌توان نشان داد که این گونه نقطه‌های استثنائی وجود پیدا نمی‌کنند مگر وقتی‌که f و g، هر دو، ناپیوستگی نامتناهی داشته باشند. به بیان دقیقتر، قضیهٔ زیرین وجود دارد:

قضیهٔ ۲۱.۱۱ $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$ را در نظر می‌گیریم. فرض‌کنیم که $f \in L(\mathbf{R})$، $g \in L(\mathbf{R})$، و f یا g بر $\mathbf{R}$ کراندار باشد. در این صورت، انتگرال پیچش، یعنی

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt, \tag{۴۲}$$

به‌ازای هر x در $\mathbf{R}$ وجود دارد، و تابع h که بدین ترتیب تعریف می‌شود بر $\mathbf{R}$ کراندار است. هرگاه، علاوه بر این، تابع کراندار f یا g بر $\mathbf{R}$ پیوسته باشد، آنگاه h نیز بر $\mathbf{R}$ پیوسته است و $h \in L(\mathbf{R})$.

برهان. چون $f * g = g * f$، کافی است حالتی را درنظر بگیریم که در آن g کراندار باشد. فرض کنیم که $|g| \leqslant M$. در این صورت،

$$|f(t)\, g(x-t)| \leqslant M\, |f(t)|. \tag{۴۳}$$

می‌توان تحقیق‌کرد که به‌ازای هر x، حاصل‌ضرب $f(t)g(x-t)$ به‌عنوان تابعی از t بر $\mathbf{R}$ اندازه پذیر است، از این روی، بنابر قضیهٔ ۳۵.۱۰، انتگرال مذکور برای $h(x)$ وجود خواهد داشت. همچنین نامساوی (۴۳) نشان می‌دهد که $|h(x)| \leqslant M \int |f|$، پس h بر $\mathbf{R}$ کراندار است.

حال هرگاه g بر $\mathbf{R}$ پیوسته هم باشد، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۴۰.۱۰، h بر $\mathbf{R}$ پیوسته است. اینک، به‌ازای هر بازهٔ فشرده مانند $[a, b]$، داریم

$$\begin{aligned}
\int_a^b |h(x)|\, dx &\leqslant \int_a^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, |g(x-t)|\, dt\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_a^b |g(x-t)|\, dx\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_{a-t}^{b-t} |g(y)|\, dy\right] dt \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy,
\end{aligned}$$

پس، بنا بر قضیهٔ ۳۱۰۱۰، $h \in L(\mathbf{R})$.

قضیهٔ ۲۲۰۱۱ $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم که $f \in L^2(\mathbf{R})$ و $g \in L^2(\mathbf{R})$. در این صورت، انتگرال پیچش مذکور در (۴۲) به‌ازای هر x در $\mathbf{R}$ وجود دارد و تابع h بر $\mathbf{R}$ کراندار است.

برهان. به ازای x ثابت، قرار می‌دهیم $g_x(t) = g(x-t)$. g_x بر $\mathbf{R}$ اندازه‌پذیر است و $g_x \in L^2(\mathbf{R})$، پس از قضیهٔ ۵۴۰۱۰ نتیجه می‌شود که $f \cdot g_x \in L(\mathbf{R})$. با بیان دیگر می‌توان گفت که، انتگرال پیچش $h(x)$ وجود دارد. چون $h(x)$ به‌صورت حاصل‌ضرب داخلی است، یعنی $h(x) = (f, g_x)$، پس به موجب نامساوی کشی‌ـ شوارتز خواهیم داشت

$$|h(x)| \leqslant \|f\| \, \|g_x\| = \|f\| \, \|g\|,$$

بنابراین، h بر $\mathbf{R}$ کراندار خواهد بود.

۲۱۰۱۱ قضیهٔ پیچش برای تبدیلهای فوریه

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تبدیل فوریهٔ پیچش $f * g$ مساوی حاصل‌ضرب تبدیلهای فوریهٔ f و g است. به زبان عملگرها،

$$\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g).$$

قضیهٔ ۲۳۰۱۱ $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم که $f \in L(\mathbf{R})$، $g \in L(\mathbf{R})$، و دست کم یکی از دو تابع f یا g بر $\mathbf{R}$ پیوسته و کراندار باشد. همچنین $h = f * g$. در این صورت، به‌ازای هر عدد حقیقی مانند u،

$$(۴۴) \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ixu}\, dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itu}\, dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iyu}\, dy\right).$$

انتگرال طرف چپ هم به‌عنوان یك انتگرال لبگ و هم به‌عنوان یك انتگرال ریمان مجازی وجود دارد.

برهان. فرض کنیم g بر $\mathbf{R}$ پیوسته و کراندار باشد. همچنین $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ صعودی از عددهای حقیقی مثبت باشند بقسمی‌که $a_n \to +\infty$ و $b_n \to +\infty$. دنبالهٔ $\{f_n\}$ از تابعها را بر $\mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(t) = \int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} g(x-t)\, dx.$$

چون به‌ازای هر بازهٔ فشرده مانند $[a, b]$،

$$\int_a^b |e^{-iux} g(x-t)|\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g|,$$

پس، بنا به قضیهٔ ۳۱.۱۰،

به‌ازای هرعدد حقیقی مانند t،
$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(x-t)\, dx \tag{۴۵}$$

با استفاده از انتقال $y = x - t$، خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(x-t)\, dx = e^{-iut} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y)\, dy,$$

و از رابطهٔ (۴۵) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر t،

$$\lim_{n\to\infty} f(t) f_n(t) = f(t) e^{-iut} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y)\, dy \right).$$

حال چون f_n بنابر قضیهٔ ۳۸.۱۰ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است، حاصل‌ضرب $f \cdot f_n$ بر $\mathbf{R}$ اندازه پذیر است. چون

$$|f(t) f_n(t)| \leqslant |f(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |g|,$$

حاصل‌ضرب $f \cdot f_n$ بر $\mathbf{R}$ انتگرال لبگ دارد، و قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t)\, dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y)\, dy \right). \tag{۴۶}$$

اما

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} g(x-t)\, dx \right] dt.$$

چون تابع k، که با معادلهٔ $k(x, t) = g(x-t)$ تعریف می‌شود، بر $\mathbf{R}^2$ پیوسته و کراندار است و انتگرال $\int_a^b e^{-iux}\, dx$ به‌ازای هر بازهٔ فشرده‌ای مانند $[a, b]$ وجود دارد، پس بنابر قضیهٔ ۴۰.۱۰ می‌توان ترتیب عمل انتگرالگیری را معکوس کرد و نتیجه گرفت که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t)\, dt = \int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt \right] dx = \int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux}\, h(x)\, dx.$$

بنابراین، از (۴۶) معلوم می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a_n}^{b_n} h(x)e^{-iux}\,dx=\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iuy}\,dy\right),$$

یعنی (۴۴) برقرار است. انتگرال طرف چپ این رابطه به‌عنوان یک انتگرال ریمان مجازی نیز وجود دارد زیرا انتگرالدهٔ آن بر $\mathbf{R}$ پیوسته و کراندار است و به‌ازای هر بازهٔ فشرده مانند $[a, b]$، $\int_a^b |h(x)e^{-iux}|\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |h|$.

به‌عنوان کاربردی از قضیه پیچش، خاصیت زیرین را برای تابع گاما بدست می‌آوریم.

مثال. اگر $p > ۰$ و $q > ۰$، دستور زیرین برقرار است:

$$\int_{۰}^{۱} x^{p-۱}(۱-x)^{q-۱}\,dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{۴۷}$$

انتگرال طرف چپ دستور بالا را تابع بتا می‌نامند و معمولاً به $B(p, q)$ نشان می‌دهند. برای اثبات (۴۷) فرض می‌کنیم

$$f_p(t)=\begin{cases} t^{p-۱}e^{-t} & \text{اگر } t>۰، \\ ۰ & \text{اگر } t\leqslant ۰، \end{cases}.$$

در این صورت، $f_p \in L(\mathbf{R})$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)\,dt=\int_{۰}^{\infty} t^{p-۱}e^{-t}\,dt=\Gamma(p)$. فرض کنیم که $h = f_p * f_q$. با فرض $u = ۰$ در دستور پیچش، یعنی دستور (۴۴)، معلوم می‌شود که اگر $p > ۱$ یا $q > ۱$،

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty} f_q(y)\,dy=\Gamma(p)\Gamma(q). \tag{۴۸}$$

حال انتگرال طرف چپ (۴۸) را به طریقی دیگر محاسبه می‌کنیم. چون f_p و f_q، هر دو، برقسمت منفی محور حقیقی صفر می‌شوند، پس

$$h(x)=\int_{۰}^{x} f_p(t)f_q(x-t)\,dt=\begin{cases} e^{-x}\int_{۰}^{x} t^{p-۱}(x-t)^{q-۱}\,dt & \text{اگر } x>۰، \\ ۰ & \text{اگر } x\leqslant ۰، \end{cases}.$$

تغییر متغیر $t = ux$، به‌ازای $x > ۰$، نتیجه می‌دهد که

$$h(x)=e^{-x}x^{p+q-۱}\int_{۰}^{۱} u^{p-۱}(۱-u)^{q-۱}\,du=e^{-x}x^{p+q-۱}B(p, q).$$

بنا براین، $\int_{-\infty}^{\infty}h(x)dx=B(p,q)\int_{0}^{\infty}e^{-x}x^{p+q-1}dx = B(p,q)\Gamma(p+q)$، که اگر آن را در (۴۸) قرار دهیم، رابطهٔ (۴۷) به‌ازای $p>1$ یا $q>1$ ثابت می‌شود. برای بدست آوردن نتیجه به‌ازای $p>0$ و $q>0$ رابطهٔ $pB(p,q)=(p+q)B(p+1,q)$ را بکار برید.

۲۲.۱۱ دستور جمعبندی پواسن[1]

این فصل را با بحثی از رابطه‌ای مهم به‌نام دستور جمعبندی پواسن، که دارای کاربردهای بسیار است، خاتمه می‌دهیم. این دستور را می‌توان به راههای مختلف بیان کرد. شکل زیرین برای کاربردهائی که مورد نظر ما است مناسب است.

قضیهٔ ۲۴.۱۱ فرض کنیم f تابعی باشد نامنفی بقسمی‌که انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی وجود داشته باشد، همچنین f بر $]-\infty,0]$ صعودی، و بر $[0,+\infty[$ نزولی باشد، در این صورت،

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{f(m+)+f(m-)}{2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-2\pi int}\,dt, \tag{۴۹}$$

و هر دو رشتهٔ مذکور در بالا همگرای مطلق هستند.

برهان. برای اثبات از بسط فوریهٔ تابع F که با رشتهٔ

$$F(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f(m+x) \tag{۵۰}$$

تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم‌که این رشته به‌ازای هر x حقیقی، همگرای مطلق، و بر بازهٔ $[0,1]$ همگرای یکشکل است.

چون f بر $[0,+\infty[$ نزولی است، به‌ازای $x\geqslant 0$، رابطهٔ

$$\sum_{m=0}^{N}f(m+x)\leqslant f(0)+\sum_{m=1}^{N}f(m)\leqslant f(0)+\int_{0}^{\infty}f(t)\,dt$$

راداریم. بنا براین، بنا برآزمون M وایراشتراس (قضیهٔ ۶.۹)، رشتهٔ $\sum_{m=0}^{\infty}f(m+x)$ بر $[0,+\infty[$ همگرای یکشکل است. با بیانی مشابه به معلوم می‌شود که رشتهٔ $\sum_{m=-\infty}^{-1}f(m+x)$ بر $]-\infty,1]$ همگرای یکشکل خواهد بود. بنا براین، رشتهٔ مذکور در (۵۰) به‌ازای هر x همگرا است و بر

$$]-\infty,1]\cap[0,+\infty[=[0,1]$$

همگرای یکشکل است.

---
1. Poisson

تابع مجموع F متناوب، با دورهٔ تناوب ۱، است. درواقع،

$$F(x+1)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m+x+1),$$

و این رشته صرفاً یک تجدید آرایش رشتهٔ (۵۰) است. چون همهٔ جملههای آن نامنفی هستند، پس به همان مجموع رشتهٔ (۵۰) همگرا خواهد بود. از این روی

$$F(x+1)=F(x).$$

اینک نشان می‌دهیم که F بر هر بازهٔ فشرده با تغییر کراندار است. هرگاه $0 \leqslant x \leqslant (1/2)$، آنگاه به‌ازای $m \geqslant 0$، $f(m+x)$ تابعی است نزولی‌از x، و به‌ازای $m < 0$، تابعی صعودی از x است. بنابراین،

$$F(x)=\sum_{m=0}^{\infty} f(m+x)-\sum_{m=-\infty}^{-1}\{-f(m+x)\},$$

پس F به‌صورت تفاضل دو تابع نزولی است. بنابراین، F بر $[0, 1/2]$ با تغییر کراندار خواهد بود. با بیانی مشابه معلوم می‌شودکه F بر $[-1/2, 0]$ نیز با تغییر کراندار است. بنابر تناوب، F بر هر بازهٔ فشرده با تغییر کراندار خواهد بود.

حال رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ F (به شکل نمائی) را درنظر می‌گیریم، یعنی

$$F(x)\sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{2\pi i n x}.$$

چون F بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار است، پس F بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان دارد، و ضریبهای فوریه از دستور

$$\alpha_n=\int_0^1 F(x)e^{-2\pi i n x}\,dx \tag{۵۱}$$

بدست می‌آیند. همچنین، از این که F بر هربازهٔ فشرده با تغییر کراندار است، بنابر آزمون ژردان، معلوم می‌شود که رشتهٔ فوریه به‌ازای هر x همگرا است و

$$\frac{F(x+)+F(x-)}{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi i n x}. \tag{۵۲}$$

برای بدست آوردن دستور جمعبندی پواسن، ضریبهای α_n را به‌شکل دیگری بیان می‌کنیم. با استفاده از (۵۰) در (۵۱) وجمله به‌جمله انتگرال گرفتن (که بخاطر همگرائی یکشکل امکان‌پذیر است) خواهیم داشت

$$\alpha_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(m+x) e^{-2\pi i n x}\, dx.$$

از تغییر متغیر $t = m + x$ نتیجه می‌شود که

$$\alpha_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt,$$

زیرا $e^{2\pi i m n} = 1$. با استفاده از این در (۵۲) خواهیم داشت

$$\frac{F(x+)+F(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt \right\} e^{2\pi i n x}. \quad (۵۳)$$

وقتی که $x = 0$، رابطهٔ (۵۳) به دستور (۴۹) تحویل می‌شود.

تبصره. درقضیهٔ ۲۴.۱۱ پیوستگی f الزامی نیست. اما، هرگاه f در هرعدد صحیح پیوسته باشد، آنگاه هرجملهٔ $f(m+x)$ در رشتهٔ (۵۰) در $x = 0$ پیوسته است و در نتیجه، بنا برهمگرائی یکشکل، تابع مجموع F نیز در ۰ پیوسته خواهد بود. در این حالت، (۴۹) به صورت زیرین درمی‌آید:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i n t}\, dt. \quad (۵۴)$$

شرط یکنوا بودن f را می‌توان ضعیفتر اختیارکرد. مثلاً، چون هرعضو (۴۹) به طور خطی به f بستگی دارد، بنا براین، هرگاه قضیه برای f_1 و f_2 درست باشد، آنگاه برای هر ترکیب خطی ازآنها مانند $a_1 f_1 + a_2 f_2$ نیز چنین خواهد بود. در حالت خاص، اگر $f = u + iv$ تابع مختلطی باشد و دستور (۴۹) برای u و v جداگانه برقرار باشد، این دستور برای f نیز برقرار خواهد بود.

مثال ۱. دستور تبدیل برای تابع تتا. تابع تتا، یعنی θ، به ازای هر $x > 0$ با معادلهٔ

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

تعریف می‌شود. دستور پواسن را بکار می‌بریم تا معادلهٔ تبدیل

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0, \quad (۵۵)$$

بدست آید.

به‌ازای $\alpha > 0$ ثابت و هر x حقیقی، قرار می‌دهیم $f(x) = e^{-\alpha x^2}$. این تابع در همهٔ مفروضات قضیهٔ ۲۴.۱۱ صدق می‌کند و همه‌جا پیوسته است. بنا براین،

بنا بر دستور پواسن، خواهیم داشت

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha m^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{2\pi i n t}\, dt\,. \tag{۵۶}$$

طرف چپ معادلهٔ بالا مساوی $\theta(\alpha/\pi)$ است. انتگرال طرف راست برابر است با

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{2\pi i n t}\, dt &= 2\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t^2} \cos 2\pi n t\, dt\\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos \frac{2\pi n x}{\sqrt{\alpha}}\, dx\\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\, F\left(\frac{\pi n}{\sqrt{\alpha}}\right),\end{aligned}$$

که در آن

$$F(y) = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy\, dx.$$

اما $F(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-y^2}$ (ر. ک. تمرین ۲۲۰۱۰)، پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{2\pi i n t}\, dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}\,.$$

با استفاده از این رابطه در (۵۶) وفرض $\alpha = \pi x$،دستور (۵۵) نتیجه خواهد شد.

مثال ۲. تجزیهٔ $\coth x$ به کسرهای جزئی. کتانژانت هذلولوی، یعنی $\coth x$، به‌ازای $x \neq 0$ با این معادله تعریف می‌شود:

$$\coth x = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

با استفاده از دستور پواسن رابطهٔ زیرین را، که به تجزیه به‌کسرهای جزئی معروف است، بدست می‌آوریم:

$$\text{به‌ازای } x>0\text{،}\quad \coth x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+\pi^2 n^2}\,. \tag{۵۷}$$

به‌ازای $\alpha > 0$ ثابتی، فرض می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & \text{اگر } x \geq 0\text{،}\\ 0 & \text{اگر } x < 0\text{،}\end{cases}$$

واضح است کــه f در مفروضات قضیهٔ ۲۴.۱۱ صدق می‌کند. همچنین، f همه جا، بجز در ۰، پیوسته است، و در صفر ۱ $= (+\circ)f$ و ۰ $= (-\circ)f$. پس، بنا بر دستور پواسن،

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - 2\pi i n t}\, dt \,. \qquad (58)$$

مجموع طرف چپ عبارت است از یک رشتهٔ هندسی با مجموع $1/(e^{\alpha}-1)$، و انتگرال طرف راست مساوی $1/(\alpha + 2\pi i n)$ می‌باشد. بنابراین، (۵۸) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\alpha}-1} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha + 2\pi i n} + \frac{1}{\alpha - 2\pi i n}\right),$$

که اگر در آن α را به $2x$ تعویض کنیم، رابطهٔ (۵۷) حاصل خواهد شد.

تمرین

دستگاههای متعامد

۱.۱۱ تحقیق کنید که دستگاه مثلثاتی مذکور در (۱) بر $[0, 2\pi]$ متعامد بهنجار است.

۲.۱۱ دسته‌ای متناهی از تابعها مـانند $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ را بر $[a, b]$ مستقل خطی نامیم در صورتی که هرگاه

به ازای هر x در $[a, b]$ ، $\sum_{k=0}^{m} c_k \varphi_k(x) = 0$ ،

آنگاه $c_0 = c_1 = \cdots = c_m = 0$. یک دستهٔ نامتناهی از تابعها را بر $[a, b]$ مستقل خطی نامیم در صورتی که هر زیرمجموعهٔ متناهی آن بر $[a, b]$ مستقل خطی باشد. ثابت کنید هر دستگاه که بر $[a, b]$ متعامد بهنجار باشد، بر این بازه مستقل خطی است.

۳.۱۱ در این تمرین فرایند گرام ـ اشمیت[1] را کـه بـرای تبدیل یک دستگـاه مستقل خطی به دستگـاهی متعامد بکار می‌رود توصیف می‌نمـائیم. فـرض کنیم کـه $\{f_0, f_1, \ldots\}$ یک دستگـاه مستقل خطی بـر $[a, b]$ باشد (همان طور کـه در تمرین ۲.۱۱ تعریف شده است). دستگاه جدید $\{g_0, g_1, \ldots\}$ را به‌طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

1. Gram - Schmidt

$$g_0 = f_0, \; g_{r+1} = f_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} a_k g_k,$$

که درآن اگر $\|g_k\| \neq 0$، $a_k = (f_{r+1}, g_k)/(g_k, g_k)$، و اگر $\|g_k\| = 0$، $a_k = 0$. ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant 0$، g_{n+1} بر هر یک از g_0، g_1، $\ldots$، g_n عمود است.

۴.۱۱ به تمرین ۳.۱۱ باز می‌گردیم. قرار دهید $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$. فرایند گرام ـ اشمیت را در مورد دستگاه چند جمله‌ایهای $\{1, t, t^2, \ldots\}$ بر بازهٔ $[-1, 1]$ بکار برده، نشان دهید که

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad g_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t,$$

$$g_4(t) = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}.$$

۵.۱۱ آ) فرض کنید $f \in R$ بر $[0, 2\pi]$ باشد، که در آن f حقیقی و دارای دورهٔ تناوب 2π باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، تابعی پیوسته مانند g بادورهٔ تناوب 2π هست بقسمی که $\|f - g\| < \varepsilon$. راهنمائی. یک‌افزار $[0, 2\pi]$ مانند P_ε را بقسمی اختیارکنید که f درشرط ریمان $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ صدق کند، و سپس تابع‌خطی قطعه‌وار g را بقسمی بسازید که با f در هرنقطهٔ P_ε یکی باشد.

ب) با استفاده ازقسمت (آ) نشان دهیدکه اگر f بر $[0, 2\pi]$ انتگرال ریمان داشته باشد، درقضیهٔ ۱۶.۱۱ قسمتهای (آ)، (ب)، و (ج) همه برقرارند.

۶.۱۱ در این تمرین فرض بر این است که همهٔ تابعها بر بازه‌ای فشرده مانند $[a, b]$ پیوسته می‌باشند. فرض کنید که $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ دستگاهی متعامد بهنجار بر $[a, b]$ باشد.

آ) ثابت کنید که سه گزارهٔ زیرین هم‌ارزند.

۱) هر گاه به‌ازای هر n، $(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$، آنگاه $f = g$. (یعنی دو تابع پیوستهٔ متمایز نمی‌توانند دارای ضریبهای فوریهٔ مساوی باشند.)

۲) هر گاه به‌ازای هر n، $(f, \varphi_n) = 0$، آنگاه $f = 0$. (یعنی تنها تابع پیوسته‌ای که بر هر φ_n عمود است تابع صفر است.)

۳) هر گاه T مجموعه‌ای متعامد بهنجار بر $[a, b]$ باشد بقسمی که

$T \supseteq \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$، آنگاه $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$. (یعنی یک مجموعهٔ متعامد بهنجار را نمی‌توان وسعت داد.) این‌خاصیت را این‌طور توصیف می‌کنند که می‌گویند $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ ماکزیمال یا تام است.

ب) فرض کنید به‌ازای هر عدد صحیح n، $\varphi_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$، و تحقیق کنید که مجموعهٔ $\{\varphi_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ بر هر بازه به درازای 2π تام است.

۷۰۱۱ اگر $x \in \mathbf{R}$ و $n = 1, 2, \ldots$، قرار می‌دهیم $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$ و تعریف می‌کنیم

$$\varphi_0(x) = 1, \; \varphi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}(x).$$

واضح است که φ_n یک چند جمله‌ای است. φ_n را چند جمله‌ای لژاندر[1] از مرتبهٔ n می‌نامند. چند تای اول عبارتند از

$$\varphi_1(x) = x, \qquad \varphi_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \qquad \varphi_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}.$$

خاصیتهای زیرین را در مورد چند جمله‌ایهای لژاندر نتیجه بگیرید:

آ) $\varphi_n'(x) = x\varphi_{n-1}'(x) + n\varphi_{n-1}(x)$.

ب) $\varphi_n(x) = x\varphi_{n-1}(x) + \frac{x^2 - 1}{n}\varphi_{n-1}'(x)$.

ج) $(n+1)\varphi_{n+1}(x) = (2n+1)x\varphi_n(x) - n\varphi_{n-1}(x)$.

د) φ_n در معادلهٔ دیفرانسیل $[(1 - x^2)y']' + n(n+1)y = 0$ صدق می‌کند.

ه) $[(1-x^2)\Delta(x)]' + [m(m+1) - n(n+1)]\varphi_m(x)\varphi_n(x) = 0$ که در آن $\Delta = \varphi_n\varphi_m' - \varphi_m\varphi_n'$.

و) مجموعهٔ $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ بر $[-1, 1]$ متعامد است.

ز) $\int_{-1}^{1} \varphi_n^2\, dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} \varphi_{n-1}^2\, dx$.

ح) $\int_{-1}^{1} \varphi_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$.

1. Legendre

تبصره. اگر فرایند گرام‌ـاشمیت را در مورد دستگاه $\{1, t, t^2, \ldots\}$ بر بازهٔ $[-1, 1]$ بکار بریم، چند جمله‌ایهای

$$g_n(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \varphi_n(t)$$

حاصل می‌شوند. (ر. ک. تمرین ۴۰.۱۱.)

رشته‌های فوریهٔ مثلثاتی

۸.۱۱ فرض کنید که $f \in L([-\pi, \pi])$ و f دارای دورهٔ تناوب 2π باشد. نشان دهید که، با شرطهای مذکور در زیر، رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f دارای شکلهای خاص زیرین است:

آ) هرگاه به‌ازای $0 < x < \pi$، $f(-x) = f(x)$، آنگاه $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$، که‌در آن $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt$.

ب) هرگاه به‌ازای $0 < x < \pi$، $f(-x) = -f(x)$، آنگاه $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$، که در آن $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt\, dt$.

درتمرینهای ۹.۱۱ تا ۱۵.۱۱، نشان دهید که هریک از بسطها در بردی که معین شده است معتبراست. پیشنهاد. تمرین ۸.۱۱ و قضیهٔ ۱۶.۱۱ (ج) را هرکجا که ممکن بود بکار برید.

۹.۱۱ آ) اگر $0 < x < 2\pi$، $x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

ب) اگر $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$، $\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

تبصره. رابطهٔ اخیر به‌ازای $x = 0$ تبدیل به $\zeta(2) = \pi^2/6$ می‌گردد.

۱۰.۱۱ آ) اگر $0 < x < \pi$، $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}$.

ب) اگر $0 \leqslant x \leqslant \pi$، $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

۱۱.۱۱ آ) اگر $-\pi < x < \pi$، $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}$.

ب) اگر $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$، $x^{2} = \frac{\pi^{2}}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\cos nx}{n^{2}}$.

۱۲.۱۱ اگر $0 < x < 2\pi$، $x^{2} = \frac{4}{3}\pi^{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^{2}} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right)$.

۱۳.۱۱ آ) اگر $0 < x < \pi$، $\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^{2}-1}$.

ب) اگر $0 < x < \pi$، $\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^{2}-1}$.

۱۴.۱۱ آ) اگر $-\pi < x < \pi$،

$$x \cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n \sin nx}{n^{2}-1}.$$

ب) اگر $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$،

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cos nx}{n^{2}-1}.$$

۱۵.۱۱ آ) اگر $x \neq 2k\pi$ (k عددی صحیح است)،

$$\log\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

ب) اگر $x \neq (2k+1)\pi$،

$$\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\cos nx}{n}.$$

ج) اگر $x \neq k\pi$،

$$\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

۱۶.۱۱ آ) تابع پیوسته‌ای بر $[-\pi, \pi]$ بیابید که رشتهٔ فوریهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} n^{-3}\sin nx$ را تولیدکند. سپس، با استفاده ازدستور پارسوال، ثابت کنید که $\zeta(6) = \pi^{6}/945$.

ب) با استفاده از رشتهٔ فوریه‌ای مناسب و دستور پارسوال، نشان دهید که $\zeta(4) = \pi^{4}/90$.

۱۷.۱۱ فرض کنید f بر $[0, 2\pi]$ دارای مشتق پیوسته باشد، همچنین

$f(\circ)=f(\text{۲}\pi)$، و $\int_\circ^{\text{۲}\pi} f(t)\,dt = \circ$. ثابت کنید که $\|f'\| \geqslant \|f\|$، و تساوی در آن وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که $f(x) = a\cos x + b\sin x$.
راهنمائی. از دستور پارسوال استفاده کنید.

۱۸.۱۱ دنبالهٔ $\{\bar{B}_n\}$ از تابعهای متناوب (با دورهٔ تناوب ۱) بر $\mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\bar{B}_{\text{۲}n}(x) = (-\text{۱})^{n+\text{۱}} \frac{\text{۲}(\text{۲}n)!}{(\text{۲}\pi)^{\text{۲}n}} \sum_{k=\text{۱}}^{\infty} \frac{\cos \text{۲}\pi kx}{k^{\text{۲}n}} \quad (n = \text{۱}, \text{۲}, \ldots),$$

$$\bar{B}_{\text{۲}n+\text{۱}}(x) = (-\text{۱})^{n+\text{۱}} \frac{\text{۲}(\text{۲}n+\text{۱})!}{(\text{۲}\pi)^{\text{۲}n+\text{۱}}} \sum_{k=\text{۱}}^{\infty} \frac{\sin \text{۲}\pi kx}{k^{\text{۲}n+\text{۱}}} \quad (n = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots).$$

($\bar{B}_n$ را تابع برنولی از مرتبهٔ n می‌نامند.) نشان دهید که:

آ) اگر x عددی صحیح نباشد، $\bar{B}_\text{۱}(x) = x - [x] - \text{۱}/\text{۲}$. ($[x]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.)

ب) اگر $n \geqslant \text{۱}$، $\int_\circ^\text{۱} \bar{B}_n(x)\,dx = \circ$، و اگر $n \geqslant \text{۲}$، $\bar{B}'_n(x) = n\bar{B}_{n-\text{۱}}(x)$.

ج) اگر $\circ < x < \text{۱}$، $\bar{B}_n(x) = P_n(x)$، که در آن P_n چند جمله‌ای برنولی n م است. (برای تعریف P_n، ر. ک. تمرین ۳۸.۹.)

د) $\bar{B}_n(x) = -\dfrac{n!}{(\text{۲}\pi i)^n} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq\circ}}^{\infty} \dfrac{e^{\text{۲}\pi ikx}}{k^n}$، $(n = \text{۱}, \text{۲}, \ldots)$.

۱۹.۱۱ فرض کنید f تابعی باشد با دورهٔ تناوب $\text{۲}\pi$ که بر $[-\pi, \pi]$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

اگر $\circ < x < \pi$، $f(x) = \text{۱}$، اگر $-\pi < x < \circ$، $f(x) = -\text{۱}$،
و اگر $x = \circ$ یا $x = \pi$، $f(x) = \circ$.

آ) نشان دهید که

به‌ازای هر x، $f(x) = \dfrac{\text{۴}}{\pi} \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \dfrac{\sin(\text{۲}n-\text{۱})x}{\text{۲}n-\text{۱}}$.

رشتهٔ بالا مثالی از رده‌ای ازرشته‌های فوریه است‌که دارای خاصیت غریبی به‌نام پدیدهٔ گیبس[1] می‌باشند. این تمرین برای مصور ساختن این‌پدیده طرح شده است. درآنچه

1. Gibbs

بعد از این در این تمرین می‌آید، $s_n(x)$ مجموع جزئی nام رشتهٔ مذکـور در قسمت (آ) را نشان می‌دهد.

ب) نشان دهید که

$$s_n(x) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{x} \frac{\sin ۲nt}{\sin t} dt.$$

ج) اگر $x_m = \frac{۱}{۲} m\pi/n$ $(m = ۱, ۲, \ldots, ۲n - ۱)$، نشان دهید کـه s_n در بـازهٔ $]۰, \pi[$، در نقطـه‌هـای $x_۱$، $x_۳$، $\ldots$، $x_{۲n-۱}$ مـاکـزیمم موضعی، و در $x_۲$، $x_۴$، $\ldots$، $x_{۲n-۲}$ مینیمم موضعی دارد.

د) نشان دهید که $s_n(\frac{۱}{۲}\pi/n)$ ماکزیمم عددهای

$$s_n(x_m) \ (m = ۱, ۲, \ldots, ۲n - ۱)$$

می‌باشد.

ه) $s_n(\frac{۱}{۲}\pi/n)$ را به‌عنوان یک مجموع ریمان تعبیر نموده، ثابت کنید کـه

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{۲n}\right) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

مقدار حد بالا تقریباً ۱٫۱۷۹ است. بنابراین، اگر چـه f در مبدأ جهشی مساوی ۲ دارد، ولـی نمـودارهـای خمهای تقریبی s_n در حوالی مبدأ به پـاره خطی عمودی به‌درازای ۲٫۳۵۸ نزدیک می‌شوند. این خاصیت را پدیدهٔ گیبس می‌نامند.

۲۰۰۱۱ اگر $f(x) \sim a_۰/۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin xn)$ و f بـر $[۰, ۲\pi]$ با تغییر کراندار باشد، نشان دهید که $a_n = O(۱/n)$ و $b_n = O(۱/n)$.

راهنمائی. بنویسید $f = g - h$، که در آن g و h بـر $[۰, ۲\pi]$ صعودی باشند. در این صورت،

$$a_n = \frac{۱}{n\pi} \int_{۰}^{۲\pi} g(x)\, d(\sin nx) - \frac{۱}{n\pi} \int_{۰}^{۲\pi} h(x)\, d(\sin nx).$$

حال قضیهٔ ۳۱۰۷ را بکار برید.

۲۱۰۱۱ فرض‌کنید به‌ازای‌هر a در $]۰, \delta[$، $g \in L([a, \delta])$، و g درشرط لیپ‌شیتس «دست راستی» در ۰ صدق کند. (ر. ک. به تبصرهٔ بعد از قضیهٔ ۹۰۱۱۰) نشان دهید که انتگرال لبگ $\int_۰^\delta |g(t) - g(۰+)|/t\, dt$ وجود دارد.

۲۲۰۱۱ با استفاده از تمرین ۲۱۰۱۱، ثابت کنید که مشتقپذیری f در یک نقطـه همگرائی رشتهٔ فوریهٔ آن را دراین نقطه ایجاب می‌کند.

۲۳.۱۱ فرض کنید g بر $[\circ, \text{۱}]$ پیوسته باشد، و به‌ازای $n = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots$، $\int_\circ^\text{۱} t^n g(t)\, dt = \circ$. نشان دهیدکه:

آ) به‌ازای هرچند جمله‌ای مانند P، $\int_\circ^\text{۱} g(t)^\text{۲} dt = \int_\circ^\text{۱} g(t)\,(g(t) - P(t))dt$.

ب) $\int_\circ^\text{۱} g(t)^\text{۲} dt = \circ$. راهنمائی. از قضیهٔ ۱۷.۱۱ استفاده کنید.

ج) به‌ازای هر t در $[\circ, \text{۱}]$، $g(t) = \circ$.

۲۴.۱۱ با استفاده از قضیهٔ تقریب وایراشتراس، هر یک از گزاره‌های زیرین را ثابت کنید.

آ) هرگاه f بر $[\text{۱}, +\infty[$ پیوسته باشد، و وقتی که $x \to +\infty$، $f(x) \to a$، آنگاه f را می‌توان بر $[\text{۱}, +\infty[$ به‌طور یکشکل به تابعی مانند g به‌شکل $g(x) = p(\text{۱}/x)$ نزدیک کرد، که درآن p یک چند جمله‌ای باشد.

ب) هرگاه f بر $[\circ, +\infty[$ پیوسته باشد، و وقتی که $x \to +\infty$، $f(x) \to a$، آنگاه f را می‌توان بر $[\circ, +\infty[$ به‌طور یکشکل به تابعی مانند g به‌شکل $g(x) = p(e^{-x})$ نزدیک کرد، که در آن p یک چند جمله‌ای باشد.

۲۵.۱۱ فرض کنید $f(x) \sim a_\circ/\text{۲} + \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$، و $\{\sigma_n\}$ دنبالهٔ میانگینهای حسابی مجموعهای جزئی این رشته (که با رابطهٔ (۲۳) داده شده‌اند) باشد. نشان دهید که:

آ) $\sigma_n(x) = \frac{a_\circ}{\text{۲}} + \sum_{k=\text{۱}}^{n-\text{۱}} \left(\text{۱} - \frac{k}{n}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

ب)
$$\int_\circ^{\text{۲}\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^\text{۲}\, dx = \int_\circ^{\text{۲}\pi} |f(x)|^\text{۲}\, dx - \frac{\pi}{\text{۲}} a_\circ^\text{۲} - \pi \sum_{k=\text{۱}}^{n-\text{۱}} (a_k^\text{۲} + b_k^\text{۲}) + \frac{\pi}{n^\text{۲}} \sum_{k=\text{۱}}^{n-\text{۱}} k^\text{۲}(a_k^\text{۲} + b_k^\text{۲}).$$

ج) هرگاه f بر $[\circ, \text{۲}\pi]$ پیوسته، و دارای دورهٔ تناوب $\text{۲}\pi$ باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^\text{۲}} \sum_{k=\text{۱}}^{n} k^\text{۲}(a_k^\text{۲} + b_k^\text{۲}) = \circ.$$

۲۶.۱۱ فرض کنید f بر $[\circ, \text{۲}\pi]$ پیوسته باشد، و تابعی باشد متناوب با دورهٔ تناوب $\text{۲}\pi$. رشتهٔ فوریهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ f (به شکل نمائی)، یعنی

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx},$$

را درنظر بگیرید. همچنین فرض کنید که $f' \in R$ بر $[\circ, \text{۲}\pi]$ باشد.

آ) ثابت کنید که رشتهٔ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{\text{۲}}|\alpha_n|^{\text{۲}}$ همگرا است؛ سپس، با استفاده از نامساوی کشی ــ شوارتز، نتیجه بگیرید که $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\alpha_n|$ همگرا است.

ب) از قسمت (آ) نتیجه بگیرید که رشتهٔ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}$ بر $[\circ, \text{۲}\pi]$ به طور یکشکل به تابع مجموع پیوسته‌ای مانند g همگرا است. سپس ثابت کنید که $f = g$.

انتگرالهای فوریه[1]

۲۷.۱۱ اگر f در مفروضات قضیهٔ انتگرال فوریه صدق کند، نشان دهید که:

آ) هرگاه f زوج باشد، یعنی به‌ازای هر t، $f(-t) = f(t)$، آنگاه

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{\text{۲}} = \frac{\text{۲}}{\pi}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_\circ^\alpha \cos vx\left[\int_\circ^\infty f(u)\cos vu\, du\right]dv.$$

ب) هرگاه f فرد باشد، یعنی به‌ازای هر t، $f(-t) = -f(t)$، آنگاه

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{\text{۲}} = \frac{\text{۲}}{\pi}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_\circ^\alpha \sin vx\left[\int_\circ^\infty f(u)\sin vu\, du\right]dv.$$

با استفاده از قضیهٔ انتگرال فوریه، انتگرالهای مجازی موجود در تمرینهای ۲۸.۱۱ تا ۳۰.۱۱ را محاسبه کنید. پیشنهاد. در مواقع امکان‌پذیر تمرین ۲۷.۱۱ را بکار برید.

۲۸.۱۱
$$\frac{\text{۲}}{\pi}\int_\circ^\infty \frac{\sin v \cos vx}{v}dv = \begin{cases} \text{۱} & \text{اگر } -\text{۱} < x < \text{۱} \\ \circ & \text{اگر } |x| > \text{۱} \\ \frac{\text{۱}}{\text{۲}} & \text{اگر } |x| = \text{۱} \end{cases}$$

۲۹.۱۱ اگر $b > \circ$، $\int_\circ^\infty \frac{\cos ax}{b^{\text{۲}}+x^{\text{۲}}}dx = \frac{\pi}{\text{۲}b}e^{-|a|b}$.

راهنمائی. تمرین ۲۷.۱۱ را با $f(u) = e^{-b|u|}$ بکار برید.

۳۰.۱۱ اگر $a \neq \circ$، $\int_\circ^\infty \frac{x\sin ax}{\text{۱}+x^{\text{۲}}}dx = \frac{a}{|a|}\frac{\pi}{\text{۲}}e^{-|a|}$.

۳۱.۱۱ آ) ثابت کنید که

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(۲p)} = ۲\int_{۰}^{۱/۲} x^{p-۱}(۱-x)^{p-۱}\,dx.$$

ب) با تغییر متغیری مناسب در (آ)، دستور دو جزئی زیر را برای تابع گاما بدست آورید:

$$\Gamma(۲p)\,\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲^{۲p-۱}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{۱}{۲}\right).$$

تبصره. در تمرین ۳۰.۱۰ نشان داده شد که $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$.

۳۲.۱۱ اگر به‌ازای هر x، $f(x) = e^{-x^۲/۲}$ و $g(x) = xf(x)$، ثابت‌کنیدکه

$$f(y) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx, \quad g(y) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} g(x)\sin xy\,dx.$$

۳۳.۱۱ در این تمرین‌دستور جمعبندی پواسن به شکلی دیگر توصیف می‌شود. فرض کنید f بر $[۰, +\infty[$ نامنفی، نزولی، و پیوسته باشد، و انتگرال $\int_{۰}^{\infty} f(x)\,dx$ به‌عنوان یک انتگرال ریمان مجازی وجود داشته باشد. قرار دهید

$$g(y) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx.$$

اگر α و β عددهائی مثبت باشند بقسمی که $\alpha\beta = ۲\pi$، ثابت کنید که

$$\sqrt{\alpha}\left\{\frac{۱}{۲}f(۰) + \sum_{m=۱}^{\infty} f(m\alpha)\right\} = \sqrt{\beta}\left\{\frac{۱}{۲}g(۰) + \sum_{n=۱}^{\infty} g(n\beta)\right\}.$$

۳۴.۱۱ ثابت کنید که دستور تبدیل (۵۵) برای $\theta(x)$ را می‌توان به شکل زیر درآورد:

$$\sqrt{\alpha}\left\{\frac{۱}{۲} + \sum_{m=۱}^{\infty} e^{-\alpha^۲ m^۲/۲}\right\} = \sqrt{\beta}\left\{\frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} e^{-\beta^۲ n^۲/۲}\right\},$$

که در آن $\alpha\beta = ۲\pi$ و $\alpha > ۰$.

۳۵.۱۱ اگر $s > ۱$، ثابت کنید که

$$\pi^{-s/۲}\,\Gamma\left(\frac{s}{۲}\right)n^{-s} = \int_{۰}^{\infty} e^{-\pi n^۲ x}x^{s/۲-۱}\,dx$$

و دستور زیر را از آن نتیجه بگیرید:

$$\pi^{-s/۲}\,\Gamma\left(\frac{s}{۲}\right)\zeta(s) = \int_{۰}^{\infty} \psi(x)x^{s/۲-۱}\,dx,$$

کـه در آن $2\psi(x) = \theta(x) - 1$. با استفاده از ایـن و دستور تبدیل برای $\theta(x)$، ثابت کنید که

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1})\psi(x)\,dx.$$

تبدیلهای لاپلاس

فرض می‌کنیم که c عدد مثبتی باشد بقسمی که انتگرال $\int_0^\infty e^{-ct}|f(t)|\,dt$ به‌عنوان یک انتگرال ریمان مجازی وجود داشته باشد. همچنین $z = x + iy$، کـه در آن $x > c$. بسادگی می‌توان نشان داد که انتگرال

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt$$

هم به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی و هم به‌عنوان انتگرال لبگ وجود دارد. تابع F که به‌این‌طریق تعریف شد به تبدیل لاپلاس f معروف است، و با $\mathcal{L}(f)$ نشان داده می‌شود. تمرینهای زیرین بعضی از خاصیتهای تبدیلهای لاپلاس را نشان می‌دهند.

۳۶.۱۱ در جدول تبدیلهای لاپلاس زیرین صحت هر خط را تحقیق کنید.

$f(t)$	$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt$	$z = x + iy$
$e^{\alpha t}$	$(z-\alpha)^{-1}$	$(x > \alpha)$
$\cos \alpha t$	$z/(z^2+\alpha^2)$	$(x > 0)$
$\sin \alpha t$	$\alpha/(z^2+\alpha^2)$	$(x > 0)$
$t^p e^{\alpha t}$	$\Gamma(p+1)/(z-\alpha)^{p+1}$	$(x > \alpha, p > 0)$

۳۷.۱۱ نشان دهید که اگر دو تابع f و g، هر دو، بر قسمت منفی محـور حقیقی صفر شوند، پیچش $h = f * g$ به‌شکل زیر خواهد بود:

$$h(t) = \int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx.$$

با استفاده از قضیهٔ پیچش برای تبدیلهای فوریه، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g).$$

۳۸.۱۱ فرض کنید f بر $]0, +\infty[$ پیوسته باشد، و بـه‌ازای $z = x + iy$، کـه در آن $x > c > 0$، قـرار دهید $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt$. اگـر $s > c$

و $a > 0$، ثابت کنید که:

آ) $F(s+a) = a\int_0^\infty g(t)e^{-at}\,dt$، که درآن $g(x) = \int_0^x e^{-st}f(t)\,dt$.

ب) هرگاه به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $F(s+na) = 0$، آنگاه به‌ازای $t > 0$، $f(t) = 0$. راهنمائی. از تمرین ۲۳.۱۱ استفاده کنید.

ج) هرگاه h بر $]0, +\infty[$ پیوسته باشد و f و h دارای یک تبدیل لاپلاس باشند، آنگاه به‌ازای هر $t > 0$، $f(t) = h(t)$.

۳۹.۱۱ به‌ازای $z = x + iy$، که درآن $x > c > 0$، قرار دهید

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt.$$

فرض کنید f در نقطه‌ای مانند t در یکی از شرطهای «موضعی» (آ) یا (ب) مذکور در قضیهٔ انتگرال فوریه صدق کند (قضیهٔ ۱۸.۱۱). ثابت کنید به‌ازای هر $a > c$،

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t}F(a+iv)\,dv.$$

این رابطه‌رادستور معکوس کردن برای تبدیلهای لاپلاس می‌نامند. حد مذکور در طرف راست معمولاً به کمک حساب باقیمانده‌ها، که در بخش ۲۶.۱۶ توصیف شده است، ارزیابی می‌شود. راهنمائی. فرض‌کنید به‌ازای $t \geq 0$، $g(t) = e^{-at}f(t)$، و به‌ازای $t < 0$، $g(t) = 0$، و سپس قضیهٔ ۱۹.۱۱ را در مورد g بکار برید.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

11.1 Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3rd ed. Macmillan, London, 1930.

11.2 Edwards, R. E., *Fourier Series, A Modern Introduction*, Vol. 1. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.

11.3 Hardy, G. H., and Rogosinski, W. W., *Fourier Series*. Cambridge University Press, 1950.

11.4 Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, Vol. 1, 3rd ed. Cambridge University Press, 1927.

11.5 Indritz, J., *Methods in Analysis*. Macmillan, New York, 1963.

11.6 Jackson, D., *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*. Carus Monograph No. 6. Open Court, New York, 1941.

11.7 Rogosinski, W. W., *Fourier Series*. H. Cohn and F. Steinhardt, translators. Chelsea, New York, 1950.

11.8 Titchmarsh, E. C., *Theory of Fourier Integrals*. Oxford University Press, 1937.

11.9 Wiener, N., *The Fourier Integral*. Cambridge University Press, 1933.

11.10 Zygmund, A., *Trigonometrical Series*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1968.

۱۲

حساب دیفرانسیل چند متغیره

۱.۱۲ مقدمه

در فصل ۵، باختصار، دربارهٔ مشتقهای جزئی تابعهای از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^1$ بحث شد. همچنین مشتقهای توابع برداری از $\mathbf{R}^1$ به $\mathbf{R}^n$ نیز معرفی گردید. در این فصل نظریهٔ مشتق را برای تابعهای از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ وسعت می‌دهیم.

همان‌طور که در بخش ۱۴.۵ متذکر شدیم، مشتق جزئی تعمیمی تا حدی نارضایتبخش از مشتق معمولی است، زیرا که از وجود همهٔ مشتقهای جزئی، یعنی D_1f، . . .، D_nf، در یک نقطه لزوماً نمی‌توان پیوستگی f را در آن نقطه نتیجه گرفت. مشکل مشقتهای جزئی در این است که، برای بدست آوردن هریک از آنها، تابع چند متغیره در یک لحظه به‌عنوان تابعی از یک متغیر درنظر گرفته می‌شود. مشتق جزئی میزان تغییر یک تابع را درجهت هریک ازمحورهای مختصات توصیف می‌کند. در تعمیم مختصری از این، به‌نام مشتق جهتی، میزان تغییر یک تابع درجهت دلخواه مطالعه می‌شود. این تعمیم هم در مورد تابعهای حقیقی وهم در مورد تابعهای برداری وجود دارد.

۲.۱۲ مشتق جهتی

فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}^n$، و $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ تابعی باشد که بر S تعریف شده است و مقادیر آن در $\mathbf{R}^m$ می‌باشند. از نقطه‌ای مانند $\mathbf{c}$ در S در امتداد پاره خطی به‌نقطهٔ $\mathbf{c}+\mathbf{u}$ نزدیک $\mathbf{c}$، که درآن $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$، حرکت می‌کنیم. می‌خواهیم

در این حرکت چگونگی تغییرات $\mathbf{f}$ را مطالعه کنیم. هر نقطه بر این پاره خط را می‌توان با $\mathbf{c} + h\mathbf{u}$ نشان داد، که در آن h حقیقی است. بردار $\mathbf{u}$ جهت پاره خط را نشان می‌دهد. فرض کنیم که $\mathbf{c}$ یک نقطهٔ درونی S باشد. در این صورت، یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{c}; r)$ جزء S وجود دارد، و اگر h به قدر کافی کوچک باشد، پاره خطی که $\mathbf{c}$ را به $\mathbf{c} + h\mathbf{u}$ وصل می‌کند در $B(\mathbf{c}; r)$، و در نتیجه در S قرار خواهد داشت.

تعریف ۱۰۱۲ مشتق جهتی $\mathbf{f}$ در نقطهٔ $\mathbf{c}$ در جهت $\mathbf{u}$ را با نماد $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ نشان می‌دهیم و با معادلهٔ

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{c} + h\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})}{h} \tag{۱}$$

تعریف می‌کنیم، در صورتی که حد طرف راست وجود داشته باشد.

تبصره. برخی از نویسندگان خواستار قید $\|\mathbf{u}\| = 1$ هستند، ولی ما در این جا این قید را نمی‌پذیریم.

چند مثال

۱. تعریف مذکور در (۱) به‌ازای $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ نیز با معنی است. در این حالت به‌ازای هر $\mathbf{c}$ در S، $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{0})$ وجود دارد و مساوی $\mathbf{0}$ است.

۲. هرگاه $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k$ بردار مختصات یکهٔ k ام باشد، آنگاه $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}_k)$ را یک مشتق جزئی نامیده به $D_k\mathbf{f}(\mathbf{c})$ نشان می‌دهیم. در حالتی که $\mathbf{f}$ حقیقی باشد، این تعریف با تعریف داده شده در فصل ۵ مطابقت دارد.

۳. هرگاه $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$، آنگاه $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ وقتی، و فقط وقتی، وجود دارد که به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, m$، $f'_k(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ وجودداشته باشد، که در آن صورت

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = (f'_1(\mathbf{c}; \mathbf{u}), \ldots, f'_m(\mathbf{c}; \mathbf{u})) .$$

در حالت خاص، وقتی که $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k$، خواهیم داشت

$$D_k\mathbf{f}(\mathbf{c}) = (D_k f_1(\mathbf{c}), \ldots, D_k f_m(\mathbf{c})) . \tag{۲}$$

۴. هرگاه $\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{c} + t\mathbf{u})$، آنگاه $\mathbf{F}'(0) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$. به‌طور کلیتر، $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{c} + t\mathbf{u}; \mathbf{u})$ در صورتی که یکی از دو مشتق مذکور در دو طرف این رابطه وجود داشته باشد.

۵. هرگاه $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^۲$، آنگاه

$$F(t) = f(\mathbf{c} + t\mathbf{u}) = (\mathbf{c} + t\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{c} + t\mathbf{u})$$
$$= \|\mathbf{c}\|^۲ + ۲t\mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + t^۲ \|\mathbf{u}\|^۲,$$

پس $F'(t) = ۲\mathbf{c}\cdot\mathbf{u} + ۲t\|\mathbf{u}\|^۲$ ؛ از این‌روی $F'(۰) = f'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = ۲\mathbf{c}\cdot\mathbf{u}$.

۶. تابعهای خطی. تابع $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ را خطی نامند درصورتی که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در $\mathbf{R}^n$ و هر جفت اسکالر مانند a و b، رابطهٔ

$$\mathbf{f}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{f}(\mathbf{x}) + b\mathbf{f}(\mathbf{y})$$

برقرار باشد. اگر $\mathbf{f}$ خطی باشد، خارج قسمت مذکور در طرف راست (۱) به $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ خلاصه می‌شود، در نتیجه به‌ازای هر $\mathbf{c}$ و هر $\mathbf{u}$، $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$.

۳.۱۲ مشتقهای جهتی و پیوستگی

هرگاه به‌ازای هر $\mathbf{u}$، $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ وجود داشته باشد، آنگاه بالاخص همهٔ مشتقهای جزئی، یعنی $D_۱ \mathbf{f}(\mathbf{c})$، . . . ، $D_n \mathbf{f}(\mathbf{c})$، نیز وجود دارند. اما، عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً، تابع حقیقی $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۱$ را، که به‌صورت زیر تعریف شود

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{اگر } x = ۰ \text{ یا } y = ۰، \\ ۱ & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

درنظر می‌گیریم. در این تابع $D_۱ f(۰, ۰) = D_۲ f(۰, ۰) = ۱$. با وجود این، هرگاه بردار دلخواه $\mathbf{u} = (a_۱, a_۲)$ را، که در آن $a_۱ \neq ۰$ و $a_۲ \neq ۰$، اختیار کنیم، آنگاه

$$\frac{f(۰ + h\mathbf{u}) - f(۰)}{h} = \frac{f(h\mathbf{u})}{h} = \frac{۱}{h},$$

و این وقتی که $h \to ۰$، به حدی نمی‌گراید.

واقعیتی تا حدی شگفت انگیز این است که تابعهائی مانند $\mathbf{f}$ وجود دارند که در آنها به ازای هر $\mathbf{u}$، مشتق جهتی $\mathbf{f}'(\mathbf{c} ; \mathbf{u})$ وجود دارد و متناهی است ولی $\mathbf{f}$ در نقطهٔ $\mathbf{c}$ پیوسته نیست. مثلاً، فرض کنیم

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^۲/(x^۲ + y^۴) & \text{اگر } x \neq ۰، \\ ۰ & \text{اگر } x = ۰. \end{cases}$$

همچنین $\mathbf{u} = (a_۱, a_۲)$ برداری دلخواه در $\mathbf{R}^۲$ باشد. در این صورت،

$$\frac{f(0 + h\mathbf{u}) - f(0)}{h} = \frac{f(ha_1, ha_2)}{h} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + h^2 a_2^4},$$

و در نتیجه

$$.f'(0;\mathbf{u}) = \begin{cases} a_2^2/a_1 & \text{اگر } a_1 \neq 0 \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } a_1 = 0 \text{ ،} \end{cases}$$

بنابراین، به‌ازای هر $\mathbf{u}$، $f'(0; \mathbf{u})$ وجود دارد. از سوی دیگر، تابع f در هر نقطه از سهمی $x = y^2$ (جز درمبدأ) مقدارش ۱/۲ است. چون $f(0, 0) = 0$، پس f در $(0, 0)$ پیوسته نیست.

پس ملاحظه می‌شود که حتی از وجود همهٔ مشتقهای جهتی یک تابع در یک نقطه نمی‌توان پیوستگی آن در این نقطه را نتیجه گرفت. بدین دلیل، مشتقهای جهتی نیز مانند مشتقهای جزئی بنوعی توسیع رضایت‌بخشی از مفهوم یک بعدی مشتق نیستند. حال تعمیم مناسبتری از مفهوم مشتق را درنظر می‌گیریم که پیوستگی تابع را نتیجه بخشد، و درعین حال، قضیه‌های عمدهٔ نظریهٔ مشتقهای یک بعدی را به تابعهای چند متغیره وسعت دهد. این تعمیم را مشتق کل می‌نامند.

۴.۱۲ مشتق کل

در حالت یک بعدی، تابعی مانند f را که در نقطهٔ c مشتق داشته باشد می‌توان در حوالی c به یک چند جمله‌ای خطی نزدیک کرد. در واقع، اگر $f'(c)$ وجودداشته باشد، فرض می‌کنیم

$$E_c(h) = \frac{f(c + h) - f(c)}{h} - f'(c) \quad \text{،}h \neq 0 \text{ اگر} \tag{۳}$$

و $E_c(0) = 0$. در این صورت داریم

$$f(c + h) = f(c) + f'(c)h + h\,E_c(h), \tag{۴}$$

که این معادله به‌ازای $h = 0$ نیز برقرار است. این معادله را دستور تیلور مرتبهٔ اول برای تقریب $f(c + h) - f(c)$ به $f'(c)h$ می‌نامند. خطای مرتکب شده در این کار مساوی $hE_c(h)$ خواهد بود. از (۳) نتیجه می‌شود که وقتی که $h \to 0$ ، $E_c(h) \to 0$. گوئیم وقتی‌که $h \to 0$، خطای $hE_c(h)$ از مرتبهٔ کوچکتر از h است.

حال به دو خاصیت دستور (۴) توجه می‌کنیم. اولین خاصیت این است که

$f'(c)h$ تابعی است خطی از h. یعنی، هر گاه بنویسیم $T_c(h) = f'(c)h$، آنگاه

$$T_c(ah_1 + bh_2) = aT_c(h_1) + bT_c(h_2).$$

خاصیت دوم این است که وقتی که $h \to 0$، جملهٔ خطا، یعنی $hE_c(h)$، از مرتبهٔ کوچکتر از h است. حال مشتق کل تابع $\mathbf{f}$ از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ را بقسمی تعریف می‌کنیم که این دو خاصیت را حفظ نماید.

فرض کنیم $\mathbf{f} : S \to \mathbf{R}^m$ تابعی باشد که برمجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد و مقادیر آن در $\mathbf{R}^m$ باشند. همچنین $\mathbf{c}$ یک نقطهٔ درونی S، و $B(\mathbf{c}; r)$ گوییn بعدی در داخل S باشد. بعلاوه، $\mathbf{v}$ نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ باشد بقسمی که $\|\mathbf{v}\| < r$، پس

$$\mathbf{c} + \mathbf{v} \in B(\mathbf{c}; r).$$

تعریف ۲.۱۲ تابع $\mathbf{f}$ را در نقطهٔ $\mathbf{c}$ مشتقپذیر نامیم در صورتی که تابعی خطی مانند $\mathbf{T_c} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ وجود داشته باشد بقسمی که

$$\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{T_c}(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|\, \mathbf{E_c}(\mathbf{v}), \tag{۵}$$

که در آن وقتی که $\mathbf{v} \to 0$، $\mathbf{E_c}(\mathbf{v}) \to 0$.

تبصره. معادلهٔ (۵) را دستور تیلور مرتبهٔ اول می‌نامند. این معادله باید به‌ازای هر $\mathbf{v}$ در $\mathbf{R}^n$ که $\|\mathbf{v}\| < r$ برقرار باشد. تابع خطی $\mathbf{T_c}$ را مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$ می‌نامند. معادلهٔ (۵) را به شکل زیر نیز می‌نویسیم:

وقتی که $\mathbf{v} \to 0$، $\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{T_c}(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|)$.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که مشتق کل، در صورت وجود، منحصر بفرد است. همچنین این قضیه مشتق‌کل را به مشتقهای جهتی مربوط می‌کند.

قضیهٔ ۳.۱۲ فرض کنیم $\mathbf{f}$ در نقطهٔ $\mathbf{c}$ مشتقپذیر، و مشتق کل آن $\mathbf{T_c}$ باشد. در این صورت، به‌ازای هر $\mathbf{u}$ در $\mathbf{R}^n$، مشتق جهتی $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ وجود دارد و

$$\mathbf{T_c}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}). \tag{۶}$$

برهان. هرگاه $\mathbf{v} = 0$، آنگاه $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; 0) = 0$ و $\mathbf{T_c}(0) = 0$. بنابراین می‌توان فرض کرد که $\mathbf{v} \neq 0$. اگر در دستور تیلور، یعنی دستور (۵)، فرض کنیم که $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$، که در آن $h \neq 0$، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{c} + h\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{c}) &= \mathbf{T_c}(h\mathbf{u}) + \|h\mathbf{u}\|\, \mathbf{E_c}(\mathbf{v}) \\ &= h\mathbf{T_c}(\mathbf{u}) + |h|\, \|\mathbf{u}\|\, \mathbf{E_c}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

حال با تقسیم دوطرف رابطهٔ بالا به h وفرض این‌که $h \to 0$، رابطهٔ (۶) بدست‌می‌آید.

قضیهٔ ۴.۱۲ هرگاه $\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$ مشتقپذیر باشد، آنگاه $\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$ پیوسته است.

برهان. در دستور تیلور (۵) فرض می‌کنیم که $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$. جملهٔ خطا، یعنی $\|\mathbf{v}\|\,\mathbf{E}_c(\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$؛ جملهٔ خطی $\mathbf{T}_c(\mathbf{v})$ نیز به $\mathbf{0}$ می‌گراید، زیرا که هرگاه $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + \dots + v_n\mathbf{u}_n$، که در آن $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ بردارهای مختصات یکه باشند، آنگاه بنا برخاصیت خطی بودن،

$$\mathbf{T}_c(\mathbf{u}) = v_1\,\mathbf{T}_c(\mathbf{u}_1) + \dots + v_n\,\mathbf{T}_c(\mathbf{u}_n),$$

و در این تساوی وقتی‌که $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$، هریک از جمله‌های طرف راست به $\mathbf{0}$ می‌گراید.

تبصره. مشتق کل، یعنی $\mathbf{T}_c$، را با $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$ نیز نشان می‌دهند تا به نماد بکار برده شده در نظریهٔ یک بعدی شبیه باشد. با این نماد، دستور تیلور (۵) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{E}_c(\mathbf{v}), \tag{۷}$$

که در آن وقتی که $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$، $\mathbf{E}_c(\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$. در هرحال، باید توجه داشت که $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$ یک تابع خطی است، نه یک عدد. این تابع همه جا بر $\mathbf{R}^n$ تعریف شده است؛ و بردار $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})$ عبارت است از مقدار $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$ در $\mathbf{v}$.

مثال. هرگاه $\mathbf{f}$ خود یک تابع خطی باشد، آنگاه $\mathbf{f}(\mathbf{c}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})$، پس به‌ازای هر $\mathbf{c}$، $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$ وجود دارد و مساوی $\mathbf{f}$ است. با بیان دیگر می‌توان گفت که مشتق کل یک تابع خطی مساوی خود آن تابع است.

۵.۱۲ بیان مشتق کل برحسب مشتقهای جزئی

قضیهٔ زیر نشان می‌دهدکه بردار $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})$ ترکیبی است خطی از مشتقهای جزئی $\mathbf{f}$.

قضیهٔ ۵.۱۲ فرض کنیم $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ در یك نقطهٔ درونی S ($S \subseteq \mathbf{R}^n$) مانند $\mathbf{c}$ مشتقپذیر باشد. هرگاه $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + \dots + v_n\mathbf{u}_n$، که در آن $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ بردارهای مختصات یکه در $\mathbf{R}^n$ باشند، آنگاه

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} v_k D_k \mathbf{f}(\mathbf{c}).$$

خصوصاً، اگر f حقیقی ($m = 1$) باشد، داریم

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}, \tag{۸}$$

طرف راست این رابطه حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{v}$ است در بردار

$$\nabla f(\mathbf{c}) = (D_1 f(\mathbf{c}), \ldots, D_n f(\mathbf{c})).$$

برهان. با استفاده از خاصیت خطی $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$، می‌نویسیم

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}'(\mathbf{c})(v_k \mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{u}_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k D_k \mathbf{f}(\mathbf{c}).$$

تبصره. بردار $\nabla f(\mathbf{c})$ در (۸) را بردار گرادیان f در $\mathbf{c}$ می‌نامند. این بردار درهر نقطه که مشتقهای جزئی f، یعنی $D_1 f$، . . .، $D_n f$، وجود داشته باشند تعریف شده است. حال دستور تیلور برای تابع حقیقی f به شکل زیر درمی‌آید:

وقتی که $\mathbf{v} \to 0$ ، $f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{c}) + \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$.

۶.۱۲ کاربردی در تابعهای مختلط

فرض کنیم $f = u + iv$ تابعی باشد مختلط از یک متغیر مختلط. قضیهٔ ۲۲.۵ نشان می‌دهد که شرطی لازم برای آن که f در نقطه‌ای مانند c مشتق داشته باشد آن است که چهار مشتق جزئی $D_1 u$، $D_2 u$، $D_1 v$، $D_2 v$ در c وجود داشته باشند و در معادله‌های کشی ــ ریمان صدق کنند:

$$D_1 u(c) = D_2 v(c), \quad D_1 v(c) = - D_2 u(c).$$

همچنین، با مثالی نشان دادیم که برقراری این معادله‌ها بتنهائی برای وجود داشتن $f'(c)$ کافی نیست. قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که معادله‌های کشی ــ ریمان و مشتقپذیری u و v وجود $f'(c)$ را ایجاب می‌کنند.

قضیهٔ ۶.۱۳ فرض کنیم u و v دوتابع حقیقی باشندکه بریك زیرمجموعهٔ صفحهٔ مختلط مانند S تعریف شده باشند، و نیز فرض کنیم که u و v در یك نقطهٔ درونی S مانند c مشتقپذیر باشند و مشتقهای جزئی آنها در معادله‌های کشی ــ ریمان در نقطهٔ c صدق کنند، در این صورت، تابع $f = u + iv$ در c مشتق دارد، بعلاوه،

$$f'(c) = D_1 u(c) + iD_1 v(c).$$

برهان. به‌ازای هر z در S، داریم

$$f(z) - f(c) = u(z) - u(c) + i\{v(z) - v(c)\}.$$

چون هر یک از u و v در c مشتقپذیر است، وقتی که z را به قدر کافی نزدیک c

فرض کنیم، خواهیم داشت

$$u(z) - u(c) = \nabla u(c) \cdot (z - c) + o(\|z - c\|)$$

و

$$v(z) - v(c) = \nabla v(c) \cdot (z - c) + o(\|z - c\|) \cdot$$

دراین جا ما نماد بردار را بکار می‌بریم و عددهای مختلط را به‌عنوان بردارها در $\mathbf{R}^2$ درنظر می‌گیریم. در این صورت،

$$f(z) - f(c) = \{\nabla u(c) + i \nabla v(c)\} \cdot (z - c) + o(\|z - c\|).$$

اگر بنویسیم $z = x + iy$ و $c = a + ib$، بنابر معادله‌های کشی ـ ریمان، به این روابط می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
&\{\nabla u(c) + i \nabla v(c)\} \cdot (z - c) \\
&\quad = D_1 u(c)(x - a) + D_2 u(c)(y - b) \\
&\qquad + i\{D_1 v(c)(x - a) + D_2 v(c)(y - b)\} \\
&\quad = D_1 u(c)\{(x - a) + i(y - b)\} \\
&\qquad + iD_1 v(c)\{(x - a) + i(y - b)\}.
\end{aligned}$$

از این روی،

$$f(z) - f(c) = \{D_1 u(c) + iD_1 v(c)\}(z - c) + o(\|z - c\|).$$

با تقسیم رابطهٔ بالا بر $z - c$ و فرض این که $z \to c$، ملاحظه می‌شود که $f'(c)$ وجود دارد و مساوی است با

$$D_1 u(c) + i D_1 v(c).$$

۷.۱۲ ماتریس یك تابع خطی

در این بخش اندکی راه را کج می‌کنیم تا بعضی از واقعیات مقدماتی جبر خطی را که در برخی محاسبات با مشتقها مفیدند از نظر بگذرانیم.

فرض کنیم که $\mathbf{T} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ یک تابع خطی باشد. (در کاربردهای ما، $\mathbf{T}$ مشتق کل تابعی چون $\mathbf{f}$ خواهد بود.) نشان می‌دهیم که $\mathbf{T}$ یک ماتریس $m \times n$ از اسکالرها را مشخص می‌کند (ر. ک. (۹) در زیر) و این ماتریس به‌صورت زیر بدست می‌آید:

فرض می‌کنیم که $\mathbf{u}_1$، . . .، $\mathbf{u}_n$ بردارهای مختصات یکه در $\mathbf{R}^n$ باشند. اگر $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$، داریم $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_n \mathbf{u}_n$، پس، بنا برخاصیت خطی،

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{T}(\mathbf{u}_k).$$

بنابراین، $\mathbf{T}$ کاملاً با عملش بر بردارهای مختصات $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ مشخص می‌شود.

اینک فرض می‌کنیم که $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ بردارهای مختصات یکه در $\mathbf{R}^m$ باشند. چون $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k) \in \mathbf{R}^m$، می‌توان $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k)$ را به صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ نوشت، یعنی

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik}\mathbf{e}_i \cdot$$

اسکالرهای $t_{1k}, \ldots, t_{mk}$ مختصات $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k)$ می‌باشند. این اسکالرها را به‌طور عمودی به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{mk} \end{bmatrix}.$$

این آرایش را یک بردار ستونی می‌نامند. بردار ستونی هریک از

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_n)$$

را تشکیل می‌دهیم و آنها را کنار یکدیگر می گذاریم و آرایش مستطیلی‌شکل زیر را می‌سازیم:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}. \tag{۹}$$

این آرایش را ماتریس[1] $\mathbf{T}$ می‌نامیم و با نماد $m(\mathbf{T})$ نشان می‌دهیم. این ماتریس از m سطر و n ستون تشکیل شده است. عددهای ستون kام، ازبالا به پائین، مؤلفه‌های $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k)$ می‌باشند. برای نشان دادن ماتریس (۹) نماد

$$m(\mathbf{T}) = (t_{ik}) \quad \text{یا} \quad m(\mathbf{T}) = [t_{ik}]_{i,k=1}^{m,n}$$

را نیز بکار خواهیم برد.

حال فرض کنیم که $\mathbf{T} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ و $\mathbf{S} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ دو تابع خطی باشند

---

۱. به بیان دقیقتر، ماتریس $\mathbf{T}$ نسبت به پایه‌های مفروض $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ از $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ از $\mathbf{R}^m$.

بقسمی که قلمرو S حاوی برد T باشد. در این صورت می‌توان ترکیب $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ را، که با رابطهٔ

$$(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\mathbf{x}) = \mathbf{S}[\mathbf{T}(\mathbf{x})] \quad \text{به‌ازای هر } \mathbf{x} \text{ در } \mathbf{R}^n،$$

تعریف می‌شود، ساخت. ترکیب $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ نیز خطی است و $\mathbf{R}^n$ را در $\mathbf{R}^p$ می‌نگارد.

حال می‌خواهیم ماتریس $m(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})$ را محاسبه کنیم. بردارهای مختصات یکه در $\mathbf{R}^n$، $\mathbf{R}^m$، و $\mathbf{R}^p$ را، بترتیب، با

$$\mathbf{u}_1، \ldots، \mathbf{u}_n، \quad \mathbf{e}_1، \ldots، \mathbf{e}_m، \text{ و } \mathbf{w}_1، \ldots، \mathbf{w}_p$$

نشان می‌دهیم. فرض کنیم S و T، بترتیب، دارای ماتریسهای (s_{ij}) و (t_{ij}) باشند. یعنی

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^{p} s_{ik} \mathbf{w}_i \quad \text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, m$$

و

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_j) = \sum_{k=1}^{m} t_{kj} \mathbf{e}_k \quad \text{به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n.$$

در این صورت

$$\begin{aligned}(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\mathbf{u}_j) &= \mathbf{S}[\mathbf{T}(\mathbf{u}_j)] = \sum_{k=1}^{m} t_{kj} \mathbf{S}(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{m} t_{kj} \sum_{i=1}^{p} s_{ik} \mathbf{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} s_{ik} t_{kj} \right) \mathbf{w}_i,\end{aligned}$$

پس

$$m(\mathbf{S} \circ \mathbf{T}) = \left[\sum_{k=1}^{m} s_{ik} t_{kj} \right]_{i,j=1}^{p,n}.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، $m(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})$ یک ماتریس $p \times n$ است که عضو سطر iام و ستون jام آن مساوی

$$\sum_{k=1}^{m} s_{ik} t_{kj}$$

است، و این مقدار در واقع حاصل ضرب نقطه‌ای سطر iام ماتریس $m(\mathbf{S})$ در ستون jام ماتریس $m(\mathbf{T})$ می‌باشد. این ماتریس را حاصلضرب $m(\mathbf{S})\, m(\mathbf{T})$ نیز می‌نامند. بنابراین، $m(\mathbf{S} \circ \mathbf{T}) = m(\mathbf{S})\, m(\mathbf{T})$.

۸.۱۲ ماتریس ژاکوبی[1]

اینک نشان می‌دهیم که چگونه ماتریسها با مشتقهای کل ارتباط دارند.

فرض کنیم مقادیر تابع $\mathbf{f}$ در $\mathbf{R}^m$ باشند، و $\mathbf{f}$ در نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ مانند $\mathbf{c}$ مشتقپذیر باشد. همچنین فرض می‌کنیم که $\mathbf{T} = \mathbf{f}'(\mathbf{c})$ مشتق کل $\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$ باشد. برای پیدا کردن ماتریس $\mathbf{T}$ عمل آن را بر بردارهای مختصات یکهٔ $\mathbf{u}_1$، . . .، $\mathbf{u}_n$ درنظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۳.۱۲، داریم

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}_k) = D_k \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot$$

برای آن که $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k)$ را به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای مختصات یکهٔ $\mathbf{e}_1$، . . .، $\mathbf{e}_m$ از $\mathbf{R}^m$ بیان کنیم، می‌نویسیم $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$، پس $D_k \mathbf{f} = (D_k f_1, \dots, D_k f_m)$، و در نتیجه

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_k) = D_k \mathbf{f}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{m} D_k f_i(\mathbf{c})\, \mathbf{e}_i.$$

بنابراین، ماتریس $\mathbf{T}$ عبارت است از $m(\mathbf{T}) = (D_k f_i(\mathbf{c}))$. این ماتریس را ماتریس ژاکوبی $\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$ می‌نامند و با $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{c})$ نشان می‌دهند. یعنی،

$$\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{c}) & D_2 f_1(\mathbf{c}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{c}) \\ D_1 f_2(\mathbf{c}) & D_2 f_2(\mathbf{c}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{c}) & D_2 f_m(\mathbf{c}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{c}) \end{bmatrix}. \tag{۱۰}$$

عضو سطر iم و ستون kام عبارت است از $D_k f_i(\mathbf{c})$. بنابراین، برای بدست آوردن عضوهای ستون k ام، باید از مؤلفه‌های $\mathbf{f}$ برحسب بردار مختصات k ام مشتق گرفت. ماتریس ژاکوبی $\mathbf{Df}(\mathbf{c})$ در هر نقطهٔ $\mathbf{c}$ در $\mathbf{R}^n$ که در آن همهٔ مشتقهای جزئی $\mathbf{f}$، یعنی $D_k f_i(\mathbf{c})$، وجود داشته باشند تعریف شده است.

سطر k ام ماتریس ژاکوبی (۱۰) برداری در $\mathbf{R}^n$ است که بردار گرادیان f_k نام دارد، و به $\nabla f_k(\mathbf{c})$ نشان داده می‌شود. یعنی،

$$\nabla f_k(\mathbf{c}) = (D_1 f_k(\mathbf{c}), \dots, D_n f_k(\mathbf{c})).$$

در حالت خاص که f حقیقی است ($m = 1$)، ماتریس ژاکوبی فقط یک سطر دارد. در این حالت $\mathbf{D}f(\mathbf{c}) = \nabla f(\mathbf{c})$، و معادلهٔ (۸) قضیهٔ ۵.۱۲ نشان می‌دهد که مشتق جهتی $f'(\mathbf{c}; \mathbf{v})$ مساوی است با حاصلضرب نقطه‌ای بردار گرادیان $\nabla f(\mathbf{c})$ در بردار $\mathbf{v}$.

---

1. Jacobian

برای تابع برداری $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$، داریم

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c};\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(\mathbf{c};\mathbf{v})\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{m} \{\nabla f_k(\mathbf{c})\cdot\mathbf{v}\}\mathbf{e}_k, \tag{11}$$

پس بردار $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})$ دارای مؤلفه‌های زیرین است:

$$(\nabla f_1(\mathbf{c})\cdot\mathbf{v}, \ldots, \nabla f_m(\mathbf{c})\cdot\mathbf{v}).$$

بنابراین، مؤلفه‌های $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})$ به‌وسیلهٔ حاصل ضرب نقطه‌ای سطرهای متوالی ماتریس ژاکوبی در بردار $\mathbf{v}$ بدست می‌آیند. هرگاه $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})$ را به‌عنوان یک ماتریس $m \times 1$، یا به‌عنوان یک بردار ستونی، در نظر بگیریم، آنگاه $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})$ مساوی حاصل‌ضرب ماتریسی $\mathbf{Df}(\mathbf{c})\,\mathbf{v}$ است، که در آن $\mathbf{Df}(\mathbf{c})$ ماتریس ژاکوبی $m \times n$ است و $\mathbf{v}$ به‌عنوان یک ماتریس $n \times 1$، یا یک بردار ستونی، درنظر گرفته شده است.

تبصره. ازمعادلهٔ (۱۱)، نامساوی مثلثی، و نامساویکشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود که

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \{\nabla f_k(\mathbf{c})\cdot\mathbf{v}\}\mathbf{e}_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |\nabla f_k(\mathbf{c})\cdot\mathbf{v}|$$
$$\leqslant \|\mathbf{v}\| \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{c})\|.$$

بنابراین،

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})\| \leqslant M\|\mathbf{v}\|, \tag{12}$$

که در آن $M = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{c})\|$. این نامساوی در اثبات قاعدهٔ زنجیره‌ای بکار خواهد رفت. همچنین این نامساوی نشان می‌دهد که

وقتی که $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$، $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$.

۹.۱۲ قاعدهٔ زنجیره‌ای

فرض کنیم $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ دو تابع باشند بقسمی که ترکیب $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ در یکی از همسایگیهای نقطهٔ $\mathbf{a}$ تعریف شده باشد. قاعدهٔ زنجیره‌ای نحوهٔ محاسبهٔ مشتق کل $\mathbf{h}$ را برحسب مشتقهای کل $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ بدست می‌دهد.

قضیهٔ ۷.۱۲ فرض کنیم $\mathbf{g}$ در $\mathbf{a}$ مشتقپذیر، و مشتق کل آن $\mathbf{g}'(\mathbf{a})$ باشد، و نیز فرض می‌کنیم که $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$، $\mathbf{f}$ در $\mathbf{b}$ مشتقپذیر، و مشتق کل آن $\mathbf{f}'(\mathbf{b})$ باشد، در این صورت، تابع مرکب $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ در $\mathbf{a}$ مشتقپذیر است، و مشتق کل $\mathbf{h}$، یعنی $\mathbf{h}'(\mathbf{a})$،

از این رابطه بدست می‌آید:

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a),$$

یعنی $h'(a)$ مساوی ترکیب تابعهای خطی $f'(b)$ و $g'(a)$ است.

برهان. تفاضل $h(a+y) - h(a)$ را به‌ازای $\|y\|$ های کوچک درنظر می‌گیریم، و نشان می‌دهیم که دستور تیلور مرتبهٔ اول برای h برقرار است. داریم

$$(۱۳) \qquad h(a+y) - h(a) = f[g(a+y)] - f[g(a)] = f(b+v) - f(b),$$

که در آن $b = g(a)$ و $v = g(a+y) - b$. دستور تیلور برای $g(a+y)$ ایجاب می‌کند که

$$(۱۴) \qquad v = g'(a)(y) + \|y\| E_a(y)$$ ، که درآن وقتی‌که $y \to 0$، $E_a(y) \to 0$.

دستور تیلور برای $f(b+v)$ نتیجه می‌دهد که

$$(۱۵) \qquad f(b+v) - f(b) = f'(b)(v) + \|v\| E_b(v),$$

که در آن وقتی که $v \to 0$، $E_b(v) \to 0$.

با استفاده از (۱۴) در (۱۵)، خواهیم داشت

$$(۱۶) \qquad f(b+v) - f(b) = f'(b)[g'(a)(y)] + f'(b)[\|y\| E_a(y)] + \|v\| E_b(v) = f'(b)[g'(a)(y)] + \|y\| E(y),$$

که در آن $E(0) = 0$ و

$$(۱۷) \qquad \text{اگر } y \neq 0 ،\quad E(y) = f'(b)[E_a(y)] + \frac{\|v\|}{\|y\|} E_b(v).$$

برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم که وقتی که $y \to 0$، $E(y) \to 0$.

وقتی که $y \to 0$، اولین جملهٔ طرف راست (۱۷) به 0 می‌گراید زیرا که $E_a(y) \to 0$. چون وقتی که $y \to 0$، $v \to 0$، پس در جملهٔ دوم طرف راست سازهٔ $E_b(v) \to 0$. حال نشان‌می‌دهیم‌که وقتی‌که $y \to 0$، خارج قسمت $\|v\|/\|y\|$ کراندار باقی می‌ماند. اگر از (۱۴) و (۱۲) برای تخمین صورت این کسر استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\|v\| \leqslant \|g'(a)(y)\| + \|y\| \|E_a(y)\| \leqslant \|y\| \{M + \|E_a(y)\|\},$$

که در آن $M = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla g_k(a)\|$. از این روی

$$\frac{||\mathbf{v}||}{||\mathbf{y}||} \leqslant M + ||\mathbf{E}_\mathbf{a}(\mathbf{y})||,$$

پس وقتی‌که $\mathbf{y} \to \mathbf{o}$، $||\mathbf{v}||/||\mathbf{y}||$ کراندار باقی می‌مانـد. با استفاده از (۱۳) و (۱۶)، دستور تیلور زیرین را بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}+\mathbf{y}) - \mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})[\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{y})] + ||\mathbf{y}||\,\mathbf{E}(\mathbf{y}),$$

که در آن وقتی $\mathbf{y} \to \mathbf{o}$، $\mathbf{E}(\mathbf{y}) \to \mathbf{o}$. این ثابت می‌کند که $\mathbf{h}$ در $\mathbf{a}$ مشتقپذیر است و مشتق کل آن در $\mathbf{a}$ مساوی ترکیب $\mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a})$ می‌باشد.

۱۰.۱۲ شکل ماتریسی قاعدهٔ زنجیره‌ای

اگر $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$، بنا به قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\mathbf{h}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a}). \tag{۱۸}$$

چون ماتریس ترکیب دو تابـع مساوی حاصلضرب ماتریسهای متناظـر آنها است، پس از (۱۸) رابطهٔ زیرین برای ماتریسهای ژاکوبی بدست می‌آید:

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{a}) = \mathbf{Df}(\mathbf{b})\,\mathbf{Dg}(\mathbf{a}). \tag{۱۹}$$

این را شکل ماتریسی قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌نامند. با نشان دادن هر ماتریس برحسب عضوهایش، رابطهٔ (۱۹) را نیز می‌توان به‌صورت معادله‌هائی اسکالر نوشت.

خصوصـاً، فـرض کنیم کـه $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p$، $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^n$، و $\mathbf{f}(\mathbf{b}) \in \mathbf{R}^m$. در این صورت $\mathbf{h}(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^m$، و می‌توان نوشت

$$\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n), \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m), \quad \mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m).$$

در این صورت $\mathbf{Dh}(\mathbf{a})$ یک ماتـریس $m \times p$ و $\mathbf{Df}(\mathbf{b})$ یک ماتـریس $m \times n$ و $\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$ یک ماتریس $n \times p$ هستند که با رابطه‌های زیر مشخص می‌شوند:

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{a}) = [D_j h_i(\mathbf{a})]_{i,j=1}^{m,p}, \qquad \mathbf{Df}(\mathbf{b}) = [D_k f_i(\mathbf{b})]_{i,k=1}^{m,n},$$
$$\mathbf{Dg}(\mathbf{a}) = [D_j g_k(\mathbf{a})]_{k,j=1}^{n,p}$$

معادلهٔ ماتریسی (۱۹) هم‌ارز mp معادلهٔ اسکالر زیر است:

$$D_j h_i(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f_i(\mathbf{b}) D_j g_k(\mathbf{a}), \tag{۲۰}$$

به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, p$.

این معادله‌ها مشتقهای جزئی مؤلفه‌های $\mathbf{h}$ را برحسب مشتقهای جزئی مؤلفه‌های $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ بیان می‌کنند.

معادله‌های مذکور در(۲۰) را می‌توان به‌شکلی درآورد که بشود ساده‌تر بخاطر سپرد. می‌نویسیم $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$. دراین صورت $\mathbf{y} = \mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{t})] = \mathbf{h}(\mathbf{t})$، و (۲۰) به صورت

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j} \tag{۲۱}$$

درمی‌آید، که در آن

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = D_j h_i ،\quad \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = D_k f_i ، \quad و\quad \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = D_j g_k .$$

چند مثال. فرض کنیم $m = 1$. دراین صورت f و $\mathbf{g} \circ f = h$ حقیقی هستند و در (۲۰)، p معادله وجود خواهد داشت، که هریک برای یکی از مشتقهای جزئی h می‌باشد:

$$D_j h(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{b}) D_j g_k(\mathbf{a}), \quad j = 1, 2, \cdots, p.$$

عضو طرف راست در بالا عبارت است از حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار $\nabla f(\mathbf{b})$ و $D_j\mathbf{g}(\mathbf{a})$. در این حالت، معادلهٔ (۲۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, p.$$

خصوصاً، اگر $p = 1$، فقط یک معادلهٔ

$$h'(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{b}) g_k'(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{Dg}(\mathbf{a})$$

را خواهیم داشت، که درآن ماتریس ژاکوبی $\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$ یک بردار ستونی خواهد بود.

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان برهان ساده‌ای برای قضیهٔ زیر یافت. این قضیه دربارهٔ مشتقگیری از یک انتگرال برحسب پرمائی است که هم در انتگرالده و هم در حدهای انتگرالگیری ظاهر می‌شود.

قضیهٔ ۸.۱۲ فرض کنیم f و $D_2 f$ بر مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشند. همچنین p و q، که به‌ازای هر y در $[c, d]$، $p(y) \in [a, b]$ و $q(y) \in [a, b]$، بر $[c, d]$ مشتقپذیر باشند. F را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر}\ y \in [c, d]،\quad F(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx .$$

در این صورت $F'(y)$ به‌ازای هر y در $]c, d[$ وجود دارد و از رابطهٔ زیرین بدست می‌آید:

$$F'(y)=\int_{p(y)}^{q(y)} D_۲ f(x, y)\, dx + f(q(y), y) q'(y) - f(p(y), y) p'(y).$$

برهان. به‌ازای $x_۱$ و $x_۲$ در $[a, b]$ و $x_۳ \in [c, d]$، قرار می‌دهیم $G(x_۱, x_۲, x_۳) = \int_{x_۱}^{x_۲} f(t, x_۳)\, dt$. در این صورت F تابع مرکبی است که با $F(y) = G(p(y), q(y), y)$ مشخص می‌شود. از قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌شود که

$$F'(y) = D_۱ G(p(y), q(y), y) p'(y) + D_۲ G(p(y), q(y), y) q'(y) + D_۳ G(p(y), q(y), y).$$

بنا بر قضیهٔ ۳۲۰۷، $D_۱ G(x_۱, x_۲, x_۳) = - f(x_۱, x_۳)$ و

$$D_۲ G(x_۱, x_۲, x_۳) = f(x_۲, x_۳).$$

همچنین، بنا بر قضیهٔ ۴۰۰۷،

$$D_۳ G(x_۱, x_۲, x_۳) = \int_{x_۱}^{x_۲} D_۲ f(t, x_۳)\, dt .$$

اگر این نتیجه‌ها را در دستور مذکور برای $F'(y)$ بکار بریم، قضیه بدست می‌آید.

۱۱۰۱۲ قضیهٔ مقدار میانگین برای تابعهای مشتقپذیر

قضیهٔ مقدار میانگین برای تابعهای از $\mathbf{R}^۱$ به $\mathbf{R}^۱$ بیان می‌کند که به‌ازای مقداری از z بین x و y،

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x). \qquad (۲۲)$$

این معادله، درحالت کلی، برای تابعهای برداری از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$، که درآن $m > ۱$، درست نیست. (ر. ک. تمرین ۱۹۰۱۲.) اما، نشان خواهیم داد که اگر z مناسب اختیار شود، با تشکیل حاصلضرب نقطه‌ای هر عضو (۲۲) با هر بردار در $\mathbf{R}^m$، می‌توان معادلهٔ صحیح را بدست‌آورد. این مطلب تعمیم مفیدی از قضیهٔ مقدار میانگین برای تابعهای برداری خواهد بود.

در بیان این قضیه، منظور ازنماد $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ یعنی پاره خطی که دو نقطهٔ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در $\mathbf{R}^n$ را به‌هم وصل می‌کند. یعنی،

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{t\mathbf{x} + (۱ - t)\mathbf{y} : ۰ \leqslant t \leqslant ۱\} .$$

قضیهٔ ۹.۱۲ (قضیهٔ مقدار میانگین). فرض کنیم S یك زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ باشد و $\mathbf{f} : S \to \mathbf{R}^m$ در هر نقطهٔ S مشتقپذیر باشد. همچنین $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو نقطه در S باشند بقسمی که $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq S$. در این صورت، بهازای هر بردار $\mathbf{a}$ در $\mathbf{R}^m$، نقطهای مانند $\mathbf{z}$ در $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ هست بقسمی که

$$(۲۳) \qquad \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{z})\,(\mathbf{y} - \mathbf{x})\}\,.$$

برهان. قرار میدهیم $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$. چون S باز است و $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq S$، پس δی مثبتی هست بقسمی که بهازای هر عدد حقیقی t در بازهٔ $]-\delta, ۱ + \delta[$، $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in S$. فرض کنیم $\mathbf{a}$ بردار ثابتی در $\mathbf{R}^m$ باشد و فرض کنیم F آن تابع حقیقی باشد که بر $]-\delta, ۱ + \delta[$ با معادلهٔ

$$F(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{u})$$

تعریف میشود. در این صورت، F بر $]-\delta, ۱ + \delta[$ مشتقپذیر است و مشتق آن از رابطهٔ زیرین بدست میآید:

$$F'(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{u}; \mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{u})\,(\mathbf{u})\}\,.$$

بنا بر قضیهٔ معمولی مقدار میانگین،

$F(۱) - F(۰) = F'(\theta)$، که در آن $۰ < \theta < ۱$.

حال میتوان نوشت

$$F'(\theta) = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{x} + \theta\mathbf{u})\,(\mathbf{u})\} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{z})\,(\mathbf{y} - \mathbf{x})\},$$

که در آن $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \theta\,\mathbf{u} \in L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. اما

$$F(۱) - F(۰) = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\},$$

پس رابطهٔ (۲۳) برقرار است. البته، نقطهٔ $\mathbf{z}$ به F، و در نتیجه به $\mathbf{a}$ بستگی دارد.

تبصره. هرگاه S کوژ باشد، آنگاه بهازای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در S، $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq S$، پس رابطهٔ (۲۳) بهازای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در S برقرار است.

چند مثال

۱. اگر f حقیقی باشد ($m = ۱$)، در رابطهٔ (۲۳) میتوان a را مساوی ۱ اختیار کرد، خواهیم داشت

$$(۲۴) \quad f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{z})\,(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

۲. اگر $\mathbf{f}$ تابعی برداری، و $\mathbf{a}$ یک بردار یکه در $\mathbf{R}^m$ باشد، چون $\|\mathbf{a}\| = ۱$، از معادلهٔ (۲۳) و نامساوی کشی ـ شوارتز خواهیم داشت

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{f}'(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\|.$$

با استفاده از (۱۲) نامساوی زیر بدست می‌آید:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leqslant M\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

که درآن $M = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{z})\|$. توجه کنید که M به $\mathbf{z}$، و درنتیجه به $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بستگی دارد.

۳. هر گاه S کوژ باشد و همهٔ مشتقهای جزئی f، یعنی $D_j f_k$، بر S کراندار باشند، آنگاه عددی پایا مانند $A > ۰$ هست بقسمی که

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leqslant A\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت‌که، $\mathbf{f}$ در یک شرط لیپ‌شیتس بر S صدق می‌کند.

قضیهٔ مقدار میانگین برهان ساده‌ای از قضیهٔ زیرین را بدست می‌دهد، که مربوط به تابعهائی است که مشتق کل آنها صفراست.

قضیهٔ ۱۰.۱۲ فرض کنیم S یك زیر مجموعهٔ همبند باز $\mathbf{R}^n$، و $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ در هر نقطهٔ S مشتقپذیر باشد. هر گاه به‌ازای هر $\mathbf{c}$ در S، $\mathbf{f}'(\mathbf{c}) = ۰$، آنگاه $\mathbf{f}$ بر S پایا است.

برهان. چون S باز و همبند است، پس چند ضلعی‌وار همبند خواهد بود. (ر. ک. بخش ۱۸.۴.) بنابراین، هرجفت از نقطه‌های $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در S را می‌توان با یک کمان چند ضلعی در S به هم وصل کرد. رأسهای این کمان را با $\mathbf{p}_1$، . . .، $\mathbf{p}_r$ نشان می‌دهیم، که درآن $\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}$ و $\mathbf{p}_r = \mathbf{y}$. چون هر پاره خط $L(\mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{p}_i) \subseteq S$، بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین، به‌ازای هر بردار $\mathbf{a}$،

$$\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{p}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}_i)\} = ۰.$$

اگر همهٔ این معادله‌ها را که به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, r - ۱$ حاصل می‌شوند با هم جمع کنیم، به‌ازای هر $\mathbf{a}$ خواهیم داشت

$$\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\} = ۰.$$

با فرض $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$، نتیجه می‌شود که $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$، پس $\mathbf{f}$ بر S پایا است.

۱۲.۱۲ شرطی کافی برای مشتقپذیری

تا بحال از فرض این که تابعی مشتقپذیر است نتایجی می‌گرفتیم. همچنین دیده‌ایم که نه وجود همهٔ مشتقهای جزئی و نه وجود همهٔ مشتقهای جهتی، هیچ یک برای مشتقپذیری یک تابع کافی نیست (زیرا از هیچ یک نمی‌توان پیوستگی تابع را نتیجه گرفت). قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که پیوستگی همهٔ مشتقهای جزئی تابعی منهای یکی، مشتقپذیری آن تابع را نتیجه می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱.۱۲ فرض می‌کنیم یکی ازمشتقهای جزئی $D_1\mathbf{f}$ ، . . . ، $D_n\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$ وجود داشته باشد، و $n - 1$ مشتق جزئی باقیمانده در یك گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{c})$ وجود داشته باشند و در $\mathbf{c}$ پیوسته باشند. در این صورت $\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$ مشتقپذیر است.

برهان. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که تابع برداری $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ وقتی، و فقط وقتی، در $\mathbf{c}$ مشتقپذیر است که هر مؤلفهٔ آن مانند f_k در $\mathbf{c}$ مشتقپذیر باشد. (اثبات این مطلب آسان است.) بنابراین، کافی است قضیه را برای وقتی که $\mathbf{f}$ تابعی حقیقی باشد ثابت کنیم

برای اثبات فرض می‌کنیم که $D_1 f(\mathbf{c})$ وجود داشته باشد، و مشتقهای جزئی پیوسته عبارت از $D_2 f$ ، . . . ، $D_n f$ باشند.

تنها چیزی که می‌تواند $f'(\mathbf{c})$ بشود بردار گرادیان $\nabla f(\mathbf{c})$ است. ثابت می‌کنیم که

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{c}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|) \text{ ، وقتی‌که } \mathbf{v} \to 0\text{،}$$

و درنتیجه قضیه برقرارخواهد بود. راه اثبات این است‌که تفاضل $f(\mathbf{c}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{c})$ را به صورت مجموع n جمله در آوریم، که درآن جملهٔ kام تقریبی برای $D_k f(\mathbf{c})\, v_k$ باشد.

برای این منظور می‌نویسیم $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{y}$، که در آن $\|\mathbf{y}\| = 1$ و $\lambda = \|\mathbf{v}\|$.
λ را آن‌قدر کوچک اختیار می‌کنیم که $\mathbf{c} + \mathbf{v}$ درگوی $B(\mathbf{c})$، که در آن $D_2 f$ ، . . . ، $D_n f$ وجود دارند، قرار گیرد. اگر $\mathbf{y}$ را برحسب مؤلفه‌هایش بیان کنیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n,$$

که در آن $\mathbf{u}_k$ بردار مختصات یکهٔ kام است. حال تفاضل $f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{c})$ را به‌صورت یک مجموع توی هم روندهٔ زیر می‌نویسیم :

$$(۲۵)\quad f(\mathbf{c}+\mathbf{v})-f(\mathbf{c})=f(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{y})-f(\mathbf{c})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{f(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{v}_k)-f(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{v}_{k-1})\},$$

که در آن

$$\mathbf{v}_0=0,\ \ \mathbf{v}_1=y_1\mathbf{u}_1,\ \ \mathbf{v}_2=y_1\mathbf{u}_1+y_2\mathbf{u}_2,\ldots,$$
$$\mathbf{v}_n=y_1\mathbf{u}_1+\cdots+y_n\mathbf{u}_n\,.$$

اولین جملهٔ مجموع عبارت است از $f(\mathbf{c}+\lambda y_1\mathbf{u}_1)-f(\mathbf{c})$. چون دو نقطهٔ $\mathbf{c}$ و $\mathbf{c}+\lambda y_1\mathbf{u}_1$ فقط در اولین مؤلفه‌های خود متفاوتند، و چون $D_1 f(\mathbf{c})$ وجود دارد، می‌توان نوشت

$$f(\mathbf{c}+\lambda y_1\mathbf{u}_1)-f(\mathbf{c})=\lambda y_1 D_1 f(\mathbf{c})+\lambda y_1 E_1(\lambda),$$

که در آن وقتی که $\lambda\to 0$، $E_1(\lambda)\to 0$.

به‌ازای $k\geqslant 2$، جملهٔ kام در مجموع عبارت است از

$$f(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{v}_{k-1}+\lambda y_k\mathbf{u}_k)-f(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{v}_{k-1})$$
$$=f(\mathbf{b}_k+\lambda y_k\mathbf{u}_k)-f(\mathbf{b}_k),$$

که در آن $\mathbf{b}_k=\mathbf{c}+\lambda\mathbf{v}_{k-1}$. دو نقطهٔ $\mathbf{b}_k$ و $\mathbf{b}_k+\lambda y_k\mathbf{u}_k$ فقط در مؤلفهٔ kام با هم فرق دارند، و می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین بـرای مشتق در حالت یک بعدی را بکار برد و نوشت

$$(۲۶)\qquad f(\mathbf{b}_k+\lambda y_k\mathbf{u}_k)-f(\mathbf{b}_k)=\lambda y_k D_k f(\mathbf{a}_k),$$

که درآن $\mathbf{a}_k$ برپاره خطی که $\mathbf{b}_k$ را به $\mathbf{b}_k+\lambda y_k\mathbf{u}_k$ وصل می‌کند قرار دارد. توجه کنید کـه وقتی کـه $\lambda\to 0$، $\mathbf{b}_k\to\mathbf{c}$، و در نتیجه $\mathbf{a}_k\to\mathbf{c}$. چون به‌ازای هـر $k\geqslant 2$، $D_k f$ در $\mathbf{c}$ پیوسته است، می‌توان نوشت

$$D_k f(\mathbf{a}_k)=D_k f(\mathbf{c})+E_k(\lambda),$$

که درآن وقتی که $\lambda\to 0$، $E_k(\lambda)\to 0$. با بکار بردن این رابطه در (۲۶) رابطهٔ (۲۵) به صورت زیرین درمی‌آید:

$$f(\mathbf{c}+\mathbf{v})-f(\mathbf{c})=\lambda\sum_{k=1}^{n}D_k f(\mathbf{c})\,y_k+\lambda\sum_{k=1}^{n}y_k E_k(\lambda)$$
$$=\nabla f(\mathbf{c})\cdot\mathbf{v}+\|\mathbf{v}\|\,E(\lambda),$$

که در آن

وقتی که $\|\mathbf{v}\| \to ۰$ ، $E(\lambda) = \sum_{k=۱}^{n} y_k E_k(\lambda) \to ۰$،

و برهان قضیه تمام است.

تبصره. پیوستگی دست‌کم $n - ۱$ تا از $D_۱\mathbf{f}$، . . .، $D_n\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$، اگر چه شرطی کافی برای مشتقپذیری $\mathbf{f}$ در $\mathbf{c}$ است، ولی بهیچوجه شرطی لازم نخواهد بود. (ر. ک. تمرینهای ۵.۱۲ و ۶.۱۲).

۱۳.۱۲ شرطی کافی برای تساوی مشتقهای جزئی مخلوط

مشتقهای جزئی $D_۱\mathbf{f}$، . . .، $D_n\mathbf{f}$ تابع $\mathbf{f}$ از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ خود تابعهائی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ هستند، و به‌نوبهٔ خود، می‌توانند دارای مشتقهای جزئی باشند. این مشتقها را مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم می‌نامند. نمادهائی را که در فصل ۵ برای تابعهای حقیقی معرفی شدند بکار می‌بریم:

$$D_{r,k}\,\mathbf{f} = D_r(D_k\mathbf{f}) = \frac{\partial^۲\mathbf{f}}{\partial x_r\,\partial x_k}.$$

بطریقی مشابه، می‌توان مشتقهای جزئی مرتبهٔ بالاتر را تعریف کرد.

مثال:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^۲ - y^۲)/(x^۲ + y^۲) & \text{اگر } (x, y) \neq (۰, ۰)\text{ ،} \\ ۰ & \text{اگر } (x, y) = (۰, ۰)\text{ ،} \end{cases}$$

نشان می‌دهد که $D_{۱,۲}\,f(x, y)$ لزوماً با $D_{۲,۱}\,f(x, y)$ یکی نیست. در واقع، در این مثال،

$$D_۱ f(x,y) = \frac{y(x^۴ + ۴x^۲y^۲ - y^۴)}{(x^۲ + y^۲)^۲}\text{،} \quad \text{اگر } (x, y) \neq (۰, ۰)\text{ ،}$$

و $D_۱ f(۰, ۰) = ۰$. از این روی، به‌ازای هر y، $D_۱ f(۰, y) = -y$، و در نتیجه

$$D_{۲,۱}\,f(۰, y) = -۱, \quad D_{۲,۱} f(۰, ۰) = -۱.$$

از سوی دیگر،

$$D_۲ f(x,y) = \frac{x(x^۴ - ۴x^۲y^۲ - y^۴)}{(x^۲ + y^۲)^۲}\text{،} \quad \text{اگر } (x, y) \neq (۰, ۰)\text{ ،}$$

و $D_۲ f(۰, ۰) = ۰$، پس به‌ازای هر x، $D_۲ f(x, ۰) = x$. بنابراین،

$D_{1,2}f(x,0) = 1$، $D_{1,2}f(0,0) = 1$، و می‌بینیم که

$$D_{2,1}f(0,0) \neq D_{1,2}f(0,0).$$

قضیهٔ زیر محکی برای تساوی دو مشتق جزئی مخلوط $D_{1,2}\mathbf{f}$ و $D_{2,1}\mathbf{f}$ بدست می‌دهد.

قضیهٔ ۱۲.۱۲ هرگاه هر دو مشتق جزئی $D_r\mathbf{f}$ و $D_k\mathbf{f}$ در یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{c};\delta)$ وجود داشته باشند و هر دو در $\mathbf{c}$ مشتقپذیر باشند، آنگاه

$$D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{c}) = D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{c}). \tag{۲۷}$$

برهان. هرگاه $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$، آنگاه $D_k\mathbf{f} = (D_kf_1, \ldots, D_kf_m)$. بنابراین کافی است قضیه را برای تابع حقیقی f ثابت کنیم. بعلاوه، چون در (۲۷) فقط دو مؤلفه مورد لزوم است، کافی است حالت $n = 2$ را درنظر بگیریم. برای آسان شدن مطلب، فرض می‌کنیم که $\mathbf{c} = (0,0)$. ثابت می‌کنیم که

$$D_{1,2}f(0,0) = D_{2,1}f(0,0).$$

$h \neq 0$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که مربعی که رأسهای آن $(0,0)$، $(h,0)$، (h,h) و $(0,h)$ باشند در گوی ۲ بعدی $B(0;\delta)$ قرار گیرد. مقدار

$$\Delta(h) = f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0)$$

را در نظر می‌گیریم. نشان خواهیم داد که وقتی که $h \to 0$، $\Delta(h)/h^2$ هم به $D_{2,1}f(0,0)$ و هم به $D_{1,2}f(0,0)$ می‌گراید.

فرض می‌کنیم $G(x) = f(x,h) - f(x,0)$ و ملاحظه می‌کنیم که

$$\Delta(h) = G(h) - G(0). \tag{۲۸}$$

بنابر قضیهٔ مقدار میانگین در حالت یک بعدی، داریم

$$G(h) - G(0) = hG'(x_1) = h\{D_1f(x_1,h) - D_1f(x_1,0)\}, \tag{۲۹}$$

که در آن x_1 بین 0 و h قرار دارد. چون D_1f در $(0,0)$ مشتقپذیر است، دستورهای تیلور مرتبهٔ اول

$$D_1f(x_1,h) = D_1f(0,0) + D_{1,1}f(0,0)x_1 + D_{2,1}f(0,0)h + (x_1^2 + h^2)^{1/2}E_1(h),$$

و

$$D_1f(x_1,0) = D_1f(0,0) + D_{1,1}f(0,0)x_1 + |x_1|\,E_2(h)$$

برقرارند،که درآنها وقتی‌که $h \to 0$ ، $E_1(h)$ و $E_2(h)$ به ۰ می‌گرایند. اگر اینها را در (۲۹) و (۲۸) بکار بریم، نتیجه می‌شود که

$$\Delta(h) = D_{2,1}f(0, 0)h^2 + E(h),$$

که در آن

$$E(h) = h(x_1^2 + h^2)^{1/2}E_1(h) + h\,|x_1|\,E_2(h).$$

چون $|h| \leqslant |x_1|$، نتیجه می‌گیریم که

$$0 \leqslant |E(h)| \leqslant \sqrt{2}\, h^2|E_1(h)| + h^2|E_2(h)|,$$

پس

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_{2,1}f(0, 0).$$

اگربه جای $G(x)$ تابع $H(y) = f(h, y) - f(0, y)$ رااختیار نمائیم و همین روش را بکار ببریم، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_{1,2}f(0, 0),$$

و برهان قضیه تمام خواهد بود.

قضیهٔ زیر نتیجه‌ای است از قضیه‌های ۱۱۰۱۲ و ۱۲۰۱۲.

قضیهٔ ۱۳۰۱۲ هرگاه هردو مشتق جزئی $D_r\mathbf{f}$ و $D_k\mathbf{f}$ در یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{c})$ وجود داشته باشند و $D_{r,k}\mathbf{f}$ و $D_{k,r}\mathbf{f}$ هر دو در $\mathbf{c}$ پیوسته باشند ، آنگاه

$$D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{c}) = D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{c}).$$

تبصره. در این‌جا (بدون اثبات) فقط ذکر می‌کنیم که هرگاه $D_r\mathbf{f}$، $D_k\mathbf{f}$، و $D_{k,r}\mathbf{f}$ در یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{c})$ پیوسته باشند، آنگاه $D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{c})$ وجود دارد و مساوی $D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{c})$ است.

اگر f تابعی حقیقی از دو متغیر باشد، f دارای چهار مشتق جزئی مرتبهٔ دوم است؛ که عبارتند از $D_{1,1}f$، $D_{1,2}f$، $D_{2,1}f$، و $D_{2,2}f$. هم اکنون نشان دادیم که با درنظر گرفتن شرطهای مناسبی برای f فقط سه‌تای آنها از یکدیگر متمایزند.

تعداد مشتقهای جزئی مرتبهٔ k مساوی 2^k است. هرگاه همهٔ این مشتقها در یک همسایگی نقطهٔ (x, y) پیوسته باشند، آنگاه بعضی از مشتقهای جزئی مخلوط با یکدیگر متساویند. هرمشتق جزئی مخلوط به شکل $D_{r_1,\dots,r_k}f$ است، که در آن هر r_j مساوی ۱ یا ۲ خواهد بود. اگر همهٔ 2^k مشتق جزئی f در یکی از

همسایگیهای (x, y) پیوسته باشند، هردو مشتق جزئی مخلوط مانند $D_{r_1, \dots, r_k} f$ و $D_{p_1, \dots, p_k} f$، که در آنها kتائی $(r_1, \dots, r_k)$ جایگشتی از kتائی $(p_1, \dots, p_k)$ باشد، در نقطهٔ (x, y) با یکدیگر متساوی خواهند بود. این گزاره را می‌توان به‌کمک استقرای ریاضی، با استفاده از قضیهٔ ۱۳.۱۲ (که حالت خاص این مطلب به‌ازای $k = ۲$ است) بآسانی ثابت نمود. از اثبات آن به‌ازای مقدار کلی k صرف نظر می‌کنیم. از این مطلب نتیجه می‌شود که میان ۲^k مشتق جزئی مرتبهٔ k، در حالت کلی، فقط $k + ۱$ مشتق جزئی متمایز وجود دارد، که عبارتند از $D_{r_1, \dots, r_k} f$ ها، که در آنها kتائی $(r_1, \dots, r_k)$ به $k + ۱$ شکل زیر خواهد بود:

$$(۲, ۲, \dots, ۲), \quad (۱, ۲, ۲, \dots, ۲), \quad (۱, ۱, ۲, \dots, ۲), \dots, \quad (۱, ۱, \dots, ۱, ۲), \quad (۱, \dots, ۱).$$

مشابه گزاره‌های بالاالبته‌برای تابعهای n متغیره نیز برقرارند. در این حالت، تعداد n^k مشتق جزئی از مرتبهٔ k وجود دارد. از پیوستگی همهٔ این مشتقها در نقطهٔ $\mathbf{x}$ می‌توان نتیجه گرفت که مقدار $D_{r_1, \dots, r_k} f(\mathbf{x})$ با جایگشت زیرنویسهای $r_1, \dots, r_k$ تغییر نمی‌کند. در این‌جا هر r_i عدد صحیح مثبتی است نابیشتر از n.

۱۴.۱۲ دستور تیلور برای تابعهای از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^1$

دستور تیلور (قضیهٔ ۱۹.۵) را می‌توان به تابعهای حقیقی f که بر زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشند وسعت داد. برای بیان قضیهٔ کلی دراین مورد به شکلی شبیه به حالت یک بعدی، نمادهای مخصوص

$$f''(\mathbf{x}; \mathbf{t}), \quad f'''(\mathbf{x}; \mathbf{t}), \dots, f^{(m)}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$$

را برای بعضی از مجموعهای بوجود آمده در دستور تیلور بکار می‌بریم. اینها نقش مشتقهای جهتی مرتبه‌های بالاتر را بر عهده دارند، و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

اگر همهٔ مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم تابع f در نقطهٔ $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$ وجود داشته باشند، و $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ نقطهٔ دلخواهی در $\mathbf{R}^n$ باشد، می‌نویسیم

$$f''(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} f(\mathbf{x}) t_j t_i.$$

همچنین اگر همهٔ مشتقهای جزئی مرتبهٔ سوم f در $\mathbf{x}$ وجود داشته باشند، تعریف می‌کنیم

$$f'''(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{i,j,k} f(\mathbf{x}) t_k t_j t_i \cdot$$

اگر همهٔ مشتقهای جزئی مرتبهٔ m ام وجود داشته باشند، می‌توان نماد $f^{(m)}(\mathbf{x};\mathbf{t})$ را به‌طریق مشابه تعریف کرد.

مجموعهای تعریف شده در بالا شبیه‌اند به دستور

$$f'(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(\mathbf{x}) t_i$$

برای مشتق جهتی تابعی که در $\mathbf{x}$ مشتقپذیر باشد.

قضیهٔ ۱۴.۱۲ (دستور تیلور). فرض کنیم f و همهٔ مشتقهای جزئی آن که از مرتبهٔ کوچکتر از m هستند در هر نقطه از مجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^n$ مشتقپذیر باشند. هرگاه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو نقطهٔ S باشند بقسمی که $L(\mathbf{a},\mathbf{b}) \subseteq S$، آنگاه نقطه‌ای مانند $\mathbf{z}$ بر پاره‌خط $L(\mathbf{a},\mathbf{b})$ هست بقسمی که

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\mathbf{a};\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \frac{1}{m!} f^{(m)}(\mathbf{z};\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

برهان. چون S باز است، δی مثبتی وجود دارد بقسمی که به‌ازای هر عدد حقیقی t دربازهٔ $-\delta < t < 1+\delta$، $\mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \in S$. تابع g را بر $]-\delta, 1+\delta[$ با معادلهٔ

$$g(t) = f[\mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a})]$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = g(1) - g(0)$. قضیه را با بکار بردن دستور تیلور در حالت یک بعدی برای g ثابت می‌کنیم. می نویسیم

$$g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{m!} g^{(m)}(\theta), \tag{۳۰}$$

که درآن $0 < \theta < 1$.

از طرفی g تابعی است مرکب که با رابطهٔ $g(t) = f[\mathbf{p}(t)]$ داده شده است، که در آن $\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. مؤلفهٔ kام $\mathbf{p}$ دارای مشتق $p'_k(t) = b_k - a_k$ است. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، ملاحظه می‌شود که $g'(t)$ در بازهٔ $]-\delta, 1+\delta[$ وجود دارد و از دستور زیرین بدست می‌آید:

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j f[\mathbf{p}(t)]\,(b_j - a_j) = f'(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

اگر بار دیگر قاعدهٔ زنجیره‌ای را بکار بریم، خواهیم داشت

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} f[\mathbf{p}(t)]\,(b_j - a_j)\,(b_i - a_i) = f''(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

بهمین طریق، نتیجه می‌شود که $g^{(m)}(t) = f^{(m)}(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a})$. اگر از اینها در رابطهٔ (۳۰) استفاده کنیم، چون $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$، قضیه نتیجه خواهد شد.

تمرین

تابعهای مشتقپذیر

۱۰۱۲ فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ باشد، و $f : S \to \mathbf{R}$ تابعی باشد حقیقی بقسمی که $D_1 f$، . . .، $D_n f$ بر S متناهی باشند. اگر f در نقطهٔ $\mathbf{c}$ در S ماکزیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد، ثابت کنید به‌ازای هر k، $D_k f(\mathbf{c}) = 0$.

۲۰۱۲ در مورد هر یک از تابعهای حقیقی زیرین که بر $\mathbf{R}^n$ تعریف شده است، همهٔ مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول و مشتق جهتی $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u})$ را محاسبه کنید:

آ) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$، که در آن $\mathbf{a}$ بردار ثابتی است در $\mathbf{R}^n$.

ب) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4$.

ج) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x})$، که در آن $\mathbf{L} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ تابعی است خطی.

د) $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$، که در آن $a_{ij} = a_{ji}$.

۳۰۱۲ فرض کنید مقدارهای دو تابع $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ در $\mathbf{R}^m$ باشند، و مشتقهای جهتی $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ و $\mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ وجود داشته باشند. ثابت کنید که مشتقهای جهتی مجموع $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ و حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ از رابطه‌های زیر بدست می‌آیند:

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) + \mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$$

و

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}).$$

۴۰۱۲ اگر $S \subseteq \mathbf{R}^n$، فرض کنید که $\mathbf{f} : S \to \mathbf{R}^m$ تابعی باشد که مقادیر آن در $\mathbf{R}^m$ باشند، و بنویسید $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$. ثابت کنید که $\mathbf{f}$ در یک نقطهٔ درونی S

مانند c وقتی، و فقط وقتی، مشتقپذیر است که هر f_i در c مشتقپذیر باشد.

۵.۱۲ n تابع حقیقی f_1، . . .، f_n داده شده‌اند، که هر یک بر بازهٔ باز $]a, b[$ در $\mathbf{R}$ مشتقپذیر است. به‌ازای هر $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ در بازهٔ باز n بعدی

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a < x_k < b, \quad k = 1, 2, \ldots, n\},$$

تعریف کنید $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$. ثابت کنید که f در هر نقطهٔ S مشتقپذیر است و

$$f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i)u_i$$ ، که در آن $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$.

۶.۱۲ n تابع حقیقی f_1، . . .، f_n داده شده‌اند، که همه برمجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده‌اند. به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در S، تعریف کنید

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + \ldots + f_n(\mathbf{x}).$$

فرض کنید به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$، حد زیرین وجود داشته باشد:

$$\lim_{\substack{\mathbf{y}\to\mathbf{x} \\ y_k \neq x_k}} \frac{f_k(\mathbf{y}) - f_k(\mathbf{x})}{y_k - x_k}.$$

این حد را $a_k(\mathbf{x})$ بنامید. ثابت کنید که f در $\mathbf{x}$ مشتقپذیر است و

اگر $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ ، $f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathbf{x})u_k$.

۷.۱۲ فرض کنید $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ تابعهائی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ باشند. همچنین $\mathbf{f}$ در c مشتقپذیر، $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = 0$، و $\mathbf{g}$ در c پیوسته باشد. قرار دهید $h(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$. ثابت کنید که h در c مشتقپذیر است و

اگر $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ ، $h'(\mathbf{c})(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{u})\}$.

۸.۱۲ فرض کنید $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ با معادلهٔ

$$\mathbf{f}(x, y) = (\sin x \cos y, \quad \sin x \sin y, \quad \cos x \cos y)$$

تعریف شده باشد. ماتریس ژاکوبی $\mathbf{Df}(x, y)$ را مشخص کنید.

۹.۱۲ ثابت کنید به‌ازای نقطهٔ ثابت c در $\mathbf{R}^n$ وهر بردار ناصفر u در $\mathbf{R}^n$، تابعی حقیقی مانند f با خاصیت $f'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) > 0$ وجود ندارد. تابع f را بقسمی مثال بزنید که به‌ازای بردار ثابت u وهر c در $\mathbf{R}^n$، داشته باشیم $f'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) > 0$.

۱۰.۱۲ فرض کنید $f = u + iv$ تابعی مختلط باشد بقسمی که به ازای عدد مختلطی چون c، $f'(c)$ وجود داشته باشد. بنویسید $z = c + re^{i\alpha}$ (که در آن α حقیقی و ثابت باشد) و در خارج قسمت تفاضلی $[f(z) - f(c)]/(z - c)$ با فرض $r \to 0$ نتیجه بگیرید که

$$f'(c) = e^{-i\alpha}[u'(c; \mathbf{a}) + iv'(c; \mathbf{a})],$$

که در آن $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$، و $u'(c; \mathbf{a})$ و $v'(c; \mathbf{a})$ مشتقهای جهتی می باشند. اگر $\beta = \alpha + \pi/2$، قرار دهید $\mathbf{b} = (\cos\beta, \sin\beta)$، و با بیانی مشابه بالا، نشان دهید که

$$f'(c) = e^{-i\alpha}[v'(c; \mathbf{b}) - iu'(c; \mathbf{b})].$$

نتیجه بگیریدکه $u'(c; \mathbf{a}) = v'(c; \mathbf{b})$ و $v'(c; \mathbf{a}) = -u'(c; \mathbf{b})$. معادله های کشی ـ ریمان (قضیهٔ ۲۲.۵) حالتهای خاصی از این دو رابطهٔ اخیر می باشند.

گرادیانها و قاعدهٔ زنجیره‌ای

۱۱.۱۲ فرض کنید تابع حقیقی f در نقطهٔ $\mathbf{c}$ در $\mathbf{R}^n$ مشتقپذیر باشد، و $\|\nabla f(\mathbf{c})\| \neq 0$. ثابت‌کنید که یک، و فقط یک، بردار یکه مانند $\mathbf{u}$ در $\mathbf{R}^n$ هست بقسمی که $|f'(\mathbf{c}; \mathbf{u})| = \|\nabla f(\mathbf{c})\|$، و این بردار یکه‌ای است که به ازای آن $|f'(\mathbf{c}; \mathbf{u})|$ مقدار ماکزیمم خود را دارد.

۱۲.۱۲ بردار گرادیان $\nabla f(x, y)$ را در هر نقطه مانند (x, y) در $\mathbf{R}^2$ که وجود داشته باشد محاسبه کنید:

آ) $f(0, 0) = 0$,
اگر $(x, y) \neq (0, 0)$، $f(x, y) = x^2y^2 \log(x^2 + y^2)$.

ب) $f(0, 0) = 0$,
اگر $(x, y) \neq (0, 0)$، $f(x, y) = xy \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

۱۳.۱۲ فرض کنید تابعهای حقیقی f و g بر $\mathbf{R}^1$ تعریف شده باشند و مشتقهای دوم آنها، یعنی f'' و g''، بر $\mathbf{R}^1$ پیوسته باشند. F را چنین تعریف کنید:
به‌ازای هر (x, y) در $\mathbf{R}^2$، $F(x, y) = f[x + g(y)]$.
دستورهائی بیابید که در آنها همهٔ مشتقهای مرتبهٔ اول و دوم F بر حسب مشتقهای f و g داده شده باشند. برقراری رابطهٔ زیر را تحقیق کنید:

$$(D_1F)(D_{1,2}F) = (D_2F)(D_{1,1}F).$$

۱۴.۱۲ تابع f که در $\mathbf{R}^2$ تعریف شده باشد مفروض است. قرار دهید

$$F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

آ) با فرض خاصیتهای مناسبی دربارهٔ مشتقپذیری f، نشان دهید که

$$D_1F(r, \theta) = \cos\theta\, D_1f(x, y) + \sin\theta\, D_2f(x, y),$$

$$D_{1,1}F(r, \theta) = \cos^2\theta\, D_{1,1}f(x, y) + 2\sin\theta\cos\theta\, D_{1,2}f(x, y) + \sin^2\theta\, D_{2,2}f(x, y),$$

که در آنها $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$.

ب) دستورهای مشابهی برای D_2F، $D_{1,2}F$، و $D_{2,2}F$ بیابید.

ج) صحت دستور زیر را تحقیق کنید:

$$\|\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta)\|^2 = [D_1F(r, \theta)]^2 + \frac{1}{r^2}[D_2F(r, \theta)]^2.$$

۱۵.۱۲ اگر بردارهای گرادیان f و g در نقطهٔ $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$، یعنی $\nabla f(\mathbf{x})$ و $\nabla g(\mathbf{x})$، وجود داشته باشند، نشان دهیدکه تابع حاصل ضرب h، که با $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})$ تعریف می‌شود، نیز در نقطهٔ $\mathbf{x}$ دارای بردار گرادیان است که از رابطهٔ زیرین بدست می‌آید:

$$\nabla h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\, \nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\, \nabla f(\mathbf{x}).$$

مشابه این نتیجه را برای خارج قسمت f/g بیان و ثابت کنید.

۱۶.۱۲ فرض کنید تابع f در هر نقطه در $\mathbf{R}^1$ مشتق داشته باشد، و g بر $\mathbf{R}^3$ با معادلهٔ

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

تعریف شده باشد. اگر $h = f \circ g$، نشان دهید که

$$\|\nabla h(x, y, z)\|^2 = 4g(x, y, z)\{f'[g(x, y, z)]\}^2.$$

۱۷.۱۲ فرض کنید f در هر نقطه مانند (x, y) در $\mathbf{R}^2$ مشتقپذیر باشد. همچنین فرض کنید که g_1 و g_2 بر $\mathbf{R}^3$ با معادله‌های

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{و} \quad g_2(x, y, z) = x + y + z$$

تعریف شده باشند، و $\mathbf{g}$ تابعی باشد برداری که مقدارهای‌آن (در $\mathbf{R}^2$) از رابطهٔ زیر بدست آیند:

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) .$$

فرض کنید $h = f \circ \mathbf{g}$، نشان دهید که

$$\|\nabla h\|^2 = 4(D_1 f)^2 g_1 + 4(D_1 f)(D_2 f) g_2 + 3(D_2 f)^2.$$

۱۸.۱۲ فرض کنیم f برمجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد. گوئیم f روی S همگن از درجهٔ p است در صورتی که به‌ازای هرعدد حقیقی λ و هر $\mathbf{x}$ در S که $\lambda\mathbf{x} \in S$، داشته باشیم $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$. اگر چنین تابعی در $\mathbf{x}$ مشتقپذیر باشد، نشان دهید که

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = p f(\mathbf{x}) .$$

تبصره. این مطلب به نام قضیهٔ اویلر برای تابعهای همگن معروف است. راهنمائی. به‌ازای $\mathbf{x}$ ثابت، تعریف کنید $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x})$ و سپس $g'(1)$ را محاسبه کنید.

عکس این مطلب را نیز ثابت کنید. یعنی، نشان دهید که هرگاه به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در مجموعهٔ بازی چون S، $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = p f(\mathbf{x})$، آنگاه f باید روی S همگن از درجهٔ p باشد.

قضیه‌های مقدار میانگین

۱۹.۱۲ فرض کنید $\mathbf{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ با معادلهٔ $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ تعریف شده باشد. در این صورت، به‌ازای هرعدد حقیقی u،

$$\mathbf{f}'(t)(u) = u(-\sin t, \cos t).$$

دستور مقدار میانگین، یعنی

$$\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}'(z)(y - x),$$

وقتی که $x = 0$ و $y = 2\pi$ نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا عضو طرف چپ مساوی صفر است و عضو طرف راست برداری است به درازای 2π. با وجود این، بنا بر قضیهٔ ۹.۱۲، به‌ازای هر بردار مانند $\mathbf{a}$ در $\mathbf{R}^2$، z ی در بازهٔ $]0, 2\pi[$ هست بقسمی که

$$\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x)\} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(z)(y - x)\} .$$

وقتی که $x = 0$ و $y = 2\pi$، z را برحسب $\mathbf{a}$ مشخص کنید.

۲۰.۱۲ فرض کنید تابع حقیقی f برگوی ۲ بعدی $B(\mathbf{x})$ مشتقپذیر باشد. با در نظر گرفتن تابع تعریف شده با

$$g(t) = f[ty_1 + (1 - t)x_1, y_2] + f[x_1, ty_2 + (1 - t)x_2],$$

ثابت کنید که

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (y_1 - x_1)\, D_1 f(z_1, y_2) + (y_2 - x_2)\, D_2 f(x_1, z_2),$$

که درآن $z_1 \in L(x_1, y_1)$ و $z_2 \in L(x_2, y_2)$.

۲۱.۱۲ نتیجهٔ تمرین ۲۰.۱۲ را بـرای یک تابع حقیقی مشتقپذیر بـر گـوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ تعمیم دهید و آن را ثابت کنید.

۲۲.۱۲ فرض‌کنید f تابعی باشد حقیقی بقسمی که مشتق جهتی $f'(\mathbf{c} + t\mathbf{u}; \mathbf{u})$ به‌ازای هر t در بازهٔ $0 \leqslant t \leqslant 1$ وجود داشته باشد. ثابت کنید که θ ای در بـازهٔ باز $]0, 1[$ هست که به‌ازای آن

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{c}) = f'(\mathbf{c} + \theta\mathbf{u}; \mathbf{u}).$$

۲۳.۱۲ آ) اگر f تابعی حقیقی باشد، و به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در گوی n بعدی $B(\mathbf{c})$ و هر بردار $\mathbf{u}$، $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 0$، ثابت کنید که f بر $B(\mathbf{c})$ پایا است.

ب) ازاین‌فرض‌که به‌ازای بردار ثابت $\mathbf{u}$ وهر $\mathbf{x}$ در $B(\mathbf{c})$، $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 0$، چه می‌توان نتیجه گرفت؟

مشتقهای مرتبهٔ بالاتر و دستور تیلور

۲۴.۱۲ برای هریک از تابعهای زیرین، تحقیق کنید کـه مشتقهای جزئی مخلوط $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ با هم متساویند.

آ) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

ب) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$، $(x, y) \neq (0, 0)$.

ج) $f(x, y) = \tan(x^2/y)$، $y \neq 0$.

۲۵.۱۲ فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد. بـا استفـاده از استقرا و قضیهٔ ۱۳.۱۲، ثابت کنید که هرگاه 2^k مشتق جزئی مرتبهٔ kی f در یکی از همسایگیهای نقطهٔ (x, y) پیوسته باشند، آنگاه همهٔ مشتقهای جـزئی مخلوط به‌شکل $D_{r_1, \ldots, r_k}f$ و $D_{p_1, \ldots, p_k}f$ در صورتـی در نقطهٔ (x, y) بـا هم متساویند کـه در kتائیهـای $(r_1, \ldots, r_k)$ و $(p_1, \ldots, p_k)$ تعداد یکها متساوی باشند.

۲۶.۱۲ اگر همهٔ مشتقهای جزئی مرتبهٔ kی تابـع دومتغیرهٔ f برمجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^2$ پیوسته باشند، نشان دهید که

$$f^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{t})=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}t_1^r\, t_2^{k-r}D_{p_1},\ \dots,\ _{p_k}f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in S,\ \mathbf{t}=(t_1,\ t_2),$$

که در آن در جملهٔ rام، $p_1=\dots=p_r=1$ و $p_{r+1}=\dots=p_k=2$. با استفاده از این نتیجه، دستور تیلور (قضیهٔ ۱۴.۱۲) برای $n=2$ را به‌صورتی دیگر بیان کنید. علامت $\binom{k}{r}$ همان ضریب دو جمله‌ای $k!/[r!\,(k-r)!]$ است.

۲۷.۱۲ با استفاده از دستور تیلور، تابعهای زیرین را به صورت توانهائی از $(x-1)$ و $(y-2)$ بیان کنید:

آ) $f(x,\ y)=x^3+y^3+xy^2$،

ب) $f(x,\ y)=x^2+xy+y^2$.

فهرست چندکتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به‌آنها مراجعه کرد.

12.1 Apostol, T.M., *Calculus,* Vol. 2, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1969.

12.2 Chaundy, T.W., *The Differential Calculus*. Clarendon Press, Oxford, 1935.

12.3 Woll, J.W., *Functions of Several Variables*. Harcourt Brace and World, New York, 1966.

۱۳
تابعهای ضمنی و مسأله‌های اکسترمم

۱.۱۳ مقدمه

این فصل از دو قسمت عمده تشکیل شده است. در قسمت اول دربارهٔ قضیهٔ مهمی درآنالیز به نام قضیهٔ تابع ضمنی بحث می‌شود؛ و در قسمت دوم مسأله‌های اکسترمم مورد بحث خواهند بود. در هر دو قسمت، قضیه های مذکور در فصل ۱۲ مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیهٔ تابع ضمنی در ساده ترین شکل خود با معادله‌ای به شکل

$$f(x, t) = 0 \qquad (۱)$$

سروکار دارد. مسأله این است که آیا از این معادله می‌توان x را به‌عنوان تابعی از t مشخص کرد؟ اگر این کار امکان پذیر باشد، به‌ازای تابعی چون g، معادلهٔ

$$x = g(t)$$

بدست می‌آید. می‌گوئیم g «به‌طور ضمنی» به‌وسیلهٔ (۱) تعریف شده است.

شکل کلیتر مسأله وقتی است که دستگاهی ازچند معادله داشته باشیم که هر یک شامل چند متغیر باشد، وسؤال کنیم که آیا می‌توان این معادله‌ها را حل کرد و تعدادی از متغیرها را برحسب بقیه بدست‌آورد؟ این مسأله از نوع مسألهٔ بالا است، جز این‌که x و t با بردارها، و f و g با تابعهای برداری عوض شده‌اند. باشرطهای نسبتاً کلی، همواره جواب وجود دارد. قضیهٔ تابع ضمنی این شرطها را توصیف می‌کند ونتایجی دربارهٔ جواب بدست می‌دهد.

یکی از حالتهای خاص ومهم مسأله‌ای است که در جبر با آن آشنا هستیم، و آن حل n معادلهٔ خطی به شکل

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{۲}$$

است، که درآن a_{ij} و t_iها عددهائی معلوم، و x_1، . . . ، x_n نمایندهٔ مجهولها هستند. در جبر خطی ثابت شده استکه یک چنین دستگاه وقتی، و فقط وقتی، دارای جواب منحصر بفرد است که دترمینان ماتریس $A = [a_{ij}]$، یعنی دترمینان ماتریس ضریبها، صفر نباشد.

تبصره. دترمینان یک ماتریس مربعی مانند $A = [a_{ij}]$ را با نماد $\det A$ یا $\det [a_{ij}]$ نشان می‌دهیم. اگر $\det [a_{ij}] \neq 0$، جواب (۲) از قاعدهٔ کرامر[1] بدست می‌آید، که بر طبق این قاعده، هر x_k مساوی خارج قسمت دو دترمینان است، یعنی، به‌صورت $x_k = A_k / D$، که درآن $D = \det[a_{ij}]$ و A_k دترمینان ماتریسی‌است که ازتعویض ستون kام $[a_{ij}]$ با t_1، . . . ، t_n حاصل می‌گردد. (برای اثباتی ازقاعدهٔ کرامر، ر. ک. کتاب مرجع ۱۰.۱۳، قضیهٔ ۱۴.۰۳.) در حالت خاص، هرگاه هر $t_i = 0$، آنگاه هر $x_k = 0$.

اینک نشان می‌دهیم که دستگاه (۲) را می‌توان به شکل (۱) نوشت. هر معادله در (۲) به شکل زیر است:

$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0$، که درآن $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$، $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$،

و

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - t_i \,.$$

بنابراین، دستگاه (۲) را می‌توان با یک معادلهٔ برداری مانند $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ بیان کرد، که در آن $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. هرگاه $D_j f_i$ نمایش مشتق جزئی f_i بر حسب مختص jم، یعنی x_j، باشد،آنگاه $D_j f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = a_{ij}$. از این روی ماتریس ضریبها در (۲)، یعنی $A = [a_{ij}]$، یک ماتریس ژاکوبی خواهد بود. در جبرخطی داریم که (۲) در صورتی جواب منحصر بفرد دارد که دترمینان این ماتریس ژاکوبی صفر نباشد.

در حالت کلی قضیهٔ تابع ضمنی هم صفر نشدن دترمینان ماتریس ژاکوبی نقشی برعهده دارد. این نقش وقتی ظاهر می‌شودکه $\mathbf{f}$ را به یک تابع خطی نزدیک

1. Cramer

می‌کنیم. جای معادلهٔ $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0$ را دستگاهی از معادله‌های خطی می‌گیرد که ماتریس ضریبهایشان ماتریس ژاکوبی $\mathbf{f}$ است.

نمادگذاری. اگر $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ و $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$، ماتریس ژاکوبی $\mathbf{Df}(\mathbf{x}) = [D_j f_i(x)]$ یک ماتریس $n \times n$ است. دترمینان این ماتریس را یک دترمینان ژاکوبی می‌نامیم و با $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ نشان می‌دهیم. بنابراین،

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det \mathbf{Df}(\mathbf{x}) = \det [D_j f_i(\mathbf{x})] \cdot$$

نماد

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

را هم برای نشان دادن دترمینان ژاکوبی $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ بکار می‌بریم.

قضیهٔ زیرین دترمینان ژاکوبی یک تابع مختلط را با مشتق آن مربوط می‌سازد.

قضیهٔ ۱۰۱۳ هرگاه تابع مختلط $f = u + iv$ در نقطهٔ z در $\mathbf{C}$ مشتق داشته باشد، آنگاه $J_f(z) = |f'(z)|^2$.

برهان. می‌دانیم که

$$f'(z) = D_1 u + iD_1 v \text{،} \quad \text{پس} \quad |f'(z)|^2 = (D_1 u)^2 + (D_1 v)^2 \cdot$$

همچنین، به‌موجب معادله‌های کشی ـ ریمان،

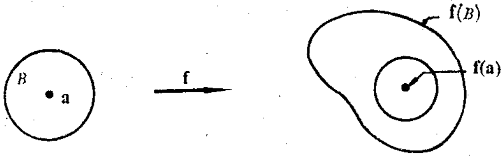
$$J_f(z) = \det \begin{bmatrix} D_1 u & D_2 u \\ D_1 v & D_2 v \end{bmatrix} = D_1 u\, D_2 v - D_1 v\, D_2 u$$
$$= (D_1 u)^2 + (D_1 v)^2 \cdot$$

۲۰۱۳ توابع با دترمینانهای ژاکوبی ناصفر

این بخش برخی از خاصیتهای توابعی را که در بعضی از نقطه‌ها دارای دترمینان ژاکوبی ناصفرند بدست می‌دهد. این نتیجه‌ها بعداً در اثبات قضیهٔ تابع ضمنی بکار خواهند رفت.

قضیهٔ ۲۰۱۳ فرض کنیم $B = B(\mathbf{a}; r)$ یك گوی n بعدی در $\mathbf{R}^n$ باشد، و ∂B کرانهٔ آن باشد، یعنی

$$\partial B = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\},$$



شکل ۱۰.۱۳

و همچنین فرض کنیم که $\bar{B} = B \cup \partial B$ بست آن را نشان دهد. $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ را بر $\bar{B}$ پیوسته می‌انگاریم، و فرض می‌کنیم که همهٔ مشتقهای جزئی $D_j f_i(\mathbf{x})$ درهر نقطهٔ $\mathbf{x} \in B$ وجود داشته باشند. بعلاوه فرض می‌کنیم که اگر $\mathbf{x} \in \partial B$، $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{a})$ و به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در B، $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$. دراین صورت، $\mathbf{f}(B)$، یعنی نقش B با $\mathbf{f}$، حاوی یك گوی n بعدی به مرکز $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ خواهد بود.

برهان. تابع حقیقی g را بر ∂B به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر } \mathbf{x} \in \partial B \text{، } g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|.$$

در این صورت، به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در ∂B، $g(\mathbf{x}) > 0$، زیرا که اگر $\mathbf{x} \in \partial B$، $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{a})$. همچنین، از این که $\mathbf{f}$ بر $\bar{B}$ پیوسته است نتیجه می‌شود که g بر ∂B پیوسته است. چون ∂B فشرده است، g در نقطه‌ای بر ∂B مینیمم مطلق خود را (که آن را m می‌نامیم) می‌گیرد. توجه کنیدکه چون g بر ∂B مثبت است، پس $m > 0$. فرض می‌کنیم T گوی n بعدی

$$T = B\left(\mathbf{f}(\mathbf{a}); \frac{m}{۲}\right)$$

را نشان دهد. ثابت می‌کنیم که $T \subseteq \mathbf{f}(B)$، و در نتیجه قضیه اثبات می‌شود. (ر. ک. شکل ۱۰.۱۳.)

برای این کار نشان می‌دهیم که اگر $\mathbf{y} \in T$، $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(B)$. نقطه‌ای مانند $\mathbf{y}$ در T اختیار می‌کنیم و آن را ثابت نگهداشته، تابع حقیقی جدید h را بر $\bar{B}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر } \mathbf{x} \in \bar{B} \text{، } h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|.$$

در این صورت h برمجموعهٔ فشردهٔ $\bar{B}$ پیوسته است، و در نتیجه بر $\bar{B}$ به مینیمم مطلق خود می‌رسد. نشان خواهیم داد که h مینیمم خود را در نقطه‌ای در گوی n-بعدی باز B احراز خواهد کرد. چون $\mathbf{y} \in T$، در مرکز، رابطهٔ

$$h(\mathbf{a}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| < \frac{m}{۲}$$

را داریم. پس مقدار مینیمم h در $\bar{B}$ نیز باید از $m/۲$ کوچکتر باشد. اما در هر نقطه مانند $\mathbf{x}$ برکرانهٔ B، یعنی ∂B، داریم

$$h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - (\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{a}))\|$$
$$\geqslant \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| - \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| > g(\mathbf{x}) - \frac{m}{۲} \geqslant \frac{m}{۲},$$

پس مینیمم h نمی‌تواند برکرانهٔ B، یعنی ∂B، روی دهد. از این روی نقطه‌ای مانند $\mathbf{c}$ در درون B هست که در آن h به مینیمم خود می‌رسد. در این نقطه مربع h نیز مینیمم دارد. چون

$$h^{۲}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^{۲} = \sum_{r=۱}^{n} [f_r(\mathbf{x}) - y_r]^{۲},$$

و چون هر $D_k(h^{۲})$ باید در $\mathbf{c}$ صفر باشد، پس بایستی

$$\sum_{r=۱}^{n} [f_r(\mathbf{c}) - y_r]\, D_k f_r(\mathbf{c}) = ۰ \quad ، \quad k = ۱, ۲, \ldots, n \text{ به‌ازای}.$$

اما از آن‌جا که $\mathbf{c} \in B$، این دستگاهی از معادله‌های خطی است که دترمینان آن، یعنی $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{c})$، صفر نیست. بنابراین، به‌ازای هر r، $f_r(\mathbf{c}) = y_r$، یا $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{y}$. یعنی، $\mathbf{y} \in f(B)$. از این روی $T \subseteq \mathbf{f}(B)$ و برهان تمام است.

تابع $f: S \to T$ از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T) را یک نگاشت باز نامیم در صورتی که به ازای هر مجموعهٔ باز A در S، نقش $f(A)$ در T باز باشد.

قضیهٔ زیر شرطی کافی است برای آن که نگاشتی مجموعه‌های باز را روی مجموعه‌های باز نقش کند. (همچنین ر. ک. قضیهٔ ۱۳.۵.)

قضیهٔ ۱۳.۳ فرض‌کنیم A یك زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ باشد، و $\mathbf{f}: A \to \mathbf{R}^n$ بر A پیوسته، و بر A دارای مشتقهای جزئی متناهی $D_j f_i$ باشد. هرگاه $\mathbf{f}$ بر A یك به یك باشد، و به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در A، $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq ۰$، آنگاه $\mathbf{f}(A)$ باز است.

برهان. هر گاه $\mathbf{b} \in \mathbf{f}(A)$، آنگاه به‌ازای یک مقدار $\mathbf{a}$ در A، $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a}; r) \subseteq A$ وجود دارد که $\mathbf{f}$ بر آن در مفروضات قضیهٔ ۱۳.۲ صدق می‌کند، پس $\mathbf{f}(B)$ حاوی یک‌گوی n بعدی به مرکز $\mathbf{b}$ خواهد بود. بنابراین، $\mathbf{b}$ یک نقطهٔ درونی $\mathbf{f}(A)$ است، در نتیجه $\mathbf{f}(A)$ باز است.

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که اگر تابعی دارای مشتقهای جزئی پیوسته باشد،

این تابع در نزدیکی نقطه‌ای که دترمینان ژاکوبی آن صفر نشود یک به یک موضعی است.

قضیهٔ ۴۰۱۳ فرض کنیم $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ بر مجموعه‌ای باز مانند S در $\mathbf{R}^n$ دارای مشتقهای جزئی پیوستهٔ $D_j f_i$ باشد، و نیز فرض می‌کنیم در نقطه‌ای مانند $\mathbf{a}$ در S، $J_\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$. در این صورت، یك گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a})$ وجود دارد که بر آن $\mathbf{f}$ یك به یك است.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{Z}_1$، ...، $\mathbf{Z}_n$، n نقطه در S باشند و $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1; \ldots; \mathbf{Z}_n)$ نقطه‌ای در $\mathbf{R}^{n^2}$ باشد که n مؤلفهٔ اول آن مؤلفه‌های $\mathbf{Z}_1$، n مؤلفهٔ بعدی آن مؤلفه‌های $\mathbf{Z}_2$، و به همین قیاس، هستند. تابع حقیقی h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(\mathbf{Z}) = \det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)].$$

این تابع در نقطه‌هائی چون $\mathbf{Z}$ در $\mathbf{R}^{n^2}$ که $h(\mathbf{Z})$ تعریف شده باشد پیوسته است، زیرا هر $D_j f_i$ بر S پیوسته است وهر دترمینان یک چند جمله‌ای از n^2 عضو خود می‌باشد. فرض کنیم $\mathbf{Z}$ نقطهٔ بخصوصی در $\mathbf{R}^{n^2}$ باشد که با قراردادن

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \cdots = \mathbf{Z}_n = \mathbf{a}$$

ساخته می‌شود. در این صورت $h(\mathbf{Z}) = J_\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$، و در نتیجه، بنابر خاصیت پیوستگی، یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a})$ هست بقسمی که اگر هر $\mathbf{Z}_i \in B(\mathbf{a})$، $\det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)] \neq 0$. ثابت می‌کنیم که $\mathbf{f}$ بر $B(\mathbf{a})$ یک به یک است.

فرض کنیم چنین نباشد. یعنی، به‌ازای دو نقطهٔ $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ در $B(\mathbf{a})$، داشته باشیم $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. چون $B(\mathbf{a})$ کوژ است، پس پاره خط $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq B(\mathbf{a})$ و می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین را درمورد هرمؤلفهٔ $\mathbf{f}$ بکار برده، نوشت

$$0 = f_i(\mathbf{y}) - f_i(\mathbf{x}) = \nabla f_i(\mathbf{Z}_i) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{، به‌ازای } i = 1, 2, \ldots, n$$

که در آن هر $\mathbf{Z}_i \in L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$، و در نتیجه $\mathbf{Z}_i \in B(\mathbf{a})$. (چون $\mathbf{f}$ بر S مشتقپذیر است، قضیهٔ مقدار میانگین را می‌توان بکار برد.) اما این یک دستگاه معادله‌های خطی به شکل زیر است:

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) a_{ik} = 0 \text{، که درآن } a_{ik} = D_k f_i(\mathbf{Z}_i).$$

دترمینان این دستگاه صفر نیست، زیرا که $\mathbf{Z}_i \in B(\mathbf{a})$. از این روی، به‌ازای هر k، $y_k - x_k = 0$، و این ناقض فرض $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ است. بدین ترتیب نشان داده‌ایم که

$\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ رابطهٔ $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{y})$ را ایجاب می‌کند، و در نتیجه $\mathbf{f}$ بر $B(\mathbf{a})$ یک به‌یک است.

تبصره. خواننده باید توجه داشته باشد که قضیهٔ ۴.۱۳ یک قضیهٔ موضعی است و کلی نمی‌باشد. صفر نشدن $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ یک به‌یک بودن $\mathbf{f}$ را در یکی از همسایگیهای $\mathbf{a}$ تضمین می‌کند. از این امر، حتی وقتی‌که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در S، $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$، نمی‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{f}$ بر S یک به‌یک است. مثال زیرین این مطلب را مصور می‌کند.

فرض کنیم تابع مختلط f با $f(z) = e^z$، $z \in \mathbf{C}$، تعریف شده باشد. اگر $z = x + iy$، داریم

$$J_f(z) = |f'(z)|^2 = |e^z|^2 = e^{2x} .$$

بنابراین، به‌ازای هر z در $\mathbf{C}$، $J_f(z) \neq 0$. اما، f بر $\mathbf{C}$ یک به‌یک نیست زیرا به‌ازای هرجفت از نقاط z_1 و z_2 که تفاضل آنها $2\pi i$ باشد، $f(z_1) = f(z_2)$.

قضیهٔ زیرین یکی ازخاصیتهای کلی تابعهائی را که دارای دترمینان ژاکوبی ناصفر باشند بدست می‌دهد.

قضیهٔ ۵.۱۳ فرض کنیم A یك زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ باشد، و $\mathbf{f}: A \to \mathbf{R}^n$ دارای مشتقهای جزئی $D_j f_i$ پیوسته بر A باشد. هرگاه به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در A، $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$، آنگاه $\mathbf{f}$ یك نگاشت باز است.

برهان. فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ باز A باشد. اگر $\mathbf{x} \in S$، (بنا بر قضیهٔ ۴.۱۳) یک‌گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ هست‌که برآن $\mathbf{f}$ یک به یک است. بنابراین، به‌موجب قضیهٔ ۳.۱۳، نقش $\mathbf{f}(B(\mathbf{x}))$ در $\mathbf{R}^n$ باز است. اما می‌توان نوشت $S = \bigcup_{\mathbf{x} \in S} B(\mathbf{x})$. با بکار بردن $\mathbf{f}$ نتیجه می‌شودکه $\mathbf{f}(S) = \bigcup_{\mathbf{x} \in S} \mathbf{f}(B(\mathbf{x}))$، پس $\mathbf{f}(S)$ باز است.

تبصره. اگر تابع $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ بر مجموعهٔ S دارای مشتقهای جزئی پیوسته باشد، گوئیم $\mathbf{f}$ بر S مشتقپذیر پیوسته است، و می‌نویسیم $\mathbf{f} \in C'$ بر S است. بنا بر قضیهٔ ۱۱.۱۲، مشتقپذیری پیوسته دریک نقطه مشتقپذیری درآن نقطه را ایجاب می‌کند.

قضیهٔ ۴.۱۳ نشان می‌دهدکه یک تابع مشتقپذیر پیوسته که در نقطه‌ای مانند $\mathbf{a}$ ژاکوبی ناصفر داشته باشد، در یکی از همسایگیهای $\mathbf{a}$ دارای معکوس موضعی است. قضیهٔ زیر بعضی از خاصیتهای مشتقپذیری موضعی این تابع معکوس موضعی را بدست می‌دهد.

۳.۱۳ قضیهٔ تابع معکوس

قضیهٔ ۶.۱۳ فرض کنیم $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C'$ بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^n$ باشد، و $T = \mathbf{f}(S)$. هرگاه به‌ازای نقطه‌ای مانند $\mathbf{a}$ در S، دترمینان ژاکوبی $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$، آنگاه دو مجموعهٔ باز $X \subseteq S$ و $Y \subseteq T$ و تابع منحصر بفردی چون $\mathbf{g}$ وجود دارند بقسمی که

آ) $\mathbf{a} \in X$ و $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in Y$،

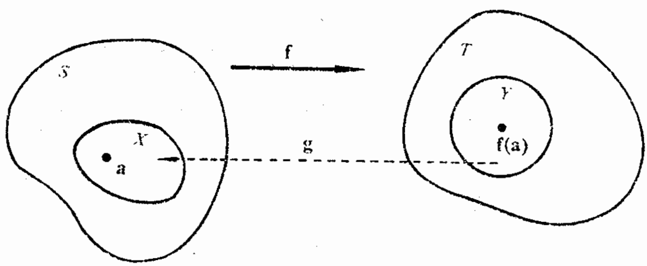
ب) $Y = \mathbf{f}(X)$،

ج) $\mathbf{f}$ بر X یک به‌یک است،

د) $\mathbf{g}$ بر Y تعریف شده است، $\mathbf{g}(Y) = X$، و به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در X، $\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}$،

ه) $\mathbf{g} \in C'$ بر Y است.

برهان. تابع $J_{\mathbf{f}}$ بر S پیوسته است، و چون $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$، یک گوی n بعدی مانند $B_1(\mathbf{a})$ وجود دارد بقسمی که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در $B_1(\mathbf{a})$، $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$. بنا بر قضیهٔ ۴.۱۳، یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a}) \subseteq B_1(\mathbf{a})$ هست‌که بر آن $\mathbf{f}$ یک به یک است. فرض کنیم B یک گوی n بعدی به مرکز $\mathbf{a}$ و شعاع کوچکتر از شعاع $B(\mathbf{a})$ باشد. در این صورت، بنا بر قضیهٔ ۲.۱۳، $\mathbf{f}(B)$ حاوی یک گوی n بعدی به مرکز $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ خواهد بود. این گوی را Y می‌نامیم و قرار می‌دهیم $X = \mathbf{f}^{-1}(Y) \cap B$. در این صورت X باز است زیرا $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ و B هر دو بازاند. (ر.ک. شکل ۲.۱۳.)



شکل ۲.۱۳

مجموعهٔ $\bar{B}$ (بست B) فشرده است، و $\mathbf{f}$ بر $\bar{B}$ یک به‌یک و پیوسته است. از این روی، بنا بر قضیهٔ ۲۹.۴، تابعی مانند $\mathbf{g}$ (تابع معکوس $\mathbf{f}^{-1}$ در قضیهٔ ۲۹.۴) بر $\mathbf{f}(\bar{B})$ بقسمی تعریف شده است که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در $\bar{B}$، $\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}$. بعلاوه، $\mathbf{g}$ بر $\mathbf{f}(\bar{B})$ پیوسته‌است. چون $X \subseteq \bar{B}$ و $Y \subseteq \mathbf{f}(\bar{B})$، پس قسمتهای (آ)، (ب)،

(ج)، و (د) برقرارند. یکتائی $\mathbf{g}$ از قسمت (د) نتیجه می‌شود.

اینک (ه) را ثابت می‌کنیم. برای این منظور، تابع حقیقی h را با معادلهٔ $h(\mathbf{Z}) = \det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)]$ تعریف می‌کنیم، که در آن $\mathbf{Z}_1$، . . .، $\mathbf{Z}_n$، n نقطه در S هستند، و $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1 ; \ldots ; \mathbf{Z}_n)$ نقطهٔ متناظر آنها در $\mathbf{R}^{n^2}$ است. در این صورت، اگر مانند قضیهٔ ۴.۱۳ استدلال کنیم، نتیجه می‌شود که یک گوی n بعدی مانند $B_2(\mathbf{a})$ هست بقسمی که اگر هر $\mathbf{Z}_i \in B_2(\mathbf{a})$، $h(\mathbf{Z}) \neq 0$. حال می‌توان در قسمت اول برهان فرض کرد که گوی n بعدی $B(\mathbf{a})$ بقسمی اختیار شده باشد که $B(\mathbf{a}) \subseteq B_2(\mathbf{a})$. در این صورت $\bar{B} \subseteq B_2(\mathbf{a})$، و اگر هر $\mathbf{Z}_i \in \bar{B}$، $h(\mathbf{Z}) \neq 0$.

برای اثبات (ه)، می‌نویسیم $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$. نشان می‌دهیم که هر $g_k \in C'$ بر Y است. برای اثبات وجود $D_r g_k$ بر Y، فرض می‌کنیم که $\mathbf{y} \in Y$ و خارج قسمت تفاضلی $[g_k(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})]/t$ را، که در آن $\mathbf{u}_r$ عبارت است از بردار مختصات یکهٔ rم، درنظر می‌گیریم. (چون Y باز است، اگر t به‌قدر کافی کوچک باشد، $\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r \in Y$.) قرار می‌دهیم $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ و $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r)$. دراین صورت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}'$ هردو در X هستند و $\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = t\mathbf{u}_r$. از این روی، اگر $i \neq r$، $f_i(\mathbf{x}') - f_i(\mathbf{x})$ مساوی ۰ است، و اگر $i = r$، $f_i(\mathbf{x}') - f_i(\mathbf{x})$ مساوی t خواهد بود. بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین داریم

$$\frac{f_i(\mathbf{x}') - f_i(\mathbf{x})}{t} = \nabla f_i(\mathbf{Z}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{t} \qquad \text{،}\ i = 1, 2, \ldots, n \ \text{به‌ازای}$$

که در آن هر $\mathbf{Z}_i$ بر پاره خطی قرار دارد که $\mathbf{x}$ را به $\mathbf{x}'$ وصل می‌کند؛ از این روی $\mathbf{Z}_i \in B$. عبارت طرف چپ، بر حسب آن که $i = r$ یا $i \neq r$، مساوی ۱ یا ۰ خواهد بود. این یک دستگاه n معادلهٔ خطی برحسب n مجهول $(x'_j - x_j)/t$ است و دارای یک جواب منحصر بفرد است، زیرا

$$\det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)] = h(\mathbf{Z}) \neq 0.$$

حال به‌وسیلهٔ قاعدهٔ کرامر این دستگاه را برای مجهول k ام حل می‌کنیم. از این عمل عبارت $[g_k(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})]/t$ به‌صورت خارج قسمت دو دترمینان بدست می‌آید. وقتی که $t \to 0$، $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$، زیرا $\mathbf{g}$ پیوسته است، و در نتیجه، چون $\mathbf{Z}_i$ بر پاره خط واصل بین $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}'$ قرار دارد، پس هر $\mathbf{Z}_i \to \mathbf{x}$. حد دترمینان مخرج کسر مساوی عدد $\det [D_j f_i(\mathbf{x})] = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ است، و چون $\mathbf{x} \in X$، این عدد ناصفر خواهد بود. بنا براین، حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{t \to 0} \frac{g_k(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})}{t} = D_r g_k(\mathbf{y}).$$

در نتیجه، به‌ازای هر $\mathbf{y}$ در Y و هر $n, \ldots, ۲, ۱ = r$، $D_r g_k(\mathbf{y})$ وجود دارد. بعلاوه، این حد مساوی خارج قسمت دو دترمینان است که هر دو به $D_j f_i(\mathbf{x})$ ها بستگی دارند. از پیوستگی $D_j f_i$ پیوستگی هر مشتق جزئی $D_r g_k$ نتیجه می‌شود، پس برهان (ه) تمام است.

تبصره. برهان قبل روشی نیز برای محاسبهٔ $D_r g_k(\mathbf{y})$ بدست می‌دهد. در عمل، مشتقهای $D_r g_k$ را می‌توان (بی مراجعه به عمل حد گیری) با استفاده از این حقیقت که اگر $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$، حاصل ضرب دو ماتریس ژاکوبی $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{Dg}(\mathbf{y})$ مساوی ماتریس همانی است، ساده‌تر بدست آورد. اگر این را به‌طور مشروح بنویسیم، دستگاه $n^۲$ معادلهٔ زیرین نتیجه خواهد شد:

$$\sum_{k=۱}^{n} D_k g_i(\mathbf{y})\, D_j f_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } i = j \text{ ،} \\ ۰ & \text{اگر } i \neq j \text{ ،} \end{cases}$$

به‌ازای هر i ثابت، اگر j مقدارهای ۱، ۲، . . .، n را بخود بگیرد، n معادلهٔ خطی بدست می‌آید. این معادله‌ها را می‌توان به کمک قاعدهٔ کرامر و یا روش دیگر برای n مجهول $D_۱ g_i(\mathbf{y})$، . . .، $D_n g_i(\mathbf{y})$ حل کرد.

۴.۱۳ قضیهٔ تابع ضمنی

می‌دانیم که معادلهٔ یک خم در صفحهٔ xy را می‌توان به شکلی «صریح»، مانند $y = f(x)$، یا به شکلی «ضمنی»، مانند $F(x, y) = ۰$، بیان کرد. اما، اگر معادله‌ای به‌شکل $F(x, y) = ۰$ داده شده باشد، این معادله لزوماً تابعی را نمایش نخواهد داد. (مثلاً، $x^۲ + y^۲ - ۵ = ۰$.) البته معادلهٔ $F(x, y) = ۰$ همواره یک رابطه را نمایش می‌دهد، یعنی مجموعهٔ همهٔ جفتهای (x, y) که در این معادله صدق‌کنند. بنابراین، سؤال زیر خودبخود مطرح می‌شود: چه وقت رابطه‌ای که با $F(x, y) = ۰$ تعریف شود تابع هم هست؟ با بیان دیگر می‌توان پرسید که، چه وقت می‌توان معادلهٔ $F(x, y) = ۰$ را به‌طور صریح برای y بر حسب x حل کرده. جواب منحصر بفرد بدست آورد؟ قضیهٔ تابع ضمنی با این سؤال به‌طور موضعی سرو کار دارد. بنابراین قضیه، در نقطهٔ داده شدهٔ $(x_۰, y_۰)$ که $F(x_۰, y_۰) = ۰$، باشرایطی‌چند، یک همسایگی $(x_۰, y_۰)$ وجود داردکه درآن‌همسایگی، رابطهٔ تعریف شده‌با $F(x, y) = ۰$ تابع هم‌هست. این‌شرطها عبارتند از اینکه F و $D_۲ F$ در یکی از همسایگیهای $(x_۰, y_۰)$ پیوسته باشند و $D_۲ F(x_۰, y_۰) \neq ۰$. درشکل کلیتر این قضیه، به جای بحث در یک معادله برحسب دو متغیر، دربارهٔ دستگاهی مرکب

از n معادله بر حسب $n+k$ متغیر مانند

$$f_r(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

بحث می‌شود. اگر بعضی از مشتقهای جزئی پیوسته باشند و دترمینان ژاکوبی $n \times n$ $\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$ صفر نباشد، می‌توان این دستگاه را برای x_1، ...، x_n بر حسب t_1، ...، t_k حل کرد.

برای اختصار، در این قضیه نماد زیرین را می‌پذیریم: نقطه‌های فضای $(n+k)$ بعدی $\mathbf{R}^{n+k}$ را به شکل $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ می‌نویسیم، که در آن

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \text{ و } \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbf{R}^k.$$

قضیهٔ ۷.۱۳ (قضیهٔ تابع ضمنی). فرض کنیم $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ تابعی برداری باشد که بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^{n+k}$ تعریف شده باشد و مقادیر آن در $\mathbf{R}^n$ باشند. فرض می‌کنیم $\mathbf{f} \in C'$ بر S باشد. همچنین $(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$ نقطه‌ای در S باشد که به‌ازای آن $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$ و به‌ازای آن دترمینان $n \times n$، $\det[D_j f_i(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)] \neq 0$.
در این صورت، یک مجموعهٔ باز k بعدی مانند T_0 حاوی $\mathbf{t}_0$ و یک، و فقط یک، تابع برداری مانند $\mathbf{g}$، تعریف شده بر T_0 با مقادیر در $\mathbf{R}^n$، وجود دارند بقسمی که

آ) $\mathbf{g} \in C'$ بر T_0 است؛

ب) $\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$؛

ج) به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در T_0، $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) = \mathbf{0}$.

برهان. قضیهٔ تابع معکوس را در مورد تابعی برداری مانند

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n; F_{n+1}, \ldots, F_{n+k}),$$

که بر S تعریف شده است و مقادیرش در $\mathbf{R}^{n+k}$ است، بکار خواهیم برد. تابع $\mathbf{F}$ به‌صورت زیر تعریف شده است: به‌ازای $1 \leqslant m \leqslant n$، قرار می‌دهیم $F_m(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = f_m(\mathbf{x}; \mathbf{t})$، و به‌ازای $1 \leqslant m \leqslant k$، قرار می‌دهیم

$$F_{n+m}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = t_m.$$

پس می‌توان نوشت $\mathbf{F} = (\mathbf{f}; \mathbf{I})$، که در آن $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ و $\mathbf{I}$ تابع همانی است که به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در $\mathbf{R}^k$ با $\mathbf{I}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ تعریف می‌شود. در این صورت، دترمینان ژاکوبی $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ همان مقدار دترمینان $n \times n$ $\det[D_j f_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})]$ را دارد، زیرا جمله‌هائی که در k سطر و همچنین k ستون آخر $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ ظاهر می‌شوند تشکیل یک دترمینان $k \times k$ می‌دهند که عضوهای آن در امتداد قطر اصلی همه ۱ و در

سایر جاها صفرند؛ اشتراک n سطر اول و n ستون اول دترمینان $\det[D_jf_i(\mathbf{x};\mathbf{t})]$ را تشکیل می‌دهد، و

$$\text{به‌ازای } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ و } 1 \leqslant j \leqslant k\text{،} \quad D_iF_{n+j}(\mathbf{x};\mathbf{t}) = 0.$$

از این روی، دترمینان ژاکوبی $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0;\mathbf{t}_0) \neq 0$. همچنین، $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0;\mathbf{t}_0) = (\mathbf{0};\mathbf{t}_0)$. پس، بنابر قضیهٔ ۶.۱۳، مجموعه‌های بازی مانند X و Y، که بترتیب حاوی نقطه‌های $(\mathbf{x}_0;\mathbf{t}_0)$ و $(\mathbf{0};\mathbf{t}_0)$ باشند، وجود دارند بقسمی که $\mathbf{F}$ بر X یک به‌یک است، و $X = \mathbf{F}^{-1}(Y)$. همچنین، یک تابع معکوس موضعی مانند $\mathbf{G}$ هست‌که بر Y تعریف شده است و مقادیرش در X می‌باشند بقسمی که

$$\mathbf{G}[\mathbf{F}(\mathbf{x};\mathbf{t})] = (\mathbf{x};\mathbf{t}),$$

و $\mathbf{G} \in C'$ بر Y است.

حال می‌توان $\mathbf{G}$ را به مؤلفه‌هایش به‌صورت $\mathbf{G} = (\mathbf{v};\mathbf{w})$ تحویل کرد، که در آن $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ تابعی است برداری که بر Y تعریف شده است و مقادیرش در $\mathbf{R}^n$ هستند و $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_k)$ نیز بر Y تعریف شده است ولی مقادیرش در $\mathbf{R}^k$ می‌باشند. حال می‌توان $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را به‌طور صریح مشخص کرد. اگر معادلهٔ $\mathbf{G}[\mathbf{F}(\mathbf{x};\mathbf{t})] = (\mathbf{x};\mathbf{t})$ را برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بنویسیم، دو معادلهٔ

$$\mathbf{v}[\mathbf{F}(\mathbf{x};\mathbf{t})] = \mathbf{x} \quad \text{و} \quad \mathbf{w}[\mathbf{F}(\mathbf{x};\mathbf{t})] = \mathbf{t}$$

بدست می‌آیند. اما، هر نقطهٔ $(\mathbf{x};\mathbf{t})$ در Y را می‌توان به‌ازای یک $(\mathbf{x}';\mathbf{t}')$ در X به‌طور منحصر بفرد به شکل $(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}';\mathbf{t}')$ درآورد، زیرا $\mathbf{F}$ بر X یک به‌یک است و نقش معکوس $\mathbf{F}^{-1}(Y)$ مجموعهٔ X را دربر می‌گیرد. بعلاوه، از تعریف $\mathbf{F}$ معلوم می‌شود که، وقتی بنویسیم $(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}';\mathbf{t}')$، باید داشته باشیم $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$. بنابراین،

$$\mathbf{v}(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \mathbf{v}[\mathbf{F}(\mathbf{x}';\mathbf{t})] = \mathbf{x}' \quad \text{و} \quad \mathbf{w}(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \mathbf{w}[\mathbf{F}(\mathbf{x}';\mathbf{t})] = \mathbf{t}.$$

از این روی تابع G را می‌توان بدین صورت توصیف کرد: به‌ازای نقطهٔ مفروض $(\mathbf{x};\mathbf{t})$ در Y، داریم $\mathbf{G}(\mathbf{x};\mathbf{t}) = (\mathbf{x}';\mathbf{t})$، که در آن $\mathbf{x}'$ نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ است بقسمی که $(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}';\mathbf{t})$. از این نتیجه می‌شود که

$$\text{به‌ازای هر } (\mathbf{x};\mathbf{t}) \text{ در } Y\text{،} \quad \mathbf{F}[\mathbf{v}(\mathbf{x};\mathbf{t});\mathbf{t}] = (\mathbf{x};\mathbf{t}).$$

حال آماده‌ایم که مجموعهٔ T_0 و تابع $\mathbf{g}$ مذکور در قضیه را تعریف کنیم. فرض کنیم‌که

$$T_0 = \{\mathbf{t} \mid \mathbf{t} \in \mathbf{R}^k,\ (\mathbf{0};\mathbf{t}) \in Y\},$$

و به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در $T_\circ$، تعریف می‌کنیم $\mathbf{g(t)} = \mathbf{v}(\circ\,;\mathbf{t})$. مجموعهٔ $T_\circ$ در $\mathbf{R}^k$ باز است. بعلاوه، $\mathbf{g} \in C'$ بر $T_\circ$ است زیرا $\mathbf{G} \in C'$ بر Y است و مؤلفه‌های $\mathbf{g}$ از مؤلفه‌های $\mathbf{G}$ گرفته شده‌اند. همچنین،

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}_\circ) = \mathbf{v}(\circ\,;\mathbf{t}_\circ) = \mathbf{x}_\circ$$

زیرا $(\circ\,;\mathbf{t}_\circ) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_\circ\,;\mathbf{t}_\circ)$. بالاخره، از معادلهٔ $\mathbf{F}[\mathbf{v}(\mathbf{x}\,;\mathbf{t});\mathbf{t}] = (\mathbf{x}\,;\mathbf{t})$، که به‌ازای هر $(\mathbf{x}\,;\mathbf{t})$ در Y برقرار است، (با توجه به مؤلفه‌هایش در $\mathbf{R}^n$) معادلهٔ $\mathbf{f}[\mathbf{v}(\mathbf{x}\,;\mathbf{t});\mathbf{t}] = \mathbf{x}$ نتیجه می‌شود. با فرض $\mathbf{x} = \circ$، ملاحظه می‌شود که به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در $T_\circ$، داریم $\mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{t});\mathbf{t}] = \circ$، و درنتیجه برهان‌گزاره‌های (آ)، (ب)، و (ج) تمام است. باقی می‌ماند اثبات این‌که $\mathbf{g}$ منحصر بفرد است. اما این مطلب بی‌درنگ از یک به‌یک بودن $\mathbf{f}$ نتیجه می‌شود. هرگاه تابع دیگری، مثلاً $\mathbf{h}$، وجود می‌داشت که در (ج) صدق می‌کرد، آنگاه باید $\mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{t});\mathbf{t}] = \mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{t});\mathbf{t}]$، و از این نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در $T_\circ$، $(\mathbf{g}(\mathbf{t});\mathbf{t}) = (\mathbf{h}(\mathbf{t});\mathbf{t})$، یا $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{h}(\mathbf{t})$.

۵.۱۳ اکسترممهای توابع حقیقی یك متغیره

تا خاتمهٔ این فصل تابعهای حقیقی f را درنظر می‌گیریم، و (در صورت وجود) نقطه‌هائی را که در آنها f یک اکسترمم موضعی، یعنی ماکزیمم یا مینیمم موضعی، دارد مشخص می‌کنیم.

قبلاً در این مورد نتیجه‌ای برای تابعهای یک متغیره بدست آورده‌ایم (قضیهٔ ۹.۵). در آن قضیه ملاحظه شد که شرطی لازم برای آن که تابع f در یک نقطهٔ درونی یک بازه مانند c دارای اکسترمم موضعی باشد آن است که، در صورت وجود $f'(c)$ ، $f'(c) = \circ$. اما این شرط کافی نیست، و آن را می‌توان با فرض $f(x) = x^3$ و $c = \circ$ دید. اینک برای این مطلب شرطی کافی بدست می‌آوریم.

قضیهٔ ۸.۱۳ فرض‌کنیم به‌ازای عددی صحیح مانند $n \geqslant 1$، مشتق nم تابع f در بازهٔ باز $]a, b[$ پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم که به‌ازای یک نقطهٔ درونی مانند c در $]a, b[$، داشته باشیم

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = \circ \quad \text{اما} \quad f^{(n)}(c) \neq \circ.$$

در این صورت، در حالت زوج بودن n، اگر $f^{(n)}(c) > \circ$ ، f در c دارای مینیمم موضعی است، و اگر $f^{(n)}(c) < \circ$ ، f در c ماکزیمم موضعی دارد. اگر n فرد باشد، f در c نه ماکزیمم موضعی دارد نه مینیمم موضعی.

برهان. چون $f^{(n)}(c) \neq \circ$، بازه‌ای مانند $B(c)$ وجود دارد بقسمی‌که به‌ازای هر

x در $B(c)$، $f^{(n)}(x)$ دارای همان علامت $f^{(n)}(c)$ است. اما، بنابر دستور تیلور (قضیهٔ ۱۹۰۵)، به‌ازای هر x در $B(c)$،

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n$$ ، که درآن $x_1 \in B(c)$.

اگر n زوج باشد، از این معادله نتیجه می‌شود که وقتی که $f^{(n)}(c) > 0$،

$$f(x) \geqslant f(c),$$

و وقتی که $f^{(n)}(c) \leqslant 0$، $f(x) \leqslant f(c)$. هر گاه n فرد باشد و $f^{(n)}(c) > 0$، آنگاه درصورت $x > c$، $f(x) > f(c)$، ولی درصورت $x < c$، $f(x) < f(c)$، و f در c نمی‌تواند اکسترمم داشته باشد. گزاره‌ای مشابه برای وقتی که n فرد باشد و $f^{(n)}(c) < 0$ برقرار است. پس قضیه ثابت است.

۶۰۱۳ اکسترممهای توابع حقیقی چند متغیره

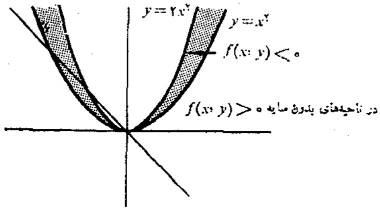
حال تابعهای چند متغیره را درنظر می‌گیریم. تمرین ۱۰۱۲ شرطی لازم برای آن بدست می‌دهد که تابعی در یک نقطهٔ درونی یک مجموعهٔ باز مانند $\mathbf{a}$ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی باشد. شرط این است که هر $D_k f(\mathbf{a})$ باید در این نقطه صفر باشد. می‌توان این مطلب را برحسب مشتقهای جهتی نیز بیان کرد و گفت که به‌ازای هر بردار $\mathbf{u}$ باید $\mathbf{f}'(\mathbf{a};\mathbf{u})$ صفر باشد.

اما، عکس این‌گزاره صحیح نیست. تابع دو متغیرهٔ زیر را به‌عنوان مثال درنظر می‌گیریم:

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

در این‌جا $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$. در این مثال $f(0, 0) = 0$، اما این تابع در هرهمسایگی $(0, 0)$ هم مقدارمثبت و هم مقدار منفی بخود می‌گیرد، پس درنقطهٔ $(0, 0)$ تابع نه‌ماکزیمم موضعی دارد و نه مینیمم موضعی. (ر.ک. شکل ۳۰۱۳).

این مثال پدیدهٔ جالب دیگری را مصور می‌سازد. هر گاه خط راست ثابتی را که از مبدأ بگذرد درنظربگیریم، و نقطهٔ (x, y) در امتداد این خط به‌طرف $(0, 0)$ حرکت‌کند، آنگاه این نقطه بالاخره وارد ناحیهٔ بالای سهمی $y = 2x^2$ (یا زیرسهمی $y = x^2$) می‌شود، که در آن $f(x, y)$ به‌ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ مثبت است. بنابراین، در امتداد هر چنین خطی، f در $(0, 0)$ مینیمم دارد، اما مبدأ در هیچ یک از همسایگیهای دو بعدی نقطهٔ $(0, 0)$ مینیمم موضعی نیست.



شکل ۳.۱۳

تعریف ۹.۱۳ اگر f درنقطهٔ $\mathbf{a}$ مشتقپذیر باشد و $\nabla f(\mathbf{a}) = ۰$، نقطهٔ $\mathbf{a}$ را یک نقطهٔ ایستای $\mathbf{f}$ می‌نامند. یک نقطهٔ ایستا را یک نقطهٔ زینی نامند در صورتی‌که هر گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a})$ حاوی نقطه‌هائی مانند $\mathbf{x}$ باشد که به‌ازای بعضی از آنها $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$ و به‌ازای بعضی دیگر $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$.

در مثال قبل، مبدأ یک نقطهٔ زینی تابع است.

برای آن که ببینیم یک تابع n متغیره در نقطهٔ ایستای $\mathbf{a}$ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است، یا $\mathbf{a}$ نقطهٔ زینی است، باید به‌ازای هر $\mathbf{x}$ دریکی ازهمسایگیهای $\mathbf{a}$ علامت جبری $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ را تعیین کنیم. این‌عمل، مانند حالت یک بعدی، به کمک دستور تیلور (قضیهٔ ۱۴.۱۲) انجام می‌شود. در قضیهٔ ۱۴.۱۲ فرض می‌کنیم که $m = ۲$ و $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{t}$. هر گاه مشتقهای جزئی f بر یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a})$ مشتقپذیر باشند، آنگاه

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{t} + \frac{۱}{۲} f''(\mathbf{z}; \mathbf{t}), \qquad (۳)$$

که در آن $\mathbf{z}$ برپاره خطی‌که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a} + \mathbf{t}$ را به هم وصل می‌کند قرار دارد، و

$$f''(\mathbf{z}; \mathbf{t}) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} D_{i,j} f(\mathbf{z}) t_i t_j \,.$$

در یک نقطهٔ ایستا $\nabla f(\mathbf{a}) = ۰$، پس (۳) به صورت

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = \frac{۱}{۲} f''(\mathbf{z}; \mathbf{t})$$

درمی‌آید. بنابراین، وقتی که $\mathbf{a} + \mathbf{t}$ روی $B(\mathbf{a})$ تغییر کند، علامت جبری $f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a})$ به‌وسیلهٔ $f''(\mathbf{z}; \mathbf{t})$ مشخص می‌شود. می‌توان (۳) را به شکل

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = \frac{۱}{۲} f''(\mathbf{a}; \mathbf{t}) + \|\mathbf{t}\|^۲ E(\mathbf{t}) \qquad (۴)$$

نوشت، که درآن

$$\|\mathbf{t}\|^{۲} E(\mathbf{t}) = \frac{۱}{۲} f''(\mathbf{z}; \mathbf{t}) - \frac{۱}{۲} f''(\mathbf{a}; \mathbf{t}).$$

نامساوی

$$\|\mathbf{t}\|^{۲} |E(\mathbf{t})| \leqslant \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} |D_{i,j}f(\mathbf{z}) - D_{i,j}f(\mathbf{a})| \, \|\mathbf{t}\|^{۲}$$

نشان میدهد که اگر مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم f در $\mathbf{a}$ پیوسته باشند، وقتی که $\mathbf{t} \to \mathbf{o}$، $E(\mathbf{t}) \to ۰$. چون $\|\mathbf{t}\|^{۲}E(\mathbf{t})$ از $\|\mathbf{t}\|^{۲}$ سریعتر به صفر میگراید، میتوان انتظار داشت که علامت جبری $f(\mathbf{a}+\mathbf{t}) - f(\mathbf{a})$ بهوسیلهٔ $f''(\mathbf{a}; \mathbf{t})$ تعیین گردد. این مطلب در قضیهٔ زیرین ثابت میشود.

قضیهٔ ۱۰.۱۳ (آزمون مشتق دوم برای اکسترممها). فرض کنیم مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم f، یعنی $D_{i,j}f$ها، در یك گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a})$ وجود داشته باشند، و در نقطهٔ $\mathbf{a}$ که یك نقطهٔ ایستای f است پیوسته باشند. قرار میدهیم

$$Q(\mathbf{t}) = \frac{۱}{۲} f''(\mathbf{a}; \mathbf{t}) = \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} D_{i,j}f(\mathbf{a}) t_i t_j. \qquad (۵)$$

آ) اگر بهازای هر $\mathbf{t} \neq \mathbf{o}$، $Q(\mathbf{t}) > ۰$، f دارای مینیمم نسبی در $\mathbf{a}$ است.

ب) اگر بهازای هر $\mathbf{t} \neq \mathbf{o}$، $Q(\mathbf{t}) < ۰$، f دارای ماکزیمم نسبی در $\mathbf{a}$ است.

ج) هرگاه $Q(\mathbf{t})$ مقدارهای مثبت و منفی هر دو را بگیرد، آنگاه f یک نقطهٔ زینی در $\mathbf{a}$ دارد.

برهان. تابع Q در هر نقطهٔ $\mathbf{t}$ در $\mathbf{R}^n$ پیوسته است. فرض کنیم که

$$S = \{\mathbf{t} \mid \|\mathbf{t}\| = ۱\}$$

کرانهٔ گوی n بعدی $B(\mathbf{o}; ۱)$ را نشان دهد. هرگاه بهازای هر $\mathbf{t} \neq \mathbf{o}$، $Q(\mathbf{t}) > ۰$، آنگاه $Q(\mathbf{t})$ بر S مثبت است. چون S فشرده است، Q بر S دارای مینیممی است (آن را m مینامیم)، و $m > ۰$. اما بهازای هرعدد حقیقی c، $Q(c\mathbf{t}) = c^{۲}Q(\mathbf{t})$. اگر بهازای $\mathbf{t} \neq \mathbf{o}$، $c = ۱/\|\mathbf{t}\|$ اختیار شود، ملاحظه میشود که $c\,\mathbf{t} \in S$، و درنتیجه $c^{۲}Q(\mathbf{t}) \geqslant m$، پس $Q(\mathbf{t}) \geqslant m\|\mathbf{t}\|^{۲}$. اگر این مقدار را در (۴) بکار بریم، بدست میآوریم

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = Q(\mathbf{t}) + \|\mathbf{t}\|^{۲}E(\mathbf{t}) \geqslant m\|\mathbf{t}\|^{۲} + \|\mathbf{t}\|^{۲}E(\mathbf{t}).$$

چون، وقتی که $\mathbf{t} \to \mathbf{o}$، $E(\mathbf{t}) \to ۰$، پس عدد مثبتی مانند r یافت میشود بقسمی

که اگر $0 < \|\mathbf{t}\| < r$، $|E(\mathbf{t})| < m/2$. به‌ازای این مقدار $\mathbf{t}$ داریم

$$0 \leqslant \|\mathbf{t}\|^2 |E(\mathbf{t})| < \frac{1}{2} m \|\mathbf{t}\|^2,$$

پس

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) > m\|\mathbf{t}\|^2 - \frac{1}{2} m \|\mathbf{t}\|^2 = \frac{1}{2} m \|\mathbf{t}\|^2 > 0 .$$

بنابراین، f دارای مینیمم نسبی در $\mathbf{a}$ است، یعنی حکم (آ) برقرار است. قسمت (ب) رامی‌توان یا با بیانی‌مشابه ثابت‌کرد، یاقسمت (آ) را برای $-f$ بکار برد.

بالاخره، قسمت (ج) را ثابت می‌کنیم. به‌ازای هر $\lambda > 0$، از (۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) &= Q(\lambda\mathbf{t}) + \lambda^2 \|\mathbf{t}\|^2 E(\lambda\mathbf{t}) \\ &= \lambda^2 \{Q(\mathbf{t}) + \|\mathbf{t}\|^2 E(\lambda\mathbf{t})\}. \end{aligned}$$

فرض‌کنیم به‌ازای یک مقدار $\mathbf{t}$، $Q(\mathbf{t}) \neq 0$. چون وقتی‌که $\mathbf{y} \to \mathbf{o}$، $E(\mathbf{y}) \to 0$، پس عدد مثبتی مانند r وجود دارد بقسمی که

اگر $0 < \lambda < r$، $\|\mathbf{t}\|^2 E(\lambda\mathbf{t}) < \frac{1}{2} |Q(\mathbf{t})|$.

بنابراین، به‌ازای هر چنین λای، مقدار $\lambda^2\{Q(\mathbf{t}) + \|\mathbf{t}\|^2 E(\lambda\mathbf{t})\}$ دارای همان علامت $Q(\mathbf{t})$ است. بنابراین، اگر $0 < \lambda < r$، تفاضل $f(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{t}) - f(\mathbf{a})$ دارای علامت $Q(\mathbf{t})$ خواهد بود. از این روی، اگر $Q(\mathbf{t})$ مقدارهای مثبت و منفی هردو را بگیرد، نتیجه می‌شود که f در $\mathbf{a}$ یک نقطهٔ زینی دارد.

تبصره. تابعی حقیقی مانند Q که بر $\mathbf{R}^n$ با معادله‌ای از نوع

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

تعریف شود، که در آن $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و a_{ij}ها عددهائی حقیقی باشند، یک فرم درجهٔ دوم نامیده می‌شود. فرم را تقارنی نامیم در صورتی که به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = a_{ji}$. فرم را معین مثبت نامیم در صورتی که اگر $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$، $Q(\mathbf{x}) > 0$، و آن را معین منفی گوئیم در صورتی که اگر $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$، $Q(\mathbf{x}) < 0$.

عموماً تشخیص این که یک فرم درجهٔ دوم معین مثبت یا منفی است آسان نیست. یک محک، که درآن «مقدارهای ویژه» وارد می‌شوند، در کتاب مرجع ۱.۱۳، قضیهٔ ۵.۹، توصیف شده است. محک دیگر را، که درآن دترمینانها مداخله

دارند، می‌توان چنین توصیف کرد. فرض کنیم $\Delta = \det[a_{ij}]$ و Δ_k دترمینان ماتریس $k \times k$ای را نشان دهد که از حذف $(n-k)$ سطر و ستون آخر $[a_{ij}]$ حاصل گردد. همچنین، قرار می‌دهیم $\Delta_0 = 1$. از نظریهٔ فرمهای درجهٔ دوم می‌دانیم که شرطی لازم و کافی برای آن که یک فرم تقارنی معین مثبت باشد آن است که $n+1$ عدد Δ_0، Δ_1، . . .، Δ_n مثبت باشند. فرم وقتی، و فقط وقتی، معین منفی است‌که همان $n+1$ عدد به‌طور متناوب مثبت و منفی باشند. (ر. ک. کتاب مرجع ۲.۱۳ از صفحهٔ ۳۰۴ تا ۳۰۸.) فرم درجهٔ دوم مذکور در (۵) تقارنی است زیرا مشتقهای جزئی مخلوط $D_{i,j}f(\mathbf{a})$ و $D_{j,i}f(\mathbf{a})$ با یکدیگر متساویند. بنابراین، با شرطهای قضیهٔ ۱۰.۱۳، ملاحظه می‌شود که اگر $(n+1)$ عدد Δ_0، Δ_1، . . .، Δ_n همه مثبت باشند، f در $\mathbf{a}$ مینیمم موضعی دارد، و اگر این عددها متناوباً مثبت و منفی باشند، f در این نقطه ماکزیمم موضعی خواهد داشت. حالت $n = 2$ را مستقیماً می‌توان بررسی کرد و محک زیر را برای آن بدست آورد.

قضیهٔ ۱۱.۱۳ فرض کنیم تابع حقیقی f دارای مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته در نقطهٔ ایستای $\mathbf{a}$ در $\mathbf{R}^2$ باشد. قرار می‌دهیم

$$A = D_{1,1}f(\mathbf{a}),\ \ B = D_{1,2}f(\mathbf{a}),\ \ C = D_{2,2}f(\mathbf{a}),$$

و

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = AC - B^2.$$

در این صورت:

آ) اگر $\Delta > 0$ و $A > 0$، f در $\mathbf{a}$ مینیمم نسبی دارد،

ب) اگر $\Delta > 0$ و $A < 0$، f در $\mathbf{a}$ ماکزیمم نسبی دارد،

ج) اگر $\Delta < 0$، f یک نقطهٔ زینی در $\mathbf{a}$ دارد.

برهان. در حالت ۲ بعدی می‌توان فرم درجهٔ دوم (۵) را چنین نوشت:

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}\{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2\}.$$

اگر $A \neq 0$، این فرم را بدین شکل نیز می‌توان درآورد:

$$Q(x, y) = \frac{1}{2A}\{(Ax + By)^2 + \Delta y^2\}.$$

اگر $\Delta > 0$، عبارت داخل دو ابرو مجموع دو مربع است، پس $Q(x, y)$ دارای همان علامت A است. بنابراین، گزاره‌های (آ) و (ب) را می‌توان بی‌درنگ از

قسمتهای (آ) و (ب) قضیهٔ ۱۰.۱۳ نتیجه گرفت.

اگر $\Delta < 0$، فرم درجهٔ دوم مساوی حاصل ضرب دو سازهٔ خطی است. بنابراین، مجموعهٔ نقطه‌هائی چون (x, y) که $Q(x, y) = 0$ عبارت است از دو خط در صفحهٔ xy که در $(0, 0)$ متقاطعند. این خطها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند؛ $Q(x, y)$ در دو ناحیه مثبت و در دو ناحیهٔ دیگر منفی است. بنابراین، f یک نقطهٔ زینی در $\mathbf{a}$ دارد.

تبصره. اگر $\Delta = 0$، f در $\mathbf{a}$ ممکن است ماکزیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد، یا $\mathbf{a}$ یک نقطهٔ زینی f باشد.

۷.۱۳ مسأله‌های اکسترمم با شرطهای جنبی

مسألهٔ اکسترمم از نوع زیر را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم که $f(x, y, z)$ درجهٔ حرارت را در نقطهٔ (x, y, z) درفضا نمایش دهد. می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم درجهٔ حرارت را روی یک رویهٔ معین پیدا کنیم. هرگاه معادلهٔ رویه به شکل صریح $z = h(x, y)$ داده شده باشد، آنگاه در عبارت $f(x, y, z)$ می‌توان z را با $h(x, y)$ عوض کرد و درجهٔ حرارت روی رویه را فقط به‌عنوان تابعی از x و y، یعنی به‌صورت $F(x, y) = f[x, y, h(x, y)]$، بدست آورد. در این صورت، مسأله به یافتن مقدارهای اکسترمم F منجر می‌شود. اما، در عمل، بعضی مشکلات بوجود می‌آیند. معادلهٔ رویه ممکن است به شکل ضمنی $g(x, y, z) = 0$ داده شده باشد، و ممکن است عملاً حل صریح این معادله برای z برحسب x و y، یا حتی برای x یا y برحسب بقیهٔ متغیرها، ناممکن باشد. اگر منظور یافتن مقدارهای اکسترمم درجهٔ حرارت بریک خم مفروض در فضا باشد، مسأله ممکن است پیچیده‌تر شود. یک چنین خم عبارت از اشتراک دو رویه، مثلاً $g_1(x, y, z) = 0$ و $g_2(x, y, z) = 0$، است. هرگاه بتوان این دومعادله را همزمان، مثلاً برای x و y برحسب z، حل‌کرد، آنگاه می‌توان این عبارتها را در f گذارد و تابعی جدید فقط از z بدست آورد، و سپس اکسترممهای آن را جستجو کرد. اما، درحالت کلی، این عمل امکان پذیر نیست وباید روش عملیتری برای آن یافت. روشی زیبا و مفید برای حل این چنین مسائل وجود دارد که به‌وسیلهٔ لاگرانژ ابداع شده است.

روش لاگرانژ شرطی لازم برای وجود اکسترمم بدست می‌دهد، و می‌توان آن را چنین توصیف کرد. فرض کنیم $f(x_1, \ldots, x_n)$ عبارتی باشد که می‌خواهیم مقدارهای اکسترمم آن را بدست آوریم با فرض آن که متغیرها مقید به تعدادی شرط جنبی مثلاً

$$g_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n) = 0,$$

باشند. برای این‌کار ترکیب خطی

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \cdots, x_n)$$

را، که در آن λ_1، . . .، λ_m، m عدد پایا هستند، تشکیل می‌دهیم. سپس از φ برحسب هرمختص مشتق گرفته، دستگاه $m + n$ معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$D_r\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad r = 1, 2, \cdots, n,$$
$$g_k(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, m.$$

لاگرانژ دریافت که هرگاه نقطهٔ $(x_1, \cdots, x_n)$ یک جواب مسألهٔ اکسترمم باشد، آنگاه این جواب در این دستگاه $m + n$ معادله نیز صدق می‌کند. در عمل، سعی می‌کنیم که این دستگاه را برای $m + n$ «مجهول» λ_1، . . .، λ_m و x_1، . . .، x_n حل کنیم. سپس باید نقطه‌هائی مانند $(x_1, \cdots, x_n)$ را که بدین طریق بدست می‌آیند آزمایش کنیم تا ببینیم که در آنها f ماکزیمم است، یا مینیمم، یا هیچ‌یک. عددهای λ_1، . . .، λ_m، که برای کمک به حل دستگاه برای x_1، . . .، x_n وارد شده‌اند، به نام تکثیرکنهای لاگرانژ معروفند. به‌ازای هر شرط جنبی یک تکثیرکن معرفی می‌شود.

در این مسائل برای تشخیص بین ماکزیممها و مینیممها یک محک پیچیدهٔ تحلیلی وجود دارد. (مثلاً، ر. ک. کتاب مرجع ۰.۳.۱۳) اما این محک درعمل زیاد مفید نیست، و در هر مسألهٔ بخصوص، برای تشخیص این تمایز، معمولاً توسل به روشهای دیگر (مثلاً، ملاحظات فیزیکی یا هندسی) آسانتر است.

قضیهٔ زیرین معتبر بودن روش لاگرانژ را تأیید می‌کند:

قضیهٔ ۱۲.۱۳ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی بقسمی‌که $f \in C'$ بر مجموعهٔ بازی چون S در $\mathbf{R}^n$ باشد. همچنین فرض کنیم که g_1، . . .، g_m، m تابع حقیقی باشند بقسمی‌که $\mathbf{g} = (g_1, \cdots, g_m) \in C'$ بر S باشد و $m < n$. بعلاوه، X_0 آن زیرمجموعهٔ S باشد که $\mathbf{g}$ برآن صفر شود، یعنی،

$$X_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

و فرض می‌کنیم که $\mathbf{x}_0 \in X_0$، و یك گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x}_0)$ وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در $X_0 \cap B(\mathbf{x}_0)$، $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)$، یا به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در $X_0 \cap B(\mathbf{x}_0)$، $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0)$. و نیز دترمینان mسطری

$$\det[D_j g_i(\mathbf{x}_\circ)] \neq \circ.$$

در این صورت، m عدد حقیقی $\lambda_۱$، . . .، λ_m وجود دارند بقسمی که بهازای آنها n معادلهٔ زیر برقرارند:

$$(۶) \qquad D_r f(\mathbf{x}_\circ) + \sum_{k=۱}^{m} \lambda_k D_r g_k(\mathbf{x}_\circ) = \circ \qquad (r = ۱, ۲, \ldots, n).$$

تبصره. n معادلهٔ (۶) همارز معادلهٔ برداری زیرند:

$$\nabla f(\mathbf{x}_\circ) + \lambda_۱ \nabla g_۱(\mathbf{x}_\circ) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}_\circ) = \circ.$$

برهان. دستگاه m معادلهٔ خطی برحسب m مجهول $\lambda_۱$، . . .، λ_m زیرین را درنظر میگیریم:

$$\sum_{k=۱}^{m} \lambda_k D_r g_k(\mathbf{x}_\circ) = - D_r f(\mathbf{x}_\circ) \quad (r = ۱, ۲, \ldots, m).$$

این دستگاه دارای جوابی منحصر بفرد است زیرا، بنابرفرض، دترمینان دستگاه صفر نیست. بنابراین، m معادلهٔ اول (۶) برقرارند. حال باید تحقیق کنیم که برای این $\lambda_۱$، . . .، λ_m، $n - m$ معادلهٔ باقیمانده در (۶) نیز برقرار هستند.

برای تحقیق این مطلب، قضیهٔ تابع ضمنی را بکار میبریم. چون $m < n$، هر نقطهٔ $\mathbf{x}$ در S را میتوان مثلاً به شکل $\mathbf{x} = (\mathbf{x}'; \mathbf{t})$ نوشت، که در آن $\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^m$ و $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^{n-m}$. تا پایان برهان به جای $(x_۱, \ldots, x_m)$ مینویسیم $\mathbf{x}'$ و به جای $(x_{m+۱}, \ldots, x_n)$ مینویسیم $\mathbf{t}$، پس $t_k = x_{m+k}$. حال برحسب تابع برداری $\mathbf{g} = (g_۱, \ldots, g_m)$ میتوان نوشت:

$$\text{اگر} \quad \mathbf{x}_\circ = (\mathbf{x}'_\circ ; \mathbf{t}_\circ) \quad ، \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}'_\circ; \mathbf{t}_\circ) = \circ.$$

چون $\mathbf{g} \in C'$ بر S است و $\det[D_j g_i(\mathbf{x}'_\circ ; \mathbf{t}_\circ)] \neq \circ$، همهٔ شرطهای قضیهٔ تابع ضمنی برقرارند. بنابراین، یک همسایگی $n - m$ بعدی نقطهٔ $\mathbf{t}_\circ$ مانند $T_\circ$ و یک تابع برداری منحصر بفرد مانند $\mathbf{h} = (h_۱, \ldots, h_m)$ تعریف شده بر $T_\circ$ که مقدارهایش در $\mathbf{R}^m$ اند وجود دارند بقسمیکه $\mathbf{h} \in C'$ بر $T_\circ$ است، $\mathbf{h}(\mathbf{t}_\circ) = \mathbf{x}'_\circ$، و بهازای هر $\mathbf{t}$ در $T_\circ$، $\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}] = \circ$. پس میتوان گفت که دستگاه m معادلهٔ

$$g_۱(x_۱, \ldots, x_n) = \circ, \ldots, g_m(x_۱, \ldots, x_n) = \circ$$

را میشود برای $x_۱$، . . .، x_m برحسب $x_{m+۱}$، . . .، x_n حل کرد، و جوابهائی به شکل $x_r = h_r(x_{m+۱}, \ldots, x_n)$، $r = ۱, ۲, \ldots, m$، بدست آورد. حال این عبارتها برای $x_۱$، . . .، x_m را در عبارت $f(x_۱, \ldots, x_n)$ و نیز درهر عبارت

$g_p(x_1, \ldots, x_n)$ میگذاریم. یعنی، تابع جدید F را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$F(x_{m+1}, \cdots, x_n) = f[h_1(x_{m+1}, \cdots, x_n), \\ \cdots, h_m(x_{m+1}, \cdots, x_n); x_{m+1}, \cdots, x_n];$$

و m تابع جدید G_1، . . .، G_m را به صورت

$$G_p(x_{m+1}, \cdots, x_n) = g_p[h_1(x_{m+1}, \cdots, x_n), \\ \cdots, h_m(x_{m+1}, \cdots, x_n); x_{m+1}, \cdots, x_n]$$

تعریف میکنیم. این تابعها را میتوان مختصرتر بهصورت $F(\mathbf{t}) = f[\mathbf{H}(\mathbf{t})]$ و $G_p(\mathbf{t}) = g_p[\mathbf{H}(\mathbf{t})]$ نوشت، که در آنها $\mathbf{H}(\mathbf{t}) = (\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t})$. در اینجا $\mathbf{t}$ مقید به این است که در مجموعهٔ T_0 قرار داشته باشد.

بنابر قضیهٔ تابع ضمنی، هر G_p بر T_0 متحد صفر است. بنابراین، هر D_rG_p نیز بر T_0 متحد صفر خواهد بود، و بخصوص، $D_rG_p(\mathbf{t}_0) = 0$. اما بنابر قاعدهٔ زنجیرهای (معادلهٔ ۲۰.۱۲)، این مشتقها را میتوان بهصورت زیرین محاسبه کرد:

$$D_rG_p(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^{n} D_kg_p(\mathbf{x}_0)\,D_rH_k(\mathbf{t}_0) \quad (r = 1, 2, \cdots, n - m).$$

اما اگر $1 \leqslant k \leqslant m$، $H_k(\mathbf{t}) = h_k(\mathbf{t})$، و اگر $m + 1 \leqslant k \leqslant n$، $H_k(\mathbf{t}) = x_k$. بنابراین، وقتی که $m + 1 \leqslant k \leqslant n$، بهازای هر $\mathbf{t}$، اگر $m + r \neq k$، $D_rH_k(\mathbf{t}) = 0$، و $D_rH_{m+r}(\mathbf{t}) = 1$. از این روی معادلههای بالا بدین صورت درمیآیند:

$$\sum_{k=1}^{m} D_kg_p(\mathbf{x}_0)D_rh_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r}g_p(\mathbf{x}_0) = 0 \tag{۷}$$

$$\begin{cases} p = 1, 2, \cdots, m, \\ r = 1, 2, \cdots, n - m. \end{cases}$$

بنابر پیوستگی $\mathbf{h}$، یک گوی $n - m$ بعدی مانند $B(\mathbf{t}_0) \subseteq T_0$ وجود دارد بقسمی که اگر $\mathbf{t} \in B(\mathbf{t}_0)$، $(\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) \in B(\mathbf{x}_0)$، که در آن $B(\mathbf{x}_0)$ همان گوی n بعدی است که در صورت قضیه گفتیم. از اینروی، $\mathbf{t} \in B(\mathbf{t}_0)$ ایجاب میکند که $(\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) \in X_0 \cap B(\mathbf{x}_0)$، و در نتیجه، بنابر فرض، بهازای هر $\mathbf{t}$ در $B(\mathbf{t}_0)$، $F(\mathbf{t}) \leqslant F(\mathbf{t}_0)$ یا بهازای هر $\mathbf{t}$ در $B(\mathbf{t}_0)$، $F(\mathbf{t}) \geqslant F(\mathbf{t}_0)$. یعنی، F در نقطهٔ درونی $\mathbf{t}_0$ یا ماکزیمم موضعی دارد یا مینیمم موضعی. بنابراین، هر $D_rF(\mathbf{t}_0)$ باید

صفر باشد. اگر برای محاسبهٔ این مشتقها قاعدهٔ زنجیره‌ای را بکار بریم، خواهیم داشت

$$D_rF(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^{n} D_kf(\mathbf{x}_0)\, D_rH_k(\mathbf{t}_0) \quad (r = 1, \cdots, n-m),$$

و در نتیجه می‌توان نوشت

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{m} D_kf(\mathbf{x}_0)D_rh_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r}f(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (r = 1, \cdots, n-m).$$

حال اگر رابطهٔ (۷) را در λ_p ضرب کنیم، بر p جمعبندی کنیم، و نتیجه را به (۸) بیفزائیم، به‌ازای $r = 1, \cdots, n-m$، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^{m} \left[D_kf(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{m} \lambda_p D_k g_p(\mathbf{x}_0) \right] D_rh_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} f(\mathbf{x}_0)$$
$$+ \sum_{p=1}^{m} \lambda_p D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0 .$$

با توجه به تعریف $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$، ملاحظه می‌شود که در قسمتی از جمع فوق که بر k جمعبندی شده است عبارت داخل قلاب مساوی صفر است. در نتیجه از جمع بالا فقط قسمت زیرین باقی می‌ماند:

$$D_{m+r}f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{m} \lambda_p D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, n-m),$$

و اینها درست همان معادله‌های لازم برای اتمام برهان می‌باشند.

تبصره. معمولاً وقتی برای مسألهٔ خاصی مربوط به اکسترمم روش لاگرانژ را بکار بریم، بآسانی می‌توان دستگاه معادله‌های (۶) را مشخص کرد. ولی، در حالت کلی، حل این دستگاه عملاً آسان نیست. غالباً به کمک روشهای بخصوصی می‌توان، بی آن که ابتدا نقاطی را که این اکسترممها در آنها وقوع می‌یابند یافت، مقدارهای اکسترمم f را مستقیماً از (۶) بدست آورد. مثال زیرین بعضی از این روشها را مصور می‌سازد:

مثال. یک رویهٔ درجهٔ دو که مرکزش در مبدأ باشد دارای معادلهٔ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1$$

است. درازاهای نیم محورهای آن را بیابید.

حل. به جای (x, y, z) می‌نویسیم (x_1, x_2, x_3)، و فرم درجهٔ دوم

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j=۱}^{۳} \sum_{i=۱}^{۳} a_{ij}x_ix_j \tag{۹}$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن $\mathbf{x} \doteq (x_۱, x_۲, x_۳)$ و $a_{ij} = a_{ji}$ بقسمی اختیار شده‌اند که معادلهٔ رویه به‌صورت $q(\mathbf{x}) = ۱$ درآید. (از این روی، این فرم درجه دوم تقارنی و معین مثبت است.) مسأله‌ای که مطرح است هم‌ارز این مسأله است که مقدارهای اکسترمم $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^۲ = x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲$ با شرط جنبی $g(\mathbf{x}) = ۰$، که در آن $g(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - ۱$، تعیین شوند. روش لاگرانژ را بکار می‌بریم، و یک تکثیرکن معرفی می‌کنیم. چون $\nabla g = \nabla q$، معادلهٔ برداری

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla q(\mathbf{x}) = ۰ \tag{۱۰}$$

را درنظر می‌گیریم. در این حالت خاص، f و g هر دو تابعهائی همگن از درجهٔ ۲ هستند، و می‌توان قضیهٔ اویلر (ر.ک. تمرین ۱۸.۱۲) را در (۱۰) بکار برده نتیجه گرفت که

$$\mathbf{x}\cdot\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{x}\cdot\nabla q(\mathbf{x}) = ۲f(\mathbf{x}) + ۲\lambda q(\mathbf{x}) = ۰.$$

چون بر رویه $q(\mathbf{x}) = ۱$، نتیجه می‌گیریم که $\lambda = -f(\mathbf{x})$، و (۱۰) به‌صورت

$$t\,\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla q(\mathbf{x}) = ۰ \tag{۱۱}$$

درمی‌آید که درآن $t = ۱/f(\mathbf{x})$. (در این مسأله $f(\mathbf{x})$ نمی‌توانـد مساوی ۰ باشد.) درنتیجه، ازمعادلهٔ برداری (۱۱) سه معادلهٔ زیرین برای $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
(a_{۱۱} - t)x_۱ + {} & a_{۱۲}x_۲ + {} & a_{۱۳}x_۳ &= ۰,\\
a_{۲۱}x_۱ + {} & (a_{۲۲} - t)x_۲ + {} & a_{۲۳}x_۳ &= ۰,\\
a_{۳۱}x_۱ + {} & a_{۳۲}x_۲ + {} & (a_{۳۳} - t)x_۳ &= ۰.
\end{aligned}$$

چون $\mathbf{x} = ۰$ جوابی برای مسألهٔ ما ببار نمی‌آورد، پس دترمینان این دستگاه بایـد صفر شود. یعنی، باید داشته باشیم

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} - t & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} - t & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} - t \end{vmatrix} = ۰. \tag{۱۲}$$

معادلهٔ (۱۲) را معادلهٔ مشخص کنندهٔ فرم درجـهٔ دوم (۹) می‌نامند. در ایـن حالت، ماهیت هندسی مسأله تأیید می‌کند که سه ریشهٔ $t_۱$، $t_۲$، و $t_۳$ این معادلهٔ درجهٔ سوم باید حقیقی و مثبت باشند. [چـون $q(\mathbf{x})$ تقارنی و معین مثبت است، نظریهٔ کلی فـرمهای

درجهٔ دوم نیز حقیقی ومثبت بودن همهٔ ریشه‌های (۱۲) را تضمین خواهدکرد. (ر. ک. کتاب مرجع ۱۰۱۳، قضیهٔ ۹۰۵۰)] نیم محورهای رویهٔ درجهٔ دو عبارتند از $t_1^{-1/2}$، $t_2^{-1/2}$ و $t_3^{-1/2}$.

تمرین

ژاکوبیها

۱۰۱۳ فرض کنید تابع مختلط f به‌ازای هر عدد مختلط $z \neq 0$ با معادلهٔ $f(z) = 1/\bar{z}$ تعریف شده باشد. نشان دهید که $J_f(z) = -|z|^{-4}$. ثابت کنید که f یک به‌یک است و f^{-1} را به‌طور صریح محاسبه کنید.

۲۰۱۳ فرض کنید تابع برداری $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ به‌ازای هر نقطه مانند (x_1, x_2, x_3) در $\mathbf{R}^3$ که $x_1 + x_2 + x_3 \neq -1$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_k}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \quad (k = 1, 2, 3).$$

نشان دهید که $J_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1 + x_2 + x_3)^{-4}$. نشان دهید که $\mathbf{f}$ یک به‌یک است و $\mathbf{f}^{-1}$ را به‌طور صریح محاسبه کنید.

۳۰۱۳ فرض کنید تابع برداری $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد، $\mathbf{f} \in C'$ بر $\mathbf{R}^n$ باشد، و $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ دترمینان ژاکوبی‌آن را نشان دهد. فرض‌کنید n تابع حقیقی $g_1, \ldots, g_n$ بر $\mathbf{R}^1$ تعریف شده باشند و دارای مشتقهای پیوستهٔ $g'_1, \ldots, g'_n$ باشند. همچنین به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, n$، $h_k(\mathbf{x}) = f_k[g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)]$، و قرار دهید $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. نشان دهید که

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}[g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n)]g'_1(x_1) \cdots g'_n(x_n).$$

۴۰۱۳ آ) اگر $x(r, \theta) = r\cos\theta$ و $y(r, \theta) = r\sin\theta$، نشان دهید که

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

ب) اگر $x(r, \theta, \varphi) = r\cos\theta\sin\varphi$، $y(r, \theta, \varphi) = r\sin\theta\sin\varphi$، و $z = r\cos\varphi$، نشان دهید که

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = -r^2\sin\varphi.$$

۵.۱۳ آ) شرطهائی برای f و g بیان‌کنیدکه با آنها معادله‌های $x = f(u, v)$ و $y = g(u, v)$ را بتوان برای u و v در یکی ازهمسایگیهای $(x_\circ, y_\circ)$ حل کرد. اگر جوابها $u = F(x, y)$ و $v = G(x, y)$ باشند و $J = \partial(f, g)/\partial(u, v)$، نشان دهید که

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

ب) اگر $f(u, v) = u^2 - v^2$ و $g(u, v) = 2uv$، J و مشتقهای جزئی F و G را در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ) = (1, 1)$ محاسبه کنید.

۶.۱۳ فرض کنید $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ مانند آنچه در قضیهٔ ۶.۱۳ گفته شد به هم مربوط باشند. حالت $n = 3$ را درنظر بگیرید و نشان دهید که

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) D_1 g_i(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \delta_{i,1} & D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_1 f_3(\mathbf{x}) \\ \delta_{i,2} & D_2 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_3(\mathbf{x}) \\ \delta_{i,3} & D_3 f_2(\mathbf{x}) & D_3 f_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, 3),$$

که در آن $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ و $\delta_{i,j}$، برحسب این که $i \neq j$ یا $i = j$، مساوی ۰ یا ۱ است. با استفاده از این، دستور

$$D_1 g_1 = \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(x_2, x_3)} \bigg/ \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

را نتیجه بگیرید. برای هشت مشتق دیگر $D_k g_i$ عبارتهای مشابهی وجود دارند.

۷.۱۳ فرض کنید تابع مختلط $f = u + iv$ در شرطهای زیرین صدق کند: $u \in C'$ و $v \in C'$ برگردهٔ باز $A = \{z \mid |z| < 1\}$ باشند؛ f بر گردهٔ بستهٔ $\bar{A} = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$ پیوسته باشد؛ هرگاه $x^2 + y^2 = 1$، آنگاه $u(x, y) = x$ و $v(x, y) = y$؛ اگر $z \in A$، $J_f(z) > 0$. فرض کنید که $B = f(A)$ نقش A با f را نشان دهد و ثابت کنید که:

آ) هرگاه X یک زیرمجموعهٔ باز A باشد، آنگاه $f(X)$ زیرمجموعهٔ باز B است.

ب) B یک گردهٔ باز با شعاع ۱ است.

ج) به‌ازای هر نقطه مانند $u_\circ + iv_\circ$ در B، فقط تعدادی متناهی نقطه مانند z در A هست که $f(z) = u_\circ + iv_\circ$.

مسأله‌های اکسترمم

۸.۱۳ مقدارهای اکسترمم تابعهای تعریف شده با معادله‌های زیرین را (درصورت وجود) پیدا و رده بندی کنید:

آ) $f(x, y) = y^۲ + x^۲y + x^۴$؛
ب) $f(x, y) = x^۲ + y^۲ + x + y + xy$؛
ج) $f(x, y) = (x - ۱)^۴ + (x - y)^۴$؛
د) $f(x, y) = y^۲ - x^۳$.

۹.۱۳ کوتاهترین فاصله از نقطهٔ $(\circ, b)$ بر محور y تاسهمی $x^۲ - ۴y = \circ$ را بیابید. این مسأله را یک بار با استفاده از روش لاگرانژ و بار دیگر بی استفاده از آن حل کنید.

۱۰.۱۳ مسأله‌های هندسی زیرین را با بکار بردن روش لاگرانژ حل کنید:

آ) کوتاهترین فاصله ازنقطهٔ $(a_۱, a_۲, a_۳)$ در $\mathbf{R}^۳$ تا صفحه‌ای که معادله‌اش $b_۱x_۱ + b_۲x_۲ + b_۳x_۳ + b_\circ = \circ$ است پیدا کنید.

ب) بر فصل مشترک دو صفحهٔ

$$a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + a_۳x_۳ + a_\circ = \circ$$

و

$$b_۱x_۱ + b_۲x_۲ + b_۳x_۳ + b_\circ = \circ$$

نزدیکترین نقطه به مبدأ را پیدا کنید.

۱۱.۱۳ اگر $\sum_{k=۱}^{n} x_k^۲ = ۱$، مقدار ماکزیمم $|\sum_{k=۱}^{n} a_kx_k|$ را، با استفاده از

آ) نامساوی‌کشی ـ شوارتز،
ب) روش لاگرانژ،

بدست آورید.

۱۲.۱۳ ماکزیمم $(x_۱x_۲ \cdots x_n)^۲$ را با شرط

$$x_۱^۲ + \cdots + x_n^۲ = ۱$$

بیابید. با استفاده از این نتیجه نامساوی زیرین را، که به‌ازای عددهای حقیقی و مثبت $a_۱$، ...، a_n معتبر است، ثابت کنید:

$$(a_۱ \cdots a_n)^{۱/n} \leqslant \frac{a_۱ + \cdots + a_n}{n}.$$

۱۳.۱۳ اگر $f(\mathbf{x}) = x_1^k + \cdots + x_n^k$ و $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$، نشان دهیدکه یکی از مقدارهای اکسترمم موضعی f که در شرط $x_1 + \cdots + x_n = a$ صدق می‌کند مساوی $a^k n^{1-k}$ است.

۱۴.۱۳ نشان دهید که می‌توان همهٔ نقطه‌های (x_1, x_2, x_3, x_4) را که در آنها $x_1^2 + x_2^2$ با دو شرط جنبی $x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$ و $x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 = 9$ دارای اکسترمم موضعی باشد، در میان نقطه‌های

$$(0, 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1), \quad (0, \pm 1, +2, 0), \quad (\pm 1, 0, 0, \pm\sqrt{3}),$$
$$(\pm 2, \pm 3, 0, 0)$$

یافت. کدام از این نقطه‌ها ماکزیمم موضعی و کدام مینیمم موضعی را بدست می‌دهند؟ برای آنچه نتیجه می گیرید دلیل بیاورید.

۱۵.۱۳ نشان دهید که مقدارهای اکسترمم $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$، با دو شرط جنبی

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 1 \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

و

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \qquad (b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0),$$

عبارتند از t_1^{-1} و t_2^{-1} که در آنها t_1 و t_2 ریشه‌های معادلهٔ

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

می‌باشند. نشان دهیدکه معادلهٔ بالا یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب t است، و با بیانی هندسی توضیح دهید که چرا ریشه‌های t_1 و t_2 حقیقی و مثبت هستند.

۱۶.۱۳ فرض‌کنیدکه $\Delta = \det[x_{ij}]$ و $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$. قضیهٔ مشهوری از آدامار[1] بیان می کند کـه هرگاه d_1، . . .، d_n، n پایای مثبت باشند بقسمی که $\|\mathbf{X}_i\|^2 = d_i^2 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$، آنگاه $|\Delta| \leqslant d_1 \cdots d_n$.

---
1. Hadamard

این قضیه را، با درنظر گرفتن Δ به‌عنوان تابعی از n^2 متغیر با n قید، ثابت کنید. با استفاده از روش لاگرانژ نشان دهید که وقتی با این قیدها Δ دارای اکسترمم باشد، باید داشته باشیم

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} d_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n^2 \end{vmatrix}.$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

13.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol 2, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1969.

13.2 Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*, Vol. 1. K. A. Hirsch, translator. Chelsea, New York, 1959.

13.3 Hancock, H., *Theory of Maxima and Minima*. Ginn, Boston, 1917.

۱۴

انتگرالهای ریمان چندگانه

۱.۱۴ مقدمه

انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)dx$ را می‌توان تعمیم داد، بدین ترتیب که به جای بازهٔ $[a, b]$ یک ناحیهٔ n بعدی را که در آن f تعریف شده باشد و کراندار نیز باشد قرار داد. برای این منظور ساده‌ترین ناحیه‌ها در $\mathbf{R}^n$ بازه‌های n بعدی هستند. مثلاً، در $\mathbf{R}^2$ مستطیل I را که به زیرمستطیلهای I_k افراز شده باشد اختیار می‌کنیم و مجموعهای ریمان به شکل $\sum f(x_k, y_k)A(I_k)$ را، که در آن $(x_k, y_k) \in I_k$ و $A(I_k)$ نمایانندهٔ مساحت I_k است، درنظر می‌گیریم. از این مجموعها به مفهوم انتگرال مضاعف می‌رسیم. بهمین نحو، در $\mathbf{R}^3$ با استفاده از مکعب مستطیلهائی که به مکعب مستطیلهای کوچکتر I_k تقسیم شده باشند، و درنظر گرفتن مجموعهائی به شکل $\sum f(x_k, y_k, z_k)V(I_k)$، که درآن $(x_k, y_k, z_k) \in I_k$ و $V(I_k)$ حجم I_k است، به مفهوم انتگرال مثلث خواهیم رسید. اگر مفهومهای سطح و حجم را به‌طور مناسبی به $\mathbf{R}^n$ تعمیم دهیم، بآسانی می‌توان دربارهٔ انتگرالهای چند گانه در $\mathbf{R}^n$ بحث کرد. این «حجم تعمیم یافته» اندازه یا محتوا نامیده می‌شود و در بخش آینده تعریف خواهد شد.

۲.۱۴ اندازهٔ یك بازهٔ کراندار در $\mathbf{R}^n$

فرض کنیم A_1، . . .، A_n، n بازهٔ کلی در $\mathbf{R}^1$ را نشان دهند؛ یعنی، هر A_k در $\mathbf{R}^1$ ممکن است کراندار، بی‌کران، باز، بسته، یا نیمباز باشد. مجموعهٔ A در $\mathbf{R}^n$ به‌شکل

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n$$
$$= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in A_k \text{ ،} k = 1, 2, \ldots, n \text{ بەازای}\}$$

را یک بازهٔ n بعدی کلی می‌نامیم. حالت تبه شده را هم، که در آن یک یا چند تا از بازه‌های A_k فقط یک نقطه داشته باشند، می‌پذیریم.

هرگاه هر A_k در $\mathbf{R}^1$ باز، بسته، یا کراندار باشد، آنگاه A نیز در $\mathbf{R}^n$ همان خاصیت را دارد.

اگر هر A_k کراندار باشد، اندازهٔ n بعدی (یا اندازهٔ n)A را به $\mu(A)$ نشان می‌دهیم، و با معادلهٔ زیرین تعریف می‌کنیم:

$$\mu(A) = \mu(A_1) \cdots \mu(A_n),$$

که درآن $\mu(A_k)$ اندازهٔ یک بعدی (درازای) A_k است. وقتی که $n = 2$، آن را سطح A، و هنگامی که $n = 3$، آن را حجم A می‌نامیم. توجه کنید که هر گاه به‌ازای یک مقدار k، $\mu(A_k) = 0$، آنگاه $\mu(A) = 0$.

حال به بحثی در بارهٔ انتگرالگیری ریمان در $\mathbf{R}^n$ باز می‌گردیم. تنها فرق اساسی بین حالت $n = 1$ و حالت $n > 1$ این است‌که کمیت $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ که برای اندازه‌گیری درازای زیر بازهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ بکار رفته است، با $\mu(I_k)$، یعنی اندازهٔ یک زیر بازهٔ n بعدی، عوض می‌شود. چون عمل درست مانند حالت یک‌بعدی است، در بحثی که در زیر می‌آید بسیاری از جزئیات را حذف می‌کنیم.

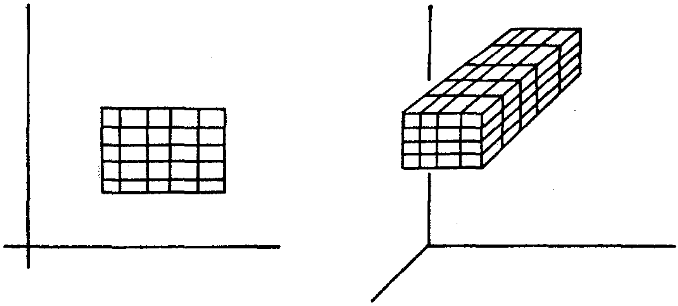
۳.۱۴ انتگرال ریمان یك تابع‌کراندار که بریك بازهٔ فشرده در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد

تعریف ۱.۱۴ فرض کنیم $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ یک بازهٔ فشرده در $\mathbf{R}^n$ باشد. اگر P_k یک افراز A_k باشد، حاصل ضرب دکارتی

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n$$

را یک افراز A می‌نامیم. هرگاه P_k بازهٔ A_k را به m_k زیربازهٔ یک بعدی تقسیم کند، آنگاه P تجزیه‌ای از A به‌صورت اجتماعی از $m_1 \cdots m_n$ بازهٔ n بعدی (که زیربازه‌های P نامیده می‌شوند) را مشخص خواهد کرد. یک افراز A مانند P' را ظریفتر از P نامیم در صورتی که $P \subseteq P'$. مجموعهٔ همهٔ افرازهای A را به $\mathcal{P}(A)$ نشان می‌دهیم.

شکل ۱.۱۴ افرازهای بازه‌ها در $\mathbf{R}^2$ و در $\mathbf{R}^3$ را مصور می‌سازد.



شکل ۱.۱۴

تعریف ۲.۱۴ فرض کنیم f بر بازهٔ فشردهٔ I در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده و کراندار باشد، اگر P یک افراز I به m زیر بازهٔ I_1 ، . . . ، I_m باشد و $\mathbf{t}_k \in I_k$، هر مجموع به شکل

$$S(P, f) = \sum_{k=1}^{m} f(\mathbf{t}_k)\,\mu(I_k)$$

را یک مجموع ریمان می‌نامیم. گوئیم f بر I انتگرال ریمان دارد و می‌نویسیم $f \in R$ بر I است، در صورتی که عددی حقیقی مانند A با خاصیت زیرین وجود داشته باشد: به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یک افراز I مانند P_ε وجود داشته باشد بقسمی‌که به‌ازای هرمجموع ریمان $S(P, f)$، که درآن P از P_ε ظریفتر باشد،

$$|S(P, f) - A| < \varepsilon.$$

اگر چنین Aای وجود داشته باشد، منحصر بفرد است و با

$$\int_I f\,d\mathbf{x}، \int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} ، \text{ یا با } \int_I f(x_1, \ldots, x_n)\,d(x_1, \ldots, x_n)$$

نشان داده می‌شود.

تبصره. به‌ازای $n > 1$، انتگرال یک انتگرال چندگانه یا یک انتگرال n گونا نامیده می‌شود. وقتی که $n = 2$ و $n = 3$، اصطلاحهای انتگرال مضاعف و مثلث بکارمی‌روند. شبیه به‌آنچه در $\mathbf{R}^1$ دیدیم، نماد $\mathbf{x}$ در $\int_I f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ یک «متغیر فریبان» است و می‌توان آن را با هر نماد مناسب دیگری عوض کرد. به جای

$$\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\,d(x_1 \ldots dx_n)$$

نماد $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$

نیز بکار می‌رود. گاهی انتگرالهای مضاعف را با دو علامت انتگرال، و انتگرالهای مثلث را با سه علامت انتگرال می‌نویسیم، یعنی می‌نویسیم

$$\int_I\int f(x, y)\,dx\,dy, \quad \int\int_I\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

تعریف ۳۰۱۴ فرض کنیم f بر بازهٔ فشردهٔ I در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده و کراندار باشد. اگر P یک افراز I به m زیربازهٔ I_1، . . .، I_m باشد، قرار می‌دهیم

$$m_k(f) = \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_k\}, \quad M_k(f) = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_k\}.$$

عددهای

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{m} m_k(f)\,\mu(I_k) \quad \text{و} \quad U(P, f) = \sum_{k=1}^{m} M_k(f)\,\mu(I_k)$$

را مجموعهای ریمان بالائی و پائینی می‌نامیم. انتگرالهای ریمان بالائی وپائینی f روی I بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\overline{\int_I} f\,d\mathbf{x} = \inf\{U(P, f) \mid P \in \mathcal{P}(I)\},$$
$$\underline{\int_I} f\,d\mathbf{x} = \sup\{L(P, f) \mid P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

گوئیم تابع f بر I در شرط ریمان صدق می‌کند در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یک افراز I مانند P_ε وجود داشته باشد بقسمی که ظریفتر بودن P از P_ε رابطهٔ $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ را ایجاب کند.

تبصره. مانند حالت یک بعدی، انتگرالهای بالائی و پائینی دارای خاصیتهای زیرین می‌باشند:

آ)
$$\overline{\int_I}(f + g)\,d\mathbf{x} \leqslant \overline{\int_I} f\,d\mathbf{x} + \overline{\int_I} g\,d\mathbf{x},$$
$$\underline{\int_I}(f + g)\,d\mathbf{x} \geqslant \underline{\int_I} f\,d\mathbf{x} + \underline{\int_I} g\,d\mathbf{x}.$$

ب) هرگاه بازهٔ I به اجتماع دو بازهٔ I_1 و I_2 که نقطهٔ مشترک درونی نداشته باشند تجزیه شود، آنگاه

$$\overline{\int_I} f\,d\mathbf{x} = \overline{\int_{I_1}} f\,d\mathbf{x} + \overline{\int_{I_2}} f\,d\mathbf{x}$$

و

$$\underline{\int}_I f\,d\mathbf{x} = \underline{\int}_{I_1} f\,d\mathbf{x} + \underline{\int}_{I_2} f\,d\mathbf{x}.$$

برهان قضیهٔ زیرین اساساً همان برهان قضیهٔ ۱۹.۷ است و حذف می‌شود.

قضیهٔ ۴.۱۴ فرض کنیم f بر بازهٔ فشردهٔ I در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده و کراندار باشد. در این صورت گزاره‌های زیرین هم‌ارزند:

یکم) $f \in R$ بر I است.

دوم) f بر I در شرط ریمان صدق می‌کند.

سوم) $\underline{\int}_I f\,d\mathbf{x} = \overline{\int}_I f\,d\mathbf{x}$.

۴.۱۴ مجموعه های دارای اندازهٔ صفر و محك لبگ برای وجود انتگرال ریمان چندگانه

یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ مانند T را دارای اندازهٔ n صفر نامیم اگرکه‌به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، T را بتوان بـا دسته‌ای شمارشپذیـر از بازه‌هـای n بعدی پـوشانید، کـه مجموع اندازه‌های n آنها از ε کمتر باشد.

مانند حالت یک بعدی، اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه هـای دارای اندازهٔ n ۰ خود دارای اندازهٔ n ۰ است. اگر $m < n$، هـر زیـرمجموعهٔ $\mathbf{R}^m$ کـه به‌عنوان یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ تلقی شود، دارای اندازهٔ n صفر خواهد بود.

خاصیتی را گوئیم برمجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ تقریباً همه جا برقرار است کـه بر S جز برای یک زیرمجموعه دارای اندازهٔ n ۰ برقرار باشد.

محک لبگ بـرای وجود انتگرال ریمـان در $\mathbf{R}^1$ را می‌تـوان مستقیماً بـه انتگرالهای چندگانه وسعت داد. برهان آن مشابه برهان قضیهٔ ۴۸.۷ است.

قضیهٔ ۵.۱۴ فرض کنیم f بر بازهٔ فشردهٔ I در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده و کراندار باشد. دراین صورت، $f \in R$ بر I است وقتی، و فقط وقتی، کـه مجموعهٔ ناپیوستگیهای f در I دارای اندازهٔ n صفر باشد.

۵.۱۴ ارزیابی یك انتگرال چندگانه به‌وسیلهٔ انتگرالگیری مکرر

خواننده در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آموخته است کـه چگونـه بعضی از انتگرالهای مضاعف و مثلث را با انتگرالگیری متوالی برحسب هرمتغیر ارزیابی کند. مثلاً، هـر گـاه تـابع دو متغیرهٔ f بـر مستطیل فشردهٔ Q در صفحهٔ xy، یعنی $Q = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$، پیوسته باشد، آنگاه به‌ازای هر y

ثابت در $[c, d]$، تابع F که با معادلهٔ $F(x) = f(x, y)$ تعریف شود بر $[a, b]$ پیوسته (و در نتیجه انتگرالپذیر) است. مقدار انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ بستگی بـه y دارد و به‌وسیلهٔ آن تابع جدیدی مانند G تعریف می‌شود، یعنی

$$G(y) = \int_a^b f(x, y)dx.$$

تابع G (بنا بـر قضیهٔ ۳۸.۷) بـر $[c, d]$ پیوسته است، و در نتیجه انتگرالپذیـر خواهد بود. خواهیم دید کـه مقدار انتگرال $\int_c^d G(y)\,dy$ مساوی مقدار انتگرال مضاعف $\int_Q f(x, y)\,d(x, y)$ است. یعنی، معادلهٔ زیر برقرار است:

$$(۱) \qquad \int_Q f(x, y)\,d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx \right] dy.$$

(این دستور بعداً ثابت می‌شود.) حال این سؤال مطرح می‌شود کـه آیـا این نتیجه برای وقتی که f بر Q صرفاً انتگرالپذیر است (و لزوماً پیوسته نیست) نیز بـرقرار هست یا خیر. واضح است که در اینجا مشکلاتی وجود دارنـد. مثلاً*، ممکن است انتگرال مضاعف وجود داشته باشد، ولی به‌ازای بعضی از مقدارهـای y، انتگرال داخلی $\int_a^b f(x, y)dx$ وجود نـداشته باشد. در واقع، هرگاه f در هر نقطهٔ پاره‌خط $y = y_0$، $a \leqslant x \leqslant b$ ناپیوسته بـاشد، آنگـاه $\int_a^b f(x, y_0)\,dx$ وجـود ندارد. اما، این پاره خط مجموعه‌ای است‌که اندازهٔ دو بعدی آن صفر است، و در‌نتیجه در انتگرالپذیری f برتمام مستطیل Q تأثیری ندارد. در حالتی به این صورت باید با استفاده از انتگرالهای بالائی و پائینی تعمیم مناسبی برای (۱) پیدا کنیم.

قضیهٔ ۶.۱۴ فرض کنیم f بر مستطیل فشردهٔ

$$Q = [a, b] \times [c, d] \text{ در } \mathbf{R}^2$$

تعریف شده و کراندار باشد. در این صورت:

یکم)

$$\underline{\int}_Q f\,d(x, y) \leqslant \underline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)dy \right] dx$$
$$\leqslant \overline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy \right] dx \leqslant \overline{\int}_Q f\,d(x, y).$$

دوم) گزارهٔ (یکم) برقرار است‌وقتی که در سراسرآن به جای $\overline{\int}_c^d$ علامت $\underline{\int}_c^d$ را قرار دهیم.

سوم)

$$\underline{\int}_Q f d(x, y) \leqslant \underline{\int}_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)dx \right]dy$$
$$\leqslant \overline{\int}_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)dx \right]dy \leqslant \overline{\int}_Q f d(x, y).$$

چهارم) گزارهٔ (سوم) برقرار است وقتی‌که در سراسرآن به‌جای $\overline{\int}_a^b$ علامت $\underline{\int}_a^b$ را قرار دهیم.

پنجم) وقتی که $\int_Q f(x, y)\, d(x, y)$ وجود داشته باشد، این رابطه ها برقرار هستند:

$$\int_Q f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left[\underline{\int}_c^d f(x, y)dy \right]dx$$
$$= \int_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)dy \right]dx$$
$$= \int_c^d \left[\underline{\int}_a^b f(x, y)dx \right]dy$$
$$= \int_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)dx \right]dy\,.$$

برهان. برای اثبات (یکم)، F را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $x \in [a, b]$، $F(x) = \overline{\int}_c^d f(x, y)dy$.

در این صورت $|F(x)| \leqslant M(d - c)$، که در آن

$$M = \sup\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in Q\},$$

و می‌توان انتگرال بالائی زیر را درنظر گرفت:

$$\bar{I} = \overline{\int}_a^b F(x)dx = \overline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)dy \right]dx\,.$$

بهمین نحو، تعریف می‌کنیم

$$\underline{I} = \underline{\int}_a^b F(x)dx = \underline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)dy \right]dx\,.$$

فرض کنیم $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ یک افراز $[a, b]$، و

$$P_2 = \{y_0, y_1, \cdots, y_m\}$$

یک افراز $[c, d]$ باشد. در این صورت $P = P_1 \times P_2$ یک افـراز Q به mn زیرمستطیل Q_{ij} خواهد بود. تعریف می‌کنیم

$$\bar{I}_{ij} = \bar{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy \right] dx,$$

$$\underline{I}_{ij} = \underline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy \right] dx \cdot$$

چون

$$\bar{\int}_c^d f(x, y)dy = \sum_{j=1}^{m} \bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy,$$

می‌توان نوشت

$$\bar{\int}_a^b \left[\bar{\int}_c^d f(x, y)dy \right] dx \leqslant \sum_{j=1}^{m} \bar{\int}_a^b \left[\bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy \right] dx$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy \right] dx \cdot$$

یعنی، نامساوی زیرین برقرار است:

$$\bar{I} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{I}_{ij} \cdot$$

بهمین نحو، نتیجه می‌شود که

$$\underline{I} \geqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_{ij} \cdot$$

هر گاه بنویسیم

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in Q_{ij}\}$$

و

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in Q_{ij}\},$$

آنگاه از نامساویهای $m_{ij} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{ij}$، $(x, y) \in Q_{ij}$، نتیجه می‌شود که

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqslant \bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy \leqslant M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

از این رابطه، به‌نوبهٔ خود، نتیجه می‌گیریم که

$$m_{ij}\mu(Q_{ij}) \leqslant \underline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\overline{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy\right]dx$$
$$\leqslant \overline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\overline{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy\right]dx \leqslant M_{ij}\mu(Q_{ij}).$$

حال اگر بر i و j جمعبندی کنیم و از نامساویهای بالا استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$L(P,f) \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant U(P, f).$$

چون این نامساویها به‌ازای همهٔ افرازهای Q مانند P برقرار هستند، پس باید

$$\underline{\int}_Q f d(x, y) \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant \overline{\int}_Q f d(x, y).$$

یعنی گزارهٔ (یکم) برقرار است.

واضح است که اگر تابع F از ابتدا با دستور

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

تعریف می‌شد، برهان پیشین را می‌توانستیم برای آن بکار بریم، و در نتیجه گزارهٔ (دوم) با دلیلی مشابه بدست می‌آید.

با تعویض نقش x و y می‌توان گزاره‌های (سوم) و (چهارم) را به نحو مشابهی ثابت کرد. بالأخره، گزارهٔ (پنجم) نتیجهٔ فوری‌گزاره‌های (یکم) تا (چهارم) است.

به‌عنوان نتیجه، می‌توان دستور

$$\int_Q f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx$$
$$= \int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy$$

را، که پیشتر ذکر شده است، با فرض پیوسته بودن f بر Q بدست آورد. این مطلب غالباً قضیهٔ فوبینی[1] نامیده می‌شود.

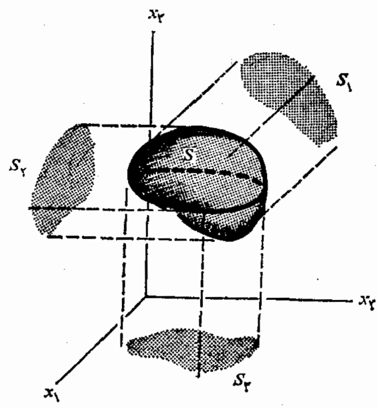
تبصره. از وجود انتگرالهای مکرر

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy \quad \text{و} \quad \int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx$$

1. Fubini

نمی‌توان وجود $\int_Q f(x, y)\, d(x, y)$ را نتیجه گرفت. مثال ناقض در تمرین ۷.۱۴ داده شده است.

پیش از آن که به بحث در مشابه قضیهٔ ۶.۱۴ در $\mathbf{R}^n$ بپردازیم، ابتدا به‌معرفی نمادها و اصطلاحهای دیگری می‌پردازیم. اگر $k \leqslant n$، مجموعهٔ $\mathbf{x}$هائی در $\mathbf{R}^n$ را که به‌ازای آنها $x_k = 0$ ابر صفحهٔ مختصات می‌نامیم و با نماد Π_k نمایش می‌دهیم. اگر مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ داده شده باشد، S_k تصویر S بر Π_k عبارت است از نقش S با نگاشتی که مقدارش در هر نقطه مانند $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در S مساوی $(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ باشد. بآسانی می‌توان نشان داد که چنین نگاشتی بر S پیوسته است. از این نتیجه می‌شود که اگر S فشرده باشد، هر S_k فشرده است. همچنین، اگر S همبند باشد، هر S_k همبند است. در شکل ۲.۱۴ تصویرها در $\mathbf{R}^3$ مصور شده‌اند.



شکل ۲.۱۴

برای انتگرالهای nگونا قضیه‌ای کاملاً شبیه قضیهٔ ۶.۱۴ وجود دارد. کافی است که توسیع این مطلب را به حالت $n = 3$ نشان دهیم. در این حالت، f بر بازهٔ فشرده‌ای مانند $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ در $\mathbf{R}^3$ تعریف شده و کراندار است، و به‌جای گزارهٔ (یکم) قضیهٔ ۶.۱۴ رابطه‌های

$$\underline{\int_Q} f\, d\mathbf{x} \leqslant \underline{\int_{a_1}^{b_1}} \left[\overline{\int_{Q_1}} f\, d(x_2, x_3) \right] dx_1 \leqslant \overline{\int_{a_1}^{b_1}} \left[\overline{\int_{Q_1}} f\, d(x_2, x_3) \right] dx_1 \leqslant \overline{\int_Q} f\, d\mathbf{x} \qquad (۲)$$

قرار می‌گیرند، که در آنها Q_1 تصویر Q برصفحهٔ مختصات Π_1 می‌باشد. وقتی که $\int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد، شبیه به قسمت (پنجم) قضیهٔ ۶.۱۴، دستور

$$(۳) \qquad \int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1}\left[\,\bar{\int}_{Q_1} f\,d(x_2, x_3)\right]dx_1$$
$$= \int_{Q_1}\left[\,\bar{\int}_{a_1}^{b_1} f\,dx_1\right]d(x_2, x_3)$$

برقرار است. همان طورکه درقضیهٔ ۶.۱۴ آمده است، ازتعویض مناسب انتگرالهای بالائی با پائینی، گزاره‌های مسلم مشابهی بدست می‌آیند، و همچنین دستورهای مشابهی برای تصویرهای Q_2 و Q_3 نیز وجود خواهند داشت.

خواننده بآسانی می‌تواند نتیجه‌های مشابه را برای انتگرالهای nگونا بیان کند (این نتیجه‌ها را می‌توان با روشی‌که در قضیهٔ ۶.۱۴ بکار رفته است ثابت کرد). حالت خاصی که در آن انتگرال nگونای $\int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ وجود دارد دارای اهمیت بخصوصی است و می‌توان آن را بدین صورت بیان کرد:

قضیهٔ ۷.۱۴ فرض کنیم f بر بازهٔ فشرده‌ای مانند

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده و کراندار باشد، همچنین $\int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد، دراین صورت،

$$\int_Q f\,d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1}\left[\,\bar{\int}_{Q_1} f\,d(x_2, \cdots, x_n)\right]dx_1$$
$$= \int_{Q_1}\left[\,\bar{\int}_{a_1}^{b_1} f\,dx_1\right]d(x_2, \cdots, x_n).$$

دستورهای مشابهی که از تعویض انتگرالهای بالائی با انتگرالهای پائینی و Q_1 با Q_k، یعنی تصویر Q بر Π_k، بدست می‌آیند نیز برقرار هستند.

۶.۱۴ مجموعه‌های در $\mathbf{R}^n$ که اندازهٔ ژردان دارند

تا کنون انتگرال چندگانهٔ $\int_I f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ فقط برای بازه‌های I تعریف شده بود. البته، این قید کاربردهای انتگرالگیری را بسیار محدود می‌کند. بآسانی می‌توان تعریف را بقسمی وسعت داد که مجموعه‌های کلیتری را، که مجموعه‌های دارای اندازهٔ ژردان نام دارند، در بر گیرد. در این بخش این مجموعه‌ها مورد بحث واقع

می‌شوند. در تعریف آنها از کرانهٔ یک مجموعه مانند S در $\mathbf{R}^n$ استفاده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که نقطهٔ $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$ را یک نقطهٔ کرانه‌ای S نامند درصورتی که هر گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ حاوی نقطه‌ای که در S است و همچنین نقطه‌ای که در S نیست باشد. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های کرانه‌ای S را کرانهٔ S نامیم و با ∂S نشان می‌دهیم. (ر. ک. بخش ۱۶.۳).

تعریف ۸.۱۴ فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ بازهٔ فشردهٔ I در $\mathbf{R}^n$ باشد. به‌ازای هر افراز I مانند P، $\underline{J}(P, S)$ را مساوی مجموع اندازه‌های آن زیربازه‌های P تعریف می‌کنیم که فقط حاوی نقطه‌های درونی S باشند و $\bar{J}(P, S)$ را مساوی مجموع اندازه‌های آن زیربازه‌های P تعریف می‌کنیم که نقطه‌هائی از $S \cup \partial S$ را داشته باشند. عددهای

$$\underline{c}(S) = \sup\{\underline{J}(P, S) \mid P \in \mathcal{P}(I)\},$$

و

$$\bar{c}(S) = \inf\{\bar{J}(P, S) \mid P \in \mathcal{P}(I)\}$$

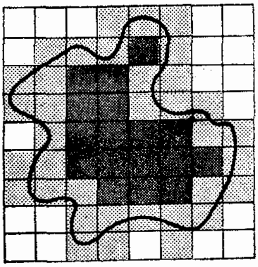
را، بترتیب، محتوای ژردان داخلی و خارجی (n بعدی) S می‌نامیم. اگر $\underline{c}(S) = \bar{c}(S)$، گوئیم S دارای اندازهٔ ژردان است، که در این حالت این مقدار مشترک محتواها را محتوای ژردان S نامیم، و با $c(S)$ نشان می‌دهیم.

بآسانی می‌توان تحقیق کردکه $\underline{c}(S)$ و $\bar{c}(S)$ فقط به S بستگی دارند نه به بازهٔ I که حاوی S است. همچنین، $0 \leqslant \underline{c}(S) \leqslant \bar{c}(S)$.

هرگاه S دارای محتوای صفر باشد، آنگاه $\underline{c}(S) = \bar{c}(S) = 0$. از این روی، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، S را می‌توان با دسته‌ای متناهی از بازه‌ها پوشانید، که مجموع اندازه‌های آنها از ε کوچکتر باشد. توجه داشته باشید که محتوای صفر برحسب پوشش متناهی توصیف می‌شود، حال آن که اندازهٔ صفر برحسب پوشش شمارشپذیر توصیف‌گردیده است. هرمجموعه‌که دارای محتوای صفر باشد اندازه‌اش نیز صفر است، ولی عکس این حکم لزوماً درست نیست.

هر بازهٔ فشرده مانند Q دارای اندازهٔ ژردان است و محتوای‌آن، یعنی $c(Q)$، مساوی اندازهٔ آن، یعنی $\mu(Q)$، خواهد بود. اگر $k < n$، محتوای n بعدی هر مجموعهٔ کراندار در $\mathbf{R}^k$ صفر است.

وقتی مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^2$ دارای اندازهٔ ژردان باشد، نیز گفته می‌شود که S دارای سطح $c(S)$ است. دراین حالت، مجموعهای $\underline{J}(P, S)$ و $\bar{J}(P, S)$، بترتیب، تقریبهائی از این سطح را از «داخل» و از «خارج» S نمایش می‌دهند. این مطلب



شکل ۳.۱۴

در شکل ۳۰۱۴ مصور شده است. در این شکل مستطیلهائی که سایهٔ روشن دارند در $\bar{J}(P, S)$، و آنهائی را کــه سایهٔ تیره دارند در $\underline{J}(P, S)$ حساب شده‌اند. بــرای مجموعه‌های در $\mathbf{R}^3$، $c(S)$ را حجم S نیز می‌نامند.

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که یک مجموعهٔ کراندار وقتی، وفقط وقتی، دارای محتوای ژردان است که کرانهٔ آن خیلی «ستبر» نباشد.

قضیهٔ ۹.۱۴ فرض کنیم S مجموعه‌ای کـراندار در $\mathbf{R}^n$ باشد و ∂S کرانهٔ آن را نشان دهد. در این صورت،

$$\bar{c}(\partial S) = \bar{c}(S) - \underline{c}(S).$$

از ایــن روی، S وقتی، و فقــط وقتی، دارای انــدازهٔ ژردان است کــه ∂S دارای محتوای صفر باشد.

برهان. فرض کنیم I بازه‌ای فشرده حاوی S و ∂S باشد. در این صورت، به‌ازای هر افراز I مانند P،

$$\bar{J}(P, \partial S) = \bar{J}(P, S) - \underline{J}(P, S).$$

بنا براین، $\bar{J}(P, \partial S) \geqslant \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$، و درنتیجه $\bar{c}(\partial S) \geqslant \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$. بــرای بدست آوردن نامساوی عکس، فــرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. P_1 را بقسمی اختیار می‌کنیم‌که $\bar{J}(P_1, S) < \bar{c}(S) + \varepsilon/2$، و P_2 را چنان اختیارمی‌کنیم که $\underline{J}(P_2, S) > \underline{c}(S) - \varepsilon/2$. قرار می‌دهیم $P = P_1 \cup P_2$. چون عمل‌تظریف مجموعهای داخلی $\underline{J}$ را کم، و مجموعهای خارجی $\bar{J}$ را اضافه نمی‌کند، پس

$$\bar{c}(\partial S) \leqslant \bar{J}(P, \partial S) = \bar{J}(P, S) - \underline{J}(P, S) \leqslant \bar{J}(P_1, S) - \underline{J}(P_2, S) < \bar{c}(S) - \underline{c}(S) + \varepsilon.$$

چــون ε دلخــواه است، از ایــن نتیجه می‌شــود کــه $\bar{c}(\partial S) \leqslant \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$.

بنابراین، $\bar{c}(\partial S) = \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$ و برهان تمام است.

۷.۱۴ انتگرالگیری چندگانه روی مجموعه‌هائی که اندازهٔ ژردان دارند

تعریف ۱۰.۱۴ فرض کنیم f بر مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ که اندازهٔ ژردان دارد تعریف شده و کراندار باشد، همچنین I بازهٔ فشرده‌ای حاوی S باشد و g بر I به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\cdot g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{اگر } \mathbf{x} \in S \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } \mathbf{x} \in I - S \text{ ،} \end{cases}$$

در این صورت، هرگاه انتگرال $\int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد، آنگاه گوئیم f بر S انتگرال ریمان دارد و می‌نویسیم $f \in R$ بر S است. همچنین می‌نویسیم

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\cdot$$

انتگرالهای بالائی و پائینی $\overline{\int}_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ و $\underline{\int}_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ به نحو مشابهی تعریف می‌شوند.

تبصره. با درنظر گرفتن مجموعهای ریمان که $\int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ را تقریب می‌زنند، می‌توان بآسانی دید که انتگرال $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ به انتخاب بازهٔ I، که برای دربر- گرفتن S بکار رفته بود، بستگی ندارد.

حال می‌توان شرطی لازم و کافی برای وجود $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ بیان کرد.

قضیهٔ ۱۱.۱۴ فرض‌کنیم مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ دارای اندازهٔ ژردان باشد، و f بر S، تعریف شده و کراندار باشد. در این صورت، $f \in R$ بر S است وقتی، و فقط وقتی، که ناپیوستگیهای f در S تشکیل مجموعه‌ای دارای اندازهٔ صفر بدهند.

برهان. فرض کنیم I بازه‌ای فشرده حاوی S باشد، و به‌ازای هر $\mathbf{x} \in S$، $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$، و به‌ازای هر $\mathbf{x} \in I - S$، $g(\mathbf{x}) = 0$. ناپیوستگیهای f ناپیوستگیهای g هستند. اما، ممکن‌است g در برخی یا همهٔ نقطه‌های کرانه‌ای S نیز ناپیوسته باشد. چون S دارای اندازهٔ ژردان است، بنابرقضیهٔ ۹.۱۴، $c(\partial S) = 0$. بنابراین، $g \in R$ بر I است وقتی، و فقط وقتی، که ناپیوستگیهای f تشکیل مجموعه‌ای دارای اندازهٔ صفر بدهند.

۸۰۱۴ بیان محتوای ژردان به‌صورت انتگرال ریمان

قضیهٔ ۱۲۰۱۴ فرض کنیم مجموعهٔ فشردهٔ S در $\mathbf{R}^n$ دارای اندازهٔ ژردان باشد. در این صورت انتگرال $\int_S 1$ وجود دارد و

$$c(S) = \int_S 1.$$

برهان. فرض کنیم بازهٔ فشردهٔ I حاوی S باشد و χ_S تابع مشخص کنندهٔ S را نشان دهد. یعنی،

$$\chi_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \mathbf{x} \in S \text{،} \\ 0 & \text{اگر } \mathbf{x} \in I - S \text{،} \end{cases}$$

ناپیوستگیهای χ_S در I نقطه‌های کرانه‌ای S هستند، و این نقطه‌ها تشکیل مجموعه‌ای دارای محتوای صفر می‌دهند، پس انتگرال $\int_I \chi_S$ وجود دارد، و در نتیجه $\int_S 1$ وجود خواهد داشت.

فرض کنیم P یک افراز I به زیربازه‌های I_1، . . .، I_m باشد، و

$$A = \{k \mid \text{ناتهی باشد } I_k \cap S\}.$$

اگر $k \in A$،

$$M_k(\chi_S) = \sup \{\chi_S(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_k\} = 1,$$

و اگر $k \notin A$، $M_k(\chi_S) = 0$، پس

$$U(P, \chi_S) = \sum_{k=1}^{m} M_k(\chi_S)\mu(I_k) = \sum_{k \in A} \mu(I_k) = \bar{J}(P, \chi_S).$$

چون این برای همهٔ افرازها برقرار است، پس $\overline{\int}_I \chi_S = \bar{c}(S) = c(S)$. اما $\overline{\int}_I \chi_S = \int_I \chi_S$ پس $c(S) = \int_I \chi_S = \int_S 1$.

۹۰۱۴ خاصیت جمعپذیری انتگرال ریمان

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که انتگرال برحسب مجموعه‌هائی که دارای محتوای ژردان هستند جمعپذیر است.

قضیهٔ ۱۳۰۱۴ فرض کنیم مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ اندازهٔ ژردان داشته باشد و $f \in R$ بر S باشد. **همچنین** $S = A \cup B$، که در آن A و B دارای اندازهٔ ژردان باشند ولی دارای

نقطهٔ درونی مشترکی نباشند، در این صورت $f \in R$ بر A، $f \in R$ بر B است، و

$$(۴) \qquad \int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

برهان. فرض می‌کنیم بازهٔ فشردهٔ I حاوی S باشد، و تابع g را به صورت زیرین تعریف می‌کنیم:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{اگر } \mathbf{x} \in S \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } \mathbf{x} \in I - S \text{ ،} \end{cases}.$$

بآسانی می‌توان وجود $\int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ و $\int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ را ازقضیهٔ ۱۱.۱۴ نتیجه‌گرفت. برای اثبات (۴)، فرض می‌کنیم P یک افراز I به m زیربازهٔ I_1، . . .، I_m باشد و مجموع ریمان

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^{m} g(\mathbf{t}_k)\mu(I_k)$$

را تشکیل می‌دهیم. اگر S_A آن قسمت از این مجموع باشد که از زیربازه‌هائی که حاوی نقطه‌های A هستند حاصل می‌شود، و اگر S_B به‌نحومشابه به تعریف شده باشد، می‌توان نوشت

$$S(P, g) = S_A + S_B - S_C,$$

که در آن S_C حاوی جمله‌هائی است که زیربازه‌های متناظر آنها نقطه‌هائی از هر دوی A و B را دارند. خصوصاً، همهٔ نقطه‌های مشترک دو کرانهٔ ∂A و ∂B در این ردهٔ سوم قرار می گیرند. اما S_A یک مجموع ریمان است که تقریبی است برای انتگرال $\int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$، و S_B یک مجموع ریمان است‌که تقریبی برای $\int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ می‌باشد. چون $c(\partial A \cap \partial B) = 0$، نتیجه می‌شود که اگر P را به‌قدر کافی ظریف کنیم، می‌توان $|S_C|$ را بدلخواه کوچک کرد. از این مطالب می‌توان معادلهٔ مذکور در قضیه را بآسانی نتیجه گرفت.

تبصره. دستور (۴) برای انتگرالهای بالائی و پائینی نیز برقرار است.

برای S هائی که دارای نهاد نسبتاً ساده‌ای باشند، می‌توان با بکار بردن قضیهٔ ۶.۱۴ دستورهائی برای ارزیابی انتگرالهای مضاعف به‌وسیلهٔ انتگرالگیری مکرر بدست آورد. این دستورها در قضیهٔ زیر داده شده‌اند.

قضیهٔ ۱۴.۱۴ فرض کنیم دو تابع پیوستهٔ φ_1 و φ_2 بر $[a, b]$ تعریف شده باشند بقسمی

کــه به ازای هـر x در $[a, b]$، $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. همچنین S مجموعهٔ فشردهٔ زیــر در $\mathbf{R}^2$ باشد:

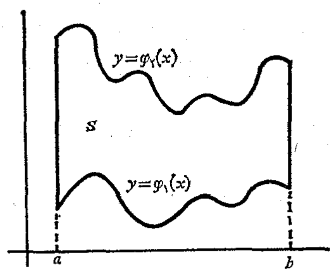
$$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}.$$

اگر $f \in R$ بر S باشد،

$$\int_S f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left[\overline{\int}_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

تبصره. مجموعــهٔ S دارای اندازهٔ ژردان است زیراکــرانهٔ آن دارای محتوای صفر می‌باشد. (ر.ک. تمرین ۹.۱۴)

گزاره‌های مشابهی برای انتگرالهای nگـونا برقـرارنــد. این توسیعها بسیار واضح هستند، و لزومی به توضیح بیشتر نیست.



شکل ۴.۱۴

شکل ۴.۱۴ نوع ناحیه‌ای راکه در قضیه توصیف شــده است مصور می‌سازد. برای‌مجموعه‌هائی‌که بتوان‌آنها را به تعدادی متناهی ناحیه‌های دارای اندازه ژردان از این نوع تجزیه‌کرد، می‌توان انتگرالگیری مکرر را در هر قسمت جداگانه انجام داد و نتیجه‌های حاصل را بر طبق قضیهٔ ۱۳.۱۴ با هم جمع کرد.

۱۰.۱۴ قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای چندگانه

انتگرالهای چندگانه، مانند حالت یک بعدی، دارای خاصیت مقـدار میانگین هستند. این خاصیت رامی‌توان بآسانی از قضیهٔ زیرین نتیجه گرفت. اثبات این قضیه به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۱۵.۱۴ فــرض کنیم مجموعــهٔ S در $\mathbf{R}^n$ دارای انــدازهٔ ژردان باشد و $f \in R$ و $g \in R$ بر S باشند، هر گاه به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در S، $f(\mathbf{x}) \leqslant g(\mathbf{x})$، آنگاه

$$\int_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant \int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

قضیهٔ ۱۶.۱۴ (قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای چندگانه). فرض می‌کنیم مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ دارای اندازهٔ ژردان باشد و $f \in R$ و $g \in R$ بر S باشند، و همچنین به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در S، $g(\mathbf{x}) \geqslant 0$. قرارمی‌دهیم $m = \inf f(S)$ و $M = \sup f(S)$. در این صورت عددی حقیقی مانند λ در بازهٔ $m \leqslant \lambda \leqslant M$ وجود دارد بقسمی که

$$\int_S f(\mathbf{x})\; g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lambda \int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{۵}$$

بخصوص،

$$mc(S) \leqslant \int_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant Mc(S). \tag{۶}$$

تبصره. علاوه براین، هرگاه S همبند، و f بر S پیوسته باشد، آنگاه (بنابر قضیهٔ ۳۸.۴) به‌ازای یک مقدار $\mathbf{x}_0$ در S، $\lambda = f(\mathbf{x}_0)$ و (۵) به‌صورت

$$\int_S f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) \int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{۷}$$

درمی‌آید. خصوصاً، از (۷) نتیجه می‌شود که $\int_S f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)\,c(S)$، که در آن $\mathbf{x}_0 \in S$.

برهان. چون $g(\mathbf{x}) \geqslant 0$، به‌ازای‌هر $\mathbf{x}$ در S، $mg(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \leqslant Mg(\mathbf{x})$. بنابر قضیهٔ ۱۵.۱۴، می‌توان نوشت

$$m \int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant \int_S f(\mathbf{x})\; g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant M \int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

اگر $\int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$، دستور (۵) به‌ازای هر λ برقرار است. اگر $\int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} > 0$، دستور (۵) به‌ازای $\lambda = \int_S f(\mathbf{x})\; g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} / \int_S g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ برقرار خواهدبود. با فرض $g(\mathbf{x}) \equiv 1$، دستور (۶) بدست می‌آید.

با استفاده از (۶) می‌توان ثابت کرد که انتگرالده f می‌تواند بر مجموعه‌ای دارای محتوای صفر تغییر کند بدون آن که این تغییر در مقدار انتگرال تأثیری داشته باشد. در واقع، در این مورد داریم:

قضیهٔ ۱۷.۱۴ فرض کنیم مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ اندازهٔ ژردان داشته باشد و $f \in R$ بر S باشد. همچنین T یک زیر مجموعهٔ S باشد که دارای محتوای ژردان nبعدی صفر

است. بعلاوه، تابع g بر S تعریف شده و کراندار باشد بقسمی که به‌ازای هر $\mathbf{x} \in S - T$، $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. در این صورت $g \in R$ بر S است و

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

برهان. قرار می‌دهیم $h = f - g$. در این صورت

$$\int_S h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_T h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{S-T} h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

اما، بنابر (۶)، $\int_T h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$، وچون به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در $S-T$، $h(\mathbf{x}) = 0$، پس $\int_{S-T} h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$.

تبصره. این قضیه راهی را پیشنهاد می‌کند که به‌وسیلهٔ آن می‌توان تعریف انتگرال ریمان $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ را برای تابعهائی که در سراسر S لزوماً تعریف نشده باشند و کراندار نباشند وسعت داد. در حقیقت، فرض‌کنیم که S مجموعه‌ای کراندار در $\mathbf{R}^n$ باشد که دارای محتوای ژردان است، و T یک زیرمجموعهٔ S دارای محتوای صفر باشد. اگر f بر $S - T$ تعریف شده و کراندار باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{S-T} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

(درصورتی‌که انتگرال طرف راست وجود داشته باشد)، و می‌گوئیم‌که f بر S انتگرال ریمان دارد. بنابر قضیه‌ای که هم اکنون ثابت شد، این تعریف اساساً مانند آن است‌که قلمرو f را به تمام S وسعت دهیم بقسمی که f بر T چنان تعریف شود که این تابع کراندار باقی بماند.

تمرین

انتگرالهای چندگانه

۱۰۱۴ اگر $f_1 \in R$ بر $[a_1, b_1]$، . . .، $f_n \in R$ بر $[a_n, b_n]$ باشد، ثابت کنید که

$$\int_S f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n) = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\, dx_1\right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\, dx_n\right),$$

که در آن $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

۲.۱۴ فرض کنید f بر مستطیل فشردهٔ $Q=[a,b]\times[c,d]$ در $\mathbf{R}^2$ تعریف شده و کراندار باشد. همچنین به‌ازای هر y ثابت در $[c,d]$، $f(x,y)$ تابعی صعودی از x، و به‌ازای هر x ثابت در $[a,b]$، $f(x,y)$ تابعی صعودی از y را نشان دهد. ثابت کنید که $f\in R$ بر Q است.

۳.۱۴ هر یک از انتگرالهای مضاعف زیرین را ارزیابی کنید.

آ) $\int_Q\int \sin^2 x \sin^2 y\, dx\, dy$، که در آن $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

ب) $\int_Q\int |\cos(x+y)|\, dx\, dy$، که در آن $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

ج) $\int_Q\int [x+y]\, dx\, dy$، که در آن $Q=[0,2]\times[0,2]$

و $[t]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از t است.

۴.۱۴ فرض کنید $Q=[0,1]\times[0,1]$، و انتگرال $\int\int_Q f(x,y)\,dx\,dy$ را در هر یک از حالتهای زیرین محاسبه کنید.

آ) اگر $x+y\leqslant 1$، $f(x,y)=1-x-y$، و درغیر این صورت، $f(x,y)=0$.

ب) اگر $x^2+y^2\leqslant 1$، $f(x,y)=x^2+y^2$، و درغیر این صورت، $f(x,y)=0$.

ج) اگر $x^2\leqslant y\leqslant 2x^2$، $f(x,y)=x+y$، و در غیر این صورت، $f(x,y)=0$.

۵.۱۴ تابع f را برمربع $Q=[0,1]\times[0,1]$ به‌صورت زیرین تعریف‌کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد،}\\ 2y & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد،}\end{cases}$$

آ) ثابت کنید که به‌ازای $0\leqslant t\leqslant 1$، $\int_0^t f(x,y)\,dy$ وجود دارد و

$$\int_0^1\left[\int_0^t f(x,y)\,dy\right]dx=t^2,$$

و

$$\bar{\int_{0}^{1}}\left[\int_{0}^{t} f(x, y)\, dy\right] dx = t.$$

این نشان می‌دهد که $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dy]\, dx$ وجود دارد و مساوی ۱ است.

ب) ثابت کنید که انتگرال $\int_0^1 [\bar{\int_0^1} f(x, y)\, dx]\, dy$ وجود دارد و مقدار آن را بیابید.

ج) ثابت کنید که انتگرال مضاعف $\int_Q f(x, y)\, d(x, y)$ وجود ندارد.

۶.۱۴ تابع f را برمربع $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ به‌صورت زیرین تعریف‌کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر دست کم یکی از } x \text{ و } y \text{ گنگ باشد ،} \\ 1/n & \text{اگر } y \text{ گویا باشد و } x = m/n \text{ ،} \end{cases}$$

که درآن m و n عددهای صحیح نسبت به هم اول باشند و $n > 0$. ثابت کنید که

$$\int_0^1 f(x, y)\, dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y)\, dx\right] dy$$
$$= \int_Q f(x, y)\, d(x, y) = 0$$

اما اگر x گویا باشد، $\int_0^1 f(x, y)\, dy$ وجود ندارد.

۷.۱۴ اگر p_k، kامین عدد اول باشد، قرار دهید

$$S(p_k) = \left\{\left(\frac{n}{p_k}, \frac{m}{p_k}\right) \mid n = 1, 2, \ldots, p_k - 1,\ m = 1, 2, \ldots, p_k - 1\right\},$$

$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S(p_k)$، و $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

آ) ثابت کنیدکه S در Q چگال است (یعنی، بست S حاوی Q است) ولی هر خط موازی محورهای مختصات حد اکثر حاوی یک زیرمجموعهٔ متناهی S است.

ب) f را بر Q به صورت زیرین تعریف کنید:

اگر $(x, y) \in S$، $f(x, y) = 0$، اگر $(x, y) \in Q - S$، $f(x, y) = 1$.

ثابت‌کنیدکه $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) dy] dx = \int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) dx]\, dy = 1$ ولی انتگرال مضاعف $\int_Q f(x, y)\, d(x, y)$ وجود ندارد.

محتوای ژردان

۸.۱۴ فرض‌کنید S مجموعهٔ کرانداری در $\mathbf{R}^n$ باشدکه حداکثر تعدادی متناهی نقطهٔ انباشتگی داشته باشد. ثابت کنید که $c(S) = 0$.

۹.۱۴ فرض کنید تابع حقیقی f بر $[a, b]$ تعریف شده و پیوسته باشد. همچنین S نمودار f را نشان دهد، یعنی، $S = \{(x, y) \mid y = f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$. ثابت کنید که S دارای محتوای ژردان دوبعدی صفر است.

۱۰.۱۴ فرض کنید Γ یک خم با درازای متناهی در $\mathbf{R}^n$ باشد. ثابت کنید که Γ دارای محتوای ژردان nبعدی صفر است.

۱۱.۱۴ فرض‌کنید تابع نامنفی f برمجموعه‌ای مانند S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد. مجموعهٔ عرضهای f روی S عبارت است از یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^{n+1}$، که به‌صورت زیرین تعریف می‌شود:

$$\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in S, 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

اگر S یک ناحیهٔ دارای اندازهٔ ژردان در $\mathbf{R}^n$، و f بر S پیوسته باشد، ثابت کنید که مجموعهٔ عرضهای f روی S دارای محتوای ژردان $(n + 1)$ بعدی است که مقدار آن مساوی

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n)$$

می‌باشد. این مسأله را برای حالتهای $n = 1$ و $n = 2$ تعبیر هندسی کنید.

۱۲.۱۴ فرض کنید که $f \in R$ بر S باشد و $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$. ($S$ یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ است.) همچنین $A = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S, f(\mathbf{x}) < 0\}$ و $c(A) = 0$. ثابت کنید که مجموعه‌ای مانند B دارای اندازهٔ صفر هست بقسمی که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در $S - B$، $f(\mathbf{x}) = 0$.

۱۳.۱۴ فرض‌کنید $f \in R$ بر S باشد، که در آن S یک ناحیه در $\mathbf{R}^n$، و f بر S پیوسته باشد. ثابت کنید که یک نقطهٔ درونی S مانند $\mathbf{x}_0$ وجود دارد بقسمی که

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)\, c(S).$$

۱۴.۱۴ فرض کنید f بر مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشد. به‌ازای هر نقطهٔ درونی (x_1, x_2) در Q، تعریف کنید

$$F(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \left(\int_c^{x_2} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

ثابت کنید که

$$D_{1,2} F(x_1, x_2) = D_{2,1} F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2).$$

۱۵.۱۴ فرض کنید که T ناحیهٔ مثلثی شکل زیرین در صفحه را نشان دهد:

$$T = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqslant \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqslant 1 \right\}$$، که در آن $a > 0$ و $b > 0$.

همچنین $D_{1,2} f$، مشتق جزئی مرتبهٔ دوم f، بر T پیوسته باشد. ثابت کنید که نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) بر پاره خط واصل بین $(a, 0)$ و $(0, b)$ هست بقسمی که

$$\int_T D_{1,2} f(x, y)\, d(x, y) = f(0, 0) - f(a, 0) + a D_1 f(x_0, y_0).$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

14.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 2, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1969.

14.2 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, 1937.

14.3 Rogosinski, W. W., *Volume and Integral*. Wiley, New York, 1952.

۱۵
انتگرالهای لبگ چندگانه

۱.۱۵ مقدمه

در فصل ۱۰ انتگرال لبگ برای تابعهائی که بر زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^1$ تعریف شده باشند توصیف گردید. روشی را که در آن‌جا بکار رفت می‌توان تعمیم داد و به‌کمک آن نظریهٔ انتگرالگیری لبگ را برای تابعهائی که بر زیرمجموعه‌های فضای n بعدی $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشند بدست آورد. انتگرالهای حاصل را انتگرالهای چندگانه می‌نامند. درحالت $n=2$ این انتگرالها را انتگرالهای مضاعف، و درحالت $n=3$ آنها را انتگرالهای مثلث می‌نامند.

مانند حالت یک بعدی، انتگرالگیری لبگ چندگانه توسیعی است از انتگرالگیری ریمان چندگانه. این نظریه تابعهای کلیتری را به‌عنوان انتگرالده می‌پذیرد، با تابعهای بی‌کران مانند تابعهای کراندار رفتار می‌کند، و مجموعه‌های کلیتری را به‌عنوان ناحیه‌های انتگرالگیری در بر می‌گیرد.

تعریفهای اساسی و قضیه‌های همگرائی عمده تماماً مانند حالت یک بعدی هستند. اما، کیفیت جدیدی در این‌جا هست که در $\mathbf{R}^1$ دیده نمی‌شود: انتگرال چندگانه در $\mathbf{R}^n$ را می‌توان با محاسبهٔ متوالی n انتگرال یک بعدی ارزیابی کرد. این نتیجه، که به قضیهٔ فوبینی معروف است، یکی از موضوعهای عمدهٔ این فصل خواهد بود.

مانند حالت یک بعدی، ابتدا انتگرال را برای تابعهای پله‌ای، سپس برای رده‌ای وسیعتر (به نام تابعهای بالائی) که حاوی حدود بعضی از دنباله‌های صعودی

از تابعهای پله‌ای است تعریف می‌کنیم، و سرانجام به رده‌ای باز هم وسیعتر، که عبارت از ردهٔ تابعهائی است که انتگرال لبگ دارند، می‌پردازیم. چون این عمل درست مانند حالت یک بعدی انجام می‌شود، بیشتر جزئیات برهانها را حذف خواهیم کرد.

برخی مفاهیم را که در فصل ۱۴ معرفی شدند یادآوری می‌کنیم. اگر $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ یک بازهٔ کراندار در $\mathbf{R}^n$ باشد، اندازهٔ n بازهٔ I را با معادلهٔ

$$\mu(I) = \mu(I_1) \cdots \mu(I_n)$$

تعریف می‌کنیم، که درآن $\mu(I_k)$ اندازهٔ یک بعدی، یا درازای، I_k است.

یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ مانند T را دارای اندازهٔ n ۰ نامیم درصورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، T را بتوان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی، که مجموع اندازه‌های n آنها کوچکتر از ε باشد، پوشانید.

گوئیم خاصیتی تقریباً همه جا برمجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ برقرار است در صورتی‌که این خاصیت همه‌جا بر S جز برای زیرمجموعه‌ای دارای اندازهٔ ۰ برقرار باشد. مثلاً، اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد، گوئیم $f_n \to f$ تقریباً همه‌جا بر S، درصورتی‌که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در S جز $\mathbf{x}$ های عضو زیرمجموعه‌ای دارای اندازهٔ n ۰، رابطهٔ $\lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ برقرار باشد.

۲.۱۵ تابعهای پله‌ای و انتگرالهای‌آنها

فرض کنیم I بازه‌ای فشرده در $\mathbf{R}^n$، مثلاً

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n$$

باشد، که درآن هر I_k یک زیربازهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^1$ است. اگر P_k یک افراز I_k باشد، حاصل ضرب دکارتی $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ را یک افراز I می‌نامیم. هرگاه P_k بازهٔ I_k را به m_k زیربازهٔ یک بعدی تجزیه کند، آنگاه P بازهٔ I را به $m = m_1 \cdots m_k$ زیربازهٔ n بعدی، مثلاً $J_1, \ldots, J_m$، تجزیه خواهد کرد.

تابع s که بر I تعریف شده باشد یک تابع پله‌ای نامیده می‌شود درصورتی که یک افراز I مانند P وجود داشته باشد بقسمی که s درون هر زیربازهٔ J_k پایا باشد، یعنی

$$\text{اگر } \mathbf{x} \in \operatorname{int} J_k ،\ s(\mathbf{x}) = c_k.$$

انتگرال s روی I با معادلهٔ زیرین تعریف می‌شود:

$$\int_I s = \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(J_k)\,. \tag{۱}$$

حال فرض می‌کنیم G یک بازهٔ n بعدی کلی باشد، یعنی، بازه‌ای در $\mathbf{R}^n$ که لزوماً فشرده نباشد. تابع s را یک تابع پله‌ای بر G نامیم در صورتی که G زیر-بازه‌ای n بعدی وفشرده مانند I داشته باشد بقسمی که s یک تابع پله‌ای بر I باشد، و به‌ازای هر $\mathbf{x} \in G - I$، $s(\mathbf{x}) = 0$. انتگرال s روی G را با دستور زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_G s = \int_I s,$$

که درآن انتگرال روی I با دستور (۱) داده شده است. انتگرال فوق، مانند حالت یک بعدی، به بازهٔ انتخاب شدهٔ I بستگی ندارد.

۳.۱۵ تابعهای بالائی و تابعهائی که انتگرال لبگ دارند

تعریف تابعهای بالائی و تابعهای دارای انتگرال لبگ درست مانند تعریف درحالت یک بعدی است.

تابع حقیقی f را که بربازهٔ I در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد یک تابع بالائی بر I نامیم، و می‌نویسیم $f \in U(I)$، در صورتی که دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ وجود داشته باشد بقسمی که

آ) $s_n \to f$ تقریباً همه‌جا بر I،

و

ب) $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n$ وجود داشته باشد.

گوئیم دنبالهٔ $\{s_n\}$ تابع f را تولید می‌کند. انتگرال f روی I با معادلهٔ

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n \tag{۲}$$

تعریف می‌شود.

مجموعهٔ همهٔ تابعهای f به شکل $f = u - v$ را، که در آن $u \in U(I)$ و $v \in U(I)$، به $L(I)$ نشان می‌دهیم. اگر تابع f در $L(I)$ باشد، گوئیم f بر I انتگرال لبگ دارد، و انتگرال آن را با معادلهٔ

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v$$

تعریف می‌کنیم.

چون این تعریفها همانند حالت یک بعدی هستند، عجیب نیست که بسیاری از قضیه‌هائی که از این تعریفها ناشی می‌شوند نیز معتبر باشند. خصوصاً، قضیه‌های ۵.۱۰، ۶.۱۰، ۷.۱۰، ۹.۱۰، ۱۰.۱۰، ۱۱.۱۰، ۱۳.۱۰، ۱۴.۱۰، ۱۶.۱۰، ۱۷.۱۰ (آ) و (ج)، ۱۸.۱۰، و ۱۹.۱۰ همه برای انتگرالهای چندگانه معتبرند. قضیهٔ ۱۷.۱۰ (ب)، که رفتار یک انتگرال را در اثر انبساط یا انقباض بازهٔ انتگرالگیری توصیف می‌کند، باید بدین صورت اصلاح گردد:

هرگاه $f \in L(I)$ و $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}/c)$، که در آن $c > 0$، آنگاه $g \in L(cI)$ و

$$\int_{cI} g = c^n \int_I f.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، از انبساط بازه به‌وسیلهٔ یک سازهٔ مثبت مانند c لازم می‌آید که انتگرال را در c^n، که در آن n بعد فضا است، ضرب کنیم.

قضیه‌های همگرائی لوی (قضیه‌های ۲۲.۱۰ تا ۲۶.۱۰)، و قضیهٔ همگرائی تسلطی لبگ (قضیهٔ ۲۷.۱۰) و نتیجه‌های آن (قضیه‌های ۲۸.۱۰، ۲۹.۱۰، و ۳۰.۱۰) نیز برای انتگرالهای چندگانه معتبر هستند.

نمادگذاری. انتگرال $\int_I f$ را با

$$\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{یا} \quad \int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

نیز نشان می‌دهند. نماد $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$ نیز بکار خواهد رفت. گاهی انتگرالهای مضاعف را با دو علامت انتگرال، و انتگرالهای مثلث را با سه علامت انتگرال می‌نویسند، یعنی:

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

۴.۱۵ تابعهای اندازه پذیر و مجموعه‌های اندازه پذیر در $\mathbf{R}^n$

تابع حقیقی f تعریف شده بر بازهٔ I در $\mathbf{R}^n$ را بر I اندازه‌پذیر می‌گوئیم، و می‌نویسیم $f \in M(I)$، در صورتی که دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ بر I وجود داشته باشد بقسمی که

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{ت.ه. بر } I.$$

خاصیتهای توابع اندازه‌پذیر که در قضیه‌های ۳۵.۱۰، ۳۶.۱۰، و ۳۷.۱۰ بیان شده‌اند برای این محدودهٔ کلیتر نیز معتبرند.

یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ مانند S را اندازه‌پذیر نامیم در صورتی که تابع مشخص کنندهٔ آن یعنی χ_S اندازه‌پذیر باشد. هر گاه، علاوه بر این، χ_S بر $\mathbf{R}^n$ انتگرال لبگ نیز داشته باشد، آنگاه اندازهٔ n مجموعهٔ S، یعنی $\mu(S)$، را با معادلهٔ

$$\mu(S) = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_S$$

تعریف می‌کنیم. اگر χ_S اندازه‌پذیر باشد ولی در $L(\mathbf{R}^n)$ نباشد، تعریف می‌کنیم $\mu(S) = +\infty$. تابع μ که به این طریق تعریف شد اندازهٔ لبگ n بعدی نامیده می‌شود.

خاصیتهای اندازه که در قضیه‌های ۴۴.۱۰ تا ۴۷.۱۰ توصیف شده‌اند برای اندازهٔ لبگ n بعدی نیز معتبرند. همچنین، انتگرال لبگ را می‌توان با روشی که در بخش ۱۹.۱۰ بکار برده شده است برای زیرمجموعه‌های دلخواه $\mathbf{R}^n$ نیز تعریف کرد.

خصوصاً بر خاصیت جمعپذیری شمارشپذیر اندازهٔ لبگ، که در قضیهٔ ۴۷.۱۰ توصیف شده است، تکیه می‌کنیم:

هرگاه $\{A_1, A_2, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر و از هم‌جدا در $\mathbf{R}^n$ باشد، آنگاه اجتماع $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ اندازه‌پذیر است و

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که هر زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ اندازه‌پذیر است.

قضیهٔ ۱.۱۵ هر مجموعهٔ باز مانند S در $\mathbf{R}^n$ را می‌توان به صورت اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر ازمکعبهای کراندار و ازهم جدا که بست آنها محتوا در S باشند بیان‌کرد. بنابراین S اندازه‌پذیر است. بعلاوه، هر گاه S کراندار باشد، آنگاه $\mu(S)$ متناهی است.

برهان. عدد صحیحی مانند $m \geqslant 1$ اختیار می‌کنیم و آن را ثابت نگه می‌داریم، و همهٔ بازه‌های نیمباز در $\mathbf{R}^1$ به شکل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\text{به‌ازای } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ،\quad \left]\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right].$$

درازای هر بازه 2^{-m} است، و همهٔ آنها تشکیل دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌هائی

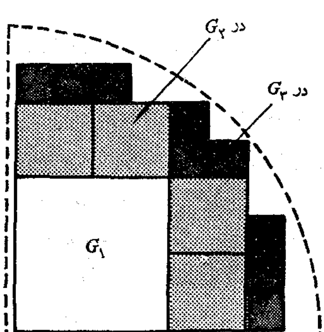
ازهم جدا می‌دهند که اجتماعشان مساوی $\mathbf{R}^1$ است. حاصل ضرب دکارتی n تا از این بازه‌ها یک مکعب n بعدی به درازای ضلع 2^{-m} است. فرض کنیم F_m دستهٔ همهٔ این مکعبها را نشان دهد. دراین صورت F_m دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های ازهم جدا است که اجتماع آنها $\mathbf{R}^n$ است. توجه کنید که مکعبها در F_{m+1} این طور بدست می‌آیند که هر ضلع هر مکعب در F_m را به دو جزء متساوی تقسیم کنیم. بنابراین، هرگاه Q_m مکعبی در F_m، و Q_{m+1} مکعبی در F_{m+1} باشد، آنگاه یکی از این دو صورت پیش می‌آید: $Q_{m+1} \subseteq Q_m$، یا Q_{m+1} و Q_m ازهم جدا هستند.

حال زیردستهٔ G_m را از F_m به‌صورت زیر استخراج می‌کنیم: اگر $m = 1$، G_1 عبارت باشد ازمجموعهٔ همهٔ مکعبها در F_1 که بستهای آنها در S واقعند. اگر $m = 2$، G_2 عبارت باشد ازمجموعهٔ همهٔ مکعبها در F_2 که بستهای‌آنها در S واقعند ولی در هیچ یک از مکعبهای موجود در G_1 واقع نیستند. اگر $m = 3$، G_3 عبارت باشد از مجموعهٔ همهٔ مکعبها در F_3 که بستهای‌آنها در S واقعند اما در هیچ یک از مکعبهای موجود در G_1 یا G_2 واقع نیستند، و مانند اینها. ساختن G_mها در شکل ۱۰۱۵ مصور شده است، که درآن S یک چهارم یک گردهٔ باز در $\mathbf{R}^2$ است. مربع سفید در G_1، مربعهای با سایهٔ کمرنگ در G_2، و مربعهای با سایهٔ پررنگتر در G_3 واقعند.

حال قرار می‌دهیم

$$T = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{Q \in G_m} Q.$$

یعنی، T مساوی اجتماع همهٔ مکعبهای موجود در G_1، G_2، . . . باشد. ثابت می کنیم



شکل ۱۰۱۵

که $T = S$، و در نتیجه قضیه ثابت خواهد شد زیرا T دسته‌ای شمارشپذیر از مکعبهای ازهم جدا است که بستهای آنها در S قرار دارند. چون هر Q در G_m یک زیرمجموعهٔ S است، پس $T \subseteq S$. از این روی فقط کافی است نشان دهیم که $T \subseteq S$.

فرض کنیم $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ نقطه‌ای در S باشد. چون S باز است، مکعبی به مرکز $\mathbf{p}$ و درازای ضلع $\delta > 0$ وجود داردکه جزء S است. m را بقسمی اختیار می‌کنیم که $2^{-m} < \delta/2$. در این صورت برای هرمقدار i،

$$p_i - \frac{\delta}{2} < p_i - \frac{1}{2^m} < p_i < p_i + \frac{1}{2^m} < p_i + \frac{\delta}{2}.$$

حال k_i را طوری اختیار می‌کنیم که

$$\frac{k_i}{2^m} < p_i \leqslant \frac{k_i + 1}{2^m},$$

و فرض می‌کنیم Q حاصل ضرب دکارتی بازه‌های $]k_i 2^{-m}, (k_i + 1)2^{-m}]$ به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ باشد. در این صورت به‌ازای مکعبی چون Q در F_m، $\mathbf{p} \in Q$. هر گاه m کوچکترین عدد صحیح با این خاصیت باشد، آنگاه $Q \in G_m$، پس $\mathbf{p} \in T$. بنابراین $S \subseteq T$. گزاره‌های دیگر قضیه که دربارهٔ اندازه پذیری S است بی‌درنگ از خاصیت جمعپذیری شمارشپذیر اندازهٔ لبگ نتیجه می‌شود.

تبصره. اگر S اندازه‌پذیر باشد، $\mathbf{R}^n - S$ نیز چنین است زیرا

$$\chi_{\mathbf{R}^n - S} = 1 - \chi_S.$$

بنابراین، هر زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}^n$ اندازه‌پذیر است.

۵.۱۵ قضیهٔ تحویل فوبینی برای انتگرال مضاعف یك تابع پله‌ای

تا این جا، نظریهٔ لبگ در $\mathbf{R}^n$ کاملاً شبیه حالت یک بعدی است. برای محاسبهٔ یک انتگرال چندگانه در $\mathbf{R}^n$ به‌وسیلهٔ انتگرالهای مکرر با بعد پائینتر، اگر بخواهیم از قضیهٔ فوبینی استفاده کنیم، مفهومهای جدیدی را لازم داریم. برای آن که بهتر بفهمیم که چه لازم است، ابتدا حالت دوبعدی را در نظر می‌گیریم.

نتیجهٔ مشابه را برای انتگرالهای ریمان چندگانه یادآوری می‌کنیم. هر گاه $I = [a, b] \times [c, d]$ یک بازهٔ فشرده در $\mathbf{R}^2$ باشد و f بر I انتگرال ریمان داشته باشد، آنگاه (از قسمت (ه) قضیهٔ ۶.۱۴) دستور تحویل زیرین را داریم :

$$(۳) \qquad \int_I f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left[\underline{\int}_a^b f(x, y) dx \right] dy \cdot$$

با تعویض انتگرال پائینی $\underline{\int}_a^b$ با انتگرال بالائی $\overline{\int}_a^b$، لنگهٔ دستور فوق بدست می‌آید. همچنین دو دستور مشابه دیگر که با معکوس ترتیب عمل انتگرالگیری حاصل می‌شوند وجود دارند. در این‌جا انتگرالهای بالائی و پائینی مورد نیازند زیرا فرض انتگرال ریمان داشتن بر I به قدر کافی قوی نیست که وجود انتگرال ریمان یک بعدی $\int_a^b f(x, y)dx$ را تضمین کند. این اشکال در نظریهٔ لبگ وجود ندارد. قضیهٔ فوبینی برای انتگرالهای لبگ مضاعف دستورهای تحویل

$$\int_I f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

را تنها با شرط این که f بر I انتگرال لبگ دارد بدست می‌دهد. نشان می‌دهیم که انتگرالهای داخلی همواره به‌عنوان انتگرالهای لبگ وجود دارند. این مثال دیگری است که چگونگی غلبهٔ نظریهٔ لبگ برمشکلات ذاتی نظریهٔ ریمان را مصور می‌سازد.

در این بخش قضیهٔ فوبینی را برای تابعهای پله‌ای ثابت می‌کنیم، و بعداً در یکی از بخشها آن را به تابعهائی دلخواه که انتگرال لبگ دارند وسعت می‌دهیم.

قضیهٔ ۲.۱۵ (قضیهٔ فوبینی برای تابعهای پله‌ای). فرض کنیم s یک تابع پله‌ای بر $\mathbf{R}^2$ باشد، در این صورت به‌ازای هر y ثابت در $\mathbf{R}^1$، انتگرال $\int_{\mathbf{R}^1} s(x, y)dx$ وجود دارد، و به‌عنوان تابعی از y، بر $\mathbf{R}^1$ انتگرال لبگ دارد، بعلاوه،

$$(۴) \qquad \iint_{\mathbf{R}^2} s(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} s(x, y) dx \right] dy \cdot$$

بهمین نحو، به‌ازای هر x ثابت در $\mathbf{R}^1$، انتگرال $\int_{\mathbf{R}^1} s(x, y)dy$ وجود دارد، و به‌عنوان تابعی از x، بر $\mathbf{R}^1$ انتگرال لبگ دارد، و نیز،

$$(۵) \qquad \iint_{\mathbf{R}^2} s(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} s(x, y) dy \right] dx \cdot$$

برهان. این قضیه را می‌توان از دستور تحویل (۳) برای انتگرالهای ریمان بدست آورد، ولی ما ترجیح می‌دهیم که آن را مستقیماً مستقل از نظریهٔ ریمان ثابت کنیم.

بازهٔ فشرده‌ای مانند $I = [a, b] \times [c, d]$ هست بقسمی که s یک تابع

پله‌ای بر I است، و اگر $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - I$، $s(x, y) = 0$. یک افراز I به mn زیر مستطیل مانند $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ هست بقسمی که s درون I_{ij} پایاست، یعنی

$$\text{اگر } (x, y) \in \operatorname{int} I_{ij} \text{، } s(x, y) = c_{ij}$$

در این صورت،

$$\iint_{I_{ij}} s(x, y)\, d(x, y) = c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$
$$= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x, y) dx \right] dy \,.$$

اگر بر i و j جمعبندی کنیم، نتیجه می‌شود که

$$\iint_I s(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b s(x, y) dx \right] dy \,.$$

چون s در خارج I صفر می‌شود، پس (۴) برقرار است، و با بیانی مشابه می‌توان (۵) را ثابت کرد.

برای توسیع قضیهٔ فوبینی به تابعهائی که انتگرال لبگ دارند، به بعضی نتایج دیگر دربارهٔ مجموعه‌های دارای اندازهٔ صفر نیاز داریم. این نتیجه‌ها در بخش بعد مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۶۰۱۵ بعضی از خواص مجموعه‌های دارای اندازهٔ صفر

قضیهٔ ۳۰۱۵ فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ باشد. در این صورت S وقتی، و فقط وقتی، دارای اندازهٔ n ۰ است که دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی مانند $\{J_1, J_2, \ldots\}$، که مجموع اندازه‌های n آنها متناهی باشد، وجود داشته باشد بقسمی که هر نقطه در S به‌ازای تعدادی نامتناهی k به J_k تعلق داشته باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که S دارای اندازهٔ n ۰ باشد. دراین صورت، به‌ازای هر $m \geqslant 1$، S را می‌توان با یک دستهٔ شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی مانند $\{I_{m,1}, I_{m,2}, \ldots\}$، که مجموع اندازه‌های n آنها از 2^{-m} کوچکتر باشد، پوشانید. مجموعهٔ A که از همهٔ بازه‌های $I_{m,k}$، به ازای $m = 1, 2, \ldots$ و $k = 1, 2, \ldots$، تشکیل شده است دسته‌ای است شمارشپذیر که S را می‌پوشاند، و مجموع اندازه‌های n همهٔ این بازه‌ها از $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1$ کوچکتر است. بعلاوه، هرگاه $\mathbf{a} \in S$، آنگاه به‌ازای هر m، kای هست بقسمی که $\mathbf{a} \in I_{m,k}$. بنابراین،

اگر بنویسیم $A = \{J_۱, J_۲, \cdots\}$، ملاحظه می‌شود که $\mathbf{a}$ به تعدادی نامتناهی J_k تعلق دارد.

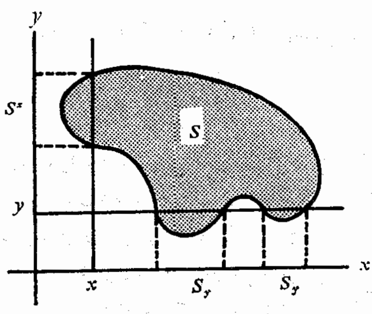
برعکس، فرض می‌کنیم یک دستهٔ شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی مانند $\{J_۱, J_۲, \cdots\}$ وجود داشته باشد بقسمی‌که رشتهٔ $\sum_{k=۱}^{\infty} \mu(J_k)$ همگرا باشد وهر نقطه در S به تعدادی نامتناهی از J_kها تعلق داشته باشد. به‌ازای $\varepsilon > ۰$ داده شده، عدد صحیحی مانند N وجود دارد بقسمی که

$$\sum_{k=N}^{\infty} \mu(J_k) < \varepsilon \cdot$$

هر نقطهٔ S در مجموعهٔ $\bigcup_{k=N}^{\infty} J_k$ قرار دارد، پس $S \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} J_k$. بنابراین، S را می‌توان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌ها پوشانید، که مجموع اندازه‌های n آنها از ε کمتر باشد، نتیجه‌آن‌که S دارای اندازهٔ n ۰ است.

تعریف ۴.۱۵ اگر S یک زیرمجموعهٔ دلخواه $\mathbf{R}^۲$ باشد، و $(x, y) \in \mathbf{R}^۲$، دو زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^۱$ مذکور در زیر را با S_y و S^x نشان می‌دهیم:

$$S_y = \{x \mid (x, y) \in S \text{ و } x \in \mathbf{R}^۱\},$$
$$S^x = \{y \mid (x, y) \in S \text{ و } y \in \mathbf{R}^۱\}.$$



شکل ۲.۱۵

مثالهائی در شکل ۲.۱۵ نشان داده شده‌اند. S_y، از نظر هندسی، تصویر برش متقاطع افقی S بر محور x؛ و S^x تصویر برش متقاطع قائم S بر محور y می‌باشد.

قضیهٔ ۵.۱۵ هرگاه S یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^۲$، و دارای اندازهٔ دوبعدی ۰ باشد، آنگاه S_y به‌ازای تقریباً همهٔ مقادیر y در $\mathbf{R}^۱$ دارای اندازهٔ یک‌بعدی ۰ است، و S^x

به‌ازای تقریباً همهٔ مقادیر x در $\mathbf{R}^1$ دارای اندازهٔ یک‌بعدی ۰ می‌باشد.

برهان. ثابت می‌کنیم‌که S_y به‌ازای تقریباً همهٔ مقادیر y در $\mathbf{R}^1$ دارای اندازهٔ یک‌بعدی ۰ است. در اثبات از قضیهٔ ۳.۱۵ استفاده می‌شود.

چون S دارای اندازهٔ دوبعدی ۰ است، بنابر قضیهٔ ۳.۱۵، دسته‌ای شمارشپذیر از مستطیلها مانند $\{I_k\}$ هست بقسمی که رشتهٔ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \quad \text{همگرا است،} \qquad (6)$$

و هر نقطهٔ S مانند (x, y) به تعدادی نامتناهی I_k تعلق دارد. می‌نویسیم $I_k = X_k \times Y_k$، که در آن X_k و Y_k زیربازه‌های $\mathbf{R}^1$ هستند. در این صورت،

$$\mu(I_k) = \mu(X_k)\,\mu(Y_k) = \mu(X_k) \int_{\mathbf{R}^1} \chi_{Y_k} = \int_{\mathbf{R}^1} \mu(X_k)\,\chi_{Y_k},$$

که در آن χ_{Y_k} تابع مشخص کنندهٔ بازهٔ Y_k می‌باشد. قرار می‌دهیم $g_k = \mu(X_k)\chi_{Y_k}$. دراین صورت از (۶) نتیجه می‌شود که رشتهٔ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^1} g_k \quad \text{همگرا است.}$$

اما $\{g_k\}$ دنباله‌ای است از تابعهای نامنفی در $L(\mathbf{R}^1)$ بقسمی که رشتهٔ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^1} g_k$$

همگرا است. بنابراین، بنا برقضیهٔ لوی (قضیهٔ ۲۵.۱۰)، رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ تقریباً همه‌جا بر $\mathbf{R}^1$ همگرا است. با بیان دیگر می‌توان گفت که، یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^1$ مانند T دارای اندازهٔ یک‌بعدی ۰ وجود دارد بقسمی که

به‌ازای هر y در $\mathbf{R}^1 - T$، رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)\chi_{Y_k}(y)$ همگرا است. (۷)

نقطه‌ای مانند y را در $\mathbf{R}^1 - T$ اختیار می‌کنیم، y را ثابت نگهداشته، مجموعهٔ S_y را درنظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که S_y دارای اندازهٔ یک بعدی صفر است.

می‌توان فرض کرد که S_y ناتهی است؛ زیرا در غیر این صورت نتیجه بدیهی خواهد بود. فرض کنیم که

$$A(y) = \{X_k \mid y \in Y_k,\ k = 1, 2, \ldots\}.$$

در این صورت $A(y)$ دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های یک بعدی است که ما آن را به صورت $\{J_1, J_2, \ldots\}$ برچسب مجدد می‌زنیم. بنابر (۷)، مجموع درازاهای

همهٔ بازه‌هـای J_k همگرا است. هرگاه $x \in S_y$، آنگاه $(x, y) \in S$، پس بـه‌ازای تعدادی نامتنـاهـی k، $(x, y) \in I_k = X_k \times Y_k$، و در نتیجه بـه‌ازای تعدادی نامتناهی k، $x \in J_k$. از صورت یک‌بعدی قضیهٔ ۳.۱۵ نتیجه می‌شود که S_y دارای اندازهٔ یک‌بعدی صفر است. این نشان می‌دهد کـه به‌ازای تقریباً هـر y در $\mathbf{R}^1$، S_y دارای انـدازهٔ یک‌بعدی صفر است، و با بیانی مشابه ثابت می‌شود که به‌ازای تقریباً هر x در $\mathbf{R}^1$، S^x دارای اندازهٔ یک‌بعدی صفر می‌باشد.

۷.۱۵ قضیهٔ تحویل فوبینی برای انتگرالهای مضاعف

قضیهٔ ۶.۱۵ فرض کنیم f بر $\mathbf{R}^2$ انتگرال لبگ داشته باشد. در این صورت:

آ) مجموعـه‌ای مـانند T دارای انـدازهٔ یک‌بعـدی ۰ هست بقسمی کـه به‌ازای هر y در $\mathbf{R}^1 - T$، انتگرال لبگ $\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)dx$ وجود دارد،

ب) تابع G، که بر $\mathbf{R}^1$ با معادلهٔ

$$G(y) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)dx \text{،} & y \in \mathbf{R}^1 - T \text{ اگر} \\ 0 \text{،} & y \in T \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف شده است، بر $\mathbf{R}^1$ انتگرال لبگ دارد،

ج)
$$\iint_{\mathbf{R}^2} f = \int_{\mathbf{R}^1} G(y)dy$$

یعنی

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)dx\right]dy\,.$$

تبصره. در قضیه‌ای شبیه به قضیهٔ بالا دستور زیرین نتیجه می‌شود:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)dy\right]dx\,.$$

برهان. قضیه را قبلاً بـرای تابعهای پله‌ای ثابت کـرده‌ایم. حـال آن را بـرای تابعهای بالائی ثابت می‌کنیم. اگـر $f \in U(\mathbf{R}^2)$، دنبالـه‌ای صعودی از تابعهـای پلـه‌ای مانند $\{s_n\}$ وجود دارد بقسمی کـه به‌ازای هـر (x, y) در $\mathbf{R}^2 - S$، رابطهٔ $s_n(x, y) \to f(x, y)$ برقرار است، کـه در این‌جا S مجموعـه‌ای دارای اندازهٔ دوبعدی ۰ است؛ همچنین،

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbf{R}^2} s_n(x, y)\, d(x, y) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y).$$

چون $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - S$ وقتی، و فقط وقتی، که $x \in \mathbf{R}^1 - S_y$، از این روی

اگر $x \in \mathbf{R}^1 - S_y$، $s_n(x, y) \to f(x, y)$. (۸)

فرض کنیم که $t_n(y) = \int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)dx$. این انتگرال به‌ازای هر عدد حقیقی y وجود دارد و تابعی است انتگراپذیر از y. بعلاوه، بنا بر قضیهٔ ۲۰۱۵،

$$\int_{\mathbf{R}^1} t_n(y)dy = \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)dx\right]dy$$
$$= \iint_{\mathbf{R}^2} s_n(x, y)\, d(x, y) \leqslant \iint_{\mathbf{R}^2} f.$$

چون دنبالهٔ $\{t_n\}$ صعودی است، نامساوی اخیر نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} t_n(y)dy$$

وجود دارد. بنابراین، بنا بر قضیهٔ لوی (قضیهٔ ۲۴۰۱۰)، تابعی مانند t در $L(\mathbf{R}^1)$ هست بقسمی که $t_n \to t$ تقریباً همه جا بر $\mathbf{R}^1$. با بیان دیگر می‌توان گفت که، مجموعه‌ای مانند T_1 دارای اندازهٔ یک بعدی ۰ هست بقسمی‌که اگر $y \in \mathbf{R}^1 - T_1$، $t_n(y) \to t(y)$. بعلاوه،

$$\int_{\mathbf{R}^1} t(y)dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} t_n(y)dy.$$

باز، چون $\{t_n\}$ صعودی است،

اگر $y \in \mathbf{R}^1 - T_1$ ، $t_n(y) = \int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)dx \leqslant t(y)$.

با بکار بردن قضیهٔ لوی در مورد $\{s_n\}$ نتیجه می‌شود که اگر $y \in \mathbf{R}^1 - T_1$، تابعی مانند g در $L(\mathbf{R}^1)$ وجود دارد بقسمی که به‌ازای هر x در $\mathbf{R}^1 - A$،

$$s_n(x, y) \to g(x, y),$$

که در آن A مجموعه‌ای دارای اندازهٔ یک بعدی ۰ است. (مجموعهٔ A به y بستگی دارد.) از مقایسهٔ این رابطه با (۸) ملاحظه می‌شود که هرگاه $y \in \mathbf{R}^1 - T_1$، آنگاه

به‌ازای $x \in \mathbf{R}^1 - (A \cup S_y)$ ، $g(x, y) = f(x, y)$. (۹)

ولی A و S_y به‌ازای تقریباً هر y دارای اندازهٔ یک‌بعدی ۰ هستند، در حقیقت به‌-

ازای هر y در $T_2 - \mathbf{R}^1$، که در آن T_2 دارای اندازهٔ یک‌بعدی ۰ است. قرار می‌دهیم $T = T_1 \cup T_2$. دراین صورت T دارای اندازهٔ یک‌بعدی ۰ است. اگر $y \in \mathbf{R}^1 - T$، مجموعهٔ $S_y \cup A$ دارای اندازهٔ یک‌بعدی ۰ است و (۹) برقرار خواهد بود. چون انتگرال $\int_{\mathbf{R}^1} g(x, y)dx$ به‌ازای هر $y \in \mathbf{R}^1 - T$ وجود دارد، پس انتگرال $\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)dx$ نیز به‌ازای هر $y \in \mathbf{R}^1 - T$ وجود خواهد داشت. از این (آ) ثابت می‌شود. همچنین، اگر $y \in \mathbf{R}^1 - T$، داریم

$$\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)dx = \int_{\mathbf{R}^1} g(x, y)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)dx = t(y). \tag{۱۰}$$

چون $t \in L(\mathbf{R}^1)$، پس (ب) برقراراست. بالاخره، داریم

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^1} t(y)\,dy &= \int_{\mathbf{R}^1} \lim_{n\to\infty} t_n(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} t_n(y)\,dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)\,dx\right] dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbf{R}^2} s_n(x, y)\,d(x, y) \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\,d(x, y).\end{aligned}$$

بامقایسهٔ این رابطه‌ها با (۱۰) می‌توان (ج) را نتیجه‌گرفت. بدین‌ترتیب قضیهٔ فوبینی برای تابعهای بالائی ثابت می‌شود.

برای اثبات آن برای تابعهائی‌که انتگرال لبگ دارند، می‌نویسیم $f = u - v$، که در آن $u \in L(\mathbf{R}^2)$ و $v \in L(\mathbf{R}^2)$، و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{R}^2} f = \iint_{\mathbf{R}^2} u - \iint_{\mathbf{R}^2} v &= \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} u(x, y)\,dx\right] dy \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} v(x, y)\,dx\right] dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} \{u(x, y) - v(x, y)\}\,dx\right] dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\,dx\right] dy.\end{aligned}$$

از قضیهٔ ۶.۱۵ و مشابه دو بعدی قضیهٔ ۱۱.۱۰ بی‌درنگ قضیهٔ زیر بدست می‌آید:

قضیهٔ ۷.۱۵ فرض کنیم f بر مستطیل فشردهٔ $I = [a, b] \times [c, d]$ تعریف شده و کراندار باشد، و f تقریباً همه جا بر I پیوسته باشد. در این صورت $f \in L(I)$ و

$$\iint_I f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx.$$

تبصره. انتگرال یک‌بعدی $\int_a^b f(x, y) dx$ به‌ازای تقریباً همهٔ مقادیر y در $[c, d]$ به‌عنوان یک انتگرال لبگ وجود دارد. اما لازم نیست به‌عنوان یک انتگرال ریمان وجود داشته باشد. تبصرهٔ مشابهی را می‌توان برای انتگرال $\int_c^d f(x, y)\, dy$ بیان کرد. درنظریهٔ ریمان، انتگرالهای داخلی دردستور تحویل را باید با انتگرالهای بالائی یا پائینی معاوضه کرد. (ر. ک. قضیهٔ ۶.۱۴، قسمت (ه).)

البته، توسیع قضیهٔ فوبینی به انتگرالهای با بعد بالاتر نیز وجود دارد. اگر f بر $\mathbf{R}^{m+k}$ انتگرال لبگ داشته باشد، در مشابه به قضیهٔ ۶.۱۵ داریم که

$$\int_{\mathbf{R}^{m+k}} f = \int_{\mathbf{R}^k} \left[\int_{\mathbf{R}^m} f(\mathbf{x}; \mathbf{y})\, d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}$$
$$= \int_{\mathbf{R}^m} \left[\int_{\mathbf{R}^k} f(\mathbf{x}; \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x}.$$

در اینجا هر نقطه در $\mathbf{R}^{m+k}$ را به‌صورت $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ نوشته‌ایم، که در آن $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ و $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$. این مطلب را می‌توان با توسیع روشی که برای اثبات حالت دوبعدی آن بکار رفته است ثابت کرد، ولی ما از ذکر جزئیات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

۸.۱۵ آزمون تنلی ـ هابسن[1] برای انتگرالپذیری

چه تابعهائی بر $\mathbf{R}^2$ انتگرال لبگ دارند؟ قضیهٔ زیرین شرط کافی مفیدی برای انتگرالپذیری بدست می‌دهد. برای اثبات آن از قضیهٔ فوبینی استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۸.۱۵ فرض کنیم f بر $\mathbf{R}^2$ اندازه‌پذیر باشد و دست‌کم یکی از دو انتگرال مکرر

$$\int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} |f(x, y)| dy \right] dx \quad \text{یا} \quad \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} |f(x, y)|\, dx \right] dy$$

1. Tonelli - Hobson

وجود داشته باشد، در این صورت:

آ) $f \in L(\mathbf{R}^2)$.

ب)
$$\iint_{\mathbf{R}^2} f = \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx\right] dy = \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

برهان. به‌خاطر قضیهٔ فوبینی، قسمت (ب) از قسمت (آ) نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت (آ) نیز از قضیهٔ فوبینی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که انتگرال مکرر $\int_{\mathbf{R}^1}[\int_{\mathbf{R}^1} |f(x, y)|\, dx]dy$ وجود داشته باشد. دنبالهٔ صعودی از تابعهای پله‌ای نامنفی $\{s_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_n(x, y) = \begin{cases} n & \text{، } \text{اگر } |x| \leqslant n \text{ و } |y| \leqslant n \\ 0 & \text{، } \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

قرار می‌دهیم $f_n(x, y) = \min\{s_n(x, y), |f(x, y)|\}$. چون s_n و $|f|$، هر دو، اندازه‌پذیرند، پس f_n اندازه پذیر خواهد بود. همچنین داریم

$$0 \leqslant f_n(x, y) \leqslant s_n(x, y),$$

پس f_n تحت تسلط تابعی است که انتگرال لبگ دارد. بنابراین، $f_n \in L(\mathbf{R}^2)$. از این روی می‌توان قضیهٔ فوبینی را برای f_n بکار برد، و با توجه به نامساویهای $0 \leqslant f_n(x, y) \leqslant |f(x, y)|$ نتیجه گرفت که

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f_n = \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} f_n(x, y)\, dx\right] dy \leqslant \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} |f(x, y)|\, dx\right] dy.$$

چون $\{f_n\}$ صعودی است، نامساوی فوق نشان می‌دهدکه $\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbf{R}^2} f_n$ وجود دارد. بنابر قضیهٔ لوی (مشابه دوبعدی قضیهٔ ۱۰.۲۴)، $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا بر $\mathbf{R}^2$ به‌تابع حدی در $L(\mathbf{R}^2)$ همگراست. اما وقتی‌که $n \to \infty$، $f_n(x, y) \to |f(x, y)|$، پس $|f| \in L(\mathbf{R}^2)$. چون f اندازه‌پذیر است، نتیجه می‌شود که $f \in L(\mathbf{R}^2)$. یعنی (آ) برقرار است. اگر انتگرال مکرر دیگر وجود داشته باشد، اثبات به همین گونه خواهد بود.

۹.۱۵ تبدیلهای مختصات

در نظریهٔ انتگرالگیری چندگانه یکی از مهمترین نتیجه‌ها دستور تغییرمتغیرها است. این دستور توسیع دستور

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\,dt$$

است، که درقضیهٔ ۳۶.۷ برای انتگرالهای ریمان، با فرض این‌که g بر بازه‌ای چون $T = [c, d]$ دارای مشتق پیوسته باشد و f بر نقش $g(T)$ پیوسته باشد، ثابت شد.

حالت خاصی را که در آن g' بر T هر گز صفر نشود (در نتیجه دارای علامت پایا باشد) درنظر می‌گیریم. هرگاه g' بر T مثبت باشد، آنگاه g صعودی است، پس $g(c) < g(d)$، $g(T) = [g(c), g(d)]$، و دستور بالا را می‌توان به صورت زیرین نوشت:

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f[g(t)]g'(t)dt.$$

ازسوی دیگر، هرگاه g' بر T منفی باشد، آنگاه $g(T) = [g(d), g(c)]$ و دستور بالا به صورت

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = -\int_T f[g(t)]\,g'(t)\,dt$$

درمی‌آید. بنابراین، دستور

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f[g(t)]\,|g'(t)|\,dt \qquad (۱۱)$$

هر دو حالت را در برمی‌گیرد. معادلهٔ (۱۱) برای حالت $c > d$ نیز معتبر است، و این‌شکل از (۱۱) است‌که برای انتگرالهای چندگانه تعمیم داده می‌شود. تابع g که متغیرها را تبدیل می‌کند باید جای خود را به تابعی برداری به‌نام تبدیل مختصات، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، بدهد.

تعریف ۹.۱۵ فرض‌کنیم T یک زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ باشد. تابع برداری $\mathbf{g}: T \to \mathbf{R}^n$ را یک تبدیل مختصات بر T می‌نامیم در صورتی که دارای این سه خاصیت باشد:

آ) $\mathbf{g} \in C'$ بر T باشد؛

ب) $\mathbf{g}$ بر T یک‌به‌یک باشد؛

ج) به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در T، $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \det \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{t}) \neq 0$.

تبصره. یک تبدیل مختصات گاهی یک وابرسانی نامیده می‌شود.

خاصیت (آ) بیان می‌کند که $\mathbf{g}$ بر T مشتقپذیر پیوسته است. از قضیهٔ ۴.۱۳ می‌دانیم که یک تابع که مشتقپذیر پیوسته باشد در نزدیکی هر نقطه که دترمینان ژاکوبی آن صفر نشود یک‌به‌یک موضعی است. در خاصیت (ب) فرض شده است که $\mathbf{g}$ بر T یک‌به‌یک کلی است. این فرض وجود معکوس کلی $\mathbf{g}^{-1}$ را که بر نقش $\mathbf{g}(T)$ تعریف شده و یک‌به‌یک است تضمین می‌کند. از خاصیتهای (آ) و (ج) نتیجه می‌شود که $\mathbf{g}$ یک نگاشت باز است (بنا بر قضیهٔ ۵.۱۳). همچنین، $\mathbf{g}^{-1}$ بر $\mathbf{g}(T)$ مشتقپذیر پیوسته می‌باشد (بنا برقضیهٔ ۶.۱۳).

خاصیتهای دیگر تبدیلهای مختصات از خاصیت ضرب‌پذیری دترمینانهای ژاکوبی مذکور در زیر بدست خواهند آمد.

قضیهٔ ۱۰.۱۵ (قضیهٔ ضرب برای دترمینانهای ژاکوبی). فرض‌کنیم $\mathbf{g}$ بر مجموعهٔ باز T در $\mathbf{R}^n$ مشتقپذیر، و $\mathbf{h}$ بر نقش $\mathbf{g}(T)$ مشتقپذیر باشد. در این صورت ترکیب $\mathbf{k} = \mathbf{h} \circ \mathbf{g}$ بر T مشتقپذیر است، و به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در T،

$$J_{\mathrm{k}}(\mathbf{t}) = J_{\mathrm{h}}[\mathbf{g}(\mathbf{t})] J_{\mathrm{g}}(\mathbf{t}). \tag{۱۲}$$

برهان. بنا بر قاعدهٔ زنجیره‌ای (قضیهٔ ۷.۱۲)، تابع مرکب $\mathbf{k}$ بر T مشتقپذیر است، و بنا بر شکل ماتریسی قاعدهٔ زنجیره‌ای، ماتریسهای ژاکوبی متناظر آنها به‌صورت زیرین به‌هم مربوطند:

$$\mathbf{Dk}(\mathbf{t}) = \mathbf{Dh}[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\mathbf{Dg}(\mathbf{t}). \tag{۱۳}$$

از نظریهٔ دترمینانها می‌دانیم که $\det(AB) = \det A \det B$، پس رابطهٔ (۱۳) رابطهٔ (۱۲) را ایجاب می‌کند.

این قضیه نشان می‌دهد که اگر $\mathbf{g}$ یک تبدیل مختصات بر T و $\mathbf{h}$ یک تبدیل مختصات بر $\mathbf{g}(T)$ باشند، تابع مرکب $\mathbf{k}$ یک تبدیل مختصات بر T خواهد بود. همچنین هر گاه $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$، آنگاه

به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در T، $\mathbf{k}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ و $J_{\mathrm{k}}(\mathbf{t}) = ۱$،

پس $J_{\mathrm{h}}[\mathbf{g}(\mathbf{t})] J_{\mathrm{g}}(\mathbf{t}) = ۱$ و $\mathbf{g}^{-1}$ یک تبدیل مختصات بر $\mathbf{g}(T)$ است.

تبدیل مختصات $\mathbf{g}$ و معکوس آن $\mathbf{g}^{-1}$ تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های باز T و زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{g}(T)$، و همچنین بین زیرمجموعه‌های فشردهٔ T و زیرمجموعه‌های فشردهٔ $\mathbf{g}(T)$ ایجاد می‌کنند. در مثالهای زیرین چند تبدیل مختصات متداول نشان داده می‌شوند.

مثال ۱ مختصات قطبی در $\mathbf{R}^2$. در این حالت T را به این صورت اختیار می‌کنیم:

$$T = \{(t_1, t_2) \mid t_1 > 0, \ \ 0 < t_2 < 2\pi\},$$

و فرض می‌کنیم تابع $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ بر T به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$g_1(\mathbf{t}) = t_1 \cos t_2, \ g_2(\mathbf{t}) = t_1 \sin t_2.$$

رسم بر این است که مؤلفه‌های $\mathbf{t}$ را با (r, θ)، به‌جای (t_1, t_2)، نشان می‌دهند. تبدیل مختصات $\mathbf{g}$ هر نقطهٔ (r, θ) در T را روی نقطهٔ (x, y) در $\mathbf{g}(T)$ که با دستورهای آشنای

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

داده می‌شود می‌نگارد. نقش $\mathbf{g}(T)$ مساوی مجموعهٔ $\mathbf{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \geqslant 0\}$ است، و دترمینان ژاکوبی $\mathbf{g}$ عبارت است از

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

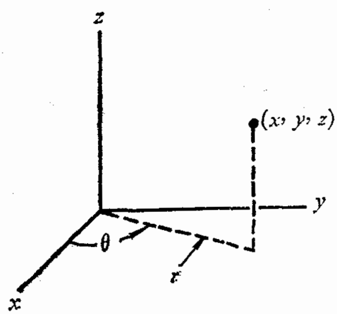
مثال ۲ مختصات استوانه‌ای در $\mathbf{R}^3$. در این جا می‌نویسیم $\mathbf{t} = (r, \theta, z)$ و T را به صورت زیرین اختیار می‌کنیم:

$$T = \{(r, \theta, z) \mid r > 0, \ \ 0 < \theta < 2\pi, \ \ -\infty < z < +\infty\}.$$

تبدیل مختصات $\mathbf{g}$ هر نقطهٔ (r, θ, z) در T را روی نقطهٔ (x, y, z) در $\mathbf{g}(T)$ که با معادله‌های

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

داده می‌شود می‌نگارد.



شکل ۳.۱۵

نقش $\mathbf{g}(T)$ مساوی مجموعهٔ $\mathbf{R}^3 - \{(x, 0, 0) \mid x \geqslant 0\}$ است، و دترمینان ژاکوبی $\mathbf{g}$ عبارت است از

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

معنی هندسی r، θ، و z در شکل ۳.۱۵ نشان داده شده است.

مثال ۳ مختصات کروی در $\mathbf{R}^3$. در این‌حالت می‌نویسیم $\mathbf{t} = (\rho, \theta, \varphi)$ و T را به صورت زیرین اختیار می‌کنیم:

$$T = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid \rho > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi\}.$$

تبدیل مختصات $\mathbf{g}$ هر نقطهٔ (ρ, θ, φ) در T را روی نقطهٔ (x, y, z) در $\mathbf{g}(T)$ که که با معادله‌های

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi$$

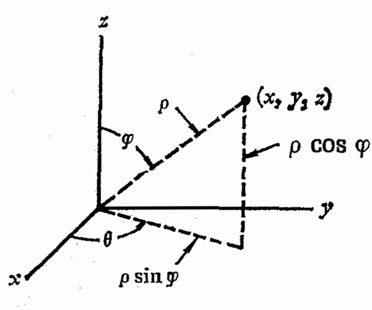
داده می‌شوند می‌نگارد. نقش $\mathbf{g}(T)$ مساوی مجموعهٔ

$$\mathbf{R}^3 - [\{(x, 0, 0) \mid x \geqslant 0\} \cup \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbf{R}\}]$$

است، و دترمینان ژاکوبی $\mathbf{g}$ عبارت است از

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\varphi.$$

معنی هندسی ρ، θ، و φ در شکل ۴.۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۴.۱۵

مثال ۴ تبدیلهای خطی در $\mathbf{R}^n$. فرض کنیم $\mathbf{g}:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ تبدیلی خطی باشد که با ماتریس $m(\mathbf{g}) = (a_{ij})$ نمایش داده می‌شود، پس

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}t_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}t_j\right).$$

در این صورت $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$، که در آن $g_i(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j$ ، و ماتریس ژاکوبی $\mathbf{g}$ عبارت است از

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{t}) = (D_j g_i(\mathbf{t})) = (a_{ij}).$$

بنابراین دترمینان ژاکوبی $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})$ پایا، و مساوی $\det(a_{ij})$، یعنی دترمینان ماتریس (a_{ij}) است. ما این را دترمینان $\mathbf{g}$ نیز می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\det \mathbf{g} = \det(a_{ij}).$$

تبدیل خطی $\mathbf{g}$ که بر $\mathbf{R}^n$ یک‌به‌یک باشد نااستثنائی نامیده می‌شود. خاصیتهای مقدماتی تبدیلهای نااستثنائی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^n$ که در پائین ذکر می‌شوند مورد استفاده قرار خواهند گرفت. (برهانهای آنها را می‌توان در هر کتاب درسی جبر خطی یافت؛ همچنین ر. ک. کتاب مرجع ۰.۱۰۱۴)

تبدیل خطی $\mathbf{g}$ وقتی، و فقط وقتی، نااستثنائی است‌که ماتریس آن $A = m(\mathbf{g})$ دارای معکوس A^{-1} باشد بقسمی که $AA^{-1} = I$، که در آن I ماتریس همانی (ماتریس تبدیل همانی) است. در این حالت A را نیز نااستثنائی می‌نامند. ماتریس A که $n \times n$ باشد، وقتی، وفقط وقتی، نااستثنائی است‌که $\det A \neq 0$. بنابراین، تابع خطی $\mathbf{g}$ وقتی، و فقط وقتی، یک تبدیل مختصات است که $\det \mathbf{g} \neq 0$.

هر تبدیل خطی نااستثنائی مانند $\mathbf{g}$ را می‌توان به صورت تجزیه‌ای از سه‌نوع بخصوص از تبدیلهای نااستثنائی به نام تبدیلهای مقدماتی بیان کرد، که ما آنها را با عنوانهای نوع a، نوع b، و نوع c متمایز می‌سازیم. این تبدیلها به صورت زیرین تعریف می‌شوند:

نوع a : $\mathbf{g}_a(t_1, \dots, t_k, \dots, t_n) = (t_1, \dots, \lambda t_k, \dots, t_n)$، که درآن $\lambda \neq 0$. با بیان دیگر می‌توان گفت که، $\mathbf{g}_a$ یکی از مؤلفه‌های $\mathbf{t}$ را در اسکالر ناصفری چون λ ضرب می‌کند. در حالت خاص، $\mathbf{g}_a$ بردارهای مختصات یکه را بدین صورت می‌نگارد:

به‌ازای یک مقدار k ، $g_a(\mathbf{u}_k) = \lambda \mathbf{u}_k$، به‌ازای هر $i \neq k$ ، $\mathbf{g}_a(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i$.

ماتریس $\mathbf{g}_a$ را می‌توان از ضرب عضوهای سطر kام ماتریس همانی در λ بدست آورد. همچنین $\det \mathbf{g}_a = \lambda$.

نوع b: $\mathbf{g}_b(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_k + t_j, \ldots, t_n)$، که در آن $j \neq k$. بنابراین، $\mathbf{g}_b$ فقط به‌جای یکی از مؤلفه‌های $\mathbf{t}$ مجموع آن بامؤلفه‌ای دیگر را قرارمی‌دهد. درحالت خاص، $\mathbf{g}_b$ بردارهای مختصات را به صورت زیر می‌نگارد:

به‌ازای دو مقدار ثابت k و j، با شرط $k \neq j$، $\mathbf{g}_b(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_j$؛

به‌ازای هر $i \neq k$، $\mathbf{g}_b(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i$.

ماتریس $\mathbf{g}_b$ را می‌توان این طور بدست آورد که در ماتریس همانی I سطر kام را با مجموع سطر kام و سطر jم عوض کرد. همچنین $\det \mathbf{g}_b = 1$.

نوع c: $\mathbf{g}_c(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_j, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_i, \ldots, t_n)$، که در آن $i \neq j$. یعنی، به‌ازای دو مقدار i و j که $i \neq j$، $\mathbf{g}_c$ مؤلفه‌های iم و jم $\mathbf{t}$ را با یکدیگر عوض می‌کند. در حالت خاص، به‌ازای هر $k \neq i$ و $k \neq j$،

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \quad \text{و} \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_k.$$

ماتریس $\mathbf{g}_c$ همان ماتریس همانی است‌که سطرهای iم و jم آن باهم عوض شده‌اند. در این حالت $\det \mathbf{g}_c = -1$.

معکوس یک تبدیل‌مقدماتی تبدیل‌دیگری ازهمان نوع‌است. ماتریس یک تبدیل مقدماتی‌را یک ماتریس مقدماتی نامند. با ضرب متوالی‌ماتریسهای مقدماتی ازطرف چپ در ماتریس نااستثنائی A، می‌توان A را به ماتریس همانی I تبدیل کرد. (این همان فرایند گاوس ـ ژردان در جبرخطی است که با آن آشنا هستید.) بنابراین،

$$I = T_1 T_2 \cdots T_r A,$$

که در آن هر T_k یک ماتریس مقدماتی است. از این روی،

$$A = T_r^{-1} \cdots T_2^{-1} T_1^{-1}.$$

اگر $A = m(\mathbf{g})$، از رابطهٔ بالا می‌توان متناظراً $\mathbf{g}$ را به صورت تجزیه‌ای از سازه‌ها درآورد که هرسازهٔ آن یک تبدیل مقدماتی باشد.

۱۰.۱۵ دستور تبدیل برای انتگرالهای چندگانه

بقیهٔ این فصل اختصاص دارد به اثبات دستور تبدیل زیرین برای انتگرالهای چندگانه.

قضیهٔ ۱۱.۱۵ فرض کنیم T یك زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$، و $\mathbf{g}$ یک تبدیل مختصات بر T باشد. فرض کنیم که تابع حقیقی f بر نقش $\mathbf{g}(T)$ تعریف شده باشد و انتگرال لبگ $\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد. در این صورت انتگرال لبگ

$$\int_T f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$$

نیز وجود دارد و

$$\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_T f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}. \tag{۱۴}$$

برهان قضیهٔ ۱۱.۱۵ به سه قسمت تقسیم‌شده است. قسمت ۱ نشان می‌دهد که دستور برای هرتبدیل مختصات خطی $\boldsymbol{\alpha}$ برقرار است. به‌عنوان نتیجه‌ای ازآن، رابطهٔ

$$\mu[\boldsymbol{\alpha}(A)] = |\det \boldsymbol{\alpha}|\,\mu(A)$$

را برای هر زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ مانند A که دارای اندازهٔ لبگ متناهی است بدست می‌آوریم. در قسمت ۲ تبدیل مختصات کلی $\mathbf{g}$ را درنظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که وقتی f تابع مشخص‌کنندهٔ یک مکعب فشرده باشد، (۱۴) برقرار است. از این نتیجه می‌شود که به‌ازای هرمکعب فشردهٔ K در $\mathbf{g}(T)$،

$$\mu(K) = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}. \tag{۱۵}$$

این درازترین قسمت برهان است. در قسمت ۳، با استفاده از معادلهٔ (۱۵)، دستور (۱۴) را به شکل کلی خود نتیجه می‌گیریم.

۱۱.۱۵ برهان دستور تبدیل برای تبدیلهای مختصات خطی

قضیهٔ ۱۲.۱۵ فرض کنیم $\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ یک تبدیل مختصات خطی باشد، هرگاه انتگرال لبگ $\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد، آنگاه انتگرال لبگ

$$\int_{\mathbf{R}^n} f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\,|J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$$

نیز وجود دارد، و دو انتگرال با هم متساویند.

برهان. ابتدا خاطرنشان می‌سازیم‌که هرگاه قضیه برای $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ درست باشد، آنگاه برای ترکیب $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\beta}$ نیزچنین است، زیرا چون $J_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{t}) = J_{\boldsymbol{\alpha}}[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{t})]J_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{t})$، پس

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{R}^n} f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\,|J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}\\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{t})])\,|J_{\boldsymbol{\alpha}}[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{t})]|\,|J_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}\\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f[\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t})]\,|J_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}.\end{aligned}$$

بنابراین، چون هر تبدیل خطی نااستثنائی $\boldsymbol{\alpha}$ ترکیبی از تبدیلهای مقدماتی است، کافی است قضیه را برای هر تبدیل مقدماتی ثابت کنیم. همچنین کافی است فرض کنیم که $f \geqslant 0$.

فرض می‌کنیم α از نوع a باشد. برای آسان شدن مطلب، فرض می‌کنیم که $\boldsymbol{\alpha}$ آخرین مؤلفهٔ $\mathbf{t}$ را در اسکالر ناصفری چون λ ضرب کند، یعنی

$$\boldsymbol{\alpha}(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, \lambda t_n).$$

دراین صورت $|J_\alpha(\mathbf{t})| = |\det \boldsymbol{\alpha}| = |\lambda|$. با بکار بردن قضیهٔ فوبینی، انتگرال f روی $\mathbf{R}^n$ را به صورت یک انتگرال مکرر مرکب ازیک انتگرال $(n-1)$بعدی روی $\mathbf{R}^{n-1}$ و یک انتگرال یک‌بعدی روی $\mathbf{R}^1$ می‌نویسیم. برای انتگرال روی $\mathbf{R}^1$ از قضیهٔ ۱۷.۱۰ (ب) و (ج) استفاده می‌کنیم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n\right]dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left[|\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \lambda t_n)\,dt_n\right]dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\,|J_\alpha(\mathbf{t})|\,dt_n\right]dt_1 \cdots dt_{n-1} \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\,|J_\alpha(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t},
\end{aligned}$$

که در آن درآخرین مرحله از قضیهٔ تنلی ــ هابسن استفاده شده است. از این نتیجه می‌شود که قضیه برای وقتی‌که αاز نوع a است برقرار است. اگر α از نوع b باشد، برهان شبیه همان است جز این که در این حالت قضیهٔ ۱۷.۱۰ (آ) را در مورد انتگرال یک‌بعدی بکار می‌بریم. در این حالت $|J_\alpha(\mathbf{t})| = 1$. بالاخره، اگر $\boldsymbol{\alpha}$ از نوع c باشد، فقط کافی است قضیهٔ فوبینی را برای تعویض ترتیب عمل انتگرالگیری روی مختصات iام و jام بکار بریم. دراین حالت نیز $|J_\alpha(\mathbf{t})| = 1$.

به‌عنوان نتیجه‌ای فوری داریم:

قضیهٔ ۱۳.۱۵ هرگاه $\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ یک تبدیل مختصات خطی، و A یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ باشد بقسمی‌که انتگرال لبگ $\int_{\alpha(A)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد، آنگاه انتگرال لبگ $\int_A f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\,|J_\alpha(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$ نیز وجود دارد، و دو انتگرال با هم متساویند.

برهان. فرض‌کنیم اگر $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\alpha}(A)$، $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$، و در غیر این صورت $\bar{f}(\mathbf{x}) = 0$. در این صورت،

$$\int_{\alpha(A)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\,|J_\alpha(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$$
$$= \int_A f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\,|J_\alpha(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}.$$

رابطهٔ زیرین که بین اندازهٔ A و اندازهٔ $\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{A})$ است نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۳.۱۵ می‌باشد.

قضیهٔ ۱۴.۱۵ فرض کنیم $\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ یک تبدیل مختصات خطی باشد. هرگاه A یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ با اندازهٔ لبگ متناهی $\mu(A)$ باشد، آنگاه $\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{A})$ نیز دارای اندازهٔ لبگ متناهی است و

$$\mu[\boldsymbol{\alpha}(A)] = |\det \boldsymbol{\alpha}|\,\mu(A)\,. \tag{۱۶}$$

برهان. می‌نویسیم $A = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(B)$، که در آن $B = \boldsymbol{\alpha}(A)$. چون $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ نیز یک تبدیل مختصات است، داریم

$$\mu(A) = \int_A d\mathbf{x} = \int_{\alpha^{-1}(B)} d\mathbf{x} = \int_B |\det \boldsymbol{\alpha}^{-1}|\,d\mathbf{t}$$
$$= |\det \boldsymbol{\alpha}^{-1}|\,\mu(B)\,.$$

چون $B = \boldsymbol{\alpha}(A)$ و $\det(\boldsymbol{\alpha}^{-1}) = (\det \boldsymbol{\alpha})^{-1}$، پس رابطهٔ (۱۶) نتیجه خواهد شد.

قضیهٔ ۱۵.۱۵ هرگاه A یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^n، و دارای اندازهٔ ژردان باشد، آنگاه به‌ازای هر تبدیل مختصات خطی $\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$، نقش $\boldsymbol{\alpha}(A)$ مجموعه‌ای است فشرده و دارای اندازهٔ ژردان و محتوای آن از معادلهٔ زیرین بدست می‌آید:

$$c[\boldsymbol{\alpha}(A)] = |\det \boldsymbol{\alpha}|\,c(A)\,.$$

برهان. مجموعهٔ $\boldsymbol{\alpha}(A)$ فشرده است زیرا $\boldsymbol{\alpha}$ بر A پیوسته است. برای اثبات قضیه مانند اثبات قضیهٔ ۱۴.۱۵ استدلال می‌کنیم. اما، در این حالت، همهٔ انتگرالها هم به‌عنوان انتگرال لبگ وهم به‌عنوان انتگرال ریمان وجود خواهند داشت.

۱۲.۱۵ برهان دستور تبدیل برای تابع مشخص‌کنندهٔ یك مکعب فشرده

این بخش حاوی قسمت ۲ از برهان قضیهٔ ۱۱.۱۵ است. در سراسر بخش فرض می‌کنیم که $\mathbf{g}$ یک تبدیل مختصات بر مجموعه‌ای باز چون T در $\mathbf{R}^n$ باشد. هدف ما این است که ثابت کنیم که به‌ازای هرمکعب فشردهٔ K در T،

$$\mu(K) = \int_{g^{-1}(K)} |J_g(T)|\, dt.$$

مطالب کمکی مورد نیاز برای اثبات این دستور با عنوان لم مشخص شده‌اند.

برای کمک به ساده شدن جزئیات، نمادهای مناسب دیگری را معرفی می‌کنیم. به جای متر اقلیدسی متداول برای $\mathbf{R}^n$، متر d را که به صورت

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$$

تعریف می‌شود بکار می‌بریم. این متر در مثال ۹، بخش ۱۳.۳، معرفی شده بود. فقط در این بخش به جای $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ می‌نویسیم $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

با این متر، گوی $B(\mathbf{a}; r)$ به مرکز $\mathbf{a}$ و شعاع r یک مکعب n بعدی است که مرکز آن $\mathbf{a}$، و درازای ضلع آن $2r$ است؛ یعنی، $B(\mathbf{a}; r)$ حاصل ضرب دکارتی n بازهٔ یک‌بعدی است، که درازای هر یک $2r$ می‌باشد. اندازهٔ هر چنین مکعبی $(2r)^n$، یعنی حاصل‌ضرب درازاهای اضلاع آن، می‌باشد.

هرگاه $\alpha : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ تبدیلی خطی باشد که با ماتریس (a_{ij}) نمایش داده شده باشد، یعنی

$$\alpha(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j\right),$$

آنگاه

$$\|\alpha(\mathbf{x})\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leqslant \|\mathbf{x}\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{17}$$

همچنین تعریف می‌کنیم

$$\|\alpha\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{18}$$

این رابطه متر $\|\alpha - \beta\|$ را بر فضای همهٔ تبدیلهای خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^n$ تعریف می‌کند. اولین لم بعضی از خاصیتهای این متر را بدست می‌دهد.

لم ۱ فرض کنیم α و β تبدیلهائی خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^n$ باشند. در این صورت:

آ) به‌ازای یک مقدار $\mathbf{x}$ با شرط $\|\mathbf{x}\| = 1$، $\|\alpha\| = \|\alpha(\mathbf{x})\|$.

ب) به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$، $\|\alpha(\mathbf{x})\| \leqslant \|\alpha\|\,\|\mathbf{x}\|$.

ج) $\|\alpha \circ \beta\| \leqslant \|\alpha\|\,\|\beta\|$.

د) $\|\mathbf{I}\| = 1$، که در آن $\mathbf{I}$ تبدیل همانی است.

برهان. فرض می‌کنیم که $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ به ازای $i=p$ حاصل شود. اگر $a_{pj}\geqslant 0$، x_p را مساوی ۱، اگر $a_{pj}<0$، x_p را مساوی ۱ −، و اگر $j\neq p$، x_j را مساوی ۰ اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$\|\mathbf{x}\| = 1 \text{ و } \|\boldsymbol{\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\|,$$

یعنی (آ) برقرار است.

قسمت (ب) بی‌درنگ از (۱۷) و (۱۸) نتیجه می‌شود. برای اثبات (ج)، از (ب) استفاده کرده می‌نویسیم

$$\|(\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta})(\mathbf{x})\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}))\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|\,\|\mathbf{x}\|.$$

اگر $\mathbf{x}$ را با شرط $\|\mathbf{x}\|=1$ بقسمی اختیار کنیم‌که $\|(\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta})(\mathbf{x})\| = \|\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta}\|$، قسمت (ج) بدست می‌آید.

بالاُخره، هرگاه $\mathbf{I}$ تبدیل همانی باشد، آنگاه در (۱۸) هر مجموع

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = 1,$$

پس $\|\mathbf{I}\|=1$.

تبدیل مختصات $\mathbf{g}$ بر T مشتقپذیر است، پس به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در T، مشتق‌کل $\mathbf{g}$، یعنی $\mathbf{g}'(\mathbf{t})$، یک تبدیل خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^n$ است که با ماتریس ژاکوبی

$$\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{t}) = (D_j\, g_i(\mathbf{t}))$$

نمایش داده می‌شود. بنابراین، اگر در (۱۸) فرض کنیم که $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{g}'(\mathbf{t})$، خواهیم داشت

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|D_j\, g_i(\mathbf{t})|.$$

ملاحظه می‌کنیم که $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|$ تابعی پیوسته از $\mathbf{t}$ است زیرا همهٔ $D_j\, g_i$ ها بر T پیوسته‌اند.

اگر Q یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ T باشد، هر تابع $D_j\, g_i$ بر Q کراندار است؛ از این روی $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|$ نیز بر Q کراندارخواهد بود. تعریف می‌کنیم

$$\lambda_{\mathrm{g}}(Q) = \sup_{\mathbf{t}\in Q}\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\| = \sup_{\mathbf{t}\in Q}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|D_j\, g_i(\mathbf{t})|\right\}. \quad (19)$$

لم زیر بیان می‌کند که نقش $\mathbf{g}(Q)$ی مکعب Q با درازای ضلع $2r$ در مکعب دیگری به‌درازای ضلع $2r\,\lambda_{\mathrm{g}}(Q)$ واقع است.

لم ۲ فرض کنیم $Q = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant r\}$ یك مکعب فشرده با درازای ضلع $۲r$ باشدکه در T قرار دارد. در این صورت به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در Q، این رابطه را داریم:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\| \leqslant r\lambda_{\mathbf{g}}(Q). \qquad (۲۰)$$

بنابراین، $\mathbf{g}(Q)$ در مکعبی به درازای ضلع $۲r\lambda_{\mathbf{g}}(Q)$ واقع است.

برهان. بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین برای تابعهای حقیقی،

$$g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{a}) = \nabla g_i(\mathbf{z}_i) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{j=۱}^{n} D_j g_i(\mathbf{z}_i)(x_j - a_j),$$

که در آن $\mathbf{z}_i$ بر پاره‌خطی که $\mathbf{x}$ و $\mathbf{a}$ را به هم وصل می‌کند قرار دارد. بنابراین،

$$\begin{aligned}|g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{a})| &\leqslant \sum_{j=۱}^{n} |D_j g_i(\mathbf{z}_i)|\,|x_j - a_j| \\ &\leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \sum_{j=۱}^{n} |D_j g_i(\mathbf{z}_i)| \leqslant r\lambda_{\mathbf{g}}(Q),\end{aligned}$$

و این رابطهٔ (۲۰) را ایجاب می‌کند.

تبصره. نامساوی (۲۰) نشان می‌دهد که $\mathbf{g}(Q)$ در داخل مکعبی به محتوای

$$(۲r\lambda_{\mathbf{g}}(Q))^n = \{\lambda_{\mathbf{g}}(Q)\}^n c(Q)$$

قرار دارد.

لم ۳ هرگاه A یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ T، و دارای اندازهٔ ژردان باشد، آنگاه $\mathbf{g}(A)$ یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{g}(T)$، و دارای اندازهٔ ژردان خواهد بود.

برهان. فشردگی $\mathbf{g}(A)$ از پیوستگی $\mathbf{g}$ نتیجه می‌شود. چون A اندازهٔ ژردان دارد، کرانهٔ آن، یعنی ∂A، دارای محتوای صفر است. همچنین، از این که $\mathbf{g}$ یک‌به‌یک وپیوسته است نتیجه می‌شودکه $\partial(\mathbf{g}(A)) = \mathbf{g}(\partial A)$. بنابراین، برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم که $\mathbf{g}(\partial A)$ دارای محتوای صفر است.

به‌ازای $\varepsilon > ۰$ مفروض، تعدادی متناهی بازهٔ باز مانند $A_۱$، ...، A_m جزء T هستند بقسمی‌که مجموع اندازه‌های آنها از ε کمتر است، و $\partial A \subseteq \bigcup_{i=۱}^{m} A_i$. بنا بر قضیهٔ ۱۰۱۵، این اجتماع را نیز می‌توان به صورت اجتماعی از یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مکعبهای ازهم جدا مانند $U(\varepsilon)$ درآورد،که مجموع اندازه‌های آنها از ε کمتر باشد. اگر $\varepsilon < ۱$، می‌توان فرض کرد که هر مکعب در $U(\varepsilon)$ محتوا در $U(۱)$ باشد. (اگر چنین نباشد، اشتراک هرمکعب در $U(\varepsilon)$ را با هر مکعب در $U(۱)$ بدست می‌آوریم و دوباره قضیهٔ ۱۰۱۵ را بکار می‌بریم.) چون ∂A فشرده

است، یک زیردستهٔ متناهی از مکعبها در $U(\varepsilon)$، مثلاً Q_1، . . .، Q_k، هست که ∂A را می‌پوشانند. بنابر لم ۲، نقش $\mathbf{g}(\bar{Q}_i)$ در مکعبی با اندازهٔ $\{\lambda_{\mathbf{g}}(\bar{Q}_i)\}^n c(Q_i)$ واقع است. فرض می‌کنیم که $\lambda = \lambda_{\mathbf{g}}(\overline{U(1)})$. در این صورت $\lambda_{\mathbf{g}}(\bar{Q}_i) \leqslant \lambda$ زیرا $\bar{Q}_i \subseteq \overline{U(1)}$. بنابراین، $\mathbf{g}(\partial A)$ را می‌توان با تعدادی متناهی از مکعبها، که مجموع اندازه‌های آنها از $\lambda^n \sum_{i=1}^{k} c(Q_i) < \varepsilon \lambda^n$ تجاوز نکند، پوشانید. چون این مطلب برای هر $\varepsilon < 1$ برقرار است، نتیجه می‌شود که $\mathbf{g}(\partial A)$ دارای محتوای ژردان ۰ است، پس $\mathbf{g}(A)$ دارای اندازهٔ ژردان خواهد بود.

لم زیرین محتوای مکعبی چون Q را با محتوای نقش آن، یعنی $c[\mathbf{g}(Q)]$، مربوط می‌سازد.

لم ۴ فرض کنیم Q یک مکعب فشرده در T باشد، و $\mathbf{h} = \boldsymbol{\alpha} \circ \mathbf{g}$، که در آن $\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ یک تبدیل خطی ناا‌ستثنائی باشد. در این صورت

$$c[\mathbf{g}(Q)] \leqslant |\det \boldsymbol{\alpha}|^{-1} \{\lambda_{\mathbf{h}}(Q)\}^n c(Q). \tag{۲۱}$$

برهان. از لم ۲ داریم $c[\mathbf{g}(Q)] \leqslant \{\lambda_{\mathbf{g}}(Q)\}^n c(Q)$. با بکار بردن این نامساوی در مورد تبدیل مختصات $\mathbf{h}$، نتیجه می‌شود که

$$c[\mathbf{h}(Q)] \leqslant \{\lambda_{\mathbf{h}}(Q)\}^n c(Q).$$

اما، بنابر قضیهٔ ۱۵.۱۵، $c[\mathbf{h}(Q)] = c[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{g}(Q))] = |\det \boldsymbol{\alpha}|\, c[\mathbf{g}(Q)]$، پس

$$c[\mathbf{g}(Q)] = |\det \boldsymbol{\alpha}|^{-1} c[\mathbf{h}(Q)] \leqslant |\det \boldsymbol{\alpha}|^{-1} \{\lambda_{\mathbf{h}}(Q)\}^n c(Q).$$

لم ۵ فرض کنیم Q یک مکعب فشرده در T باشد. دراین صورت به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ هست بقسمی که اگر $\mathbf{t} \in Q$ و $\mathbf{a} \in Q$،

$$\text{وقتی که } \|\mathbf{t} - \mathbf{a}\| < \delta ،\quad \|\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1} \circ \mathbf{g}'(\mathbf{t})\| < 1 + \varepsilon. \tag{۲۲}$$

برهان. تابع $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|^{-1}$ پیوسته است، و در نتیجه بر Q کراندار است، یعنی یک مقدار $M > 0$ وجود دارد که به‌ازای هر $\mathbf{t}$ در Q، $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})^{-1}\| < M$. بنابر پیوستگی $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|$، یک $\delta > 0$ وجود دارد بقسمی که

$$\text{وقتی‌که } \|\mathbf{t} - \mathbf{a}\| < \delta ،\quad \|\mathbf{g}'(\mathbf{t}) - \mathbf{g}'(\mathbf{a})\| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

هرگاه $\mathbf{I}$ تبدیل همانی باشد، آنگاه

$$\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1} \circ \mathbf{g}'(\mathbf{t}) - \mathbf{I}(\mathbf{t}) = \mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1} \circ \{\mathbf{g}'(\mathbf{t}) - \mathbf{g}'(\mathbf{a})\},$$

پس اگر $\|\mathbf{t}-\mathbf{a}\|<\delta$،

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1}\circ\mathbf{g}'(\mathbf{t})-\mathbf{I}(\mathbf{t})\|\leqslant\|\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1}\|\ \|\mathbf{g}'(\mathbf{t})-\mathbf{g}'(\mathbf{a})\|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که $\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|+\|\alpha-\beta\|$. با فرض

$$\alpha=\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1}\circ\mathbf{g}'(\mathbf{t}) \quad \text{و} \quad \beta=\mathbf{I}(\mathbf{t})،$$

(۲۲) نتیجه خواهد شد.

لم ۶ فرض کنیم Q یک مکعب فشرده در T باشد. در این صورت

$$c[\mathbf{g}(Q)]\leqslant\int_Q|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}.$$

برهان. انتگرال طرف راست به‌عنوان یک انتگرال ریمان وجود دارد زیرا انتگرالدهٔ آن بر Q پیوسته و کراندار است. بنابراین، به‌ازای $\varepsilon>0$ داده شده، یک افراز Q مانند P_ε هست بقسمی‌که برای هر مجموع ریمان $S(P,|J_{\mathbf{g}}|)$، که در آن P از P_ε ظریفتر باشد، داریم

$$\left|S(P,|J_{\mathbf{g}}|)-\int_Q|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}\right|<\varepsilon.$$

Pای را از این نوع اختیار می‌کنیم‌که به تعدادی متناهی مکعب مانند $Q_1,\dots,Q_m$ تقسیم شده باشدکه‌درازای ضلع هر یک‌ازآنها از δ کمتر باشد، که درآن δ (که تابع ε است) در لم ۵ داده شده است. فرض‌کنیم $\mathbf{a}_i$ مرکز Q_i را نشان دهد. اگرلم۴ را در مورد Q_i با $\alpha=\mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)^{-1}$ بکار بریم، نامساوی زیرین بدست می‌آید:

$$c[\mathbf{g}(Q_i)]\leqslant|\det\mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)|\ \{\lambda_{\mathbf{h}}(Q_i)\}^n c(Q_i), \tag{۲۳}$$

که درآن $\mathbf{h}=\alpha\circ\mathbf{g}$. بنابرقاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم $\mathbf{h}'(\mathbf{t})=\alpha'(\mathbf{x})\circ\mathbf{g}'(\mathbf{t})$، که در آن $\mathbf{x}=\mathbf{g}(\mathbf{t})$. اما $\alpha'(\mathbf{x})=\alpha$ زیرا α یک تابع خطی است، پس

$$\mathbf{h}'(\mathbf{t})=\alpha\circ\mathbf{g}'(\mathbf{t})=\mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)^{-1}\circ\mathbf{g}'(\mathbf{t}).$$

اما، بنابر لم ۵، اگر $\mathbf{t}\in Q_i$، $\|\mathbf{h}'(\mathbf{t})\|<1+\varepsilon$، پس

$$\lambda_{\mathbf{h}}(Q_i)=\sup_{\mathbf{t}\in Q_i}\|\mathbf{h}'(\mathbf{t})\|\leqslant 1+\varepsilon.$$

بنابراین، از (۲۳) نامساوی زیرین بدست می‌آید:

$$c[\mathbf{g}(Q_i)]\leqslant|\det\mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)|\ (1+\varepsilon)^n\, c(Q_i).$$

اگر روی i جمعبندی کنیم، خواهیم داشت

$$c[\mathbf{g}(Q)] \leqslant (\text{۱} + \varepsilon)^n \sum_{i=\text{۱}}^{m} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)|\, c(Q_i).$$

چون $\det \mathbf{g}'(\mathbf{a}_i) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{a}_i)$، مجموع طرف راست یک مجموع ریمان مانند $S(P, |J_{\mathbf{g}}|)$ است، و چون $S(P, |J_{\mathbf{g}}|) < \int_Q |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\,\mathbf{t} + \varepsilon$ نتیجه می‌شود که

$$c[\mathbf{g}(Q)] \leqslant (\text{۱} + \varepsilon)^n \left\{ \int_Q |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} + \varepsilon \right\}.$$

اما ε دلخواه است، بنا بر این از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که $c[\mathbf{g}(Q)] \leqslant \int_Q |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$.

لم ۷ فرض کنیم K یك مکعب فشرده در $\mathbf{g}(T)$ باشد. در این صورت

$$\mu(K) \leqslant \int_{\mathbf{g}^{-\text{۱}}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}. \tag{۲۴}$$

برهان. انتگرال به‌عنوان یک انتگرال ریمان وجود دارد زیرا انتگرالدهٔ آن بر مجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{g}^{-\text{۱}}(K)$ پیوسته است. همچنین، بنا بر لم ۳، انتگرال روی $\mathbf{g}^{-\text{۱}}(K)$ مساوی انتگرال روی درون $\mathbf{g}^{-\text{۱}}(K)$ می‌باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۰.۱۵، می‌توان نوشت

$$\operatorname{int} \mathbf{g}^{-\text{۱}}(K) = \bigcup_{i=\text{۱}}^{\infty} A_i,$$

که در آن $\{A_\text{۱}, A_\text{۲}, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مکعبهای ازهم جدا است که بست آنها درون $\mathbf{g}^{-\text{۱}}(K)$ قرار دارند. بنابراین، $\operatorname{int} \mathbf{g}^{-\text{۱}}(K) = \bigcup_{i=\text{۱}}^{\infty} Q_i$، که در آن هر Q_i بست A_i است. چون انتگرال مذکور در (۲۴) یک انتگرال لبگ نیز هست، می‌توان با استفاده از خاصیت جمعپذیری شمارشپذیر و لم ۶ نوشت

$$\int_{\mathbf{g}^{-\text{۱}}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} = \sum_{i=\text{۱}}^{\infty} \int_{Q_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \geqslant \sum_{i=\text{۱}}^{\infty} \mu[\mathbf{g}(Q_i)]$$
$$= \mu\left(\bigcup_{i=\text{۱}}^{\infty} \mathbf{g}(Q_i) \right) = \mu(K).$$

لم ۸ فرض کنیم K یک مکعب فشرده در $\mathbf{g}(T)$ باشد. در این صورت به‌ازای هر تابع بالائی و نامنفی f که بر K کراندار باشد، انتگرال

$$\int_{\mathbf{g}^{-\text{۱}}(K)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$$

وجود دارد، و این نامساوی برقرار است:

$$\int_K f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}. \tag{۲۵}$$

برهان. فرض کنیم s یک تابع پله‌ای نامنفی بر K باشد. در این صورت یک افراز K به تعدادی متناهی مکعب مانند K_1، . . . ، K_r هست بقسمی که s درون هر K_i پایا است، مثلاً، اگر $\mathbf{x} \in \operatorname{int} K_i$، $s(\mathbf{x}) = a_i \geqslant 0$. با بکار بردن (۲۴) برای هر K_i، ضرب دو طرف آن در a_i و جمع همهٔ آنها، نامساوی زیرین حاصل می‌شود:

$$\int_K s(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} s[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}. \tag{۲۶}$$

حال فرض می‌کنیم که $\{s_k\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای نامنفی باشد که تقریباً همه جا بر K به تابع بالائی f همگرا باشد. در این صورت (۲۶) برای هر s_k برقراراست، و اگر درآن $k \to \infty$، نامساوی (۲۵) بدست می‌آید. وجود انتگرال طرف راست ازقضیهٔ همگرائی‌کراندارلبگ نتیجه می‌شود زیرا $f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]$ و $|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|$، هر دو، بر مجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{g}^{-1}(K)$ کراندار است.

قضیهٔ ۱۶.۱۵ فرض کنیم K یک مکعب فشرده در $\mathbf{g}(T)$ باشد، در این صورت

$$\mu(K) = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}. \tag{۲۷}$$

برهان. به‌خاطر لم ۷، کافی است نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \leqslant \mu(K). \tag{۲۸}$$

همان طور که در برهان لم ۷ انجام شد می‌نویسیم

$$\operatorname{int} \mathbf{g}^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,$$

که در آن $\{A_1, A_2, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مکعبهای از هم جدا است و Q_i بست A_i می‌باشد. در این صورت

$$\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}. \tag{۲۹}$$

حال با فرض $f = |J_{\mathbf{g}}|$ و استفاده از تبدیل مختصات $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$، لم ۸ را در مورد هر انتگرال $\int_{Q_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$ بکار می‌بریم. نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\int_{Q_i} |J_g(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \leqslant \int_{g(Q_i)} |J_g[\mathbf{h}(\mathbf{u})]|\, |J_h(\mathbf{u})|\, d\mathbf{u}$$
$$= \int_{g(Q_i)} d\mathbf{u} = \mu[\mathbf{g}(Q_i)],$$

که اگر از آن در (۲۹) استفاده کنیم، نامساوی (۲۸) بدست می‌آید.

۱۳.۱۵ اتمام برهان دستور تبدیل

اینک اتمام برهان دستور

$$\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_T f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]|J_g(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}, \tag{۳۰}$$

با شرطهای مذکور در قضیهٔ ۱۱.۱۵ نسبتاً آسان است. یعنی، فرض کنیم که T یک زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$، و $\mathbf{g}$ یک تبدیل مختصات بر T باشد، و انتگرال طرف چپ (۳۰) وجود داشته باشد. ثابت می‌کنیم که انتگرال طرف راست نیز وجود دارد و دو انتگرال با هم متساویند. این مطلب را از حالت خاصی که در آن انتگرال طرف چپ روی یک مکعب مانند K وسعت داده شده باشد نتیجه می‌گیریم.

قضیهٔ ۱۷.۱۵ فرض کنیم K یک مکعب فشرده در $\mathbf{g}(T)$ باشد و انتگرال لبگ $\int_K f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد. در این صورت انتگرال لبگ

$$\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_g(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$$

نیز وجود دارد، و دو انتگرال با یکدیگر متساویند.

برهان. کافی است قضیه را برای وقتی ثابت‌کنیم که f بر K تابعی بالائی باشد. در این صورت دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_k\}$ وجود دارد بقسمی که $s_k \to f$ تقریباً همه جا بر K. بنابر قضیهٔ ۱۶.۱۵، به‌ازای هر تابع پله‌ای s_k داریم

$$\int_K s_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} s_k[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_g(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}.$$

وقتی که $k \to \infty$، $\int_K s_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \to \int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. حال قرار می‌دهیم

$$f_k(\mathbf{t}) = \begin{cases} s_k[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_g(\mathbf{t})| \quad \text{،} \quad \mathbf{t} \in \mathbf{g}^{-1}(K) & \text{اگر} \\ 0 \quad \text{،} \quad \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n - \mathbf{g}^{-1}(K) & \text{اگر} \end{cases}.$$

در این صورت

$$\int_{R^n} f_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} s_k[\mathbf{g}(\mathbf{t})\ |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} = \int_K s_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

پس

$$\lim_{k\to\infty} \int_{R^n} f_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} = \lim_{k\to\infty} \int_K s_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_K f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

به‌موجب قضیهٔ لوی (مشابه به قضیهٔ ۲۴.۱۰)، دنبالهٔ $\{f_k\}$ تقریباً همه جا بر $\mathbf{R}^n$ به تابعی در $L(\mathbf{R}^n)$ همگرا خواهد بود. چون تقریباً همه‌جا بر $\mathbf{R}^n$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{t}) = \begin{cases} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\ |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \text{ ،} & \text{اگر } \mathbf{t}\in \mathbf{g}^{-1}(K) \\ 0 \text{ ،} & \text{اگر } \mathbf{t}\in \mathbf{R}^n - \mathbf{g}^{-1}(K) \end{cases}$$

پس نتیجه می‌شود که انتگرال $\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\ |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$ وجود دارد و مساوی $\int_K f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ است، و بدین ترتیب برهان قضیهٔ ۱۷.۱۵ تمام می‌شود.

برهان قضیهٔ ۱۱.۱۵ حال فرض می‌کنیم‌که انتگرال $\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد. چون $\mathbf{g}(T)$ باز است، می‌توان نوشت

$$\mathbf{g}(T) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

کــه در آن $\{A_1, A_2, \ldots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مکعبهای از هم جدا است کــه بستهای آنها در $\mathbf{g}(T)$ قرار دارند. فرض کنیم K_i بست A_i را نشان دهد. با استفاده از خاصیت جمعپذیری شمارشپذیر و قضیهٔ ۱۷.۱۵، داریم

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{K_i} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{g}^{-1}(K_i)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\ |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} \\ &= \int_T f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\ |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}.\end{aligned}$$

تمرین

۱.۱۵ اگر T ناحیهٔ مثلثی شکل در $\mathbf{R}^2$ با رأسهای $(0, 0)$، $(1, 0)$، و $(0, 1)$ باشد، و $f \in L(T)$، ثابت کنید که

$$\int_T f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \left[\int_0^x f(x,y)\,dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_y^1 f(x,y)\,dx\right] dy.$$

۲.۱۵ به‌ازای ثابت c، با شرط $0 < c < 1$، تابع f را بر $\mathbf{R}^2$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} (1-y)^c/(x-y)^c & \text{اگر } 0 < x < 1 \text{ و } 0 \leqslant y < x \text{ ،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت ،} \end{cases}$$

ثابت کنید که $f \in L(\mathbf{R}^2)$ و انتگرال مضاعف $\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,d(x,y)$ را محاسبه کنید.

۳.۱۵ فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $\mathbf{R}^2$ با اندازهٔ متناهی $\mu(S)$ باشد. با استفاده از نمادهای تعریف ۴.۱۵، ثابت کنید که

$$\mu(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(S^x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(S_y)\,dy.$$

۴.۱۵ اگر $x \geqslant 0$ و $y \geqslant 0$، قرار دهید $f(x,y) = e^{-xy}\sin x \sin y$، و در غیر این صورت، قرار دهید $f(x,y) = 0$. ثابت کنید که هر دو انتگرال مکرر

$$\int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x,y)\,dx\right] dy \quad \text{و} \quad \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x,y)\,dy\right] dx$$

وجود دارند و با هم متساویند، ولی انتگرال مضاعف f روی $\mathbf{R}^2$ وجود ندارد. همچنین توضیح دهید که چرا این نتیجه با آزمون تنلی ـ هابسن مغایر نیست (قضیهٔ ۸.۱۵).

۵.۱۵ به‌ازای $0 \leqslant x \leqslant 1$ و $0 < y \leqslant 1$، قرار دهید

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2,$$

و فرض کنید که $f(0,0) = 0$. ثابت کنید هر دو انتگرال مکرر

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right] dy \quad \text{و} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx$$

وجود دارند ولی با یکدیگر متساوی نیستند. این نشان می‌دهد که f بر $[0,1] \times [0,1]$ انتگرال لبگ ندارد.

۶.۱۵ فرض‌کنید $I=[0,1]\times[0,1]$، واگر $(x, y)\in I$ و $(x, y)\neq(0, 0)$، قرار دهید $f(x, y)=(x-y)/(x+y)^3$، و $f(0, 0)=0$. با توجه به انتگرالهای مکرر

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x, y)\,dx\right]dy \quad \text{و} \quad \int_0^1\left[\int_0^1 f(x, y)\,dy\right]dx$$

ثابت کنید که $f\notin L(I)$.

۷.۱۵ فرض‌کنید $I=[0,1]\times[1,+\infty[$، و اگر $(x, y)\in I$، قرار دهید $f(x, y)=e^{-xy}-2e^{-2xy}$. با توجه به انتگرالهای مکرر

$$\int_1^\infty\left[\int_0^1 f(x, y)\,dx\right]dy \quad \text{و} \quad \int_0^1\left[\int_1^\infty f(x, y)\,dy\right]dx$$

ثابت کنید که $f\notin L(I)$.

۸.۱۵ دستورهای زیرین برای تبدیل انتگرالهای مضاعف و مثلث‌درحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آمده‌اند. این دستورها را از قضیهٔ ۱۱.۱۵ نتیجه بگیرید و برای معتبر بودن آنها قیدهای لازم بر T و T' را بدست آورید.

آ) $$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta.$$

ب) $$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\iiint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

ج) $$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\iiint_{T'} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

۹.۱۵ آ) با تبدیل انتگرال به مختصات قطبی، ثابت کنید که

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x, y)=\pi.$$

ب) با استفاده از قسمت (آ)، ثابت کنید که $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

ج) با استفاده از قسمت (ب)، ثابت کنید که

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, d(x_1, \cdots, x_n) = \pi^{n/2}.$$

د) با استفاده از قسمت (ب)، انتگرالهای $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\,dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-tx^2}\,dx$ را به‌ازای $t > 0$ محاسبه کنید.

۱۰.۱۵ فرض کنید $V_n(a)$ اندازهٔ n گوی nبعدی $B(0\,; a)$ به شعاع a را نشان دهد. این تمرین برهان دستور

$$V_n(a) = \frac{\pi^{n/2} a^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2} n + 1\right)}$$

را مختصراً شرح می‌دهد.

آ) با استفاده از یک تغییرمتغیر خطی، ثابت کنید که $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

ب) فرض کنید که $n \geqslant 3$. انتگرال موجود برای $V_n(1)$ را به صورت انتگرالی مکرر مرکب از یک انتگرال $(n-2)$گونا و یک انتگرال مضاعف بیان‌کنید، وبا استفاده ازقسمت (آ) برای یک گوی $(n-2)$ـ بعدی، دستور زیرین را بدست آورید:

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1-r^2)^{n/2-1}\, r\, dr \right] d\theta = V_{n-2}(1)\, \frac{2\pi}{n}.$$

ج) از دستور بازگشتی مذکور در (ب) نتیجه بگیرید که

$$V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} n + 1\right)}.$$

۱۱.۱۵ به تمرین ۱۰.۱۵ باز گردید وثابت‌کنیدکه به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$،

$$\int_{B(0;1)} x_k^2\, d(x_1, \cdots, x_n) = \frac{V_n(1)}{n+2}.$$

۱۲.۱۵ به تمرین ۱۰.۱۵ باز گردید و انتگرال موجود برای $V_n(1)$ را به‌صورت یک انتگرال مکرر مرکب از یک انتگرال $(n-1)$گونا ویک انتگرال یک‌بعدی بیان کنید، و از آن دستور بازگشتی

$$V_n(1) = 2V_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - x^2)^{(n-1)/2}\, dx$$

را نتیجه بگیرید. با قرار دادن $x = \cos t$ در انتگرال، و استفاده از دستور تمرین ۱۰.۱۵ نتیجه بگیرید که

$$\int_{۰}^{\pi/۲} \cos^n t\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{۲} \frac{\Gamma\left(\frac{۱}{۲} n + \frac{۱}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{۱}{۲} n + ۱\right)}.$$

۱۳.۱۵ اگر $a > ۰$، قرار دهید

$$S_n(a) = \{(x_۱, \cdots, x_n) \mid |x_۱| + \cdots + |x_n| \leqslant a\},$$

و فرض‌کنید $V_n(a)$ اندازهٔ n، $S_n(a)$ را نشان دهد. این تمرین برهانی از دستور $V_n(a) = ۲^n a^n/n!$ را مختصراً بیان می کند.

آ) با استفاده از یک تغییرمتغیر خطی، ثابت کنید که $V_n(a) = a^n V_n(۱)$.

ب) با فرض $n \geqslant ۲$، انتگرال موجود برای $V_n(۱)$ را به صورت انتگرال مکرر مرکب ازیک انتگرال یک‌بعدی و یک انتگرال $(n-۱)$گونا بیان کنید، و سپس با استفاده از (آ) نشان دهید که

$$V_n(۱) = V_{n-۱}(۱) \int_{-۱}^{۱} (۱ - |x|)^{n-۱}\, dx = ۲V_{n-۱}(۱)/n,$$

و نتیجه بگیرید که $V_n(۱) = ۲^n/n!$.

۱۴.۱۵ اگر $a > ۰$ و $n \geqslant ۲$، فرض کنیدکه $S_n(a)$ مجموعهٔ زیر در $\mathbf{R}^n$ باشد:
$S_n(a) = \{(x_۱, \cdots, x_n) \mid |x_i| + |x_n| \leqslant a$ ،$i = ۱, \cdots, n-۱$ به‌ازای هر$\}$.
فرض کنید $V_n(a)$ اندازهٔ n، $S_n(a)$ را نشان دهد. با استفاده از روش پیشنهاد شده به‌وسیلهٔ تمرین ۱۳.۱۵، ثابت کنید که $V_n(a) = ۲^n a^n/n$.

۱۵.۱۵ فرض کنید $Q_n(a)$ «اولین ربع» گوی nبعدی $B(۰; a)$ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$Q_n(a) =$
$\{(x_۱, \cdots, x_n) \mid ۰ \leqslant x_i \leqslant a$ ،$i = ۱, ۲, \cdots, n$ و به‌ازای هر $\|\mathbf{x}\| \leqslant a\}$.

فرض کنید $f(\mathbf{x}) = x_۱ \cdots x_n$ و ثابت کنید که

$$\int_{Q_n(a)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{a^{۲n}}{۲^n n!}.$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

15.1 Asplund, E., and Bungart, L., *A First Course in Integration*. Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1966.

15.2 Bartle, R., *The Elements of Integration*. Wiley, New York, 1966.

15.3 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, 1937.

15.4 Korevaar, J., *Mathematical Methods*, Vol. 1. Academic Press, New York, 1968.

15.5 Riesz, F., and Sz. Nagy, B., *Functional Analysis*. L. Boron, translator. Ungar, New York, 1955.

۱۶

قضیهٔ کشی و حساب باقیمانده

۱.۱۶ تابعهای تحلیلی

در فصل ۵ (بخش ۱۵.۵) بـا مفهوم مشتق بـرای تابعهای یک متغیر مختلط آشنائی حاصل شد. در نظریهٔ متغیرهای مختلط مهمترین تابعها آنهائی هستند کـه در هر نقطهٔ یک مجموعهٔ بـاز دارای مشتق پیوسته می‌باشند. این تابعها تـوابع تحلیلی نـامیده می‌شوند.

تعریف ۱.۱۶ فرض‌کنیم که $f = u + iv$ تابع مختلطی باشد که برمجموعهٔ باز S در صفحهٔ مختلط $\mathbf{C}$ تعریف شده باشد. گوئیم f بر S تحلیلی است در صورتی‌که f' در هر نقطهٔ S وجود داشته و پیوسته[1] باشد.

تبصره. اگر T یک زیرمجموعهٔ دلخواه (نه ضرورتاً باز) $\mathbf{C}$ باشد، اصطلاح «f بر T تحلیلی است» بدین معنی است که f بر مجموعهٔ بازی که حاوی T است تحلیلی است. خصوصاً، f در نقطه‌ای مانند z تحلیلی است اگـر گـردهٔ بازی حول z وجود داشته باشد که f برآن تحلیلی باشد.

ممکن است تـابعی در یک نقطه مشتق داشته بـاشد بـی‌آن کـه در آن نقطه

---

۱. می‌توان نشان داد که وجود f' بر S بخودی خود پیوستگی f' را بر S ایجاب می‌کند (این مطلب به‌وسیلهٔ گورسا Goursat در ۱۹۰۰ کشف شد). ازاین‌روی می‌توان تابعی‌راکه صرفاً همه‌جا بر S مشتق دارد تابع تحلیلی تعریف کرد. اما، پیوستگی f' را قسمتی از تعریف تحلیلی بودن قرار می‌دهیم، زیـرا بدین وسیله می‌توان بعضی از برهانها را روانتر بیان‌کرد.

تحلیلی باشد. مثلاً، هرگاه $f(z)=|z|^2$، f در ۰ مشتق دارد اما در هیچ نقطهٔ دیگر C مشتق ندارد.

در فصل ۵ با مثالهائی از تابعهای تحلیلی مواجه شدیم. هرگاه $f(z) = z^n$ (که در آن n عدد صحیح مثبتی باشد)، آنگاه f همه جا در C تحلیلی است و $f'(z) = nz^{n-1}$. وقتی که n یک عدد صحیح منفی باشد، معادلهٔ $f(z) = z^n$، تابعی را تعریف می‌کندکه غیراز ۰ درهر نقطهٔ دیگر تحلیلی است. چند جمله‌ایها همه جا در C تحلیلی هستند، و تابعهای گویا در همه جا، غیر از نقطه هائی که مخرج صفر می‌شود. تابع نمائی، که با دستور $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$، که در آن $z = x + iy$، تعریف می‌شود، همه جا در C تحلیلی است و مساوی مشتق خود می‌باشد. تابعهای سینوس و کسینوس مختلط (که ترکیبهائی خطی از تابعهای نمائی هستند) نیز همه جا در C تحلیلی می‌باشند.

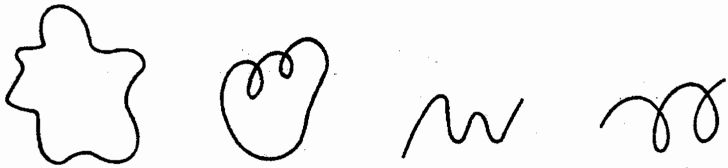
اگر $z \neq 0$، قرار می‌دهیم $f(z) = \operatorname{Log} z$، که درآن $\operatorname{Log} z$ لگاریتم عمدهٔ z است (ر. ک. تعریف ۵۳۰۱). دراین صورت f همه جا در C تحلیلی است مگر در نقطه‌هائی چون $z = x + iy$ که درآنها $x \leqslant 0$ و $y = 0$. دراین نقاط، لگاریتم عمده پیوسته نیست. در نقطه‌های دیگر، با تحقیق این‌که قسمتهای حقیقی و موهومی f در معادله‌های کشی ـ ریمان (قضیهٔ ۶۰۱۲) صدق می‌کنند، می‌توان تحلیلی بودن f را بآسانی نشان داد.

بعداً خواهیم دید که تحلیلی بودن در یک نقطه مانند z قیدهای سنگینی بر یک تابع تحمیل می‌کند. تحلیلی بودن در z وجود همهٔ مشتقهای بالاتر در یکی از همسایگیهای z را ایجاب می‌کند و، نیز، وجود یک رشتهٔ توانی همگرا را که در یکی از همسایگیهای z تابع را نمایش می‌دهد تضمین می‌نماید. این تباین بارزی است با رفتار تابعهای حقیقی، که وجود و پیوستگی مشتق اول وجود مشتق دوم آنها را ایجاب نمی‌کند.

۲۰۱۶ گذرها وخمها در صفحهٔ مختلط

بسیاری از خاصیتهای اساسی تابعهای تحلیلی را می‌توان بسادگی به کمک انتگرالهائی در امتداد خمهائی در صفحهٔ مختلط نتیجه گرفت. این انتگرالها انتگرالهای پیرامنی (یا انتگرالهای خط مختلط) نامیده می‌شوند، و در بخش آینده مورد بحث واقع خواهند شد. در این بخش فهرستی از اصطلاحهائی که برای خمهای مختلف، مانند خمهای شکل ۱۰۱۶، بکار می‌روند می‌آید.

یادآوری می‌کنیم که یک گذر در صفحهٔ مختلط تابعی است مختلط مانند γ که بر بازهٔ فشرده‌ای چون $[a, b]$ پیوسته باشد. نقش $[a, b]$ با γ (نمودار γ) را



شکل ۱.۱۶

یک خم توصیف شده به‌وسیلهٔ γ نامیم، و گوئیم این خم نقطه‌های $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ را به هم وصل می‌کند.

اگر $\gamma(b) \neq \gamma(a)$، خم را یک کمان با نقطه‌های انتهائی $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ می‌نامیم.

اگر γ بر $[a, b]$ یک‌به‌یک باشد، خم را یک کمان ساده، یا یک کمان ژردان، می‌نامند.

اگر $\gamma(b) = \gamma(a)$، خم را یک خم بسته می‌نامند. اگر $\gamma(b) = \gamma(a)$ و γ بر بازهٔ نیمباز $[a, b[$ یک‌به‌یک باشد، خم را یک خم بستهٔ ساده، یا یک خم ژردان، می‌خوانند.

گوئیم گذر γ با درازای متناهی است در صورتی که درازای کمان آن، همان طور که در بخش ۱۰.۶ تعریف شده است، متناهی باشد. یادآوری می‌کنیم که γ وقتی، و فقط وقتی، با درازای متناهی است که γ بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. (ر. ک. بخش ۲۷.۷ و قضیهٔ ۱۷.۶.)

گوئیم گذر γ هموار قطعه‌وار است اگر γ' کراندار، و همه جا بر $[a, b]$ بجز (احتمالاً) در تعدادی متناهی نقطه پیوسته باشد. در این نقطه‌های استثنائی لازم است که هر دو مشتق دست راستی وچپی وجود داشته باشند. هرگذر که هموار قطعه وار باشد، با درازای متناهی است و درازای کمان آن مساوی است با انتگرال

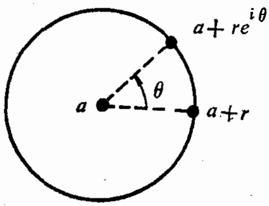
$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

هرگذر بسته که هموار قطعه‌وار باشد، یک مدار نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱۶ اگر $a \in \mathbf{C}$ و $r > 0$، گذر γ را که با معادلهٔ

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta} \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

تعریف شده باشد، دایرهٔ جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع r می‌نامند.



شکل ۲.۱۶

تبصره. معنی هندسی $\gamma(\theta)$ در شکل ۲.۱۶ نشان داده شده است. وقتی که θ از ۰ تا ۲π تغییر کند، نقطهٔ $\gamma(\theta)$ در جهت عکس حرکت عقربهٔ ساعت یک دور دایره را طی می‌کند.

۳.۱۶ انتگرالهای پیرامنی

انتگرالهای پیرامنی برحسب انتگرالهای ریمان ـ اشتیل‌یس مختلط، که در بخش ۲۷.۷ مورد بحث واقع شدند، تعریف خواهند شد.

تعریف ۳.۱۶ فرض کنیم γ گذری در صفحهٔ مختلط با قلمرو $[a, b]$ باشد، و فرض کنیم تابع مختلط f بر نمودار γ تعریف شده باشد. انتگرال پیرامنی f در امتداد γ با $\int_\gamma f$ نموده، و به‌وسیلهٔ معادلهٔ

$$\int_\gamma f = \int_a^b f[\gamma(t)]\, d\gamma(t)$$

تعریف می‌شود، در صورتی که انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس طرف راست وجود داشته باشد.

نمادگذاری. همچنین این انتگرال را به صورت

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z)dz \quad \text{یا} \quad \int_\gamma f(z)dz$$

می‌نویسیم. علامت فریبان z را می‌توان با هر علامت مناسب دیگر عوض کرد. مثلاً،

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma f(w)dw.$$

هرگاه γ با درازای متناهی باشد، آنگاه شرطی کافی برای وجود $\int_\gamma f$ آن است که f برنمودار γ پیوسته باشد (قضیهٔ ۲۷.۷).

تأثیر تعویض γ با یک گذر هم‌ارز با آن (که در بخش ۱۲.۶ تعریف شد) حداکثر یک تغییر علامت در انتگرال است. در واقع، داریم:

قضیهٔ ۴.۱۶ فرض کنیم γ و δ گذرهائی هم‌ارز باشند که هر دو یك خم مانند Γ را توصیف کنند. هرگاه $\int_\gamma f$ وجود داشته باشد، آنگاه $\int_\delta f$ نیز وجود دارد. بعلاوه، اگر γ و δ هر دو Γ را در یك جهت رسم کنند،

$$\int_\gamma f = \int_\delta f,$$

و اگر هر دو آن را در دو جهت مختلف رسم نمایند،

$$\int_\gamma f = -\int_\delta f.$$

برهان. فرض کنیم $\delta(t) = \gamma[u(t)]$ که درآن u بر $[c, d]$ یکنوای اکید باشد. از دستور تغییرمتغیر برای انتگرالهای ریمان ـ اشتیل‌یس (قضیهٔ ۷.۷) داریم

$$\int_{u(c)}^{u(d)} f[\gamma(t)]\,d\gamma(t) = \int_c^d f[\delta(t)]d\delta(t) = \int_\delta f. \qquad (۱)$$

هرگاه u صعودی باشد، آنگاه $u(c) = a$، $u(d) = b$، و (۱) به صورت $\int_\gamma f = \int_\delta f$ درمی‌آید.

هرگاه u نزولی باشد، آنگاه $u(c) = b$، $u(d) = a$، و (۱) به صورت $-\int_\gamma f = \int_\delta f$ درمی‌آید.

خواننده بآسانی می‌تواند خاصیتهای جمعپذیری ذیل را برای انتگرالهای پیرامنی تحقیق کند.

قضیهٔ ۵.۱۶ فرض کنیم γ گذری با قلمرو $[a, b]$ باشد.

یکم) هرگاه انتگرالهای $\int_\gamma f$ و $\int_\gamma g$ وجود داشته باشند، آنگاه به‌ازای هر جفت عدد مختلط α و β انتگرال $\int_\gamma (\alpha f + \beta g)$ وجود دارد، و داریم

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g.$$

دوم) فرض کنیم γ_1 و γ_2، بترتیب، تحدید γ به $[a, c]$ و $[c, b]$ را نشان دهند، که در آنها $a < c < b$. هرگاه دو انتگرال از سه انتگرال مذکور در (۲) وجود داشته باشند، آنگاه سومی نیز وجود دارد و

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f. \qquad (۲)$$

اکثر گذرهـای انتگرالگیری در عمل بـا درازای متناهی هستند. بـرای چنین گذرها غالباً قضیهٔ زیر برای تخمین قدر مطلق یک انتگرال پیرامنی بکار می‌رود.

قضیهٔ ۶.۱۶ فرض‌کنیم γ یک گذر با درازای متناهی $\Lambda(\gamma)$ باشد. هرگـاه انتگرال $\int_\gamma f$ وجود داشته باشد، و به‌ازای هر z بر نمودار γ، $|f(z)| \leqslant M$، آنگـاه این نامساوی برقرار است:

$$\left|\int_{\gamma} f\right| \leqslant M\Lambda(\gamma).$$

برهان. کافی است ملاحظه کنیم کـه همهٔ مجموعهای ریمان ـ اشتیلیس کـه در تعریف $\int_a^b f[\gamma(t)]\, d\gamma(t)$ بکـار می‌رونـد قـدر مطلقشان از $M\Lambda(\gamma)$ تجاوز نمی‌کند.

انتگرالهـای پیرامنی روی خمهـای هموار قطعه‌وار را مـی‌تـوان به‌عنوان انتگرالهای ریمان بیان کرد. قضیهٔ زیرین نتیجهٔ ساده‌ای ازقضیهٔ ۸.۷ است.

قضیهٔ ۷.۱۶ فرض کنیم γ یک گـذر هموار قطعه‌وار بـا قلمرو $[a, b]$ بـاشد. اگر انتگرال پیرامنی $\int_\gamma f$ وجود داشته باشد،

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f[\gamma(t)]\, \gamma'(t)\, dt.$$

۴.۱۶ انتگرال در امتداد یک‌گذر مستدیر به‌عنوان تابعی از شعاع آن

گذری مستدیر مانند γ با شعاع $r \geqslant 0$ و مرکز a، که با

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

داده می‌شود، درنظر می‌گیریم. دراین بخش انتگرال $\int_\gamma f$ را به‌عنوان تابعی ازشعاع r مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنیم $\varphi(r) = \int_\gamma f$. چون $\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}$، از قضیهٔ ۷.۱۶ نتیجه می‌شود که

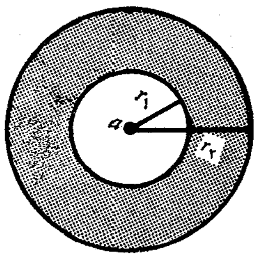
$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, ire^{i\theta}\, d\theta. \qquad (۳)$$

وقتی که r روی بازهٔ $[r_1, r_2]$،که درآن $0 \leqslant r_1 < r_2$، تغییر کند، نقطه‌های $\gamma(\theta)$

یک حلقهٔ دایـره را رسم می‌کنند کـه مـا آن را بـا $A(a; r_۱, r_۲)$ نشان می‌دهیم. (ر. ک.شکل ۳.۱۶.) پس

$$A(a; r_۱, r_۲) = \{z \mid r_۱ \leqslant |z-a| \leqslant r_۲\}.$$

اگر $r_۱ = ۰$، حلقهٔ دایره گردهٔ بسته‌ای با شعاع $r_۲$ خواهـد بود. هرگاه f بر حلقهٔ دایره پیوسته باشد، آنگاه φ بر بـازهٔ $[r_۱, r_۲]$ پیوسته است. هر گـاه f بـر حلقهٔ دایره تحلیلی باشد، آنگاه φ بر $[r_۱, r_۲]$ مشتقپذیر است. قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که اگر f همه جا برحلقهٔ دایره، مگر احتمالاً بر زیرمجموعـه‌ای متناهی، تحلیلی باشد، φ بر $[r_۱, r_۲]$ تابعی است پایا، به‌شرط آن که f بر این زیرمجموعهٔ متناهی پیوسته باشد.



شکل ۳.۱۶

قضیهٔ ۸.۱۶ فرض‌کنیم f برحلقهٔ دایرهٔ $A(a; r_۱, r_۲)$، جز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه، تحلیلی باشد. در این نقطه‌های استثنائی فرض می‌کنیم که f پیوسته باشد. در ایـن صورت، تابـع φ که با رابطهٔ (۳) تعریف می‌شود بر بازهٔ $[r_۱, r_۲]$ پـایـا است. بعلاوه، اگر $r_۱ = ۰$، مقدار پایا مساوی ۰ خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $z_۱$، . . .، z_n همان نقطه‌هـای استثنائی باشند کـه f در آنها تحلیلی نیست. آنها را برحسب زیـاد شدن فاصله‌هایشان از مرکز بـرچسب می‌زنیم، یعنی

$$|z_۱ - a| \leqslant |z_۲ - a| \leqslant \cdots \leqslant |z_n - a|,$$

و فـرض می‌کنیم کـه $R_k = |z_k - a|$. همچنین، فـرض کنیم کـه $R_۰ = r_۱$ و $R_{n+۱} = r_۲$.

اجتماع بازه‌هـای $[R_k, R_{k+۱}]$ بـه ازای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$ مساوی بازهٔ $[r_۱, r_۲]$ است. نشان خواهیم داد که φ بر هر یک از بازه‌های $[R_k, R_{k+۱}]$ پایا است. رابطهٔ (۳) را به شکل زیرین می‌نویسیم :

$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \theta)\, d\theta$ ، که درآن $g(r, \theta) = f(a + re^{i\theta})\, ire^{i\theta}$.

با بکار بردن قاعدهٔ زنجیره‌ای، بسادگی نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = ir \frac{\partial g}{\partial r}. \tag{۴}$$

(تحقیق دستور بالا به خواننده واگذار می‌شود.) پیوستگی f' پیوستگی مشتقهای جزئی g، یعنی $\partial g/\partial r$ و $\partial g/\partial \theta$، را ایجاب می‌کند. بنابراین، با مشتقگیری زیر علامت انتگرال (قضیهٔ ۴۰.۷)، می‌توان $\varphi'(r)$ را بر هر بازهٔ باز $]R_k, R_{k+1}[$ حساب کرد. سپس با استفاده از (۴) و قضیهٔ اساسی دوم حساب انتگرال (قضیهٔ ۳۴.۷) این رابطه بدست می‌آید:

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}\, d\theta = \frac{1}{ir} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{ir}\{g(r, 2\pi) - g(r, 0)\} = 0\,.$$

اگر قضیهٔ ۱۰.۱۲ را بکار بریم، می‌بینیم که φ بر هر زیربازهٔ باز $]R_k, R_{k+1}[$ پایا است. بنابر پیوستگی، φ بر هر زیربازهٔ بستهٔ $[R_k, R_{k+1}]$ پایا است، و درنتیجه بر اجتماع آنها، یعنی $[r_1, r_2]$، نیز چنین خواهد بود. از (۳) نتیجه می‌شود که وقتی که $r \to 0$، $\varphi(r) \to 0$، پس اگر $r_1 = 0$، مقدار پایای φ مساوی 0 خواهد بود.

۵.۱۶ قضیهٔ انتگرال کشی برای یك دایره

حالت خاص قضیهٔ ۸.۱۶ که در پائین بیان می‌شود دارای اهمیت خاصی است.

قضیهٔ ۹.۱۶ (قضیهٔ انتگرال کشی برای یك دایره). هرگاه f بر گردهٔ $B(a; R)$، بجز احتمالاً تعدادی متناهی نقطه، تحلیلی و دراین نقطه‌ها پیوسته باشد، آنگاه به‌ازای هرگذر مستدیر γ به مرکز a و شعاع $r < R$،

$$\int_\gamma f = 0\,.$$

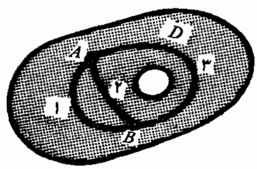
برهان. r_2 را بقسمی اختیار می‌کنیم که $r < r_2 < R$، و سپس قضیهٔ ۸.۱۶ را با $r_1 = 0$ بکار می‌بریم.

تبصره. شکل کلیتری از قضیهٔ انتگرال کشی هست که در آن گذر مستدیر γ با

گـذر بستهٔ کلیتری عوض می‌شود. این گذرهای کلیتر به‌وسیلهٔ مفهوم همجائی معرفی می‌گردند.

۶.۱۶ خمهای همجا

شکل ۴.۱۶ سه کمان را نشان می‌دهد کــه هر سه دارای نقطه هــای انتهائی A و B هستند و در ناحیهٔ باز D قــرار دارنــد. کمان ۱ را می‌توان به طور پیوسته به‌وسیلهٔ دسته‌ای از کمانهای میانی،که هریک در D قرار دارد، به‌کمان ۲ تغییر شکل داد. دو کمان با این خاصیت را در D با یکدیگر همجا می‌نامیم. کمان ۱ را نمی‌توان (در-نتیجهٔ وجود سوراخی کــه آن را از ۳ جدا می‌کند) به کمان ۳ تغییر شکل داد، پس این دو کمان در D همجا نیستند.



شکل ۴.۱۶

دراین‌بخش تعریف صوری همجائی‌را می‌آوریم. سپس نشان می‌دهیم‌که اگر f در D تحلیلی‌باشد، انتگرالهای پیرامنی f از A تا B در امتداد هردوگذرکه بایکدیگر در D همجا باشند دارای یک مقدارند. با بیان دیگر می‌توان گفت کــه، مقدار یک انتگرال پیرامنی مانند $\int_A^B f$ با هر تغییر شکل‌پیوستهٔ گذر تغییر نمی‌کند، به‌شرط آن که پیرامنهای میانی در ناحیه‌ای که f در آن تحلیلی است باقی بمانند. این خاصیت انتگرالهای پیرامنی در کاربردهای انتگرالگیری مختلط دارای منتهای درجهٔ اهمیت است.

تعریف ۱۰.۱۶ فرض کنیم γ_0 و γ_1 دو گذر با قلمرو مشترك $[a, b]$ باشند. همچنین یا

آ) نقطه‌های انتهائی γ_0 و γ_1 یکی باشند، یعنی

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) \text{ و } \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$ یا

ب) γ_0 و γ_1 هر دو گذرهائی بسته باشند، یعنی

$$\gamma_0(a) = \gamma_0(b) \text{ و } \gamma_1(a) = \gamma_1(b).$$

فرض کنیم D یك زیرمجموعهٔ C باشد کــه نمودارهای γ_0 و γ_1 را در برگیرد. در این

صورت $\gamma_{\circ}$ و $\gamma_{۱}$ را در D با یکدیگر همجا نامیم اگر تابعی چون h وجود داشته باشد که بر مستطیل $[a, b] \times [\circ, ۱]$ پیوسته باشد، و مقدارهای آن در D باشند، بقسمی که

۱) اگر $t \in [a, b]$، $h(\circ, t) = \gamma_{\circ}(t)$،

۲) اگر $t \in [a, b]$، $h(۱, t) = \gamma_{۱}(t)$.

علاوه براین، به‌ازای هر s در $[\circ, ۱]$،

۳آ) در حالت (آ)، $h(s, a) = \gamma_{\circ}(a)$ و $h(s, b) = \gamma_{\circ}(b)$؛

یا

۳ب) در حالت (ب)، $h(s, a) = h(s, b)$.

تابع h را یك همجائی می‌نامیم.

مفهوم همجائی تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. برای هر s ثابت در $[\circ, ۱]$، قرار می‌دهیم $\gamma_s(t) = h(s, t)$. در این صورت γ_s را می‌توان به‌عنوان گذر متحرک میانی درنظر گرفت که از $\gamma_{\circ}$، وقتی که $s = \circ$، شروع می‌شود و به $\gamma_{۱}$، وقتی که $s = ۱$، ختم می‌گردد.

مثال ۱ همجائی با یك نقطه. اگر $\gamma_{۱}$ تابع پایائی باشد، نمودار آن یک نقطه است، و اگر $\gamma_{\circ}$ با $\gamma_{۱}$ در D همجا باشد، گوئیم $\gamma_{\circ}$ در D با یک نقطه همجا است.

مثال ۲ همجائی خطی. هرگاه به‌ازای هر t در $[a, b]$، پاره خطی که $\gamma_{\circ}(t)$ و $\gamma_{۱}(t)$ را به هم وصل می‌کند در D قرار گیرد، آنگاه $\gamma_{\circ}$ و $\gamma_{۱}$ در D همجا هستند زیرا تابع تعریف شده با رابطهٔ

$$h(s, t) = s\gamma_{۱}(t) + (۱ - s)\gamma_{\circ}(t)$$

را می‌توان به‌عنوان یک همجائی اختیار کرد. دراین حالت گوئیم $\gamma_{\circ}$ و $\gamma_{۱}$ در D همجای خطی هستند. خصوصاً، هر دوگذر با قلمرو $[a, b]$ در $\mathbf{C}$ (صفحهٔ مختلط) یا، به‌طور کلیتر، در هرمجموعهٔ کوژی که نمودارهای این دوگذر را دربر گیرد، همجای خطی می باشند.

تبصره. همجائی یک رابطهٔ هم ارزی است.

قضیه زیرین نشان می‌دهد که بین هر دو گذر همجا می‌توان تعدادی متناهی گذر چندضلعی میانی درج نمود، که هریک با همسایهٔ خود همجای خطی باشد.

قضیهٔ ۱۱.۱۶ (قضیهٔ درج چندضلعی). فرض کنیم γ_0 و γ_1 دو گذر همجا در مجموعهٔ بازی چون D باشند. در این صورت تعدادی متناهی گذر مانند α_0، α_1، . . .، α_n هستند بقسمی که

آ) $\alpha_0 = \gamma_0$ و $\alpha_n = \gamma_1$،

ب) به‌ازای $1 \leqslant j \leqslant n - 1$، α_j یک گذر چندضلعی است،

ج) به‌ازای $0 \leqslant j \leqslant n - 1$، α_j در D با α_{j+1} همجای خطی است.

برهان. چون γ_0 و γ_1 در D همجا هستند، یک همجائی مانند h هست که در شرطهای تعریف ۱۰.۱۶ صدق می‌کند. حال افرازهای

$$\{s_0, s_1, \ldots, s_n\} \text{ برای } [0, 1] \text{ و } \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \text{ برای } [a, b]$$

را درنظر می‌گیریم که بازه‌ها را به n قسمت مساوی تقسیم کرده باشند، و n را آن‌قدر بزرگ اختیار می‌کنیم که نقش هرمستطیل $[t_k, t_{k+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ با h محتوا در گردهٔ بازی چون D_{jk} جزء D باشد. (تحقیق امکان این عمل، که به‌وسیلهٔ پیوستگی یکشکل h صورت می‌گیرد، به خواننده واگذار می‌شود.)

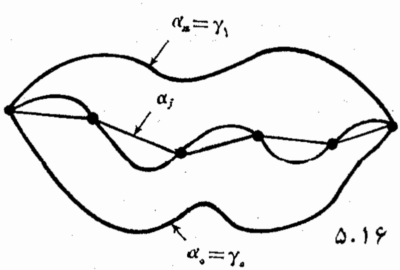
در گذر میانی γ_{sj} که با رابطهٔ

$$\gamma_{sj}(t) = h(s_j, t), \quad 0 < j < n,$$

مشخص می‌شود یک گذر چند ضلعی مانند α_j با رأسهای $h(s_j, t_k)$ محاط می‌کنیم. یعنی،

$$\text{به‌ازای } k = 0, 1, \ldots, n \text{، } \alpha_j(t_k) = h(s_j, t_k)$$

و α_j بر هر زیربازهٔ $[t_k, t_{k+1}]$ به‌ازای $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ خطی است. همچنین تعریف می‌کنیم $\alpha_0 = \gamma_0$ و $\alpha_n = \gamma_1$. (مثالی در شکل ۵.۱۶ داده شده است.)



شکل ۵.۱۶

چهار رأس $\alpha_j(t_k)$، $\alpha_j(t_{k+1})$، $\alpha_{j+1}(t_k)$، و $\alpha_{j+1}(t_{k+1})$ همه در گردهٔ D_{jk} واقعند. چون D_{jk} کوژ است، پاره خطهائی که آنها را به هم وصل می‌کنند نیز در D_{jk} قرار دارند، و درنتیجه به‌ازای هر (s, t) در $[t_k, t_{k+1}] \times [0, 1]$، نقطه های

$$(5) \qquad s\alpha_{j+1}(t) + (1 - s)\,\alpha_j(t)$$

در D_{jk} واقعند. بنابراین، به‌ازای هر (s, t) در $[a, b] \times [0, 1]$، نقطه‌های (۵) در D قرار دارند، پس α_{j+1} با α_j در D همجای خطی خواهد بود.

۷.۱۶ نامتغیر بودن انتگرالهای پیرامنی با همجائی

قضیهٔ ۱۲.۱۶ فرض کنیم f بر مجموعهٔ بازی چون D، بجز احتمالاً تعدادی متناهی نقطه که درآنها f پیوسته است، تحلیلی باشد. اگر γ_0 و γ_1 دو گذر هموار قطعه‌وار فرض شوند که در D همجا باشند،

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f \cdot$$

برهان. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که در آن γ_0 و γ_1 همجای خطی باشند. به‌ازای هر s در $[0, 1]$، فرض می‌کنیم

اگر $t \in [a, b]$، $\gamma_s(t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\,\gamma_0(t)$.

در این صورت γ_s هموار قطعه‌وار است و نمودار آن در D قرار دارد. می نویسیم $\gamma_s(t) = \gamma_0(t) + s\alpha(t)$، که در آن $\alpha(t) = \gamma_1(t) - \gamma_0(t)$، و به‌ازای $0 \leqslant s \leqslant 1$، تعریف می‌کنیم

$$\varphi(s) = \int_{\gamma_s} f = \int_a^b f[\gamma_s(t)]\, d\gamma_0(t) + s \int_a^b f[\gamma_s(t)]\, d\alpha(t) \cdot$$

می خواهیم ثابت کنیم که $\varphi(1) = \varphi(0)$. در واقع ثابت می‌کنیم که φ بر $[0, 1]$ پایا است.

با استفاده از قضیهٔ ۴۰.۷، $\varphi'(s)$ را به‌وسیلهٔ مشتقگیری زیر علامت انتگرال محاسبه می‌کنیم. چون

$$\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t) = \alpha(t),$$

نتیجه می‌شود که بنا بر دستور انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء (قضیهٔ ۶.۷)،

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \int_a^b f'[\gamma_s(t)]\,\alpha(t)\,d\gamma_\circ(t) + s\int_a^b f'[\gamma_s(t)]\,\alpha(t)\,d\alpha(t)\\ &\qquad + \int_a^b f[\gamma_s(t)]\,d\alpha(t)\\ &= \int_a^b \alpha(t)\,f'[\gamma_s(t)]\,d\gamma_s(t) + \int_a^b f[\gamma_s(t)]\,d\alpha(t)\\ &= \int_a^b \alpha(t)\,f'[\gamma_s(t)]\,\gamma'_s(t)\,dt + \int_a^b f[\gamma_s(t)]\,d\alpha(t)\\ &= \int_a^b \alpha(t)\,d\{f[\gamma_s(t)]\} + \int_a^b f[\gamma_s(t)]\,d\alpha(t)\\ &= \alpha(b)\,f[\gamma_s(b)] - \alpha(a)\,f[\gamma_s(a)]\,.\end{aligned}$$

اما، بآسانی می‌توان تحقیق کرد که، آخرین عبارت مساوی صفر است زیرا $\gamma_\circ$ و γ_1 همجا می‌باشند، پس به‌ازای هر s در $[\circ, 1]$، $\varphi'(s) = \circ$. بنابراین φ بر $[\circ, 1]$ پایا است. بدین وسیله قضیه برای وقتی که $\gamma_\circ$ و γ_1 در D همجای خطی باشند ثابت می‌شود.

اگر دو گذر $\gamma_\circ$ و γ_1 در D با یک همجائی کلی h همجا باشند، گذرهائی چندضلعی مانند α_j، بهمان صورت که در قضیهٔ ۱۱.۱۶ توصیف شده است، بین آنها درج می‌کنیم. چون هر گذر چندضلعی هموار قطعه‌وار است، می‌توان با چند بار بکار بردن نتیجه‌ای که هم‌اکنون ثابت شد بدست آورد که

$$\int_{\gamma_\circ} f = \int_{\alpha_\circ} f = \int_{\alpha_1} f = \cdots = \int_{\alpha_n} f = \int_{\gamma_1} f\,.$$

۸.۱۶ شکل کلی قضیهٔ انتگرال کشی

حال می‌توان شکل کلی قضیهٔ کشی را، که قبلاً به‌آن اشاره شده بود، بآسانی از قضیه‌های ۹.۱۶ و ۱۲.۱۶ نتیجه گرفت. یادآوری می کنیم که یک مدار عبارت است از گذر بسته‌ای که هموار قطعه‌وار باشد.

قضیهٔ ۱۳.۱۶ (قضیهٔ انتگرال کشی برای مدارهائی که با یك نقطه همجا هستند). فرض کنیم f بر مجموعهٔ بازی چون D، بجز احتمالاً تعدادی متناهی نقطه‌که در آنها f پیوسته فرض می‌شود، تحلیلی باشد. در این صورت به‌ازای هر مدار مانند γ که با یك نقطه در D همجا باشد،

$$\int_\gamma f = \circ\,.$$

برهان. چون γ با یک نقطه در D همجا است، γ با یک گذر مستدیر مانند δ در D که شعاع آن بدلخواه کوچک فرض شود نیز همجا خواهد بود. بنابراین $\int_\gamma f = \int_\delta f$، و بنا بر قضیهٔ ۹.۱۶، $\int_\delta f = 0$.

تعریف ۱۴.۱۶ مجموعهٔ باز و همبند D را همبند ساده نامیم در صورتی که هر گذر بسته در D با یك نقطه در D همجا باشد.

از نظر هندسی، یک ناحیهٔ همبند ساده ناحیه‌ای است که سوراخ نداشته باشد. قضیهٔ کشی نشان می‌دهد که در یك ناحیهٔ همبند ساده مانند D انتگرال یك تابع تحلیلی دور یك مدار در D صفر است.

۹.۱۶ دستور انتگرال کشی

قضیهٔ زیرین خاصیت شایان توجهی از تابعهای تحلیلی را آشکار می‌سازد. این قضیه مقدار یک تابع تحلیلی در یک نقطه را با مقدارهای این تابع بر خم بسته‌ای که حاوی آن نقطه نباشد ربط می‌دهد.

قضیهٔ ۱۵.۱۶ (دستور انتگرال کشی). فرض کنیم f بر مجموعهٔ بازی چون D تحلیلی، و مدار γ در D با یك نقطه همجا باشد. در این صورت به‌ازای هر نقطه مانند z در D که بر نمودار γ قرار نداشته باشد،

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw. \tag{۶}$$

برهان. تابع جدید g را بر D به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(w)=\begin{cases}\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{اگر } w\neq z\\[2mm] f'(z), & \text{اگر } w=z\end{cases}.$$

در این صورت g در هر نقطه مانند $w\neq z$ در D تحلیلی است، و در خود نقطهٔ z، g پیوسته است. اگر قضیهٔ انتگرال کشی را برای g بکار بریم، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر مدار مانند γ که در D با یک نقطه همجا باشد $\int_\gamma g = 0$. اما اگر z بر نمودار γ قرار نداشته باشد، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int_\gamma g &= \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw\\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw,\end{aligned}$$

که از این (۶) باثبات می‌رسد.

تبصره . همین برهان نشان می‌دهد که اگر f بر یک زیرمجموعهٔ متناهی D مانند T تحلیلی نباشد، رابطهٔ (۶) باز هم معتبر است به‌شرط آن که f بر T پیوسته باشد و z در T نباشد.

انتگرال $\int_\gamma (w-z)^{-1}\, dw$ کــه در (۶) ظاهــر شده است نقش مهمی در نظریهٔ انتگرالگیری مختلط بـرعهده دارد، و در بخش آینده دربـارهٔ آن بیشتر بحث خواهد شد. بآسانی می‌توان مقدار آن را برای یک گذر مستدیر محاسبه کرد.

مثال. اگر γ یک گذر مستدیر جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز z و شعاع r باشد، می‌توان نوشت

$$\gamma(\theta) = z + re^{i\theta} \text{ ، } \circ \leqslant \theta \leqslant \text{۲}\pi .$$

دراین صورت

$$\gamma'(\theta) = ire^{i\theta} = i\{\gamma(\theta) - z\},$$

و درنتیجه

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_\circ^{\text{۲}\pi} \frac{\gamma'(\theta)}{\gamma(\theta)-z}\, d\theta = \int_\circ^{\text{۲}\pi} i d\theta = \text{۲}\pi i.$$

تبصره . دراین حالت دستور انتگرال کشی (۶) بدین شکل در می‌آید:

$$\text{۲}\pi i f(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

اگر بار دیگر بنویسیم $\gamma(\theta) = z + re^{i\theta}$، می‌توان این دستور را به شکل

$$f(z) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi} \int_\circ^{\text{۲}\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta \qquad (\text{۷})$$

درآورد. این دستور را می‌توان به‌عنوان قضیهٔ مقدار میانگین تعبیر کرد که درآن مقدار f در مرکز یک گرده به صورت میانگین مقدارهــای آن در کرانهٔ گــرده بیان شده باشد. تابع f بر بست گرده، بجز احتمالاً بر یک زیـرمجموعـهٔ متناهی کــه در هر نقطهٔ آن f پیوسته است، تحلیلی فرض شده است.

۱۰.۱۶ عددگردشی یك مدار برحسب یك نقطه

قضیهٔ ۱۶.۱۶. فرض کنیم γ یك مدار و z نقطه‌ای باشد که روی نمودار γ قرار نداشته باشد. دراین صورت عددی صحیح مانند n (وابسته به γ و z) وجود دارد بقسمی کــه

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = ۲\pi i n \cdot \tag{۸}$$

برهان. فرض کنیم γ دارای قلمرو $[a, b]$ باشد. بنا بر قضیهٔ ۷.۱۶، می‌توان انتگرال موجود در (۸) را به صورت انتگرال ریمان زیرین در آورد:

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt \cdot$$

تابع مختلط F را بر بازهٔ $[a, b]$ با این معادله تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر } a \leqslant x \leqslant b \text{ ،} \quad F(x) = \int_a^x \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-z} \cdot$$

برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که به‌ازای عدد صحیحی چون n، $F(b) = ۲\pi i n$. گوئیم F بر $[a, b]$ پیوسته، و در هر نقطهٔ پیوستگی γ' دارای مشتق

$$F'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}$$

است. بنا براین، تابع G هم که به‌وسیلهٔ

$$G(t) = e^{-F(t)}\{\gamma(t) - z\} \ , \ t \in [a, b],$$

تعریف شود بر $[a, b]$ پیوسته خواهد بود. بعلاوه، در هر نقطهٔ پیوستگی γ'،

$$G'(t) = e^{-F(t)}\gamma'(t) - F'(t)e^{-F(t)}\{\gamma(t) - z\} = ۰.$$

بنا براین، به‌ازای هر t در $[a, b]$ بجز (احتمالاً) تعدادی متناهی نقطه، $G'(t) = ۰$. بنا بر پیوستگی، G در سراسر $[a, b]$ پایا است. از این روی، $G(b) = G(a)$. با بیانی دیگر می‌توان گفت که،

$$e^{-F(b)}\{\gamma(b) - z\} = \gamma(a) - z \cdot$$

چون $\gamma(b) = \gamma(a) \neq z$، خواهیم داشت

$$e^{-F(b)} = ۱,$$

که از آن نتیجه می‌شود که به‌ازای عدد صحیحی مانند n، $F(b) = ۲\pi i n$. پس برهان قضیه تمام است.

تعریف ۱۷.۱۶ هرگاه نمودار مدار γ حاوی نقطهٔ z نباشد، آنگاه عدد صحیح n را که به‌وسیلهٔ (۸) تعریف شده است عدد گردشی (یا شاخص) γ برحسب z می‌نامیم، و با $n(\gamma, z)$ نشان می‌دهیم. پس،

$$n(\gamma, z) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}.$$

تبصره . حال می‌توان دستور انتگرال کشی (۶) را دوباره به شکل زیر بیان کرد:

$$n(\gamma, z)\, f(z) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw .$$

اصطلاح «عدد گردشی» را بکار بردیم زیرا $n(\gamma, z)$ یک راه دقیق ریاضی برای شمردن تعداد دفعاتی راکه نقطهٔ $\gamma(t)$ با تغییر t روی بازهٔ $[a, b]$ «دور نقطهٔ z می‌گردد» بدست می‌دهد. مثلاً، اگر γ دایره‌ای جهت‌دار با جهت مثبت باشد که با رابطهٔ $\gamma(\theta) = z + re^{i\theta}$، که درآن $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$، مشخص شده باشد، قبلاً دیده‌ایم که عدد گردشی مساوی ۱ است. این مطلب با تعبیر فیزیکی این که نقطهٔ $\gamma(\theta)$، وقتی که θ از ۰ تا ۲π تغییر کند، در جهت مثبت یک بار دایره را طی می‌کند هم‌آهنگی دارد. اگر θ روی بازهٔ $[۰, ۲\pi n]$ تغییر کند، نقطهٔ $\gamma(\theta)$، n بار دور دایره درجهت مثبت می‌چرخد، و محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که عدد گردشی مساوی n است. ازسوی دیگر، هرگاه به‌ازای $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi n$، $\delta(\theta) = z + re^{-i\theta}$، آنگاه $\delta(\theta)$، n بار دور دایره درجهت مخالف می‌گردد وعددگردشی‌آن $-n$ است. گوئیم گذر δ جهت‌دار با جهت منفی است.

۱۱.۱۶ بی‌کرانی مجموعهٔ نقاطی که عددگردشیشان صفر است

فرض کنیم Γ نمودار مدار γ را نشان دهد. چون Γ مجموعه‌ای فشرده است، متمم آن، یعنی $C - \Gamma$، یک مجموعهٔ باز است که، بنا بر قضیهٔ ۴۴.۴، مساوی اجتماعی شمارشپذیر از ناحیه‌های باز ازهم جدا (که عبارتند از مؤلفه‌های $C - \Gamma$) می‌باشد. اگر مؤلفه‌ها را به‌عنوان زیرمجموعه‌های صفحهٔ وسعت یافتهٔ C^* در نظر بگیریم، فقط یکی ازآنها حاوی نقطهٔ فرضی ∞ است. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، یکی، و فقط یکی، از مؤلفه‌های $C - \Gamma$ بی‌کران است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در مؤلفهٔ بی‌کران، به‌ازای هر z، عدد گردشی $n(\gamma, z)$ مساوی ۰ است.

قضیهٔ ۱۸.۱۶ فرض کنیم γ مداری با نمودار Γ باشد. مجموعهٔ $C - \Gamma$ را به دو زیرمجموعهٔ

$$I = \{z \mid n(\gamma, z) \neq ۰\} \quad \text{و} \quad E = \{z \mid n(\gamma, z) = ۰\}$$

تقسیم می‌کنیم. در این صورت E و I هر دو بازند. بعلاوه، E بی‌کران و I کراندار است.

برهان. تابع g را بر $\mathbf{C}-\Gamma$ به‌وسیلهٔ دستور

$$g(z)=n(\gamma, z)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma}\frac{dw}{w-z}$$

تعریف می‌کنیم. بنا بر قضیهٔ ۳۸.۷، g بر $\mathbf{C}-\Gamma$ پیوسته است و، چون $g(z)$ همواره عددی صحیح است، نتیجه می‌شود که g برهر مؤلفهٔ $\mathbf{C}-\Gamma$ پایا است. بنابراین، E و I هر دو بازند زیرا هر یک مساوی اجتماعی از مؤلفه‌های $\mathbf{C}-\Gamma$ است.

فرض کنیم U مؤلفهٔ بی‌کران $\mathbf{C}-\Gamma$ را نشان دهد. اگر ثابت کنیم که E حاوی U است، نشانهٔ آن است که E بی‌کران و I کراندار است. فرض‌کنیم K عدد پایائی باشد بقسمی که به‌ازای هر t در قلمرو γ، $|\gamma(t)|<K$، و فرض کنیم c نقطه‌ای در U باشد بقسمی که $|c|>K+\Lambda(\gamma)$، که در آن $\Lambda(\gamma)$ درازای γ است. دراین صورت

$$\left|\frac{۱}{\gamma(t)-c}\right|\leqslant\frac{۱}{|c|-|\gamma(t)|}<\frac{۱}{|c|-K}.$$

اگر انتگرال موجود برای $n(\gamma, c)$ رابه وسیلهٔ قضیهٔ ۶.۱۶ تخمین بزنیم، خواهیم داشت

$$۰\leqslant|g(c)|\leqslant\frac{\Lambda(\gamma)}{|c|-K}<۱.$$

چون $g(c)$ عددی صحیح است، باید داشته باشیم $g(c)=۰$، پس g بر U دارای مقدار پایای ۰ است. ازاین روی E حاوی نقطهٔ c است، درنتیجه E حاوی تمام U خواهد بود.

قضیه‌ای کلی، به نام قضیهٔ خم ژردان وجود دارد که بنا برآن، هر گاه Γ یک خم ژردان (خم بستهٔ ساده) باشد که به‌وسیلهٔ γ توصیف شود، آنگاه هر یک از مجموعه‌های E و I مذکور در قضیهٔ ۱۸.۱۶ همبند است. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، یک خم ژردان مانند Γ مجموعهٔ $\mathbf{C}-\Gamma$ را درست به دو مؤلفهٔ E و I که دارای کرانهٔ مشترک Γ هستند تقسیم می‌کند. مجموعهٔ I را ناحیهٔ داخلی (یا درونی) Γ نامیده، می‌گوئیم که نقاط آن در داخل Γ هستند. مجموعهٔ E را ناحیهٔ خارجی (یا برونی) Γ می‌نامیم، و می‌گوئیم که نقاط‌آن در خارج Γ قرار دارند.

اگر چه قضیهٔ خم ژردان در مورد بعضی از خمهای ژردان آشنا مانند دایره، مثلث، ومستطیل‌مشهود واثبات‌آن‌آسان است، اما اثباتش برای یک خم ژردان دلخواه

بهیچوجه ساده نیست. (برهانهائی ازآن را می‌توان در کتابهای مرجع ۳۰۱۶ و ۵۰۱۶ یافت.)

قضیهٔ خم ژردان برای اثبات هیچ یک از قضیه‌های این فصل لازم نیست. اما باید توجه داشت که خمهای ژردانی که درکاربردهای معمولی نظریهٔ انتگرالگیری مختلط با آنها مواجهیم عموماً از تعدادی متناهی پاره‌خط وکمان مستدیر تشکیل شده‌اند، و برای این چنین خمها کاملاً واضح است که $C-\Gamma$ درست دارای دو مؤلفه می‌باشد. برای نقطه‌هائی چون z داخل این چنین خمها عدد گردشی $n(\gamma, z)$ مساوی ۱+ یا ۱− است زیرا γ در I با گذری مستدیر چون γ به مرکز z همجا است، پس $n(\gamma, z)=n(\delta, z)$، و $n(\delta, z)$، بسته به آن که گذر مستدیر δ جهت دار با جهت مثبت یا منفی باشد، مساوی ۱+ یا ۱− است. بدین دلیل می‌گوئیم یک مدار ژردان γ جهت‌دار باجهت مثبت است اگر که به‌ازای مقداری از z در داخل Γ، $n(\gamma, z)=+1$، و γ جهت‌دار باجهت منفی است وقتی‌که $n(\gamma, z)=-1$.

۱۲۰۱۶ تابعهای تحلیلی‌که به‌وسیلهٔ انتگرالهای پیرامنی تعریف شده‌اند

دستور انتگرال کشی، یعنی

$$n(\gamma, z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

دارای نتیجه‌های مهم متعدد است. بعضی ازآنها از قضیهٔ زیرین بدست می‌آیند. در این قضیه انتگرالهای مورد بحث اندکی کلیتر هستند و در آنها انتگرالدهٔ $f(w)/(w-z)$ با $\varphi(w)/(w-z)$ عوض شده است، که در آن φ صرفاً پیوسته است و لزوماً تحلیلی نیست، و γ گذری است با درازای متناهی، اما لزوماً مدار نیست.

قضیهٔ ۱۹۰۱۶ فرض‌کنیم γ گذری با درازای متناهی با نمودار Γ باشد، همچنین تابع مختلط φ بر Γ پیوسته باشد، و f بر $C-\Gamma$ با معادلهٔ زیر تعریف شده باشد:

$$\text{اگر } z\notin\Gamma \quad ، \quad f(z)=\int_{\gamma}\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw.$$

در این صورت f دارای این خاصیتها خواهد بود:

آ) به‌ازای هر نقطه مانند a در $C-\Gamma$، f دارای نمایشی به صورت رشتهٔ توانی زیرین می‌باشد:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{۹}$$

که در آن

$$\text{به‌ازای } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ ،} \quad c_n = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}} dw. \tag{۱۰}$$

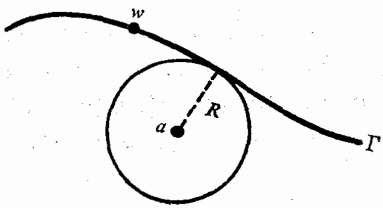
ب) رشتهٔ مذکور در (آ) دارای شعاع همگرائی مثبتی است نا کمتر از R، که درآن

$$R = \inf\{|w-a| \mid w \in \Gamma\}. \tag{۱۱}$$

ج) تابع f بر $\mathbf{C} - \Gamma$ از هر مرتبه مانند n مشتق دارد کــه از این رابطه بــدست می‌آید:

$$\text{اگر } z \notin \Gamma \text{ ،} \quad f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \tag{۱۲}$$

برهان. نخست توجه می‌کنیم که عدد R که با (۱۱) تعریف شده است مثبت است زیــرا تابع تعریف شده با $g(w) = |w-a|$ بر مجموعهٔ فشردهٔ Γ دارای مینیمم است، و چون $a \notin \Gamma$، این مینیمم صفر نیست. پس R فاصله از a تا نزدیکترین نقطهٔ Γ می‌باشد. (ر. ک . شکل ۶.۱۶.)



شکل ۶.۱۶

برای اثبات (آ) از اتحاد

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{k} t^n + \frac{t^{k+1}}{1-t}, \tag{۱۳}$$

که به‌ازای هر $t \neq 1$ معتبر است، شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم

$$t = (z-a)/(w-a),$$

که درآن $|z-a| < R$ و $w \in \Gamma$. دراین صورت

$$1/(1-t) = (w-a)/(w-z).$$

با ضرب (۱۳) در $\varphi(w)/(w-a)$ و انتگرالگیری در امتداد γ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw \\ &= \sum_{n=0}^{k} (z-a)^n \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw + \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{k+1} dw \\ &= \sum_{n=0}^{k} c_n (z-a)^n + E_k, \end{aligned}$$

که درآن c_n از رابطهٔ (۱۰) و E_k از رابطهٔ

$$E_k = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{k+1} dw \qquad (۱۴)$$

بدست می‌آیند. اینک با تخمین انتگرالده در (۱۴)، نشان می‌دهیم که وقتی که $k \to \infty$ ، $E_k \to 0$. داریم

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| \leqslant \frac{|z-a|}{R} \quad \text{و} \quad \frac{1}{|w-z|} = \frac{1}{|w-a+a-z|} \leqslant \frac{1}{R-|a-z|}.$$

فرض کنیم $M = \max\{|\varphi(w)| \mid w \in \Gamma\}$، و $\Lambda(\gamma)$ درازای γ را نشان دهد. در این صورت از (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$|E_k| \leqslant \frac{M\,\Lambda(\gamma)}{R-|a-z|}\left(\frac{|z-a|}{R}\right)^{k+1}.$$

چون $|z-a| < R$، نتیجه می‌شود که وقتی که $k \to \infty$، $E_k \to 0$. از این (آ) و (ب) ثابت می‌شوند.

با بکار بردن قضیهٔ ۲۳.۹ در مورد (۹) نتیجه می‌شود که f بر گردهٔ $B(a\,;R)$ دارای مشتق از هر مرتبه است و $f^{(n)}(a) = n!\,c_n$. چون a یک نقطهٔ دلخواه $C - \Gamma$ است، پس (ج) برقرار خواهد بود.

تبصره . ممکن است رشتهٔ مذکور در (۹) دارای شعاع همگرائی بزرگتر از R باشد. در این صورت این رشته ممکن است در نقاطی با فاصلهٔ بیشتر از R نمایشی برای f باشد یا نباشد.

۱۳.۱۶ بسطهای تابعهای تحلیلی به صورت رشته‌های توانی

با تلفیق دستور انتگرال کشی با قضیهٔ ۱۹.۱۶ قضیهٔ زیرین بدست می‌آید:

قضیهٔ ۲۰۰۱۶ فرض کنیم f بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{C}$ تحلیلی، و a یك نقطهٔ S باشد، در این صورت همهٔ $f^{(n)}(a)$ها وجود دارند، و f را می‌توان در هر گرده مانند $B(a;R)$ که بست آن جزء S باشد به صورت رشتهٔ توانی همگرای

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (۱۵)$$

نمایش داد. بعلاوه، به‌ازای هر $n \geqslant 0$ و هر گذر مستدیر جهت دار بـا جهت مثبت مانند γ که مرکزش a و شعاعش $r<R$،

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw. \qquad (۱۶)$$

تبصره . رشتهٔ مذکور در (۱۵) به بسط تیلور f حول a معروف است. معادلهٔ (۱۶) را دستور انتگرال کشی برای $f^{(n)}(a)$ می‌نامند.

برهان. فرض کنیم مدار γ با یک نقطه در S همجا، و Γ نمودار γ باشد. تابع g را بر $\mathbf{C}-\Gamma$ با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر } z\notin\Gamma \text{ ،}\quad g(z)=\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

اگر $z\in B(a;R)$، از دستور انتگرال کشی برمی‌آید که

$$g(z)=2\pi i n(\gamma, z)\, f(z).$$

از این روی،

$$\text{اگر } |z-a|<R \text{ ،}\quad n(\gamma, z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

حال قـرار می‌دهیم $\gamma(\theta)=a+re^{i\theta}$، کـه در آن $|z-a|<r<R$ و $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. دراین صورت $n(\gamma, z)=1$، پس با بکار بردن قضیهٔ ۱۹۰۱۶ در مورد $\varphi(w)=f(w)/(2\pi i)$ نتیجه می‌شود که نمایش رشته‌ای

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

کـه در آن $c_n=f^{(n)}(a)/n!$، بـه‌ازای $|z-a|<R$ همگرا است. همچنین، قسمت (ج) قضیهٔ ۱۹۰۱۶ رابطهٔ (۱۶) را ایجاب می‌کند.

بنا بر قضیه هـای ۲۰۰۱۶ و ۲۳۰۹، شرطی لازم و کافی بـرای تحلیلی بودن

تابع مختلط f در نقطه‌ای مانند a آن است که f را بتوان در یکی از همسایگیهای a به صورت رشته‌ای توانی نمایش داد. وقتی یک چنین رشتهٔ توانی وجود داشته باشد، شعاع همگرائی آن دست کم مساوی شعاع هر گرده‌ای مانند $B(a)$ است که جزء ناحیه‌ای قرار دارد که f در آن تحلیلی است. چون هر نقطه‌ای که f در آن تحلیلی نباشد نمی‌تواند درون دایرهٔ همگرائی واقع باشد، پس شعاع همگرائی درست مساوی فاصله از a تا نزدیکترین نقطه‌ای است که f درآن تحلیلی نیست.

توجه به این نکته بینش عمیقتری دربارهٔ بسطهای تابعهای حقیقی از متغیر حقیقی به صورت رشته‌های توانی به ما می‌بخشد. مثلاً، فرض کنیم که $f(x) = ۱/(۱ + x^۲)$ وقتی که x حقیقی باشد. این تابع همه جا در $\mathbf{R}^۱$ تعریف شده است، و در هر نقطه در $\mathbf{R}^۱$ از هر مرتبه مشتق دارد. همچنین دارای بسطی به صورت رشتهٔ توانی حول مبدأ است، یعنی

$$\frac{۱}{۱ + x^۲} = ۱ - x^۲ + x^۴ - x^۶ + \cdots$$

اما، این نمایش فقط در بازهٔ باز $]۱ , ۱-[$ معتبر است. از دیدگاه نظریهٔ تابعهای حقیقی، چیزی در رفتار f نیست که بتواند این مطلب را توضیح دهد. اما وقتی آن را در صفحهٔ مختلط بررسی می‌کنیم، بفوریت درمی‌یابیم که تابع تعریف شده با $f(z) = ۱/(۱ + z^۲)$ همه جا در $\mathbf{C}$ بجز در نقطه‌های $z = \pm i$ تحلیلی است. بنابراین، شعاع همگرائی بسط به صورت رشتهٔ توانی حول ۰ باید مساوی ۱، یعنی فاصله از ۰ تا i و تا $i-$، باشد.

چند مثال. بسطهای به صورت رشتهٔ توانی زیرین به‌ازای هر z در $\mathbf{C}$ معتبرند:

آ) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$، ب) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-۱)^n z^{۲n+۱}}{(۲n + ۱)!}$،

ج) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-۱)^n z^{۲n}}{(۲n)!}$.

۱۴.۱۶ نامساویهای کشی. قضیهٔ لیوویل[1]

اگر f بر گردهٔ بستهٔ $B(a ; R)$ تحلیلی باشد، دستور انتگرال کشی (۱۶) نشان می‌دهد که

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{۲\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+۱}} dw,$$

1. Liouville

که درآن γ هرگذر مستدیری‌است جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع $r<R$. می‌توان نوشت $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$، که در آن $\circ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$، و رابطهٔ فوق را به شکل زیرین درآورد:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{۲\pi r^n} \int_{\circ}^{۲\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta. \qquad (۱۷)$$

این دستور مشتق nم را در a به‌عنوان میانگین وزندار مقدارهای f بر دایره‌ای به مرکز a بیان می‌کند. حالت خاص $n = \circ$ قبلاً در بخش ۹.۱۶ بدست آمده بود.

حال فرض کنیم $M(r)$ مقدار ماکزیمم $|f|$ بر نمودار γ را نشان دهد. با تخمین انتگرال مذکور در (۱۷)، بی‌درنگ نامساویهای کشی بدست می‌آیند:

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{M(r)n!}{r^n} \quad (n = \circ, ۱, ۲, \dots). \qquad (۱۸)$$

قضیهٔ زیرین نتیجهٔ سادهٔ حالت $n = ۱$ است.

قضیهٔ ۲۱.۱۶ (قضیهٔ لیوویل). هرگاه f همه‌جا بر $\mathbf{C}$ تحلیلی، و برآن کراندار باشد، آنگاه f پایا است.

برهان. فرض می‌کنیم به‌ازای هر z در $\mathbf{C}$، $|f(z)| \leqslant M$. دراین صورت از نامساوی‌کشی، با $n = ۱$، نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر $r > \circ$، $|f'(a)| \leqslant M/r$. اگر $r \to +\infty$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر a در $\mathbf{C}$، $f'(a) = \circ$ و درنتیجه، بنا بر قضیهٔ ۲۳.۵، f پایا خواهد بود.

تبصره. هر تابعی که همه‌جا بر $\mathbf{C}$ تحلیلی باشد یک تابع تمام نامیده می‌شود. چندجمله‌ایها، سینوس و کسینوس، و تابعهای نمائی مثالهائی از تابعهای تمام می‌باشند. بنا بر قضیهٔ لیوویل، هر تابع تمام کراندار تابعی است پایا.

از قضیهٔ لیوویل برهان ساده‌ای برای قضیهٔ اساسی جبر بدست می‌آید.

قضیهٔ ۲۲.۱۶ (قضیهٔ اساسی جبر). هر چند جمله‌ای از درجهٔ $n \geqslant ۱$ دارای صفری است.

برهان. فرض کنیم $P(z) = a_\circ + a_۱ z + \dots + a_n z^n$، که در آن $n \geqslant ۱$ و $a_n \neq \circ$. فرض می‌کنیم P دارای صفر نباشد و ثابت می‌کنیم که P پایا است. قرار می‌دهیم $f(z) = ۱/P(z)$. دراین صورت f همه‌جا بر $\mathbf{C}$ تحلیلی است زیرا P هرگز صفر نمی‌شود. همچنین، از این که

$$P(z) = z^n\left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right),$$

می‌بینیم که وقتی که $|z| \to +\infty$ ، $|P(z)| \to +\infty$، پس وقتی که $|z| \to +\infty$ ، $f(z) \to 0$. بنابراین، f بر $\mathbf{C}$ کراندار است. پس، بنا برقضیهٔ لیوویل، f و درنتیجه P پایا خواهد بود.

۱۵.۱۶ تنهائی صفرهای یك تابع تحلیلی

اگر f در a تحلیلی باشد و $f(a) = 0$، بسط تیلور f حول a دارای جملهٔ پایای صفر است، و درنتیجه به شکل

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

در می‌آید. این رابطه به‌ازای هر z در گردهای مانند $B(a)$ معتبر است. هرگاه f بر این گرده متحد صفر باشد [یعنی، هرگاه به‌ازای هر z در $B(a)$، $f(z) = 0$]، آنگاه هر $c_n = 0$، زیرا $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. اگر f بر این همسایگی متحد صفر نباشد، بعضی از c_nها ناصفرند. اگر c_k اولین ضریب ناصفر در بسط فوق باشد، نقطهٔ a را یک صفر از مرتبهٔ k می‌نامیم. ثابت خواهیم کرد که f در یکی از همسایگیهای a صفر دیگری ندارد. این خاصیت چنین توصیف می‌شود که صفرهای یک تابع تحلیلی تنها هستند.

قضیهٔ ۲۳.۱۶ فرض کنیم f برمجموعهٔ باز S در $\mathbf{C}$ تحلیلی باشد، همچنین به‌ازای نقطه‌ای چون a در S، $f(a) = 0$، و f برهیچ همسایگی a متحد صفر نباشد، در این صورت گرده‌ای مانند $B(a)$ هست که f درآن دارای صفر دیگری نیست.

برهان. بسط تیلور حول a به صورت $f(z) = (z-a)^k g(z)$ در می‌آید، که درآن $k \geqslant 1$،

$$g(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + \cdots, \quad g(a) = c_k \neq 0.$$

چون g در a پیوسته است، گرده‌ای مانند $B(a) \subseteq S$ هست که g برآن صفر نمی‌شود. بنابراین، به‌ازای هر $z \neq a$ در $B(a)$، $f(z) \neq 0$.

این قضیه چند نتیجهٔ مهم را در بر دارد. مثلاً، با استفاده از آن می‌توان نشان داد که هر تابع تحلیلی بر ناحیهٔ باز S که بر هر زیرمجموعهٔ باز وناتهی S صفر باشد، در سراسر S صفر خواهد بود. یادآوری می‌کنیم که یک ناحیهٔ باز یعنی مجموعه‌ای همبند و باز. (ر. ک. تعریفهای ۳۴.۴ و ۴۵.۴).

قضیهٔ ۲۴.۱۶ فرض کنیم f بر ناحیهٔ باز S در $\mathbf{C}$ تحلیلی باشد. همچنین A مجموعهٔ نقطه‌هائی چون z در S باشد که به‌ازای‌آن گرده‌ای مانند $B(z)$ که f بر آن متحد صفر است وجود داشته باشد. قرار می‌دهیم $B = S - A$. دراین صورت یکی از دو مجموعهٔ A یا B تهی است و دیگری خود S خواهد بود.

برهان. داریم $S = A \cup B$، که درآن A و B مجموعه‌های از هم جدا هستند. مجموعهٔ A، بنا بر تعریف‌آن، باز است. اگر ثابت کنیم که B نیز باز است، از همبندی S نتیجه می‌شود که دست کم یکی از دو مجموعهٔ A یا B تهی است.

برای اثبات باز بودن B، با فرض این که a نقطه‌ای از B باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم: $f(a) \neq 0$ ، $f(a) = 0$. اگر $f(a) \neq 0$، گرده‌ای مانند $B(a) \subseteq S$ هست که برآن f صفر نمی‌شود. بنابراین هر نقطهٔ این گرده باید متعلق به B باشد. از این روی، اگر $f(a) \neq 0$، a یک نقطهٔ درونی B است. اما، اگر $f(a) = 0$، بنا بر قضیهٔ ۲۳.۱۶، گرده‌ای مانند $B(a)$ هست که هیچ صفر دیگری از f را در بر ندارد. این بدان معنی است که $B(a) \subseteq B$. پس، در هر حالت، a یک نقطهٔ درونی B است. بنابراین، B باز است ویکی از دو مجموعهٔ A یا B باید تهی باشد.

۱۶.۱۶ قضیهٔ همانی برای تابعهای تحلیلی

قضیهٔ ۲۵.۱۶ فرض کنیم f بر ناحیهٔ باز S در $\mathbf{C}$ تحلیلی باشد. همچنین $a \in S$ یک نقطهٔ انباشتگی یکی از زیر مجموعه‌های S مانند T باشد. هر گاه به‌ازای هر z در T، $f(z) = 0$، آنگاه به‌ازای هر z در S، $f(z) = 0$.

برهان. دنباله‌ای نامتناهی مانند $\{z_n\}$ وجود دارد که جمله‌هایش نقاط T هستند، بقسمی‌که $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. بنا بر پیوستگی f، $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. حال ثابت می‌کنیم که f بریکی از همسایگیهای a متحد صفراست. فرض کنیم یک چنین همسایگی وجود نداشته باشد. دراین صورت، بنا بر قضیهٔ ۲۳.۱۶، باید گرده‌ای چون $B(a)$ باشد بقسمی‌که برآن $z \neq a$ ایجاب کند که $f(z) \neq 0$. اما این ممکن نیست، زیرا هر گرده مانند $B(a)$ حاوی نقطه‌هائی از T غیر از a هست. بنابراین، باید f بر یکی از همسایگیهای a متحد صفر شود. از این روی مجموعهٔ A در قضیهٔ ۲۴.۱۶ نمی‌تواند تهی باشد. بنابراین $A = S$، و این بدان معنی است که به‌ازای هر z در S، $f(z) = 0$.

گاهی قضیهٔ زیرین را، که نتیجهٔ مهمی از قضیهٔ بالا است، قضیهٔ همانی برای تابعهای تحلیلی می‌نامند.

قضیهٔ ۲۶.۱۶ فرض کنیم f و g بر ناحیهٔ باز S در $\mathbf{C}$ تحلیلی باشند. هرگاه $a \in S$ یك نقطهٔ انباشتگی یکی از زیرمجموعه‌های S مانند T باشد، و به‌ازای هر z در T، $f(z) = g(z)$، آنگاه به‌ازای هر z در S، $f(z) = g(z)$.
برهان. قضیهٔ ۲۵.۱۶ را در مورد $f - g$ بکار برید.

۱۷.۱۶ ماکزیمم و مینیمم کالبد یك تابع تحلیلی

قدر مطلق یا کالبد تابع تحلیلی f، یعنی $|f|$، تابعی است حقیقی و نامنفی. قضیه‌های این بخش مربوطند به ماکزیممها و مینیممهای $|f|$.

قضیهٔ ۲۷.۱۶ (اصل کالبد ماکزیمم موضعی). فرض کنیم تابع تحلیلی f بر ناحیهٔ باز S پایا نباشد. در این صورت $|f|$ در S ماکزیمم موضعی ندارد. یعنی، هر گرده در S مانند $B(a\,;\,R)$ حاوی نقطه‌هائی چون z هست بقسمی که $|f(z)| > |f(a)|$.

برهان. فرض می‌کنیم گرده‌ای چون $B(a\,;\,R)$ در S وجود داشته باشد که در آن $|f(z)| \leqslant |f(a)|$، و ثابت می‌کنیم که f بر S پایا است. گردهٔ هم‌مرکز $B(a\,;\,r)$ را با $0 < r \leqslant R$ در نظر می‌گیریم. بنا بر دستور انتگرال کشی، که در (۷) بیان شده است، داریم

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|\,d\theta\,. \tag{۱۹}$$

حال به‌ازای هر θ، $|f(a+re^{i\theta})| \leqslant |f(a)|$. نشان می‌دهیم که به‌ازای هیچ مقدار θ، نامساوی اکید $|f(a+re^{i\theta})| < |f(a)|$ برقرار نیست. زیرا که در غیر این صورت، بنا بر پیوستگی، یک $\varepsilon > 0$ وجود پیدا می‌کند بقسمی که به‌ازای هر θ در یکی از زیربازه‌های $[0,\, 2\pi]$ مانند I با درازای مثبت، مثلاً h، خواهیم داشت $|f(a+re^{i\theta})| \leqslant |f(a)| - \varepsilon$. قرار می‌دهیم $J = [0,\, 2\pi] - I$. در این صورت J دارای اندازهٔ $2\pi - h$ است، و از (۱۹) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} 2\pi\,|f(a)| &\leqslant \int_I |f(a+re^{i\theta})|\,d\theta + \int_J |f(a+re^{i\theta})|\,d\theta \\ &\leqslant h\{|f(a)| - \varepsilon\} + (2\pi - h)\,|f(a)| \\ &= 2\pi\,|f(a)| - h\varepsilon < 2\pi\,|f(a)|, \end{aligned}$$

که ازآن تناقض $|f(a)| < |f(a)|$ بدست می‌آید. این نشان می‌دهد که اگر $r \leqslant R$، به‌ازای هیچ θای نامساوی اکید $|f(a+re^{i\theta})| < |f(a)|$ برقرار نیست. از این روی، به‌ازای هر z در $B(a; R)$، $|f(z)| = |f(a)|$. بنا براین $|f|$

بر این گرده، و بنا برقضیهٔ ۲۳.۵، خود f بر این گرده پایا خواهد بود. بنا بر قضیهٔ همانی، f بر S پایا است.

قضیهٔ ۲۸.۱۶ (اصل کالبد ماکزیمم مطلق). فرض کنیم T یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ صفحهٔ مختلط $\mathbf{C}$ باشد، و نیز فرض کنیم که f بر T پیوسته، و درون T تحلیلی باشد، در این صورت $|f|$ بر T در نقطه‌ای از ∂T، یعنی کرانهٔ T، به ماکزیمم مطلق خود خواهد رسید.

برهان. چون T فشرده است، $|f|$ در نقطه‌ای بر T، مثلاً a، به ماکزیمم مطلق خود می‌رسد. اگر $a \in \partial T$، برهان تمام است. اگر $a \in \operatorname{int} T$، فرض می‌کنیم S آن مؤلفهٔ $\operatorname{int} T$ باشد که a را دربر دارد. چون $|f|$ در a ماکزیمم موضعی دارد، بنا برقضیهٔ ۲۷.۱۶، f بر S پایا خواهد بود. بنا بر پیوستگی، f بر $\partial S \subseteq T$ نیز چنین است، پس مقدار ماکزیمم، یعنی $|f(a)|$، به‌ازای نقطه‌ای بر ∂S بدست می‌آید. چون $\partial S \subseteq \partial T$ (چرا؟)، پس $|f|$ بر ∂T به ماکزیمم مطلق خود خواهد رسید.

قضیهٔ ۲۹.۱۶ (اصل کالبد مینیمم). فرض کنیم f بر ناحیهٔ باز S تحلیلی بوده پایا نباشد. هرگاه $|f|$ در S دارای مینیمم موضعی در نقطهٔ a باشد، آنگاه $f(a) = 0$.

برهان. اگر $f(a) \neq 0$، قضیهٔ ۲۷.۱۶ را برای $g = 1/f$ بکار می‌بریم. در این صورت g در گردهٔ بازی چون $B(a\,;R)$ تحلیلی است و $|g|$ درنقطهٔ a ماکزیمم موضعی دارد. پس g، و در نتیجه f، براین گرده پایا است. بنابراین، f بر S پایا است، و این با فرض ما تناقض دارد.

۱۸.۱۶ قضیهٔ نگاشت باز

تابعهای تحلیلی ناپایا نگاشتهائی باز هستند؛ یعنی، این تابعها مجموعه‌های باز را روی مجموعه‌هائی باز می‌نگارند. این مطلب را به‌عنوان کاربردی از اصل کالبد مینیمم ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۳۰.۱۶ (قضیهٔ نگاشت باز). هرگاه f بر ناحیهٔ باز S تحلیلی باشد ولی پایا نباشد، آنگاه f باز است.

برهان. فرض می‌کنیم A یک زیرمجموعهٔ باز S باشد. باید ثابت کنیم که $f(A)$ باز است. نقطه‌ای مانند b در $f(A)$ اختیار می‌کنیم و می‌نویسیم $b = f(a)$، که در آن $a \in A$. نخست ملاحظه می‌کنیم که a یک نقطهٔ تنهای نقش معکوس $f^{-1}(\{b\})$

است. (اگر چنین نباشد، بنا بر قضیهٔ همانی، f باید بر S پایا باشد.) از این روی گرده‌ای مانند $B = B(a\,;r)$ هست که بست آن $\bar{B}$ در A قرار دارد وجز a حاوی نقطهٔ دیگری از $f^{-1}(\{b\})$ نیست. چون $f(\bar{B}) \subseteq f(A)$، برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم که $f(\bar{B})$ حاوی گرده‌ای به‌مرکز b است.

فرض می‌کنیم ∂B کرانهٔ B را نشان دهد، یعنی $\partial B = \{z|\ |z-a|=r\}$. در این صورت $f(\partial B)$ مجموعه‌ای است فشرده که b درآن نیست. از این روی عدد m که با

$$m = \inf\{|f(z)-b|\ |z \in \partial B\}$$

تعریف می‌شود مثبت است. نشان می‌دهیم کـه $f(\bar{B})$ گردهٔ $B(b\,;m/۲)$ را دربر-دارد. بـرای این کار، نقطه‌ای مـانند w را در $B(b\,;m/۲)$ اختیار می‌کنیم و نشان می‌دهیم‌که به‌ازای یک مقدار $z_\circ$ در $\bar{B}$، $w = f(z_\circ)$.

فرض می‌کنیم به‌ازای هـر $z \in \bar{B}$، $g(z) = f(z) - w$. ثابت می‌کنیم کـه به‌ازای $z_\circ$ی در $\bar{B}$، $g(z_\circ) = \circ$. تـابع $|g|$ بر $\bar{B}$ پیوسته است، و چون $\bar{B}$ فشرده است، نقطه‌ای مانند $z_\circ$ در $\bar{B}$ وجود دارد که در آن $|g|$ به مینیمم خود می‌رسد. چون $a \in \bar{B}$، پس

$$|g(z_\circ)| \leqslant |g(a)| = |f(a)-w| = |b-w| < \frac{m}{۲}.$$

اما اگر $z \in \partial B$، خواهیم داشت

$$|g(z)| = |f(z)-b+b-w| \geqslant |f(z)-b| - |w-b| > m - \frac{m}{۲} = \frac{m}{۲}\cdot$$

از این روی، $z_\circ \notin \partial B$ پس $z_\circ$، یک نقطهٔ درونی $\bar{B}$ خواهـد بـود. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، $|g|$ در $z_\circ$ دارای مینیمم موضعی است. چون g تحلیلی است و بر B پایا نیست، اصل کالبد مینیمم نشان می‌دهد که $g(z_\circ) = \circ$ و برهان تمام است.

۱۹.۱۶ بسطهای لوران[1] برای تابعهای تحلیلی در یك حلقهٔ دایره

دو تـابع $f_۱$ و $g_۱$ را کـه هـر دو در نقطهٔ a تحلیلی هستند و $g_۱(a) = \circ$ در نظر می‌گیریم. دراین صورت بسطهای به صورت رشته‌هـای توانی زیـرین را خواهیم داشت:

---

1. Laurent

$$\text{به‌ازای}\quad |z-a|<r_1 \ ، \ g_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^n ،$$

و

$$\text{به‌ازای}\quad |z-a|<r_2 \ ، \ f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n . \tag{۲۰}$$

فرض کنیم f_2 تابع مرکبی را نشان دهد که با این رابطه تعریف می‌شود:

$$f_2(z)=g_1\left(\frac{1}{z-a}+a\right).$$

دراین صورت f_2 در ناحیهٔ $|z-a|>r_1$ تعریف شده و دراین ناحیه تحلیلی است، و می‌توان‌آن را با رشتهٔ همگرای زیر نمایش داد:

$$\text{به‌ازای}\quad |z-a|>r_1 \ ، \ f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} . \tag{۲۱}$$

حال اگر $r_1<r_2$، رشته‌های موجود در (۲۰) و (۲۱) دارای ناحیهٔ همگرائی مشترکی خواهند بودکه عبارت‌است ازمجموعهٔ z هائی‌که در این رابطه‌ها صدق‌کنند:

$$r_1<|z-a|<r_2.$$

دراین ناحیه، که در حقیقت درون حلقهٔ دایرهٔ $A(a\,;r_1\,,\,r_2)$ است، هر دو تابع f_1 و f_2 تحلیلی هستند و مجموع f_1+f_2 آنها از رابطهٔ

$$f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$$

بدست می‌آید. مجموع طرف راست را می‌توان به صورت خلاصه‌تر

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

نوشت، که درآن به‌ازای $n=1, 2, \ldots$ ، $c_{-n}=b_n$. هر رشته از این نوع، که از توانهای مثبت و منفی $z-a$، هردو، تشکیل شده باشد، یک رشتهٔ لوران نامیده می‌شود. این رشته را در صورتی همگرا نامند که هر یک از دو قسمت آن جداگانه همگرا باشد.

هر رشتهٔ لوران همگرا تابعی را نمایش می‌دهد که درون حلقهٔ دایرهٔ $A(a\,;r_1\,,\,r_2)$ تحلیلی است. اینک ثابت می‌کنیم که، بعکس، هر تابع تحلیلی مانند f بریک حلقهٔ دایره را می‌توان درون حلقهٔ دایره بایک‌رشتهٔ لوران همگرا نشان داد.

قضیهٔ ۳۱.۱۶ فرض کنیم f بر حلقهٔ دایرهٔ $A(a\,;r_1\,,r_2)$ تحلیلی باشد. در این صورت به‌ازای هر نقطهٔ درونی این حلقهٔ دایره مانند z،

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z), \tag{۲۲}$$

که در آن

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \quad \text{و} \quad f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

ضریبها از دستورهای

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{۲۳}$$

بدست می‌آیند، که در آنها γ یک گذر مستدیر جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع r است، و $r_1<r<r_2$. تابع f_1 (که قسمت موزون f در a نامیده می‌شود) روی گردهٔ $B(a\,;r_2)$ تحلیلی است. تابع f_2 (که قسمت عمدهٔ f در a نامیده می‌شود) در خارج بست گردهٔ $B(a\,;r_1)$ تحلیلی است.

برهان. نقطه‌ای مانند z درون حلقهٔ دایره اختیار می‌کنیم. z را ثابت نگهداشته، تابع g را بر $A(a\,;r_1\,,r_2)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(w)=\begin{cases}\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{اگر } w\neq z\\[2mm] f'(z), & \text{اگر } w=z\end{cases}.$$

دراین صورت اگر $z\neq w$، g در w تحلیلی است و g در z پیوسته خواهد بود. فرض می‌کنیم که

$$\varphi(r)=\int_{\gamma_r}g(w)dw,$$

که درآن γ_r گذر مستدیر جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع r باشد، و $r_1\leqslant r\leqslant r_2$. بنا بر قضیهٔ ۸.۱۶، $\varphi(r_1)=\varphi(r_2)$ پس

$$\int_{\gamma_1}g(w)dw=\int_{\gamma_2}g(w)\,dw, \tag{۲۴}$$

که درآن $\gamma_1=\gamma_{r_1}$ و $\gamma_2=\gamma_{r_2}$. چون z برنمودار γ_1 یا نمودار γ_2 قرار ندارد، در هر یک ازاین انتگرالها می‌توان نوشت

$$g(w) = \frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(z)}{w-z}.$$

با قرار دادن این در (۲۴) و جابه‌جا کردن جمله‌ها نتیجه می‌شود که

$$(۲۵)\quad f(z)\left\{\int_{\gamma_۲}\frac{۱}{w-z}dw - \int_{\gamma_۱}\frac{۱}{w-z}dw\right\} = \int_{\gamma_۲}\frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\gamma_۱}\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

اما $\int_{\gamma_۱}(w-z)^{-۱}\,dw = ۰$ زیرا انتگرالده بر گردهٔ $B(a;r_۱)$ تحلیلی است، و $\int_{\gamma_۲}(w-z)^{-۱}\,dw = ۲\pi i$ زیـرا $n(\gamma_۲, z) = ۱$. بنابراین، از (۲۵) این معادله بدست می‌آید:

$$f(z) = f_۱(z) + f_۲(z),$$

که در آن

$$f_۱(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_۲}\frac{f(w)}{w-z}dw \quad و \quad f_۲(z) = -\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_۱}\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

بنا بر قضیهٔ ۱۹.۱۶، $f_۱$ بر گـردهٔ $B(a;r_۲)$ تحلیلی است، و درنتیجه می‌توان بسط تیلور زیرین را نوشت:

$$\text{به‌ازای } |z-a| < r_۲ ،\quad f_۱(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} c_n(z-a)^n ،$$

که در آن

$$(۲۶)\qquad c_n = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_۲}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+۱}}dw.$$

بعلاوه، بنا بر قضیهٔ ۸.۱۶، گـذر $\gamma_۲$ را می‌توان بـا هـر γ_r، کـه $r_۱ \leqslant r \leqslant r_۲$، عوض کرد.

برای پیدا کردن بسطی برای $f_۲(z)$ به‌صورت یک رشتهٔ توانی، بـا استفاده از اتحاد (۱۳) بـه‌ازای $t = (w-a)/(z-a)$، مانند بـرهـان قضیهٔ ۱۹.۱۶ استدلال می‌کنیم. ازاین نتیجه می‌شود که

$$(۲۷)\quad \frac{۱}{۱-(w-a)/(z-a)} = \sum_{n=۰}^{k}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^{k+۱}\left(\frac{z-a}{z-w}\right).$$

اگر w برنمودار $\gamma_۱$ باشد، $|z-a| < r_۱ = |w-a|$، پس $|t| < ۱$. حـال

رابطهٔ (۲۷) را در $-f(w)/(z-a)$ ضرب نموده، در امتداد γ_1 انتگرال‌گرفته، و بعد اگر $k \to \infty$، نتیجه خواهیم گرفت که

$$\text{به‌ازای } |z-a| > r_1 ,\quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} ،$$

که در آن

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{1-n}}\, dw. \tag{۲۸}$$

بنا بر قضیهٔ ۸.۱۶، به‌ازای هر مقدار r در $[r_1, r_2]$ می‌توان گذر γ_1 را با هر γ_r عوض کرد. اگر هردو گذر مذکور در (۲۸) و (۲۶) را یک گذر مانند γ_r اختیار کنیم و به جای b_n بنویسیم c_{-n}، دو دستور را می‌توان با هم تلفیق نموده به صورت دستور مذکور در (۲۳) درآورد. چون z یک نقطهٔ درونی دلخواه حلقهٔ دایره بود، پس برهان قضیه تمام است.

تبصره. دستور (۲۳) نشان می‌دهد که یک تابع دریک حلقهٔ دایرهٔ مفروض حداکثر یک بسط لوران دارد.

۲۰.۱۶ نقطه‌های استثنائی تنها

گردهٔ $B(a\,;r)$ بجز مرکزش، یعنی، مجموعهٔ $B(a\,;r) - \{a\}$ را یک همسایگی سفتهٔ a نامیم وبا $B'(a\,;r)$ یا $B'(a)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۲.۱۶ نقطهٔ a را یك نقطهٔ استثنائی تنهای f نامیم در صورتی‌که

آ) f بریکی از همسایگیهای سفتهٔ a تحلیلی باشد،

و

ب) f در نقطهٔ a تحلیلی نباشد.

تبصره. لازم نیست که f در a تعریف شده باشد.

اگر a یک نقطهٔ استثنائی تنهای f باشد، حلقهٔ دایره‌ای مانند $A(a\,;r_1, r_2)$ وجود دارد که f برآن تحلیلی است. از این روی f دارای بسط لوران منحصر به‌فردی است، یعنی

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}. \tag{۲۹}$$

چون شعاع داخلی r_1 می‌تواند به قدر کافی کوچک باشد، پس (۲۹) در همسایگی

سفتهٔ $B'(a\,;r_۲)$ معتبر است. نقطهٔ استثنائی a (بسته بــه شکل قسمت عمده) بــه سه نوع زیر رده بندی می‌شود:

اگــر هیچ تــوان منفی در (۲۹) ظــاهــر نشود، یعنی، اگــر بــه‌ازای هــر $n = ۱, ۲, \ldots$، $c_{-n} = ۰$، نقطهٔ a را یک نقطهٔ استثنائی رفع‌شدنی می‌نامند. دراین حالت، وقتی کــه $z \to a$، $f(z) \to c_۰$، و اگــر f در a بــا $f(a) = c_۰$ تعریف شود، می‌توان این‌نقطهٔ استثنائی را رفع کرد. (ر. ک.مثال ۱ در زیر.)

اگــر فقط تعدادی متناهی توان منفی ظاهــر شوند، یعنی، اگــر به ازای یک مقدار n، $c_{-n} \neq ۰$ ولی بــرای هــر مقدار $m > n$ ، $c_{-m} = ۰$، نقطهٔ a را یک قطب از مرتبهٔ n می‌نامند. دراین حالت، قسمت عمده فقط یک مجموع متناهی‌است، یعنی مساوی است با

$$\frac{c_{-۱}}{z-a} + \frac{c_{-۲}}{(z-a)^۲} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

هــرقطب از مرتبهٔ ۱ را معمولاً یک قطب ساده می‌نامند. هــرگاه در a قطب وجود داشته باشد،آنگاه وقتی‌که $z \to a$ ، $|f(z)| \to \infty$.

بالاخره، اگر به‌ازای تعدادی نامتناهی n ، $c_{-n} \neq ۰$، نقطهٔ a را یک نقطهٔ استثنائی لازم نامند. دراین حالت، وقتی‌که $z \to a$ ، $f(z)$ به حدی نمی‌گراید.

مثال ۱ نقطهٔ استثنائی رفع‌شدنی. اگر $z \neq ۰$، قرارمی‌دهیم $f(z) = (\sin z)/z$، و $f(۰) = ۰$. این‌تابع همه جا تحلیلی است مگر در ۰. (این تابع در ۰ ناپیوسته است، زیرا وقتی‌که $z \to ۰$، $(\sin z)/z \to ۱$.) بسط لوران حول ۰ بدین شکل است:

$$\frac{\sin z}{z} = ۱ - \frac{z^۲}{۳!} + \frac{z^۴}{۵!} - + \cdots$$

چون هیچ توان منفی z وجود نــدارد، پس ۰ یک نقطهٔ استثنائی رفع شدنی است. اگر مقدار f در ۰ مساوی ۱ تعریف شود، تابع اصلاح شده در ۰ تحلیلی خواهــد بود.

مثال ۲ قطب. اگر $z \neq ۰$، قــرار می‌دهیم $f(z) = (\sin z)/z^۵$. بسط لــوران حول ۰ به صورت زیرین است:

$$\frac{\sin z}{z^۵} = z^{-۴} - \frac{۱}{۳!}z^{-۲} + \frac{۱}{۵!} - \frac{۱}{۷!}z^۲ + \cdots$$

دراین حالت، نقطهٔ ۰ یک قطب از مرتبهٔ ۴ است. توجه کنید که چیزی دربارهٔ مقدار

f در ۰ بیان نشده است.

مثال ۳ نقطهٔ استثنائی لازم. اگر $z \neq 0$، قرار می‌دهیم $f(z) = e^{1/z}$. نقطهٔ ۰ یک نقطهٔ استثنائی لازم است، زیرا

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \cdots$$

قضیهٔ ۳۳.۱۶ فرض کنیم f بر ناحیهٔ باز S در $\mathbf{C}$ تحلیلی باشد. تابع g را با معادلهٔ $g(z) = 1/f(z)$، اگر $f(z) \neq 0$، تعریف می‌کنیم. در این صورت f وقتی، و فقط وقتی، در نقطهٔ a در S یک صفر از مرتبهٔ k دارد که g در a یک قطب از مرتبهٔ k داشته باشد.

برهان. اگر f یک صفر از مرتبهٔ k در a داشته باشد، همسایگی سفته‌ای مانند $B'(a)$ هست بقسمی که f در آن صفر نمی‌شود. در همسایگی $B(a)$ داریم $f(z) = (z-a)^k h(z)$، که درآن اگر $z \in B(a)$، $h(z) \neq 0$. از این روی، $1/h$ در $B(a)$ تحلیلی است و بسطی به صورت زیر دارد:

$$\frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1(z-a) + \cdots, \quad \text{که درآن} \quad b_0 = \frac{1}{h(a)} \neq 0.$$

بنابراین، اگر $z \in B'(a)$، خواهیم داشت

$$g(z) = \frac{1}{(z-a)^k h(z)} = \frac{b_0}{(z-a)^k} + \frac{b_1}{(z-a)^{k-1}} + \cdots,$$

و درنتیجه a یک قطب از مرتبهٔ k برای g خواهد بود. عکس این مطلب به همین نحو ثابت می‌شود.

۲۱.۱۶ باقیماندهٔ یك تابع در یك نقطهٔ استثنائی تنها

اگر a یک نقطهٔ استثنائی تنهای f باشد، همسایگی سفته‌ای چون $B'(a)$ هست که f برآن بسط لوران دارد، یعنی

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}. \qquad (۳۰)$$

ضریب c_{-1} که در $(z-a)^{-1}$ ضرب شده است، باقیماندهٔ f در a نام دارد و با علامت

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

نشان داده می‌شود. از دستور (۲۳) معلوم می‌شود کـه بـه‌ازای هـر گـذر مستدیر جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز a مانند γ که نمودار آن جزء گردهٔ $B(a)$ باشد،

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z). \qquad (31)$$

در بسیاری از حالتها ارزیـابی باقیمانـده در یک نقطه بـدون استفـاده از انتگرالگیری نسبتاً آسان است. مثلاً، اگـر a یک قطب ساده باشد، می‌تـوان بـا استفاده از دستور (۳۰) نتیجه گرفت که

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} (z-a)f(z). \qquad (32)$$

بهمین نحو، اگر a یک قطب از مرتبهٔ ۲ باشد، بآسانی می‌توان نشان داد که

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = g'(a)\text{، که درآن } g(z) = (z-a)^2 f(z).$$

درحالاتی مشابه به این‌حالت،که درآنها محاسبهٔ باقیمانده خیلی‌آسان باشد، رابطهٔ (۳۱) روش ساده‌ای برای ارزیابی انتگرالهای پیرامنی دراطراف مدارها را بدست‌می‌دهد.

برای اولین بار، کشی ازاین مفهوم استفاده کـرد و آن را به‌روشی قوی به نام حساب باقیمانـده‌ها گسترش داد. این روش مبتنی بر قضیهٔ باقیماندهٔکشی است، که تعمیمی است از (۳۱).

۲۲.۱۶ قضیهٔ باقیماندهٔ کشی

قضیهٔ ۳۴.۱۶ فرض کنیم f بر ناحیهٔ باز S، بجز تعدادی متناهی نقطهٔ استثنائی تنها مانند $z_1, \ldots, z_n$ در S تحلیلی باشد. همچنین مدار γ بـا یك نقطه در S همجا باشد، وهیچ یك از نقطه‌های استثنائی برنمودار γ قرار نداشته باشد. دراین صورت

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k) \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \qquad (33)$$

که در آن $n(\gamma, z_k)$ عدد گردشی γ برحسب z_k می‌باشد.

برهان. اثبات مبتنی بر دستور ذیل است، که در آن m عددی است صحیح (مثبت، منفی، یا صفر):

$$\int_\gamma (z-z_k)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i\, n(\gamma, z_k) & \text{اگر } m = -1 \\ 0 & \text{اگر } m \neq -1 \end{cases} \qquad (34)$$

این دستور برای $m = -۱$ همان تعریف عدد گردشی $n(\gamma, z_k)$ است. فرض کنیم $[a, b]$ قلمرو γ را نشان دهد. اگر $m \neq -۱$، به‌ازای t در $[a, b]$، قرار می‌دهیم $g(t) = \{\gamma(t) - z_k\}^{m+۱}$. دراین صورت، چون $g(b) = g(a)$،

$$\int_\gamma (z - z_k)^m \, dz = \int_a^b \{\gamma(t) - z_k\}^m \gamma'(t) \, dt = \frac{۱}{m + ۱} \int_a^b g'(t) \, dt$$
$$= \frac{۱}{m + ۱} \{g(b) - g(a)\} = ۰.$$

از این، (۳۴) باثبات می‌رسد.

برای اثبات قضیهٔ باقیمانده، فرض می‌کنیم f_k قسمت عمدهٔ f در نقطهٔ z_k باشد. بنا بر قضیهٔ ۳۱.۱۶، f_k همه جا در $\mathbf{C}$ جز در z_k تحلیلی است. بنابراین $f - f_۱$ در S تحلیلی است مگر در $z_۲$، . . . ، z_n. بهمین نحو، معلوم می‌شود که $f - f_۱ - f_۲$ در S تحلیلی است، جز در $z_۳$، . . . ، z_n، و با استقرا نتیجهٔ می‌گیریم‌که $f - \sum_{k=۱}^n f_k$ همه‌جا در S تحلیلی‌است. پس، بنا بر قضیهٔ انتگرال‌کشی، $\int_\gamma (f - \sum_{k=۱}^n f_k) = ۰$، یا

$$\int_\gamma f = \sum_{k=۱}^n \int_\gamma f_k.$$

اکنون f_k را حول z_k به صورت یک رشتهٔ لوران بیان می‌کنیم، و از این رشته جمله به‌جمله انتگرال می‌گیریم، (۳۴) و تعریف باقیمانده را بکار می بریم، تا رابطهٔ (۳۳) بدست آید.

تبصره. هرگاه γ یک خم ژردان جهت‌دار با جهت مثبت و با نمودار Γ باشد، آنگاه به‌ازای هر z_k در داخل Γ، $n(\gamma, z_k) = ۱$، و به‌ازای هر z_k در خارج Γ، $n(\gamma, z_k) = ۰$. دراین حالت، انتگرال f در امتداد γ مساوی $۲\pi i$ برابر مجموع باقیمانده‌ها در نقطه‌های استثنائی داخل Γ خواهد بود.

بعضی از کاربردهای قضیهٔ باقیماندهٔ کشی در چند بخش آینده گفته می‌شوند.

۲۳.۱۶ شمارش صفرها و قطبها در یك ناحیه

اگر f در a تحلیلی باشد یا در این نقطه قطب داشته باشد، و f متحد صفر نباشد، بسط لوران آن حول a به شکل

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

است، که در آن $c_m \neq ۰$. اگر $m > ۰$، یک صفر از مرتبهٔ m در a وجود دارد؛

اگر $m < 0$، در a یک قطب از مرتبهٔ $-m$ وجود دارد؛ و اگر $m = 0$، در a نه صفر وجود دارد و نه قطب.

تبصره. گاهی برای تأکید دراین که m به f و a، هر دو، بستگی دارد می‌نویسیم $m(f\,;\,a)$.

قضیهٔ ۳۵.۱۶ فرض‌کنیم تابع f متحد صفر نباشد، و بر ناحیهٔ باز S، بجز احتمالاً در تعدادی متناهی قطب، تحلیلی باشد. همچنین مدار γ با نقطه‌ای در S همجا بوده، نمودار آن حاوی هیچ یك از صفرها یا قطبهای f نباشد. در این صورت

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{a\in S} n(\gamma, a)\, m(f; a), \tag{۳۵}$$

که در آن مجموع طرف راست فقط حاوی تعدادی متناهی جملهٔ ناصفر است.

تبصره. هرگاه γ یک خم ژردان جهت دار با جهت مثبت با نمودار Γ باشد، آنگاه به‌ازای هر a در داخل Γ، $n(\gamma, a) = 1$، وعموماً (۳۵) به شکل

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P \tag{۳۶}$$

نوشته می‌شود، که در آن N تعداد صفرها و P تعداد قطبهای f در داخل Γ را نشان می‌دهند، که هریک به تعداد مرتبه‌اش بحساب آمده است.

برهان. فرض کنیم در یکی از همسایگیهای سفتهٔ نقطه‌ای مانند a داشته باشیم $f(z) = (z-a)^m g(z)$، که در آن g در a تحلیلی باشد، $g(a) \neq 0$، و m عددی صحیح (مثبت یا منفی) باشد. دراین صورت یکی از همسایگیهای سفتهٔ a وجود دارد که بر آن می‌توان نوشت

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

که درآن خارج قسمت g'/g در a تحلیلی است. این معادله نشان می‌دهد که هر صفر f از مرتبهٔ m یک قطب سادهٔ f'/f با باقیماندهٔ m است. بهمین نحو، یک قطب f از مرتبهٔ m یک قطب سادهٔ f'/f با باقیماندهٔ $-m$ خواهد بود. از این مطلب و قضیهٔ باقیماندهٔ کشی رابطهٔ (۳۵) نتیجه می‌شود.

۲۴.۱۶ ارزیابی انتگرالهای حقیقی به‌وسیلهٔ باقیمانده‌ها

گاهی قضیهٔ باقیماندهٔ کشی را می‌توان برای ارزیابی انتگرالهای ریمان حقیقی بکار

بـرد. دراین مورد روشهای مختلفی وجود دارند کـه هر یک به شکلی از انتگرالها بستگی خواهد داشت. در این جا باختصار دو روش را توصیف می‌کنیم.

روش اول بـا انتگرالهائی بـه شکل $\int_{\circ}^{۲\pi} R(\sin\theta\,,\,\cos\theta)d\theta$ سروکار دارد، که درآن R تابعی گویا[1] از دو متغیر است.

قضیهٔ ۳۶.۱۶ فرض کنیم R تابعی گویا از دو متغیر باشد، و فرض کنیم که

$$f(z) = R\left(\frac{z^{۲}-۱}{۲iz}\,,\,\frac{z^{۲}+۱}{۲z}\right),$$

وقتی که عبارت طرف راست متناهی باشد. همچنین γ دایرهٔ یکهٔ جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز $\circ$ را نشان دهد. دراین صورت

$$\int_{\circ}^{۲\pi} R(\sin\theta,\ \cos\theta)\,d\theta = \int_{\gamma}\frac{f(z)}{iz}dz \tag{۳۷}$$

به‌شرط آن که f هیچ قطبی بر نمودار γ نداشته باشد.

برهان. چون $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ با $\circ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$، پس

$$\gamma'(\theta) = i\gamma(\theta),\ \ \frac{\gamma(\theta)^{۲}-۱}{۲i\gamma(\theta)} = \sin\theta,\ \ \frac{\gamma(\theta)^{۲}+۱}{۲\gamma(\theta)} = \cos\theta,$$

و (۳۷) را می‌توان بی‌درنگ از قضیهٔ ۷.۱۶ نتیجه گرفت.

تبصره. برای ارزیابی انتگرال طرف راست (۳۷)، فقط کافی است‌که باقیمانده‌های انتگرالده را در قطبهائی که در داخل دایرهٔ یکه واقعند محاسبه کنیم.

مثال. در حالتی که a عددی حقیقی باشد و $|a|>۱$، می‌خواهیم انتگرال

$$I = \int_{\circ}^{۲\pi} d\theta/(a+\cos\theta)$$

را ارزیابی کنیم. با بکار بردن (۳۷)، خواهیم داشت

---

۱. تابع P که بر $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ با معادله‌ای به شکل

$$P(z_{۱},\,z_{۲}) = \sum_{m=\circ}^{p}\sum_{n=\circ}^{q} a_{m,n}\,z_{۱}^{m}z_{۲}^{n}$$

تعریف شده باشد، یك چندجمله‌ای از دو متغیر نامیده می‌شود. ضریبهای $a_{m,n}$ ممکن است حقیقی یا مختلط باشند. خارج قسمت هردو چندجمله‌ای ازاین نوع را یك تابع گویا از دو متغیر می‌نامند.

$$I = -2i\int_{\gamma}\frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

انتگرالده در ریشه‌هـای معادلهٔ $z^2 + 2az + 1 = 0$ دارای قطبهای ساده است. این ریشه‌ها عبارتند از نقطه‌های

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2-1},$$
$$z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}.$$

باقیمانده های متناظر، یعنی R_1 و R_2، از این رابطه‌ها بدست می‌آیند:

$$R_1 = \lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z^2+2az+1} = \frac{1}{z_1-z_2},$$

$$R_2 = \lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{z^2+2az+1} = \frac{1}{z_2-z_1}.$$

اگر $a > 1$، z_1 در داخل دایرهٔ یکه و z_2 در خارج آن است، و

$$I = 4\pi/(z_1-z_2) = 2\pi/\sqrt{a^2-1}.$$

اگر $a < -1$، z_2 در داخل دایره و z_1 در خارج آن است، و داریم

$$I = -2\pi/\sqrt{a^2-1}.$$

بسیاری از انتگرالهای مجازی را می‌تـوان به‌وسیلهٔ قضیهٔ زیـر مورد بـررسی قرار داد:

قضیهٔ ۳۷.۱۶ فرض‌کنیم‌که $T = \{x+iy \mid y \geqslant 0\}$ نیمهٔ بالائی صفحه را نشان دهد. همچنین S ناحیه‌ای باز در $\mathbf{C}$ باشد کـه حـاوی T بوده و f، بجز احتمالاً در تعدادی متناهی قطب، بر S تحلیلی بـاشد. بعلاوه فرض کنیم کـه هیچ یك از این قطبها برمحور حقیقی واقع نباشد. هرگاه

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\,Re^{i\theta}\,d\theta = 0, \tag{۳۸}$$

آنگاه

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{۳۹}$$

که در آن z_1، . . .، z_n قطبهای f در T می‌باشند.

برهان. فرض کنیم γ گذری جهت‌دار با جهت مثبت باشد که از قسمتی از محور حقیقی از $-R$ تا R و نیمدایرهٔ موجود در T که $[-R, R]$ قطر آن است تشکیل شده باشد. R را آن‌قدر بزرگ اختیار می‌کنیم که همهٔ قطبهای $z_۱$، . . .، z_n در داخل γ واقع شوند. در این صورت

$$۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + i\int_{۰}^{\pi} f(Re^{i\theta})\,Re^{i\theta}\,d\theta.$$

وقتی که $R \to +\infty$، بنابر (۳۸)، آخرین انتگرال به صفر می‌گراید و (۳۹) بدست می‌آید.

تبصره. اگر f به‌صورت خارج قسمت دو چندجمله‌ای، مثلاً $f = P/Q$، باشد، معادلهٔ (۳۸) خود بخود برقرار خواهد بود، مشروط بر آن که درجهٔ Q از درجهٔ P دست کم به‌اندازهٔ ۲ بیشتر باشد. (ر. ک. تمرین ۳۶.۱۶.)

مثال. برای ارزیابی $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(۱+x^۴)$، قرار می‌دهیم $f(z) = ۱/(z^۴+۱)$. در این صورت $P(z) = ۱$، $Q(z) = ۱ + z^۴$، و درنتیجه (۳۸) برقرار است. قطبهای f ریشه‌های معادلهٔ $z^۴ + ۱ = ۰$ هستند. این ریشه‌ها عبارتند از $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، و $z_۴$، که در آنها

$$z_k = e^{(۲k-۱)\pi i/۴} \qquad (k = ۱, ۲, ۳, ۴).$$

از اینها فقط $z_۱$ و $z_۲$ در نیمهٔ بالائی صفحه واقعند. باقیمانده در $z_۱$ عبارت است از

$$\operatorname{Res}_{z=z_۱} f(z) = \lim_{z\to z_۱} (z - z_۱) f(z) = \frac{۱}{(z_۱ - z_۲)(z_۱ - z_۳)(z_۱ - z_۴)} = \frac{e^{-\pi i/۴}}{۴i}.$$

بهمین نحو، نتیجه می‌شود که $\operatorname{Res}_{z=z_۲} f(z) = (۱/۴i)e^{\pi i/۴}$. بنابراین،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{۱+x^۴} = \frac{۲\pi i}{۴i}(e^{-\pi i/۴} + e^{\pi i/۴}) = \pi \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}\sqrt{۲}.$$

۲۵.۱۶ ارزیابی مجموع گاوس به‌وسیلهٔ حساب باقیمانده

قضیهٔ باقیمانده غالباً برای ارزیابی مجموعها به‌وسیلهٔ انتگرالگیری بکار می‌رود. این مطلب را با مثال معروف $G(n)$، یعنی مجموع گاوس که با دستور

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n-1} e^{2\pi i r^2/n}, \quad n \geqslant 1, \tag{۴۰}$$

تعریف می‌شود، مصور می‌سازیم. این مجموع در قسمتهای مختلف نظریهٔ اعداد تجلی می‌کند. به‌ازای مقدارهای کوچک n، آن را می‌توان بآسانی از روی تعریفش حساب کرد. مثلاً،

$$G(1)=1, \quad G(2)=0, \quad G(3)=i\sqrt{3}, \quad G(4)=2(1+i).$$

اگر چه قدرمطلق هرجملهٔ مجموع مساوی ۱ است، اما قدرمطلق خود مجموع ۰، $\sqrt{n}$، یا $\sqrt{2n}$ می‌باشد. در حقیقت، گاوس دستور شایان توجه

$$G(n)=\frac{1}{2}\sqrt{n}\,(1+i)(1+e^{-\pi i n/2}) \tag{۴۱}$$

را به‌ازای هر $n \geqslant 1$ ثابت کرد. برای (۴۱) برهانهای متفاوتی در دست است. ما رابطهٔ (۴۱) را از مجموع کلیتر

$$S(a,n)=\sum_{r=0}^{n-1} e^{\pi i a r^2/n},$$

که در آن n و a عددهائی صحیح و مثبت هستند، و این مجموع به‌وسیلهٔ دیریکله معرفی شده است، نتیجه خواهیم گرفت. هرگاه $a=2$، آنگاه $S(2,n)=G(n)$. دیریکله رابطهٔ (۴۱) را از یک قانون تقابل برای $S(a,n)$، که می‌توان آن را به صورت زیرین بیان کرد، نتیجه گرفته است.

قضیهٔ ۳۸.۱۶ اگر حاصل ضرب na زوج باشد،

$$S(a,n)=\sqrt{\frac{n}{a}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\overline{S(n,a)}, \tag{۴۲}$$

که در آن منظور از $\overline{S(n,a)}$ مزدوج مختلط $S(n,a)$ است.

تبصره. برای بدست آوردن دستور گاوس یعنی (۴۱)، در (۴۲)، a را مساوی ۲ اختیارکرده و ملاحظه می‌کنیم‌که $\overline{S(n,2)}=1+e^{-\pi i n/2}$.

برهان. برهانی که در این جا ارائه شده است به نحو خاصی آموزنده است زیرا چند روش مختلف را که در آنالیز مختلط بکار می‌روند مصور می‌سازد. برخی از جزئیات کم اهمیتتر محاسبه به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

فرض کنیم تابع g با معادلهٔ

$$g(z)=\sum_{r=0}^{n-1} e^{\pi ia(z+r)^2/n} \tag{۴۳}$$

تعریف شده باشد. پس تابع g همه جا تحلیلی است، و $S(a,n)=g(0)$. چون na زوج است، می بینیم که

$$g(z+1)-g(z)=e^{\pi iaz^2/n}\,(e^{2\pi iaz}-1)$$
$$=e^{\pi iaz^2/n}(e^{2\pi iz}-1)\sum_{m=0}^{a-1} e^{2\pi imz}$$

(تمرین ۴۱.۱۶). حال تابع f را با معادلهٔ

$$f(z)=g(z)/(e^{2\pi iz}-1)$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت f همه جا تحلیلی است مگر برای یک قطب مرتبهٔ اول در هر عدد صحیح، و f در معادلهٔ

$$f(z+1)=f(z)+\varphi(z) \tag{۴۴}$$

صدق می‌کند، که در این معادله

$$\varphi(z)=e^{\pi iaz^2/n}\sum_{m=0}^{a-1} e^{2\pi imz}. \tag{۴۵}$$

تابع φ همه‌جا تحلیلی است.

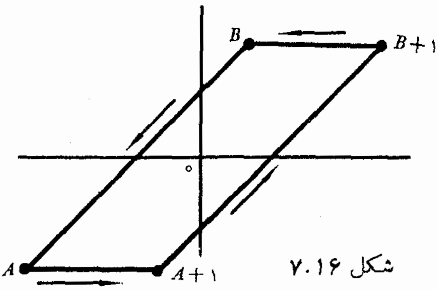
در $z=0$ باقیماندهٔ f مساوی $g(0)/(2\pi i)$ است (تمرین ۴۱.۱۶)، و درنتیجه

$$S(a,n)=g(0)=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\int_\gamma f(z)\,dz, \tag{۴۶}$$

که در آن γ هرگذر بستهٔ سادهٔ جهت‌دار با جهت مثبت است که ناحیهٔ درونی نمودار آن فقط حاوی قطب $z=0$ می‌باشد. γ را بقسمی اختیار می‌کنیم که، همان‌طور که درشکل ۷.۱۶ نشان داده‌شده است، متوازی الاضلاع بارأسهای A، $A+1$، $B+1$، و B را که در آنها

$$A=-\frac{1}{2}-Re^{\pi i/4} \quad \text{و} \quad B=-\frac{1}{2}+Re^{\pi i/4}،$$

توصیف نماید. چون از f در امتداد γ انتگرال بگیریم، حاصل می‌شود



شکل ۷.۱۶

$$\int_{\gamma} f = \int_{A}^{A+1} f + \int_{A+1}^{B+1} f + \int_{B+1}^{B} f + \int_{B}^{A} f.$$

در انتگـرال $\int_{A+1}^{B+1} f$ تغییـر متغیـر $w = z + 1$ می‌دهیم، و سپس بـا استفاده از (۴۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{A+1}^{B+1} f(w)\, dw = \int_{A}^{B} f(z+1)\, dz = \int_{A}^{B} f(z)\, dz + \int_{A}^{B} \varphi(z)\, dz.$$

بنابراین، (۴۶) بدین صورت در می‌آید:

$$S(a, n) = \int_{A}^{B} \varphi(z)\, dz + \int_{A}^{A+1} f(z)\, dz - \int_{B}^{B+1} f(z)\, dz. \qquad (۴۷)$$

حال نشان می‌دهیم که وقتی $R \to +\infty$، انتگرالها در امتداد پاره‌خطهای افقی از A تا $A+1$ و از B تا $B+1$ به ۰ می‌گرایند. برای این کار انتگرالده را بـر این پاره‌خطها تخمین می‌زنیم. می‌نویسیم

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|e^{2\pi i z} - 1|}, \qquad (۴۸)$$

و صورت و مخرج آن را جداگانه تخمین می‌زنیم.

بر پاره خطی که B را به $B+1$ وصل می‌کند قرار می‌دهیم

$\gamma(t) = t + Re^{\pi i/4}$، که در آن $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$.

از (۴۳) خواهیم داشت

$$|g[\gamma(t)]| \leqslant \sum_{r=0}^{n-1} \left| \exp\left\{ \frac{\pi i a (t + Re^{\pi i/4} + r)^2}{n} \right\} \right|, \qquad (۴۹)$$

که در آن $\exp z = e^z$. عبارت داخل دو ابرو دارای قسمت حقیقی

$$-\pi a(\sqrt{2}tR + R^2 + \sqrt{2}rR)/n$$

است (تمرین ۴۱۰۱۶). چون $|e^{x+iy}| = e^x$ و $\exp\{-\pi a\sqrt{2}rR/n\} \leqslant 1$، هر جمله در (۴۹) دارای قدر مطلقی نابیشتر از

$$\exp\{-\pi aR^2/n\}\exp\{-\sqrt{2}\pi atR/n\}$$

می‌باشد. اما $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}-$ ، پس تخمین زیر را خواهیم داشت

$$|g[\gamma(t)]| \leqslant n\, e^{\pi\sqrt{2}aR/(2n)}\, e^{-\pi aR^2/n}.$$

برای مخرج موجود در (۴۸) نامساوی مثلثی را به شکل

$$|e^{2\pi iz} - 1| \geqslant \big|\,|e^{2\pi iz}| - 1\big|$$

بکار می‌بریم. چون

$$|\exp\{2\pi i\gamma(t)\}| = \exp\{-2\pi R\sin(\pi/4)\} = \exp\{-\sqrt{2}\pi R\},$$

نتیجه می‌شود که

$$|e^{2\pi i\gamma(t)} - 1| \geqslant 1 - e^{-\sqrt{2}\pi R}.$$

بنابراین، تخمین زیر بر پاره‌خطی که B را به $B+1$ وصل می‌کند وجود دارد:

وقتی که $R \to +\infty$، $|f(z)| \leqslant \dfrac{ne^{\pi\sqrt{2}aR/(2n)}e^{-\pi aR^2/n}}{1 - e^{-\sqrt{2}\pi R}} = o(1)$.

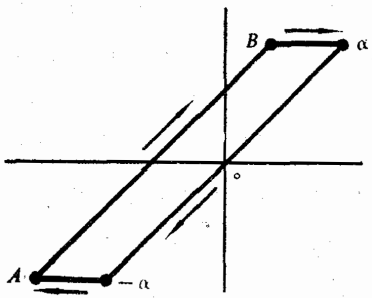
در این جا $o(1)$ عبارت است از تابعی از R که وقتی که $R \to +\infty$ به صفر می‌گراید.

با بیان مشابهی می‌توان نشان داد که وقتی که $R \to +\infty$، انتگرالده بر پاره خط واصل بین A و $A+1$ به ۰ می‌گراید. چون در هر حالت درازای گذر انتگرالگیری مساوی ۱ است، پس وقتی که $R \to +\infty$، دومین و سومین انتگرال طرف راست (۴۷) به ۰ می‌گرایند. بنابراین، می‌توان (۴۷) را به شکل زیرین نوشت:

$$S(a, n) = \int_A^B \varphi(z)\, dz + o(1) \quad \text{وقتی که } R \to +\infty \qquad (50)$$

برای بررسی انتگرال $\int_A^B \varphi$، قضیهٔ کشی را بکار می‌بریم، از φ در اطراف متوازی‌الاضلاعی با رأسهای A، B، α، و $-\alpha$، که درآنها

$$\alpha = B + \frac{1}{2} = Re^{\pi i/4},$$



شکل ۸.۱۶

انتگرال می گیریم. (ر. ک.شکل ۸.۱۶.) چون φ همه جا تحلیلی است، انتگرال آن در اطراف این متوازی الاضلاع صفر است، پس

$$(۵۱) \qquad \int_A^B \varphi + \int_B^\alpha \varphi + \int_\alpha^{-\alpha} \varphi + \int_{-\alpha}^A \varphi = ۰.$$

به دلیل وجود سازهٔ نمائی $e^{\pi iaz^۲/n}$ در (۴۵)، می توان با بیانی مشابه بالا نشان داد که وقتی که $R \to +\infty$، انتگرال φ در امتداد هر پاره خط افقی به ۰ می گراید. بنابراین، از (۵۱) نتیجه می‌شود که

$$\int_A^B \varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi + o(۱) \quad \text{،} \quad R \to +\infty \ \text{وقتی که}$$

و (۵۰) بدین صورت در می‌آید:

$$(۵۲) \quad S(a, n) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(z)\, dz + o(۱) \ \text{،} \ R \to +\infty \ \text{وقتی که}$$

که درآن $\alpha = Re^{\pi i/۴}$. با استفاده از (۴۵) خواهیم داشت

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(z)dz = \sum_{m=۰}^{a-۱} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\pi iaz^۲/n} e^{۲\pi imz}\, dz$$
$$= \sum_{m=۰}^{a-۱} e^{-\pi inm^۲/a}\, I(a, m, n, R),$$

که درآن

$$I(a, m, n, R) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp\left\{\frac{\pi ia}{n}\left(z + \frac{nm}{a}\right)^۲\right\}dz.$$

اگر باز هم قضیهٔ کشی را در مورد متوازی الاضلاع با رأسهای α ، $-\alpha$، $\alpha - nm/a$، و $-\alpha - nm/a$ بکار بریم، مانند قبل نتیجه می‌گیریم که وقتی که

$R \to +\infty$، انتگرالها در امتداد پاره خطهای افقی به ۰ می‌گرایند، پس وقتی که $R \to +\infty$ ،

$$I(a, m, n, R) = \int_{-\alpha - nm/a}^{\alpha - mn/a} \exp\left\{\frac{\pi i a}{n}\left(z + \frac{nm}{a}\right)^{2}\right\} dz + o(1).$$

با تغییر متغیر $w = \sqrt{a/n}(z + nm/a)$ این رابطه به شکل زیر در می‌آید: وقتی که $R \to +\infty$ ،

$$I(a, m, n, R) = \sqrt{\frac{n}{a}} \int_{-\alpha\sqrt{a/n}}^{\alpha\sqrt{a/n}} e^{\pi i w^{2}} dw + o(1).$$

اگر در (۵۲) $R \to +\infty$، خواهیم داشت

$$S(a, n) = \sum_{m=0}^{a-1} e^{-\pi i n m^{2}/a} \sqrt{\frac{n}{a}} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R\sqrt{a/n}\, e^{\pi i/4}}^{R\sqrt{a/n}\, e^{\pi i/4}} e^{\pi i w^{2}} dw. \tag{۵۳}$$

با قرار دادن $T = \sqrt{a/n}\, R$، دیده می‌شود که برای آخرین حد می‌توان نوشت

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-Te^{\pi i/4}}^{Te^{\pi i/4}} e^{\pi i w^{2}} dw = I,$$

که در آن I عددی است که از a و n مستقل است. بنابراین، از (۵۳) نتیجه می‌شود که

$$S(a, n) = \sqrt{\frac{n}{a}}\, I\, \overline{S(n, a)}. \tag{۵۴}$$

برای ارزیابی I ، $a = 1$ و $n = 2$ را در رابطهٔ (۵۴) قرار می‌دهیم. دراین صورت $S(1, 2) = 1 + i$ و $S(2, 1) = 1$، پس از رابطهٔ (۵۴) نتیجه می‌شود که $I = (1 + i)/\sqrt{2}$، و (۵۴) به رابطهٔ (۴۲) تحویل می‌گردد.

۲۶.۱۶ کاربرد قضیهٔ باقیمانده در دستور معکوس کردن برای تبدیلهای لاپلاس

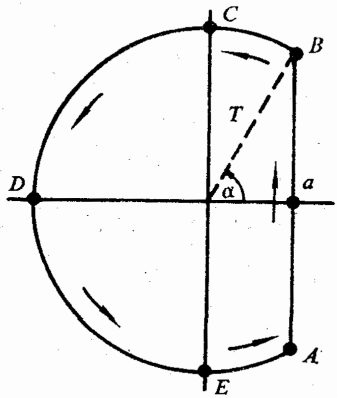
در بسیاری حالات، قضیهٔ زیرین، ساده‌ترین روش برای ارزیابی حدی است که در دستور معکوس‌کردن برای تبدیلهای لاپلاس ظاهر می‌شود. (ر. ک. تمرین ۳۸.۱۱.)

قضیهٔ ۳۹.۱۶ فرض‌کنیم تابع F همه جا در $\mathbf{C}$ تحلیلی باشد بجز احتمالاً در تعدادی متناهی قطب. همچنین سه عدد پایای مثبت مانند M، b، و c وجود داشته باشند بقسمی که

هر گاه $b \geqslant |z|$ ، آنگاه $|F(z)| < \frac{M}{|z|^c}$.

فرض کنیم a عدد مثبتی باشد که به‌ازای آن خط عمودی $x = a$ حاوی هیچ یك از قطبهای F نباشد، همچنین z_n ، . . . ، z_1 آن قطبهای F باشند که در طرف چپ این خط واقعند. در این صورت، برای هر عدد حقیقی $t > ۰$، داریم

$$(۵۵) \qquad \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t} F(a+iv)\, dv = ۲\pi \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} \{e^{zt} F(z)\}.$$



شکل ۹.۱۶

برهان. قضیهٔ باقیماندهٔ کشی را در مورد گذر Γ که در شکل ۹.۱۶ نشان داده شده است و جهت‌دار با جهت مثبت است بکار می‌بریم. در این شکل شعاع T قسمت مستدیر را آن قدر بزرگ اختیار می‌کنیم که همهٔ قطبهای F را که در طرف چپ خط $x = a$ قرار دارند در بر گیرد، و همچنین $T > b$.

از قضیهٔ باقیمانده نتیجه می‌شود که

$$(۵۶) \qquad \int_{\Gamma} e^{zt} F(z) dz = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} \{e^{zt} F(z)\}.$$

حال می‌نویسیم

$$\int_{\Gamma} = \int_{A}^{B} + \int_{B}^{C} + \int_{C}^{D} + \int_{D}^{E} + \int_{E}^{A},$$

که در آنها A ، B ، C ، D ، و E نقطه‌هائی هستند که در شکل ۹.۱۶ نشان داده

شده‌اند. این انتگرالها را با $I_۱$ ، $I_۲$ ، $I_۳$ ، $I_۴$ ، و $I_۵$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم به‌ازای هر $k > ۱$، وقتی که $T \to +\infty$، $I_k \to ۰$.

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$|I_۲| < \frac{M}{T^c} \int_{\alpha}^{\pi/۲} e^{tT\cos\theta}\, T d\theta \leqslant \frac{Me^{at}}{T^{c-۱}}\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$$
$$= \frac{Me^{at}}{T^c} T \arcsin\left(\frac{a}{T}\right).$$

چون وقتی کـه $T \to +\infty$ ، $T\arcsin(a/T) \to a$ ، نتیجه مـی‌شود کـه وقتی کـه $T \to +\infty$ ، $I_۲ \to ۰$. بهمین نحو، ثـابت مـی‌شود کـه وقتی کـه $T \to +\infty$ ، $I_۵ \to ۰$.

حال $I_۳$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$|I_۳| < \frac{M}{T^{c-۱}} \int_{\pi/۲}^{\pi} e^{tT\cos\theta}\, d\theta = \frac{M}{T^{c-۱}} \int_{۰}^{\pi/۲} e^{-tT\sin\varphi}\, d\varphi.$$

اما اگر $۰ \leqslant \varphi \leqslant \pi/۲$ ، $\sin\varphi \geqslant ۲\varphi/\pi$، و در نتیجه وقتی که $T \to +\infty$ ،

$$|I_۳| < \frac{M}{T^{c-۱}} \int_{۰}^{\pi/۲} e^{-۲tT\varphi/\pi}\, d\varphi = \frac{\pi M}{۲tT^c}(۱ - e^{-tT}) \to ۰.$$

بهمین نحو، نتیجه می‌شود که وقتی کـه $T \to +\infty$ ، $I_۴ \to ۰$. امـا وقتی کـه $T \to +\infty$، طـرف راست (۵۶) تغییر نمـی‌کند. از ایــن روی $\lim_{T\to+\infty} I_۱$ وجود دارد و

$$\lim_{T\to+\infty} I_۱ = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t} F(a+iv) i dv$$
$$= ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \{e^{zt}F(z)\}.$$

مثال. فرض می‌کنیم $F(z) = z/(z^۲ + \alpha^۲)$، که در آن α حقیقی باشد. دراین صورت F در $\pm i\alpha$ دارای قطبهای ساده است. چون

$$z/(z^۲ + \alpha^۲) = \frac{۱}{۲}[۱/(z + i\alpha) + ۱/(z - i\alpha)],$$

نتیجه می‌شود که

$$\operatorname*{Res}_{z=i\alpha}\{e^{zt}F(z)\}=\frac{۱}{۲}e^{i\alpha t},\ \operatorname*{Res}_{z=-i\alpha}\{e^{zt}F(t)\}=\frac{۱}{۲}e^{-i\alpha t}.$$

بنابراین، مقدار حد مذکور در (۵۵) مساوی $۲\pi i\cos\alpha t$ است. از تمرین ۳۸.۱۱ می‌بینیم که تابع f، که بر $]۰, +\infty[$ پیوسته است و تبدیل لاپلاس آن مساوی F است، با رابطهٔ $f(t)=\cos\alpha t$ تعریف می‌شود.

۲۷.۱۶ نگاشتهای همشکلی

فرض کنیم تابع تحلیلی f دو خط متقاطع در نقطهٔ c را به دو خم متقاطع در $f(c)$ بنگارد. دراین بخش نشان می‌دهیم کــه اگر $f'(c)\neq ۰$، زاویهٔ بین خطهای مماس براین دو خم مساوی زاویهٔ بین دو خط متقاطع مفروض است.

این خاصیت از دید هندسی بــرای تابعهای خطی واضح است. مثلاً، فرض کنیم که $f(z)=z+b$. این نمایش انتقالی است کــه هر خط را به‌موازات خود حرکت می‌دهد، و دراین صورت واضح است که زاویه‌ها محفوظ خواهند ماند. مثال دیگر $f(z)=az$، کــه درآن $a\neq ۰$. هرگاه $|a|=۱$، آنگاه $a=e^{i\alpha}$ و این یک دوران حول مبدأ با زاویهٔ α را نشان می‌دهــد. هــرگــاه $|a|\neq ۱$، آنگــاه $a=Re^{i\alpha}$ و f ترکیبی است از یک دوران با یک انبساط (اگر $R>۱$)، یا با یک انقباض (اگر $R<۱$). دراین جا نیز زاویه‌ها حفظ می‌شوند. یک تابع خطی کلی $f(z)=az+b$ با $a\neq ۰$ ترکیبی از این نوعها است، و درنتیجه بــرای این نیز زاویه‌ها تغییر نمی‌کنند.

درحالت کلی، مشتقپذیری در c به‌معنی وجود تقریبی است خطی در نـزدیکی c، یعنی

$$f(z)=f(c)+f'(c)(z-c)+o(z-c) \text{ و اگر } f'(c)\neq ۰$$

می‌توان انتظار داشت که زاویه‌ها در نزدیکی c محفوظ بمانند.

برای صوری کردن این مفهومها، فرض می‌کنیم کــه دو گــذر هموار قطعه‌وار $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، بترتیب، دارای نمودارهای $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ باشند، و این نمودارهـا یکدیگر را در c قطع کنند. همچنین $\gamma_۱$ بر بازه‌ای حاوی $t_۱$، و $\gamma_۲$ بر بازه‌ای حاوی $t_۲$ یک به‌یک بــاشد، کــه در آنهــا $\gamma_۱(t_۱)=\gamma_۲(t_۲)=c$. بعلاوه $\gamma_۱'(t_۱)\neq ۰$ و $\gamma_۲'(t_۲)\neq ۰$. تفاضل

$$\arg[\gamma_۲'(t_۲)]-\arg[\gamma_۱'(t_۱)]$$

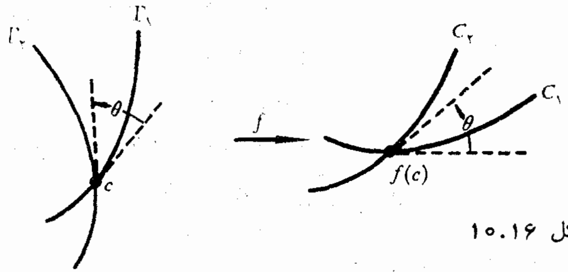
را زاویهٔ از $\Gamma_{۱}$ تا $\Gamma_{۲}$ در c می‌نامیم.

حال فرض می‌کنیم که $f'(c) \neq ۰$. دراین صورت (بنا بر قضیهٔ ۴.۱۳) گرده‌ای چون $B(c)$ هست که f بر آن یک به‌یک است. از این روی، تابعهای مرکب

$$w_{۱}(t) = f[\gamma_{۱}(t)] \quad \text{و} \quad w_{۲}(t) = f[\gamma_{۲}(t)]،$$

بترتیب، نزدیک $t_{۱}$ و $t_{۲}$ یک‌به‌یک موضعی هستند، و کمانهای $C_{۱}$ و $C_{۲}$ متقاطع در $f(c)$ را توصیف می‌کنند. (ر.ک. شکل ۱۰.۱۶.) بنا بر قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$w_{۱}'(t_{۱}) = f'(c)\,\gamma_{۱}'(t_{۱}) \neq ۰ \quad \text{و} \quad w_{۲}'(t_{۲}) = f'(c)\,\gamma_{۲}'(t_{۲}) \neq ۰.$$



شکل ۱۰.۱۶

پس، بنا بر قضیهٔ ۱.۴۸، عددهای صحیحی مانند $n_{۱}$ و $n_{۲}$ وجود دارند بقسمی که

$$\arg[w_{۱}'(t_{۱})] = \arg[f'(c)] + \arg[\gamma_{۱}'(t_{۱})] + ۲\pi n_{۱},$$
$$\arg[w_{۲}'(t_{۲})] = \arg[f'(c)] + \arg[\gamma_{۲}'(t_{۲})] + ۲\pi n_{۲},$$

پس زاویهٔ از $C_{۱}$ تا $C_{۲}$ در $f(c)$ مساوی زاویهٔ از $\Gamma_{۱}$ تا $\Gamma_{۲}$ در c بعلاوهٔ مضرب صحیحی از ۲π است. به این دلیل می‌گوئیم که f زاویه‌ها را در c حفظ می‌کند، و نیز یک چنین تابعی را می‌گوئیم در c همشکلی است.

در نقطه‌هائی که مشتق صفر باشد زاویه‌ها محفوظ نمی‌مانند. مثلاً، اگر $f(z) = z^{۲}$، خط مستقیمی که بر مبدأ می‌گذرد وبا محور حقیقی زاویهٔ α می‌سازد، با f روی خط مستقیمی که با محور حقیقی زاویهٔ ۲α می‌سازد نگاشته می‌شود. در حالت کلی، وقتی که $f'(c) = ۰$، بسط تیلور f به شکل

$$f(z) - f(c) = (z - c)^{k}\,[a_{k} + a_{k+۱}(z - c) + \cdots]$$

است،که درآن $k \geqslant ۲$. با استفاده ازاین معادله، بآسانی می‌توان دید که زاویه‌های بین خمهای متقاطع در c اگر با f نگاشته شوند در سازهٔ k ضرب می‌شوند.

یک دسته از نگاشتهـای مهم همشکلی تبدیلهای مبیوس[1] هستند. این تبدیلها بدین صورت تعریف می‌شوند: اگر a، b، c، و d چهار عدد مختلط باشند بقسمی‌که $ad - bc \neq 0$، به‌ازای هر z که $cz + d \neq 0$، تعریف می‌کنیم

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{۵۷}$$

مناسب آن است که، با قرار دادن $f(-d/c) = \infty$ و $f(\infty) = a/c$، f را همه جا بر $\mathbf{C}^*$، یعنی صفحهٔ وسعت یافته، تعریف کـرد. (اگر $c = 0$، معادلهٔ واحـد $f(\infty) = \infty$ جای دو معادلهٔ اخیر را می‌گیرد.) حال (۵۷) را می‌توان بـرای z برحسب $f(z)$ حل کرد و نتیجه گرفت که

$$z = \frac{-d\,f(z) + b}{c\,f(z) - a}.$$

یعنی تابع معکوس f^{-1} وجود دارد وبا رابطهٔ

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a},$$

با این معنی کـه $f^{-1}(a/c) = \infty$ و $f^{-1}(\infty) = -d/c$، مشخص می‌شود. بنابراین ، تبدیلهـای مبیوس نگاشتهـائی یک‌به‌یک از $\mathbf{C}^*$ روی خودش می باشند. همچنین این تبدیلها درهر نقطهٔ متناهی $z \neq -d/c$ همشکلی هستند، زیرا

$$f'(z) = \frac{bc - ad}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

یکی از مهمترین خاصیتهای این نگاشتها این است که آنها دایره‌ها را روی دایره‌ها می‌نگارند (این حکم شامل خطوط مستقیم که حالتهای خاصی از دایره‌ها هستند نیز هست). اثبات این مطلب در تمرین ۴۶.۱۶ آمـده است. خاصیتهای دیگر تبدیلهای مبیوس در تمرینهای نزدیک آخر فصل توصیف شده‌اند.

تمرین

انتگرالگیری مختلط؛ دستورهای انتگرال کشی

۱.۱۶ فرض کنید γ یک گذر هموار قطعه‌وار با قلمرو $[a, b]$ و نمودار Γ باشد. همچنین فرض کنید که انتگرال $\int_\gamma f$ وجود داشته باشد. بعـلاوه S یک نـاحیهٔ باز

1. Moebius

حاوی Γ، و g تابعی باشد که به‌ازای هر z بر Γ، $g'(z)$ وجود داشته ومساوی $f(z)$ باشد. ثابت کنید که

$\int_\gamma f = \int_\gamma g' = g(B) - g(A)$ ، که درآن $A = \gamma(a)$ و $B = \gamma(b)$.

خصوصاً، هر گاه γ یک مدار باشد،آنگاه $A = B$ و انتگرال مساوی ۰ است.

راهنمائی. قضیهٔ ۳۴.۷ را درهر بازهٔ پیوستگی γ' بکار برید.

۲.۱۶ فرض کنید γ یک گذر مستدیر جهت دار با جهت مثبت به مرکز ۰ و شعاع ۲ باشد. بااستفاده ازیکی از دستورهای انتگرال کشی، صحت هریک از رابطه‌های زیرین را تحقیق کنید.

آ) $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = ۲\pi i$.

ب) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^۳} dz = \pi i$.

ج) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^۴} dz = \frac{\pi i}{۳}$.

د) $\int_\gamma \frac{e^z}{z-۱} dz = ۲\pi i e$.

ه) $\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-۱)} dz = ۲\pi i(e-۱)$.

و) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^۲(z-۱)} dz = ۲\pi i(e-۲)$.

۳.۱۶ فرض کنید که $f = u + iv$ بر گرده‌ای چون $B(a\,;R)$ تحلیلی باشد. اگر $۰ < r < R$، ثابت کنید که

$$f'(a) = \frac{۱}{\pi r}\int_۰^{۲\pi} u(a + re^{i\theta})\,e^{-i\theta}\,d\theta.$$

۴.۱۶ آ) صورت قویتر قضیهٔ لیوویل را که در زیر بیان شده است ثابت کنید:

هرگاه f یک تابع تمام باشد بقسمی که $\lim_{z\to\infty} |f(z)/z| = ۰$، آنگاه f پایا است.

ب) دربارهٔ یک تابع تمام مانند f که به‌ازای هر z مختلط در نامساوی

$|f(z)| \leqslant M\,|z|^c$، که درآن $c > ۰$، صدق کند چه می‌توان نتیجه گرفت؟

۵.۱۶ فرض کنید f بر $B(۰\,;R)$ تحلیلی باشد. همچنین γ دایره‌ای جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز ۰ وشعاع r را نشان دهد، که در آن $۰ < r < R$. اگر a در داخل γ قرار داشته باشد، نشان دهید که

$$f(a) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma f(z)\left\{\frac{۱}{z-a} - \frac{۱}{z - r^۲/\bar{a}}\right\}dz.$$

اگر $a = Ae^{i\alpha}$، نشان دهید که این رابطه به دستور

$$f(a) = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} \frac{(r^۲ - A^۲)\,f(re^{i\theta})}{r^۲ - ۲rA\cos(\alpha-\theta) + A^۲}\,d\theta$$

تحویل می‌شود. با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی این معادله عبارتی بدست می‌آید که به دستور انتگرال پواسن معروف است.

۶.۱۶ فرض کنید f بر بست گردهٔ $B(۰\,;۱)$ تحلیلی باشد. اگر $|a| < ۱$، نشان دهید که

$$(۱ - |a|^۲)\,f(a) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma f(z)\,\frac{۱ - z\bar{a}}{z-a}\,dz,$$

که درآن γ دایرهٔ یکه به مرکز ۰ است و جهت‌دار با جهت مثبت می‌باشد. نامساوی زیر را نتیجه بگیرید:

$$(۱ - |a|^۲)\,|f(a)| \leqslant \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} |f(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

۷.۱۶ اگر $|z| < ۳/۲$، قرار دهید $f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^n z^n/۳^n$؛ اگر $|z| > ۱/۲$، قراردهید $g(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} (۲z)^{-n}$. فرض‌کنید γ یک گذر مستدیر جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز ۰ وشعاع ۱ باشد، و به‌ازای $|a| \neq ۱$، $h(a)$ را به صورت

$$h(a) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z-a} + \frac{a^۲ g(z)}{z^۲ - az}\right)dz$$

تعریف کنید. ثابت کنید که

$$h(a)=\begin{cases}\dfrac{3}{3-2a}, & \text{اگر } |a|<1\\[2mm] \dfrac{2a^2}{1-2a}, & \text{اگر } |a|>1\end{cases}$$

بسطهای تیلور

۸.۱۶ تابع f را بر گردهٔ $B(0\,;\,1)$ با معادلهٔ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تعریف کنید. بسط تیلور f را حول نقطهٔ $a=1/2$ و همچنین حول نقطهٔ $a=-1/2$ بیابید. در هرحالت شعاع همگرائی را مشخص کنید.

۹.۱۶ فرض کنید که f بسط تیلور $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^n$ را داشته باشد، که در $B(0\,;\,R)$ معتبر باشد. همچنین فرض کنید که

$$g(z)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(ze^{2\pi ik/p}).$$

ثابت کنید که بسط تیلور g ازهر جملهٔ pام در بسط f تشکیل شده است. یعنی، اگر $z\in B(0\,;\,R)$، داریم

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a(pn)z^{pn}.$$

۱۰.۱۶ فرض کنید که f بسط تیلور $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ را داشته باشد، که در $B(0\,;\,R)$ معتبر باشد. قرار دهید $s_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. اگر $0<r<R$ و $|z|<r$، نشان دهید که

$$s_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\;\frac{w^{n+1}-z^{n+1}}{w-z}\,dw,$$

که درآن γ دایره‌ای است جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز 0 وشعاع r.

۱۱.۱۶ دو بسط تیلور $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$، که بترتیب به‌ازای $|z|\leqslant R_1$ و $|z|<R_2$ معتبرند، داده شده‌اند. ثابت کنید که اگر $|z|<R_1R_2$،

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w}\,g\!\left(\frac{z}{w}\right)dw=\sum_{n=0}^{\infty} a_nb_nz^n,$$

که درآن γ دایره‌ای است جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز 0 و شعاع R_1.

۱۲.۱۶ فرض کنید که f بسط تیلور $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ را داشته

باشد، که در گوی $B(a\,;R)$ معتبر باشد.

آ) اگر $0 \leqslant r < R$، اتحاد پارسوال را نتیجه بگیرید:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

ب) اگر $M(r)$ ماکزیمم $|f|$ بر دایرهٔ $|z-a| = r$ باشد، نامساوی $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant M(r)^2$ را با استفاده از (آ) نتیجه بگیرید.

ج) با استفاده از (ب) برهان دیگری از اصل کالبد ماکزیمم موضعی (قضیهٔ ۲۷.۱۶) را بدست آورید.

۱۳.۱۶ لم شوارتز را ثابت کنید: فرض کنید f بر گردهٔ $B(0\,;1)$ تحلیلی باشد، همچنین $f(0) = 0$، و اگر $|z| < 1$، $|f(z)| \leqslant 1$. دراین صورت

$$|f'(0)| \leqslant 1 \text{، و اگر } |z| < 1 \text{، } |f(z)| \leqslant |z|.$$

هرگاه $|f'(0)| = 1$ یا، دست کم بهازای یک مقدار z_0 در $B'(0\,;1)$، $|f(z_0)| = |z_0|$، آنگاه $f(z) = e^{i\alpha} z$، که در آن α عددی است حقیقی.

راهنمائی. فرض کنید که $g(0) = f'(0)$، و اگر $z \neq 0$، $g(z) = f(z)/z$. حال قضیهٔ کالبد ماکزیمم را درمورد g بکار برید.

بسطهای لوران، نقطههای استثنائی، باقیماندهها

۱۴.۱۶ فرض کنید که f و g برناحیهٔ باز S تحلیلی باشند. همچنین γ یک مدار ژردان با نمودار Γ باشد بقسمی که Γ و ناحیهٔ داخلی آن در S قرار گیرند. فرض کنید بهازای هر z بر Γ، $|g(z)| < |f(z)|$.

آ) نشان دهید که

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

راهنمائی. قرار دهید $m = \inf\{|f(z)| - |g(z)|\,|\, z\in\Gamma\}$. در این صورت $m > 0$، و درنتیجه بهازای هر t در $[0, 1]$ و هر z بر Γ،

$$|f(z)+tg(z)| \geqslant m > 0.$$

حال اگر $0 \leqslant t \leqslant 1$، قرار میدهیم

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\, dz.$$

دراین صورت φ بر $[0, 1]$ پیوسته، و درنتیجه پـایـا است. پس

$$\varphi(0) = \varphi(1).$$

ب) با استفاده از (آ) ثابت کنید کـه تعداد صفرهای f و $f + g$ در داخل Γ برابرند (قضیهٔ روشه[1]).

۱۵.۱۶ فرض کنید p یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، مثلاً

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

که در آن $a_n \neq 0$. با فرض $f(z) = a_n z^n$ و $g(z) = p(z) - f(z)$ در قضیهٔ روشه، ثابت کنید که p درست دارای n صفر در $\mathbf{C}$ می‌باشد.

۱۶.۱۶ فرض کنید f بر بست گردهٔ $B(0\,;1)$ تحلیلی باشد، و اگـر $|z| = 1$، $|f(z)| < 1$. نشان دهید که یک، و فقط یـک، نقطه مانند z_0 در $B(0\,;1)$ هست بقسمی که $f(z_0) = z_0$. راهنمائی. قضیهٔ روشه را بکار برید.

۱۷.۱۶ فرض کنید $p_n(z)$ مجموع جزئی nام بسط تیلور $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ را نشان دهد. با استفاده از قضیهٔ روشه (یا به روشی دیگر)، ثابت کنید کـه بەازای هر $r > 0$، عددی مانند N (وابسته به r) وجود دارد بقسمی که اگر $n \geqslant N$، بەازای هر z در $B(0\,;r)$ ، $p_n(z) \neq 0$.

۱۸.۱۶ اگر $a > e$، تعداد صفرهای تابع $f(z) = e^z - az^n$ را کـه در داخل دایرهٔ $|z| = 1$ واقعند پیدا کنید.

۱۹.۱۶ تابعی را مثال بزنید که همهٔ خواص زیرین را داشته باشد، یا توضیح دهید که چرا چنین تابعی نمی‌تواند وجود داشته باشد: f همه جا در $\mathbf{C}$ تحلیلی باشد، جز برای یک قطب از مـرتبهٔ ۲ در نقطهٔ ۰ و قطبهای ساده در i و $-i$؛ بەازای هـر z، $f(z) = f(-z)$؛ $f(1) = 1$؛ تـابـع $g(z) = f(1/z)$ در $z = 0$ دارای صفر از مرتبهٔ ۲ باشد؛ و $\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = 2i$.

۲۰.۱۶ نشان دهید کـه هر یک از بسطهای لوران زیرین در ناحیهٔ نشان‌داده شده معتبر است:

آ) اگر $1 < |z| < 2$،

---

1. Rouche

$$\frac{1}{(z-1)(2-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

ب) اگر $|z|>2$،

$$\frac{1}{(z-1)(2-z)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-2^{n-1}}{z^n}.$$

۲۱.۱۶ به‌ازای هر t ثابت در C، فرض کنید که $J_n(t)$ ضریب z^n در بسط لوران

$$e^{(z-1/z)t/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(t)z^n$$

باشد. نشان دهید که به‌ازای $n\geqslant 0$،

$$J_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\,(t\sin\theta-n\theta)\,d\theta$$

و $J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)$. بسط به صورت رشتهٔ توانی زیرین رانتیجه بگیرید:

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{2}t)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}(n\geqslant 0).$$

تابع J_n راتابع بسل از مرتبهٔ n می‌نامند.

۲۲.۱۶ قضیهٔ ریمان را ثابت کنید: هرگاه z_0 یک نقطهٔ استثنائی تنهای f باشد و $|f|$ بر یکی از همسایگیهای سفته چون $B'(z_0)$ کراندار باشد، آنگاه z_0 یک نقطهٔ استثنائی دفع شدنی است.

راهنمائی. انتگرالهای ضرایب a_n در بسط لوران f را تخمین بزنید و نشان دهید که به‌ازای هر $n<0$، $a_n=0$.

۲۳.۱۶ قضیهٔ کازوراتی[1] ــ وایراشتراس را ثابت کنید: فرض کنید که z_0 یک نقطهٔ استثنائی لازم f، و c یک عدد مختلط دلخواه باشد. دراین صورت، به‌ازای‌هر $\varepsilon>0$ و هر گردهٔ $B(z_0)$، نقطه‌ای مانند z در $B(z_0)$ باشد بقسمی که

$$|f(z)-c|<\varepsilon.$$

راهنمائی. فرض کنید که قضیه درست نباشد. با فرض $g(z)=1/[f(z)-c]$ و بکار بردن تمرین ۲۲.۱۶ در مورد آن، تناقضی بدست آورید.

1. Casorati

۲۴.۱۶ نقطه در بی‌نهایت. تابع f را در ∞ تحلیلی گوئیم در صورتی که تابع g تعریف شده با معادلهٔ $g(z)=f(1/z)$ در مبدأ تحلیلی باشد. بهمین نحو، گوئیم f یک صفر، یک قطب، یک نقطهٔ استثنائی رفع شدنی، یا یک نقطهٔ استثنائی لازم در ∞ دارد درصورتی که g یک صفر، یک قطب، و مانند اینها، در 0 داشته باشد. بنا بر قضیهٔ لیوویل، یک تابع که همه جا در $\mathbf{C}^*$ تحلیلی است باید پایا باشد. ثابت کنید که

آ) f وقتی، وفقط وقتی، یک چندجمله‌ای است که تنها نقطهٔ استثنائی f در $\mathbf{C}^*$ یک قطب در ∞ باشد، که در این حالت مرتبهٔ قطب مساوی درجهٔ چندجمله‌ای خواهد بود.

ب) f وقتی، و فقط وقتی، یک تابع گویا است که هیچ نقطهٔ استثنائی بجز قطبها در $\mathbf{C}^*$ نداشته باشد.

۲۵.۱۶ روشهای «مختصر» زیر را برای محاسبهٔ باقیمانده‌ها نتیجه بگیرید:

آ) هرگاه a یک قطب مرتبهٔ اول برای f باشد، آنگاه

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

ب) هرگاه a یک قطب مرتبهٔ دو برای f باشد، آنگاه

$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=g'(a)$، که در آن $g(z)=(z-a)^2 f(z)$.

ج) فرض کنید که f و g هر دو در a تحلیلی باشند، $f(a)\neq 0$، و a یک صفر مرتبهٔ اول برای g باشد. نشان دهید که

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(a)}{g'(a)},\quad \operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f(z)}{[g(z)]^2}=\frac{f'(a)g'(a)-f(a)g''(a)}{[g'(a)]^3}.$$

د) هرگاه f و g مانند (ج) باشند، بجز آن که a یک صفر مرتبهٔ دوم برای g باشد، آنگاه

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{6f'(a)g''(a)-2f(a)g'''(a)}{3[g''(a)]^2}.$$

۲۶.۱۶ باقیمانده‌های هر یک از این تابعها را در قطبهای آن محاسبه کنید:

آ) $f(z)=\dfrac{ze^z}{z^2-1}$؛ ب) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$،

ج) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z\cos z}$ ، د) $f(z)=\dfrac{1}{1-e^z}$ ،

ه) $f(z)=\dfrac{1}{1-z^n}$ (n عدد صحیح مثبتی است).

۲۷.۱۶ اگر $\gamma(a;r)$ دایرهٔ جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع r باشد، نشان دهید که

آ) $$\int_{\gamma(0;4)}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}\,dz=6\pi i ،$$

ب) $$\int_{\gamma(0;2)}\frac{2z}{z^2+1}\,dz=4\pi i ،$$

ج) $$\int_{\gamma(0;2)}\frac{z^3}{z^4-1}\,dz=2\pi i ،$$

د) $$\int_{\gamma(2;1)}\frac{e^z}{(z-2)^2}\,dz=2\pi i e^2 .$$

انتگرالهای موجود در تمرینهای ۲۸.۱۶ تا ۳۵.۱۶ را به‌وسیلهٔ باقیمانده‌ها ارزیابی کنید.

۲۸.۱۶ اگر $0<b<a$ ، $$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(a+b\cos t)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}} .$$

۲۹.۱۶ اگر $a^2<1$ ، $$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t\,dt}{1-2a\cos t+a^2}=\frac{2\pi a^2}{1-a^2} .$$

۳۰.۱۶ اگر $0<a<1$ ، $$\int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos 3t)\,dt}{1-2a\cos t+a^2}=\frac{\pi(a^2-a+1)}{1-a} .$$

۳۱.۱۶ اگر $0<b<a$ ، $$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{a+b\cos t}=\frac{2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b^2} .$$

۳۲.۱۶ $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} .$$

۳۳.۱۶ $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^6}{(1+x^4)^2}\,dx=\frac{3\pi\sqrt{2}}{16} .$$

۳۴.۱۶ $\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^{۲}}{(x^{۲}+۴)^{۲}(x^{۲}+۹)}dx=\frac{\pi}{۲\circ\circ}$.

۳۵.۱۶ آ) $\int_{\circ}^{\infty}\frac{x}{۱+x^{۵}}dx=\frac{\pi}{۵}/\sin\frac{۲\pi}{۵}$.

راهنمائی. از $z/(۱+z^{۵})$ در اطراف کرانهٔ قطاع مستدیر

$$S=\{re^{i\theta}\mid \circ\leqslant r\leqslant R,\ \ \circ\leqslant\theta\leqslant ۲\pi/۵\}$$

انتگرال بگیرید، وسپس فرض کنید که $R\to\infty$.

ب) اگر m و n عددهائی صحیح باشند و $\circ<m<n$،

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^{۲m}}{۱+x^{۲n}}dx=\frac{\pi}{۲n}/\sin\left(\frac{۲m+۱}{۲n}\pi\right).$$

۳۶.۱۶ اگر f به‌صورت خارج قسمت دو چندجمله‌ای باشد، مثلاً $f=P/Q$، و درآن درجهٔ Q دست کم دو تا از درجهٔ P بیشتر باشد، ثابت کنید که دستور (۳۸) برقرار خواهد بود.

۳۷.۱۶ اگر $f(z)=e^{imz}P(z)/Q(z)$، که در آن $m>\circ$، و P و Q چندجمله‌ایهائی باشند که درجهٔ Q دست کم یکی از درجهٔ P بیشتر باشد، ثابت کنید که دستور (۳۸) برقرار خواهد بود. این، امکان ارزیابی انتگرالهائی به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{imx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

را به‌وسیلهٔ روش توصیف شده در قضیهٔ ۳۷.۱۶ بدست می‌دهد.

۳۸.۱۶ با استفاده از روشی‌که درتمرین ۳۷.۱۶ پیشنهاد شده است این انتگرالها را ارزیابی کنید:

آ) اگر $m\geqslant\circ$ و $a>\circ$،

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin mx}{x(a^{۲}+x^{۲})}dx=\frac{\pi}{۲a^{۲}}(۱-e^{-am}).$$

ب) اگر $m>\circ$ و $a>\circ$،

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^{۴}+a^{۴}}dx=\frac{\pi}{۲a^{۳}}e^{-ma/\sqrt{۲}}\sin\left(\frac{ma}{\sqrt{۲}}+\frac{\pi}{۴}\right).$$

۳۹.۱۶ فرض کنید که $w=e^{۲\pi i/۳}$ و γ یک دایرهٔ جهت‌دار با جهت مثبت باشد

که نمودار آن از ۱، w، یا $w^۲$ نگذرد. (عددهای ۱، w، $w^۲$ ریشه‌های سوم یک هستند.) ثابت کنید که انتگرال

$$\int_\gamma \frac{(z+۱)}{z^۳-۱}\,dz$$

مساوی $۲\pi i(m+nw)/۳$ است، که در آن m و n عددهائی صحیح می‌باشند. مقدارهای ممکن m و n را معین کنید و چگونگی بستگی آنها را با γ توصیف نمائید.

۴۰.۱۶ فرض‌کنید γ دایره‌ای جهت‌دار با جهت‌مثبت به مرکز ۰ و شعاع کوچکتر از ۲π باشد. اگر a عددی مختلط، و n عددی صحیح باشد، قرار دهید

$$I(n,a)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{z^{n-۱}e^{az}}{۱-e^z}\,dz.$$

ثابت کنید که

$$I(۰,a)=\frac{۱}{۲}-a\text{،}\quad I(۱,a)=-۱\text{، و اگر } n>۱\text{،}\quad I(n,a)=۰.$$

وقتی که $n\geqslant ۱$، $I(-n,a)$ را برحسب چندجمله‌ایهای برنولی محاسبه کنید (ر. ک. تمرین ۳۸.۹).

۴۱.۱۶ در این تمرین قسمتی از جزئیات برهان قضیهٔ ۳۸.۱۶ مورد حاجت است. فرض کنید که

$$g(z)=\sum_{r=۰}^{n-۱} e^{\pi i a(z+r)^۲/n} \quad \text{و}\quad f(z)=g(z)/(e^{۲\pi iz}-۱)\text{،}$$

که در آن a و n عددهای صحیح مثبتی باشند و na زوج باشد. ثابت کنید که:

آ) $g(z+۱)-g(z)=e^{\pi i a z^۲/n}(e^{۲\pi iz}-۱)\sum_{m=۰}^{a-۱} e^{۲\pi imz}$.

ب) $\operatorname{Res}_{z=۰} f(z)=g(۰)/(۲\pi i)$.

ج) قسمت‌حقیقی $i(t+Re^{\pi i/۴}+r)^۲$ مساوی $-(\sqrt{۲}tR+R^۲+\sqrt{۲}rR)$ است.

تابعهای تحلیلی یک‌به‌یک

۴۲.۱۶ فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{C}$، و f بر S تحلیلی و یک‌به‌یک باشد. ثابت کنید که:

آ) به‌ازای هر z در S، $f'(z) \neq 0$. (از این روی f در هر نقطهٔ S همشکلی است.)

ب) هر گاه g معکوس f باشد، آنگاه g بر $f(S)$ تحلیلی است و اگر $w \in f(S)$، $g'(w) = 1/f'(g(w))$.

۴۳.۱۶ فرض کنید که $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ بر $\mathbf{C}$ تحلیلی و یک‌به‌یک باشد. ثابت کنید که $f(z) = az+b$، که در آن $a \neq 0$. اگر f بر $\mathbf{C}^*$ یک‌به‌یک بوده بر $\mathbf{C}^*$ بجز احتمالاً در تعدادی متناهی قطب تحلیلی باشد، چه می‌توان نتیجه گرفت؟

۴۴.۱۶ اگر f و g تبدیلهای مبیوس باشند، نشان دهید که ترکیب $f \circ g$ نیز یک تبدیل مبیوس است.

۴۵.۱۶ از نظرهندسی توصیف‌کنید که وقتی نقطهٔ z به‌وسیلهٔ یکی از تبدیلهای مبیوس خاص زیرین به $f(z)$ تبدیل‌می‌شود چه روی می‌دهد:

آ) $f(z) = z + b$ (انتقال).

ب) $f(z) = az$، که در آن $a > 0$ (انبساط یا انقباض).

ج) $f(z) = e^{i\alpha}z$، که در آن α حقیقی است (دوران).

د) $f(z) = 1/z$ (انعکاس).

۴۶.۱۶ اگر $c \neq 0$، داریم

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}.$$

از این روی هر تبدیل مبیوس را می‌توان به صورت ترکیبی از حالتهای خاص که در تمرین ۴۵.۱۶ توصیف شده‌اند درآورد. با استفاده از این مطلب نشان‌دهیدکه تبدیلهای مبیوس هر دایره را به یک دایره تبدیل می‌کنند (در این‌جا خطهای راست حالتهای خاص دایره در نظر گرفته می‌شوند.)

۴۷.۱۶ آ) نشان دهید که همهٔ تبدیلهای مبیوس را، که قسمت بالائی صفحه، یعنی $T = \{x + iy \mid y \geqslant 0\}$، را روی بست گردهٔ $B(0; 1)$ بنگارند، می‌توان به شکل $f(z) = e^{i\alpha}(z-a)/(z-\bar{a})$ بیان کرد، که در آن α حقیقی باشد و $a \in T$.

ب) نشان دهید که همواره می‌توان a و α را بقسمی اختیار کرد که هر سه

نقطهٔ مفروض محور حقیقی روی سه نقطهٔ مفروض دایرهٔ یکه نگاشته شوند.

۴۸.۱۶ همهٔ تبدیلهای مبیوس را که نیمهٔ راست صفحه، یعنی

$$S = \{x + iy \mid x \geqslant 0\}$$

را روی بست $B(0\,;1)$ نقش می‌کند بیابید.

۴۹.۱۶ همهٔ تبدیلهای مبیوس که بست $B(0\,;1)$ را روی خودش می‌نگارد بیابید.

۵۰.۱۶ نقطه‌های ثابت تبدیل مبیوس

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

عبارتند از نقطه‌هائی چون z که به‌ازای آنها $f(z) = z$. فرض کنید که

$$D = (d-a)^2 + 4bc.$$

آ) همهٔ نقطه‌های ثابت را برای حالت $c = 0$ بیابید.

ب) اگر $c \neq 0$ و $D \neq 0$، ثابت کنید که f درست ۲ نقطهٔ ثابت z_1 و z_2 دارد (هر دو متناهی هستند) و این دو در معادلهٔ زیرین صدق می‌کنند:

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = Re^{i\theta}\,\frac{z - z_1}{z - z_2},$$ که در آن $R > 0$ و θ حقیقی است.

ج) اگر $c \neq 0$ و $D = 0$، ثابت کنید که f درست یک نقطهٔ ثابت چون z_1 دارد که در معادلهٔ زیرین صدق می‌کند:

به‌ازای یک مقدار $C \neq 0$،
$$\frac{1}{f(z) - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + C.$$

د) اگر تبدیل مبیوس f مفروض باشد، نقشهای متوالی نقطهٔ مفروض w را بررسی کنید. یعنی، فرض کنید که

$$w_1 = f(w),\ w_2 = f(w_1),\ \ldots,\ w_n = f(w_{n-1}),\ \ldots,$$

و رفتار دنبالهٔ $\{w_n\}$ را مورد مطالعه قرار دهید. حالت خاصی را که a، b، c و d حقیقی هستند، و $ad - bc = 1$ در نظر بگیرید.

تمرینهای گوناگون

۵۱.۱۶ همهٔ عددهای مختلط z را که

$$z = \sum_{n=۲}^{\infty} \sum_{k=۱}^{n} e^{۲\pi ikz/n}$$

بیابید.

۵۲.۱۶ اگر $f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ یک تابع تمام باشد بقسمی که به‌ازای یک مقدار $M > ۰$ و یک مقدار $k > ۰$ و هر $r > ۰$، $|f(re^{i\theta})| \leqslant M e^{r^k}$، ثابت کنید که

$$\text{به‌ازای } n \geqslant ۱ \text{، } \quad |a_n| \leqslant \frac{Me^{n/k}}{(n/k)^{n/k}}.$$

۵۳.۱۶ فرض کنید که f بر یک همسایگی سفته چون $B'(۰; a)$ تحلیلی باشد. ثابت کنید که $\lim_{z \to ۰} f(z)$ وقتی، و فقط وقتی، وجود دارد (احتمالاً نامتناهی) که عدد صحیحی چون n و تابعی چون g که بر $B(۰ ; a)$ تحلیلی است باشند بقسمی که $g(۰) \neq ۰$، و در $B'(۰ ; a)$ داشته باشیم $f(z) = z^n g(z)$.

۵۴.۱۶ فرض کنید که $p(z) = \sum_{k=۰}^{n} a_k z^k$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n با ضریبهای حقیقی باشد که این ضریبها در نامساویهای

$$a_۰ > a_۱ > \cdots > a_{n-۱} > a_n > ۰$$

صدق کنند. ثابت کنید که $p(z) = ۰$ نامساوی $|z| > ۱$ را ایجاب می‌کند.

راهنمائی. $(۱ - z)\, p(z)$ را درنظر بگیرید.

۵۵.۱۶ گوئیم تابع f که بر گردهٔ $B(a ; r)$ تعریف شده است دارای یک صفر از مرتبهٔ نامتناهی در a است در صورتی که به‌ازای هر عدد صحیح $k > ۰$، تابعی چون g_k که در a تحلیلی است وجود داشته باشد بقسمی که $f(z) = (z - a)^k g_k(z)$ بر $B(a ; r)$ باشد. اگر f دارای یک صفر از مرتبهٔ نامتناهی در a باشد، ثابت کنید $f = ۰$ همه جا در $B(a ; r)$.

۵۶.۱۶ مطلوب است اثبات قضیهٔ مررا[1]: هرگاه f بر ناحیهٔ باز S در $\mathbf{C}$ پیوسته باشد، و به‌ازای هر مدار چند ضلعی γ در S، $\int_\gamma f = ۰$، آنگاه f بر S تحلیلی است.

1. Morera

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

16.1 Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, 2nd ed. McGraw-Hill, New-York, 1966.

16.2 Caratheodory, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, 2 vols. F. Steinhardt, translator. Chelsea, New York, 1954.

16.3 Estermann, T., *Complex Numbers and Functions*. Athlone Press, London, 1962.

16.4 Heins, M., *Complex Function Theory*. Academic Press, New York, 1968.

16.5 Heins, M., *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.

16.6 Knopp, K., *Theory of Functions*, 2 vols. F. Bagemihl, translator. Dover, New York, 1945.

16.7 Saks, S., and Zygmund, A., *Analytic Functions*, 2nd ed., E. J. Scott, translator. *Monografie Matematyczne* 28, Warsaw, 1965.

16.8 Sansone, G., and Gerretsen, J., *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*, 2 vols. P. Noordhoff, Gröningen, 1960.

16.9 Titchmarsh, E. C., *Theory of Functions*, 2nd ed. Oxford University Press, 1939.

فهرست علامتهای خاص

واژه نامه

فارسی به انگلیسی

ابرصفحه	hyperplane
اتحاد	identity
پارسوال	Parseval
جبری	algebraic
لاگرانژ	Lagrange
مثلثاتی	trigonometric
نظریهٔ مجموعه‌ای	set-theoretic
اجتماع	union
آرایش	arrangement
آرایش	array
مستطیلی	rectangular
ارتعاش	vibration
از بالا به . . . کراندار	bounded above by . . .
از بالا بی‌کران	unbounded above
از بالا کراندار	bounded above
از پائین کراندار	bounded below
از چپ پیوسته	continuous from the left
از راست پیوسته	continuous from the right
آزمون	test
آبل	Abel
M وایراشتراس	Weierstrass M
انتگرال	integral
تنلی-هابسن	Tonelli-Hobson

Dirichlet	دیریکله
Dini	دینی
root	ریشه
Jordan	ژردان
second derivative	مشتق دوم
comparison	مقایسه‌ای
limit comparison	مقایسه‌ای حدی
ratio	نسبت
disjoint	ازهم جدا
singularity	استثنائی
removable	رفع شدنی
essential	لازم
induction	استقرا
mathematical	ریاضی
scalar	اسکالر
intersection	اشتراک
terminology	اصطلاح
principle	اصل
of induction	استقرا
well-ordering	خوش‌ترتیبی
absolute maximum modulus	کالبد ماکزیمم مطلق
local maximum modulus	کالبد ماکزیمم موضعی
minimum modulus	کالبد مینیمم
axiom	اصل موضوع
of continuity	پیوستگی
completeness	تامیت
least upper bound	کوچکترین کران بالائی
axioms	اصلهای موضوع
order	ترتیب
field	میدان
partition	افراز
horizontal	افقی
extremum	اکسترمم
local	موضعی
aleph nought	الف صفر
direction	امتداد
horizontal	افقی

vertical	قائم
analysis	آنالیز
vector	برداری
mathematical	ریاضی
advanced	عالی
accumulation	انباشتگی
expansion, stretching	انبساط
ordered n-tuple	nتائی مرتب
translation	انتقال
integral	انتگرال
slobbovian	اسلوبووی
n-fold	nگونا
upper	بالائی
lower	پائینی
contour	پیرامنی
Gamma function	تابع گاما
multiple	چندگانه
complex line	خط مختلط
Dirichlet	دیریکله
Riemann	ریمان
Riemann-Stieltjes	ریمان-اشتیلیس
Fourier	فوریه
Lebesgue	لبگ
triple	مثلث
definite	معین
integrand	انتگرالده
multiple Riemann integral	انتگرال ریمان چندگانه
Riemann-integrable	انتگرال ریمان دارد
improper Riemann integral	انتگرال ریمان مجازی
integrator	انتگرالگیر
integration	انتگرالگیری
by parts	به طریقهٔ جزء به جزء
multiple Lebesgue integral	انتگرال لبگ چندگانه
measure	اندازه
n	n
n-dimensional	nبعدی
Jordan	ژردان

zero	صفر
Lebesgue	لبگ
n-measure zero	اندازهٔ n صفر
measurable	اندازه‌پذیر
nonmeasurable	اندازه ناپذیر
injective	انژکتیو
inversion, reflection	انعکاس
reflexive	انعکاسی
contraction	انقباض
prime	اول
first member	اولین عضو
O	اوی بزرگ
o	اوی کوچك
stationary	ایستا
infimum	اینفیمم
bounded variation	با تغییر کراندار
rectifiable	با درازای متناهی
nonrectifiable	با درازای نامتناهی
open	باز
interval	بازه
of integration	انتگرالگیری
open	باز
n-dimensional open	باز n بعدی
closed	بسته
n-dimensional closed	بستهٔ n بعدی
degenerate closed	بستهٔ تبه شده
time	زمان
compact	فشرده
component	مؤلف
infinite	نامتناهی
half-open	نیمباز
half-infinite	نیمه نامتناهی
of convergence	همگرائی
remainder, residue	باقیمانده
upper	بالائی
label	برچسب

relabel	برچسب مجدد
with respect to	برحسب
range	برد
vector	بردار
n-dimensional	n بعدی
with n components	با n مؤلفه
column	ستونی
zero	صفر
gradient	گرادیان
unit coordinate	مختصات یکه
unit	یکه
basis vectors	بردارهای پایه
cross section	برش متقاطع
is defined on the set . . .	برمجموعهٔ . . . تعریف شده است
onto	برو
exterior	برونی
greatest integer in x	بزرگترین عدد صحیح در x
largest member	بزرگترین عضو
greatest lower bound	بزرگترین کران پائینی
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم علیه مشترک
gcd(a, b)	بمعم(a, b)
closure	بست
expansion	بسط
decimal	اعشاری
power series	بهصورت رشتهٔ توانی
Laurent	لوران
plus infinity	بهعلاوهٔ بینهایت
belongs to the set . . .	به مجموعهٔ . . . تعلق دارد
infinity	بینهایت
lower	پائینی
line segment, segment	پاره خط
vertical	عمودی
constant	پایا
contraction	انقباض
Euler	اویلر
distributive	پخشپذیر

Gibbs' phenomenon — پدیدهٔ گیبس
parameter — پرما
covering — پوشش
    open — باز
    finite — متناهی
convolution — پیچش
span — پیما
continuity — پیوستگی
    uniform — یکشکل
continuous — پیوسته
    absolutely — مطلق
    uniformly — یکشکل

function — تابع
    measurable — اندازه‌پذیر
    nonmeasurable — اندازه ناپذیر
    of bounded variation — با تغییر کراندار
    upper — بالائی
    beta — بتا
    vector-valued — برداری
    Bernoulli — برنولی
    greatest-integer — بزرگترین عدد صحیح
    constant — پایا
    step — پله‌ای
    continuous — پیوسته
    uniformly continuous — پیوستهٔ یکشکل
    theta — تتا
    analytic — تحلیلی
    entire — تمام
    additive — جمعپذیر
    limit — حد
    real-valued — حقیقی
    linear — خطی
    piecewise linear — خطی قطعه‌وار
    arc-length — درازای کمان
    of two variables — دو متغیر
    two-valued — دو مقداری

Riemann zeta	زتای ریمان
increasing	صعودی
strictly increasing	صعودی اکید
implicit	ضمنی
bounded	کراندار
Riemann-integrable	که انتگرال ریمان دارد
Lebesgue-integrable	که انتگرال لبگ دارد
square-integrable	که مربعش انتگرالپذیر است
Gamma	گاما
rational	گویا
logarithmic	لگاریتمی
orthogonal	متعامد
periodic	متناوب
sum	مجموع
complex-valued	مختلط
composite	مرکب
differentiable	مشتقپذیر
continuously differentiable	مشتقپذیر پیوسته
characteristic	مشخص کننده
inverse	معکوس
local inverse	معکوس موضعی
nonnegative	نامنفی
decreasing	نزولی
strictly decreasing	نزولی اکید
exponential	نمائی
real exponential	نمائی حقیقی
complex exponential	نمائی مختلط
wronskian	ورونسکی
identity	همانی
homogeneous	همگن
one-to-one	یك به یك
of one real variable	یك متغیر حقیقی
of a complex variable	یك متغیر مختلط
monotonic	یکنوا
strictly monotonic	یکنوای اکید
complete	تام
completeness	تام بودن

completeness	تامیت
inverse tangent	تانژانت معکوس
transform, transformation	تبدیل
integral	انتگرالی
linear	خطی
Fourier sine	سینوسی فوریه
exponential Fouier	فوریهٔ نمائی
Fourier cosine	کسینوسی فوریه
Laplace	لاپلاس
Moebius	مبیوس
coordinate	مختصات
elementary	مقدماتی
Mellin	ملین
nonsingular	نااستثنائی
degenerate	تبه شده
rearrangement	تجدید آرایش
partial-fraction decomposition	تجزیه به کسرهای جزئی
restriction	تحدید
reduction	تحویل
estimate	تخمین
condensation	تراکم
order, ordering	ترتیب
order-preserving	ترتیب را حفظ می‌کند
pseudo-ordering	ترتیبنما
linear combination	ترکیب خطی
projection	تصویر
stereographic	جسمنما
refinement	تظریف
commutative	تعویضپذیر
change	تغییر
of parameter	پرما
of variable	متغیر
variation	تغییر
total	کل
positive	مثبت
negative	منفی
difference	تفاضل

subtraction	تفریق
symmetry	تقارن
symmetric	تقارنی
approximation	تقریب
almost everywhere	تقریباً همه جا
division	تقسیم
multiplier	تکثیر کن
nth iterate	تکرار nام
entire	تمام
correspondence	تناظر
one-to-one	یك به یك
isolation	تنهائی
power	توان
n th	nام
integral	صحیح
complex	مختلط
point set topology	توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای
extension	توسیع
empty	تهی
fixed	ثابت
substitution	جانشانی
algebra	جبر
linear	خطی
set	مجموعه‌ای
algebraic	جبری
separable	جدائی‌پذیر
pair	جفت
ordered	مرتب
addition	جمع
additive	جمعپذیر
countably	شمارشپذیر
finitely	متناهی
term	جمله
nth	nام
remainder	باقیمانده

constant	پایا
error	نمایندهٔ خطا
direction	جهت
orientation	جهت
reversing	برگردان
preserving	نگهدار
oriented	جهت‌دار
positively	با جهت مثبت
negatively	با جهت منفی
jump	جهش
lefthand	دست چپی
righthand	دست راستی
adherent	چسبیده
dense	چگال
polynomial	چندجمله‌ای
linear	خطی
quadratic	درجهٔ دوم
Legendre	لژاندر
polygon	چندضلعی
inscribed	محاط شده
polygonally connected	چندضلعی وار همبند
product	حاصل ضرب
Euler	اویلر
partial	جزئی
nth partial	جزئی nام
inner	داخلی
cartesian	دکارتی
Cauchy	کشی
infinite	نامتناهی
dot	نقطه‌ای
divergent	واگرا
convergent	همگرا
volume	حجم
generalized	تعمیم یافته
limit	حد

inferior	اسفل
superior	اعلا
upper	بالائی
symmetric	تقارنی
lefthand	دست چپی
righthand	دست راستی
double	مضاعف
iterated	مکرر
limits of integration	حدهای انتگرالگیری
arithmetic	حساب
residue calculus	حساب باقیمانده
differential calculus	حساب دیفرانسیل
multivariable	چند متغیره
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
proper	حقیقی
annulus	حلقهٔ دایره
quotient	خارج قسمت
difference	تفاضلی
property	خاصیت
Archimedean	ارشمیدسی
continuity	پیوستگی
approximation	تقریب
topological	توپولوژیك
additive	جمعپذیری
linear	خطی
global	کلی
sign-preserving	محفوظ ماندن علامت
comparison	مقایسه‌ای
local	موضعی
line	خط
of symmetry	تقارن
real	حقیقی
error	خطا
linearity	خطی
piecewise linear	خطی قطعه وار
curve	خم

rectifiable	با درازای متناهی
nonrectifiable	با درازای نامتناهی
simple closed	بستهٔ ساده
Jordan	ژردان
space-filling	فضا پرکن
described by . . .	که به وسیلهٔ . . . توصیف می‌شود
piecewise smooth	هموار قطعه‌وار
circle	دایره
positively oriented	جهت‌دار با جهت مثبت
unit	یکه
determinant	دترمینان
jacobian	ژاکوبی
length	درازا
arc	کمان
degree of freedom	درجهٔ آزادی
quadratic	درجهٔ دوم
interior	درون
system	دستگاه
binary	عددها در پایهٔ دو
real number	عددهای حقیقی
extended real number	عددهای حقیقی وسعت یافته
complex number	عددهای مختلط
extended complex number	عددهای مختلط وسعت یافته
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد بهنجار
formula	دستور
Poisson's integral	انتگرال پواسن
Cauchy's integral	انتگرال کشی
recursion	بازگشتی
Parseval	پارسوال
convolution	پیچش
transformation	تبدیل
reduction	تحویل
Taylor	تیلور
Euler's summation	جمعبندی اویلر
Poisson's summation	جمعبندی پواسن

partial summation	جمعبندی جزئی
De Moivre	دموآور
Leibnitz	لایب نیتز
inversion	معکوس کردن
collection	دسته
countable	شمارشپذیر
finite	متناهی
infinite	نامتناهی
Kronecker delta	دلتای کرونکر
sequence	دنباله
unbounded	بی‌کران
of functions	توابع
real-valued	حقیقی
increasing	صعودی
multiplicative	ضربپذیر
completely multiplicative	ضربپذیر تام
bounded	کراندار
uniformly bounded	کراندار یکشکل
Cauchy	کشی
finite	متناهی
complex-valued	مختلط
double	مضاعف
infinite	نامتناهی
decreasing	نزولی
divergent	واگرا
convergent	همگرا
boundedly convergent	همگرای کراندار
pointwise convergent	همگرای نقطه‌وار
bounded away from zero	دور از صفر کراندار
rotation	دوران
period	دورهٔ تناوب
second member	دومین عضو
relation	رابطه
reflexive	انعکاسی
pseudo-ordering	ترتیبنما
order	ترتیبی

symmetric	تقارنی
inclusion	شمول
transitive	متعدی
plane	مسطح
equivalence	هم‌ارزی
class	رده
category	رسته
series	رشته
of functions	توابع
power	توانی
telescoping	توی هم رونده
Taylor	تیلور
binomial	دوجمله‌ای
Dirichlet	دیریکله
Fourier	فوریه
Laurent	لوران
alternating	متناوب
double	مضاعف
iterated	مکرر
infinite	نامتناهی
divergent	واگرا
convergent	همگرا
geometric	هندسی
digit	رقم
version	روایت
surface	رویه
quadric	درجهٔ دو
mathematics	ریاضیات
applied	کاربسته
pure	محض
root	ریشه
nth	n ام
integral	صحیح
nth root of unity	ریشهٔ n ام واحد
even	زوج
subinterval	زیربازه

kth	k ام
subcovering	زیرپوشش
finite	متناهی
subcollection	زیردسته
finite	متناهی
subsequence	زیردنباله
subseries	زیررشته
subspace	زیرفضا
closed	بسته
metric	متری
subset	زیرمجموعه
closed	بسته
complete	تام
dense	چگال
proper	حقیقی
countable	شمارشپذیر
compact	فشرده
infinite	نامتناهی
connected	همبند
index, subscript	زیرنویس
factor	سازه
nth	n ام
prime	اول
linear	خطی
square	مربع
thick	ستبر
velocity	سرعت
instantaneous	لحظه‌ای
area, surface	سطح
supremum	سوپرمم
parabola	سهمی
sine	سینوس
complex	مختلط
index	شاخص
condition	شرط

side	جنبی
Riemann	ریمان
Cauchy	کشی
Lipschitz	لیپ‌شیتس
right-handed Lipschitz	لیپ‌شیتس دست راستی
uniform Lipschitz	لیپ‌شیتس یکشکل
associative	شرکتپذیر
denumerable	شمارا
countable	شمارشپذیر
uncountable	شمارش ناپذیر
inclusion	شمول
argument	شناسه
principal	عمده
integral	صحیح
increasing	صعودی
strictly	اکید
plane	صفحه
complex	مختلط
extended complex	مختلط وسعت یافته
tangent	مماس
formal	صوری
multiplication	ضرب
multiplicative	ضربپذیر
completely	تام
coefficient	ضریب
slope	ضریب زاویه‌ای
finer	ظریفتر
divides	عادمی‌کند
expression, statement	عبارت
number	عدد
cardinal	اصلی
decimal	اعشاری
prime	اول

Fermat prime	اول فرما
Mersenne prime	اول مرسن
constant	پایا
algebraic	جبری
real	حقیقی
even	زوج
odd	فرد
winding	گردشی
irrational	گنگ
rational	گویا
complex	مختلط
composite	مرکب
Fibonacci numbers	عددهای فیبوناتچی
spherical cap	عرقچین کروی
member	عضو
converse	عکس
symbol, symbolism	علامت
principal	عمده
operation	عمل
algebraic	جبری
operator	عملگر
integral	انتگرالی
element	عنصر
first	اول
second	دوم
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
distance	فاصله
euclidean	اقلیدسی
process	فرایند
Gauss-Jordan	گاوس-ژردان
Gram-Schmidt	گرام-اشمیت
form	فرم
symmetric	تقارنی
quadratic	درجهٔ دوم
positive definite	معین مثبت

negative definite	معین منفی
compactness	فشردگی
compact	فشرده
space	فضا
euclidean	اقلیدسی
n-dimensional euclidean	اقلیدسی n بعدی
n	n بعدی
finite dimensional	با بعد متناهی
infinite dimensional	با بعد نامتناهی
linear	خطی
metric space	فضای متری
complete	تام
separable	جدائی پذیر
compact	فشرده
discrete	مجزا
disconnected	ناهمبند
connected	همبند
semimetric space	فضای نیمه متری
vertical	قائم
rule	قاعده
chain	زنجیره‌ای
Cramer	کرامر
law	قانون
distributive	پخشپذیری
commutative	تعویضپذیری
reciprocity	تقابل
associative	شرکتپذیری
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
of exponents	نماها
absolute value	قدر مطلق
negative	قرینه
part	قسمت
real	حقیقی
principal	عمده
positive	مثبت
negative	منفی

regular	موزون
imaginary	موهومی
sector	قطاع
circular	مستدیر
pole	قطب
south	جنوب
simple	ساده
north	شمال
diagonal	قطر
main	اصلی
square brackets	قلاب
domain	قلمرو
modulus	کالبد
perfect	کامل
text	کتاب درسی
reference	کتاب مرجع
hyperbolic cotangent	کتانژانت هذلولوی
bound	کران
upper	بالائی
lower	پائینی
uniform	یکشکل
bounded	کراندار
uniformly	یکشکل
boundary	کرانه
sphere	کره
spherical solid	کرهٔ جامد
fraction	کسر
cosine	کسینوس
complex	مختلط
arc	کمان
polygonal	چندضلعی
Jordan	ژردان
simple	ساده
circular	مستدیر
parentheses	کمانکها
smallest member	کوچکترین عضو

least upper bound	کوچکترین کران بالائی
convex	کوژ
path	گذر
positively oriented	جهت دار با جهت مثبت
negatively oriented	جهت دار با جهت منفی
polygonal	چندضلعی
circular	مستدیر
piecewise smooth	هموار قطعه وار
disk	گرده
open	باز
circular	مستدیر
of convergence	همگرائی
statement	گزاره
ball	گوی
n	n بعدی
open	باز
closed	بسته
logarithm	لگاریتم
principal	عمده
complex	مختلط
matrix	ماتریس
jacobian	ژاکوبی
elementary	مقدماتی
identity	همانی
maximal	ماکزیمال
maximum	ماکزیمم
global	کلی
absolute	مطلق
local	موضعی
relative	نسبی
elements	مبانی
origin	مبدأ
metric	متر
euclidean	اقلیدسی

discrete	مجزا
relative metric induced by . . .	متر نسبی القا شده به وسیلهٔ . . .
equilateral	متساوی‌الاضلاع
triangle	مثلث
similar	متشابه
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد بهنجار
transitive	متعدی
belongs to	متعلق است به
variable	متغیر
random	تصادفی
dummy	فریبان
independent	مستقل
reciprocal	متقابل
symmetrization	متقارن شده
complement	متمم
periodic	متناوب
finite	متناهی
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
positive	مثبت
triangle	مثلث
right	قائم‌الزاویه
trigonometric	مثلثاتی
sum	مجموع
(C, 1)	از نوع (C, 1)
Stieltjes	اشتیل یس
upper Stieltjes	اشتیل یس بالائی
lower Stieltjes	اشتیل یس پائینی
telescoping	توی هم رونده
partial	جزئی
nth partial	جزئی nم
Cesaro	چزارو
Riemann	ریمان
upper Riemann	ریمان بالائی
lower Riemann	ریمان پائینی
Gauss	گاوس
summable	مجموعپذیر

(C, 1)	از نوع (C, 1)
Cesaro	چزارو
Cesaro summability	مجموعپذیری چزارو
set	مجموعه
inductive	استقرائی
measurable	اندازه‌پذیر
nonmeasurable	اندازه‌ناپذیر
open	باز
closure	بست
closed	بسته
empty	تهی
dense	چگال
Jordan-measurable	دارای اندازهٔ ژردان
denumerable	شمارا
countable	شمارشپذیر
uncountable	شمارش ناپذیر
of real numbers	عددهای حقیقی
of integers	عددهای صحیح
of rational numbers	عددهای گویا
of complex numbers	عددهای مختلط
ordinate	عرضها
compact	فشرده
perfect	کامل
Cantor	کانتور
convex	کوژ
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد بهنجار
finite	متناهی
abstract	مجرد
ordered	مرتب
derived	مشتق
nondenumerable	ناشمارا
infinite	نامتناهی
countably infinite	نامتناهی شمارشپذیر
connected	همبند
simply connected	همبند ساده
arcwise connected	همبند کمانوار
pathwise connetced	همبند گذروار

sets	مجموعه‌های
disjoint	ازهم جدا
similar	متشابه
equinumerous	همعدد
content	محتوا
contained in	محتوا در
Jordan content	محتوای ژردان
outer	خارجی
inner	داخلی
criterion	محك
Lebesgue	لبگ
real axis	محور حقیقی
coordinates	مختصات
cylindrical	استوانه‌ای
rectangular	قائم
polar	قطبی
spherical	کروی
kth coordinate	مختص k ام
denominator	مخرج
circuit	مدار
square	مربع
perfect	کامل
unit	یکه
ordered	مرتب
composite	مرکب
complex conjugate	مزدوج مختلط
area	مساحت
boundary value problem	مسأله با مقدارکرانه‌ای
circular	مستدیر
rectangle	مستطیل
linearly independent	مستقل خطی
derivative	مشتق
nth	n ام
partial	جزئی
mixed partial	جزئی مخلوط
directional	جهتی
left hand	دست چپی

right hand	دست راستی
schwarzian	شوارتزی
total	کل
finite	متناهی
infinite	نامتناهی
one-sided	یکطرفی
differentiable	مشتقپذیر
continuously	پیوسته
differentiation	مشتقگیری
partial	جزئی
multiple	مضرب
integral	صحیح
equation	معادله
scalar	اسکالر
integral	انتگرال
vector	برداری
functional	تابعی
algebraic	جبری
quadratic	درجهٔ دوم
differential	دیفرانسیل
characteristic	مشخص‌کننده
equations	معادله‌های
of motion	حرکت
Cauchy-Riemann	کشی-ریمان
inverse	معکوس
positive definite	معین مثبت
negative definite	معین منفی
eigenvalue	مقدار ویژه
divisor	مقسوم علیه
common	مشترك
scale	مقیاس
mechanics	مکانیك
statistical	آماری
quantum	کوانتمی
cube	مکعب
rectangular parallelepiped	مکعب مستطیل
reflection	منعکس

negative	منفی
minus infinity	منهای بی‌نهایت
component	مؤلفه
kth	k ام
imaginary	موهومی
average	میانگین
weighted	وزندار
field	میدان
minimum	مینیمم
global	کلی
absolute	مطلق
local	موضعی
relative	نسبی
nonsingular	نا استثنائی
discontinuity	ناپیوستگی
jump	جهشی
removable	رفع شدنی
irremovable	رفع ناشدنی
discontinuous	ناپیوسته
nonempty	ناتهی
region	ناحیه
n-dimensional	n بعدی
of integration	انتگرالگیری
open	باز
closed	بسته
outer (or exterior)	خارجی (یا برونی)
inner (or interior)	داخلی (یا درونی)
triangular	مثلثی شکل
simply connected	همبند ساده
nondenumerable	ناشمارا
nonzero	ناصفر
invariant	نامتغیر
invariance	نامتغیر بودن
infinite	نامتناهی
countably	شمارشپذیر
inequality	نامساوی

Bessel	بسل
Cauchy-Schwarz	کشی-شوارتز
triangle	مثلثی
Minkowski	مینکوفسکی
linearly dependent	نامستقل خطی
noonegative	نامنفی
disconnected	ناهمبند
decreasing	نزولی
strictly	اکید
relative to, with respect to	نسبت به
relativity	نسبیت
theory	نظریه
image	نقش
of . . . under	. . . با . . .
continuous	پیوسته
topological	توپولوژیك
inverse	معکوس
inverse image of . . . under . . .	نقش معکوس . . . با . . .
point	نقطه
isolated singular (singularity)	استثنائی تنها
removable singular (singularity)	استثنائی دفع شدنی
essential singular (singularity)	استثنائی لازم
accumulation	انباشتگی
n-dimensional	n بعدی
stationary	ایستا
turning	برگشت
condensation	تراکم
isolated	تنها
fixed	ثابت
adherent	چسبیده
interior	درونی
saddle	زینی
boundary	کرانه‌ای
finite	متناهی
infinite	نامتناهی
mapping	نگاشت
from . . . to . . .	از . . . به . . .

باز	open
برو	onto
بسته	closed
پیوسته	continuous
توپولوژیك	topological
همشکلی	conformal
نما	exponent
نمادگذاری	notation
نمادها	notation
نمایش اعشاری	decimal representation
متناهی	finite
نامتناهی	infinite
نمود	phase
نمودار	graph
نوار	band
نوسان	oscillation
نهاد	structure
نیمباز	half-open
نیم محورها	semi-axes
نیمهٔ بالائی صفحه	upper half-plane
نیمهٔ راست صفحه	right half-plane
نیمه متر	semimetric
وابرسانی	diffeomorphism
واحد	unity
واگرا	divergent
واگرا به صفر	diverges to zero
هسته	kernel
هشت‌وجهی	octahedron
هم‌ارز	equivalent
هم‌ارزی	equivalence
همانسان	homeomorphic
همانسانی	homeomorphism
همانی	identity
همبند	connected
همبندی	connectedness

simply	ساده
arcwise	کمانوار
pathwise	گذروار
homotopic	همجا
homotopy	همجائی
to a point	با یك نقطه
linear	خطی
neighborhood	همسایگی
deleted	سفته
conformal	همشکلی
equinumerous	همعدد
convergent	همگرا
convergensto	همگرا به
convergence	همگرائی
boundedly	کراندار
conditional	مشروط
absolute	مطلق
mean	میانگینی
pointwise	نقطه‌وار
homogeneous	همگن
homogeneity	همگنی
smooth	هموار
piecewise	قطعه‌وار
norm	هنج
L^2	$L^۲$
sup	سوپرمم
geometry	هندسه
euclidean	اقلیدسی
analytic	تحلیلی
uniform	یکشکل
isometry	یکمتری
monotonic	یکنوا
strictly	اکید
unit	یکه
imaginary	موهومی

واژه نامه

انگلیسی به فارسی

Abel's test	آزمون آبل
absolute	مطلق
maximum	ماکزیمم
maximum modulus principle	اصل کالبد ماکزیمم
minimum	مینیمم
value	قدر
absolutely continuous	پیوستهٔ مطلق
abstract set	مجموعهٔ مجرد
accumulation	انباشتگی
point	نقطهٔ
addition	جمع
additive	جمعپذیر(ی)
function	تابع
property	خاصیت
adherent	چسبیده
point	نقطهٔ
advanced analysis	آنالیز عالی
aleph nought	الف صفر
algebra	جبر
algebraic	جبری
equation	معادلهٔ
identity	اتحاد
number	عدد
operation	عمل

almost everywhere	تقریباً همه جا
alternating series	رشتهٔ متناوب
analysis	آنالیز
analytic	تحلیلی
function	تابع
geometry	هندسهٔ
applied mathematics	ریاضیات کار بسته
approximation	تقریب
arc	کمان
archimedean property	خاصیت ارشمیدسی
arc length	درازای کمان
function	تابع
arcwise	کمانوار
connectedness	همبندی
connected set	مجموعهٔ همبند
area	سطح، مساحت
argument	شناسه
arrangement	آرایش
array	آرایش
associative	شرکتپذیر(ی)
law	قانون
average	میانگین
axiom	اصل موضوع
of continuity	پیوستگی
ball	گوی
basis vectors	بردارهای پایه
belongs to	متعلق است به
belongs to the set . . .	به مجموعهٔ . . . تعلق دارد
Bernoulli function	تابع برنولی
Bessel inequality	نامساوی بسل
beta function	تابع بتا
binary system	دستگاه عددها درپایهٔ دو
binomial series	رشتهٔ دوجملهای
bound	کران
boundary point	نقطهٔ کرانهای
boundary value problem	مسأله با مقدارکرانهای

bounded	کراندار
above	از بالا
above by . . .	از بالا به . . .
away from zero	دور ازصفر
function	تابع
sequence	دنبالهٔ
variation	با تغییر
boundedly convergence	همگرائی کراندار
boundedly convergent sequence	دنبالهٔ همگرای کراندار
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
Cantor set	مجموعهٔ کانتور
cardinal number	عدد اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی
category	رسته
Cauchy	کشی
condition	شرط
integral formula	دستور انتگرال
product	حاصلضرب
Riemann equations	معادله‌های . . . ـریمان
Schwarz inequality	نامساوی . . . ـشوارتز
Cesaro	چزارو
sum	مجموع
summability	مجموعپذیری
summable	مجموعپذیر
chain rule	قاعدهٔ زنجیره‌ای
change	تغییر
of parameter	پرما
of variable	متغیر
characteristic	مشخص‌کننده
equation	معادلهٔ
function	تابع
circuit	مدار
circular	مستدیر
arc	کمان
disk	گردهٔ
path	گذر

sector	قطاع
class	رده
closed	بسته
ball	گوی
interval	بازهٔ
mapping	نگاشت
region	ناحیهٔ
set	مجموعهٔ
closure	بست
set	مجموعه
coefficient	ضریب
collection	دسته
column vector	بردار ستونی
common divisor	مقسوم علیه مشترك
commutative	تعویضپذیر(ی)
law	قانون
compact	فشرده
interval	بازهٔ
metric space	فضای متری
set	مجموعهٔ
compactness	فشردگی
comparison	مقایسه(ای)
property	خاصیت
test	آزمون
complement	متمم
complete	تام
metric space	فضای متری
set	مجموعهٔ
completely multiplicative	ضربپذیر تام
sequence	دنبالهٔ
completeness	تامیت (تام بودن)
axiom	اصل موضوع
complex	مختلط
conjugate	مزدوج
cosine	کسینوس
exponential function	تابع نمائی
line integral	انتگرال خط

logarithm	لگاریتم
number	عدد
number system	دستگاه عددهای
plane	صفحهٔ
power	توان
complex-valued function	تابع مختلط
complex-valued sequence	دنبالهٔ مختلط
component	مؤلفه
component interval	بازهٔ مؤلف
composite	مرکب
function	تابع
number	عدد
condensation	تراکم
point	نقطهٔ
condition	شرط
conformal	همشکلی
mapping	نگاشت
connected	همبند
metric space	فضای متری
set	مجموعهٔ
connectedness	همبندی
constant	پایا
function	تابع
number	عدد
term	جملهٔ
contained in	محتوا در
content	محتوا
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
from the left	از چپ
from the right	از راست
function	تابع
image	نقش
mapping	نگاشت
continuously differentiable	مشتقپذیر پیوسته
function	تابع
contour integral	انتگرال پیرامنی

contraction	انقباض
constant	پایا(ی)
convergence	همگرائی
converges to	همگرا به
convergent	همگرا
product	حاصلضرب
sequence	دنبالهٔ
series	رشتهٔ
converse	عکس
convex	کوژ
set	مجموعهٔ
convolution	پیچش
formula	دستور
coordinates	مختصات
coordinate transformation	تبدیل مختصات
correspondence	تناظر
cosine	کسینوس
countable	شمارشپذیر
collection	دستهٔ
set	مجموعهٔ
countably additive	جمعپذیر شمارشپذیر
countably infinite	نامتناهی شمارشپذیر
covering	پوشش
Cramer's rule	قاعدهٔ کرامر
criterion	محك
cross section	برش متقاطع
cube	مکعب
curve	خم
decimal	اعشاری
expansion	بسط
number	عدد
representation	نمایش
decreasing	نزولی
function	تابع
sequence	دنبالهٔ
definite integral	انتگرال معین

degenerate	تبهشده
closed interval	بازهٔ بسته
degree of freedom	درجهٔ آزادی
deleted neighborhood	همسایگی سفته
De Moivre formula	دستور دموآور
denominator	مخرج
dense	چگال
set	مجموعه
denumerable	شمارا
set	مجموعه
derivative	مشتق
derived set	مجموعهٔ مشتق
determinant	دترمینان
diagonal	قطر
diffeomorphism	وابرسانی
difference	تفاضل
difference quotient	خارج قسمت تفاضلی
differentiable	مشتقپذیر
function	تابع
differential	دیفرانسیل
calculus	حساب
equation	معادله
differentiation	مشتقگیری
digit	رقم
Dini test	آزمون دینی
direction	امتداد، جهت
directional derivative	مشتق جهتی
Dirichlet	دیریکله
integral	انتگرال
series	رشته
test	آزمون
disconnected	ناهمبند
metric space	فضای متری
discontinuity	ناپیوستگی
discontinuous	ناپیوسته
discrete	مجزا
metric	متر

metric space	فضای متری
disjoint	ازهم جدا
sets	مجموعه‌ها(ی)
disk	گرده
of convergence	همگرائی
distance	فاصله
distributive	پخشپذیر(ی)
law	قانون
divergent	واگرا
product	حاصلضرب
sequence	دنباله
series	رشته
diverges to zero	واگرا به صفر
division	تقسیم
divisor	مقسوم علیه
domain	قلمرو
double	مضاعف
limit	حد
sequence	دنباله
series	رشته
dummy variable	متغیر فریبان
eigenvalue	مقدار ویژه
element	عنصر
elementary	مقدماتی
matrix	ماتریس
transformation	تبدیل
elements	مبانی
empty	تهی
set	مجموعه
entire	تمام
function	تابع
equation	معادله
equations of motion	معادله‌های حرکت
equilateral triangle	مثلث متساوی‌الاضلاع
equinumerous	همعدد
sets	مجموعه‌ها(ی)

equivalence	هم‌ارزی
relation	رابطه
equivalent	هم‌ارز
error	خطا
term	جملهٔ نماینده
essential singularity (singular point)	نقطهٔ استثنائی لازم
estimate	تخمین
euclidean	اقلیدسی
distance	فاصله
geometry	هندسه
metric	متر
space	فضا(ی)
Euler	اویلر
constant	پایا(ی)
product	حاصلضرب
summation formula	دستور جمعبندی
expansion	انبساط، بسط
exponent	نما
exponential	نمائی
Fourier transform	تبدیل فوریه
function	تابع
expression	عبارت
extended	وسعت یافته
complex number system	دستگاه عددهای مختلط
complex plane	صفحهٔ مختلط
real number system	دستگاه عددهای حقیقی
extension	توسیع
exterior	برونی
region	ناحیه
extremum	اکسترمم
factor	سازه
Fermat prime number	عدد اول فرما
Fibonacci numbers	عددهای فیبوناتچی
field	میدان
axioms	اصلهای موضوع
finer	ظریفتر

finite	متناهی
collection	دسته
covering	پوشش
decimal representation	نمایش اعشاری
derivative	مشتق
dimensional space	فضا با بعد
point	نقطه
sequence	دنباله
set	مجموعه
subcollection	زیر دسته
subcovering	زیرپوشش
finitely additive	جمعپذیر متناهی
fixed	ثابت
point	نقطه
form	فرم
formal	صوری
formula	دستور
Fourier	فوریه
integral	انتگرال
series	رشته
sine transform	تبدیل سینوسی
fraction	کسر
function	تابع
of a complex variable	یك متغیر مختلط
of bounded variation	با تغییر کراندار
of one real variable	یك متغیر حقیقی
of two variables	دو متغیر
functional equation	معادلهٔ تابعی
gamma function	تابع گاما
integral	انتگرال
Gauss	گاوس
-Jordan process	فرایند. . . ـژردان
sum	مجموع
gcd (a, b)	بمعم (a, b)
generalized volume	حجم تعمیم یافته
geometric series	رشتهٔ هندسی

geometry	هندسه
Gibbs' phenomenon	پدیدهٔ گیبس
global	کلی
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
property	خاصیت
gradient vector	بردار گرادیان
Gram-Schmidt process	فرایند گرام‌ـاشمیت
graph	نمودار
greatest	بزرگترین
common divisor	مقسوم علیه مشترك
integer function	تابع . . . عدد صحیح
integer in x	عدد صحیح در x
lower bound	کران پائینی
half-infinite	نیمه نامتناهی
interval	بازه
half-open	نیمباز
interval	بازه
homeomorphic	همانسان
homeomorphism	همانسانی
homogeneity	همگنی
homogeneous	همگن
function	تابع
homotopic	همجا
homotopy	همجائی
to a point	با یك نقطه
horizontal	افقی
direction	امتداد
hyperbolic cotangent	کتانژانت هذلولوی
hyperplane	ابرصفحه
identity	اتحاد، همانی
identity	همانی
function	تابع
matrix	ماتریس
image	نقش

of . . . under . . .	. . . با . . .
imaginary	موهومی
part	قسمت
unit	یکه
implicit function	تابع ضمنی
improper Riemann integral	انتگرال ریمان مجازی
inclusion	شمول
relation	رابطه
increasing	صعودی
function	تابع
sequence	دنباله
independent variable	متغیر مستقل
index	زیرنویس، شاخص
induction	استقرا
inductive set	مجموعهٔ استقرائی
inequality	نامساوی
infimum	اینفیمم
infinite	نامتناهی
collection	دسته
decimal representation	نمایش اعشاری
derivative	مشتق
dimensional space	فضای با بعد
point	نقطه
product	حاصلضرب
sequence	دنباله
series	رشته
set	مجموعه
infinity	بی‌نهایت
injective	انژکتیو
inner	داخلی
Jordan content	محتوای ژردان
product	حاصلضرب
region	ناحیه
inscribed polygon	چندضلعی محاط شده
instantaneous velocity	سرعت لحظه‌ای
integral	انتگرال(ی)
equation	معادله

operation	عملگر
test	آزمون
transform	تبدیل
integral	صحیح
power	توان
root	ریشه
integrand	انتگرالده
integration	انتگرالگیری
by parts	به طریقهٔ جزء به جزء
integrator	انتگرالگیر
interior	درون(ی)
point	نقطه
region	ناحیه
intersection	اشتراك
interval	بازه
of convergence	همگرائی
of integration	انتگرالگیری
invariance	نامتغیر بودن
invariant	نامتغیر
inverse	معکوس
function	تابع
tangent	تانژانت
inverse image	نقش معکوس
of . . . under . . .	. . . با . . .
inversion	انعکاس
inversion formula	دستور معکوس کردن
irrational number	عدد گنگ
irremovable discontinuity	ناپیوستگی رفع ناشدنی
is defined on the set . . .	برمجموعهٔ . . . تعریف شده است
isolated point	نقطهٔ تنها
isolated singularity (singular point)	نقطهٔ استثنائی تنها
isolation	تنهائی
isometry	یکمتری
iterated	مکرر
limit	حد
series	رشته

jacobian	ژاکوبی
determinant	دترمینان
matrix	ماتریس
Jordan	ژردان
arc	کمان
content	محتوا(ی)
curve	خم
measurable set	مجموعهٔ دارای اندازه
measure	اندازه
test	آزمون
jump discontinuity	ناپیوستگی جهشی
kernel	هسته
Kronecker delta	دلتای کرونکر
kth	k م
component	مؤلفه
coordinate	مختص
subinterval	زیربازه
label	برچسب
Lagrange identity	اتحاد لاگرانژ
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
largest member	بزرگترین عضو
Laurent	لوران
expansion	بسط
series	رشته
law of exponents	قانون نماها
least upper bound	کوچکترین کران بالائی
axiom	اصل موضوع
Lebesgue	لبگ
criterion	محك
integrable function	تابعی که انتگرال . . . دارد
integral	انتگرال
measure	اندازه
left hand	دست چپی
derivative	مشتق
jump	جهش

Legendre polynomial	چند جمله‌ای لژاندر
Leibnitz formula	دستور لایب نیتز
length	درازا
limit comparison test	آزمون مقایسه‌ای حدی
limit	حد
function	تابع
inferior	اسفل
superior	اعلا
limits of integration	حدهای انتگرالگیری
linear	خطی
algebra	جبر
combination	ترکیب
factor	سازه
function	تابع
homotopy	همجائی
polynomial	چند جمله‌ای
property	خاصیت
space	فضا(ی)
transformation	تبدیل
linearity	خطی
linearly dependent	نامستقل خطی
linearly independent	مستقل خطی
line of symmetry	خط تقارن
line segment	پاره خط
Lipschitz condition	شرط لیپ‌شیتس
L^2-norm	هنج L^2
local	موضعی
extremum	اکسترمم
inverse function	تابع معکوس
maximum	ماکزیمم
maximum modulus principle	اصل کالبد ماکزیمم
minimum	مینیمم
logarithm	لگاریتم
logarithmic function	تابع لگاریتمی
lower	پائینی
bound	کران
integral	انتگرال

Riemann sum	مجموع ریمان
Stieltjes sum	مجموع اشتیل‌یس
main diagonal	قطر اصلی
mapping	نگاشت
from . . . to . . .	از . . . به . . .
mathematical	ریاضی
analysis	آنالیز
induction	استقرا(ی)
matrix	ماتریس
maximal	ماکزیمال
maximum	ماکزیمم
element	عنصر
mean convergence	همگرائی میانگینی
measurable	اندازه‌پذیر
function	تابع
set	مجموعهٔ
measure	اندازه
Mellin transform	تبدیل ملین
member	عضو
Mersenne prime number	عدد اول مرسن
metric	متر
metric space	فضای متری
minimum	مینیمم
element	عنصر
modulus principle	اصل کالبد
Minkowski inequality	نامساوی مینکوفسکی
minus infinity	منهای بی‌نهایت
mixed partial derivative	مشتق جزئی مخلوط
modulus	کالبد
Moebius transformation	تبدیل مبیوس
monotonic	یکنوا
function	تابع
multiple	چندگانه
integral	انتگرال
Riemann integral	انتگرال ریمان
multiplication	ضرب

multiplicative	ضرب‌پذیر
sequence	دنباله
multiplier	تکثیرکن
multivariable differential calculus	حساب دیفرانسیل چند متغیره
n-ball	گوی n بعدی
n-dimensional	n بعدی
closed interval	بازهٔ بسته
euclidean space	فضای اقلیدسی
measure	اندازه
open interval	بازهٔ باز
point	نقطه
region	ناحیه
vector	بردار
negative	قرینه، منفی
negative	منفی
part	قسمت
variation	تغییر
negative definite	معین منفی
form	فرم
negatively oriented	جهت‌دار باجهت منفی
path	گذر
neighborhood	همسایگی
n-fold integral	انتگرال n گونا
n-measure	اندازهٔ n
zero	صفر
nondenumrable	ناشمارا
set	مجموعه
nonempty	ناتهی
nonmeasurable	اندازه ناپذیر
function	تابع
set	مجموعه
nonnegative	نامنفی
function	تابع
nonrectifiable	با درازای نامتناهی
curve	خم
nonsingular	نااستثنائی

transformation	تبدیل
nonzero	ناصفر
norm	هنج
north pole	قطب شمال
notation	نمادگذاری، نمادها
n-space	فضای n بعدی
n th	n ام
derivative	مشتق
factor	سازهٔ
iterate	تکرار
partial product	حاصلضرب جزئی
partial sum	مجموع جزئی
power	توان
root	ریشهٔ
root of unity	ریشهٔ . . . واحد
term	جملهٔ
O	اوی بزرگ
o	اوی کوچك
octahedron	هشت وجهی
odd number	عدد فرد
one-sided derivative	مشتق یکطرفی
one-to-one correspondence	تناظر یك به یك
function	تابع
onto	تابع
mapping	نگاشت
open	باز
ball	گوی
covering	پوشش
disk	گردهٔ
interval	بازهٔ
mapping	نگاشت
region	ناحیهٔ
set	مجموعهٔ
operation	عمل
operator	عملگر
order	ترتیب(ی)

axioms	اصلهای موضوع
relation	رابطهٔ
ordered	مرتب
n-tuple	nتائی
pair	جفت
set	مجموعهٔ
ordering	ترتیب
order-preserving	ترتیب را حفظ می‌کند
orientation	جهت
preserving	نگهدار
reversing	برگردان
oriented	جهت‌دار
origin	مبدأ
orthogonal	متعامد
function	تابع
set	مجموعهٔ
system	دستگاه
orthonormal	متعامد بهنجار
set	مجموعهٔ
system	دستگاه
oscillation	نوسان
outer	خارجی
Jordan content	محتوای ژردان
region	ناحیهٔ
pair	جفت
parabola	سهمی
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
law	قانون
parameter	پرما
parenthesis	کمانکها
Parseval	پارسوال
formula	دستور
identity	اتحاد
partial	جزئی
derivative	مشتق
differentiation	مشتقگیری

fraction decomposition	تجزیه به کسرها(ی)
product	حاصلضرب
sum	مجموع
summation formula	دستور جمعبندی
partition	افراز
path	گذر
pathwise connectedness	همبندی گذروار
pathwise connected set	مجموعهٔ همبند گذروار
perfect	کامل
set	مجموعهٔ
square	مربع
period	دورهٔ تناوب
periodic	متناوب
function	تابع
phase	نمود
piecewise linear	خطی قطعه‌وار
function	تابع
piecewise smooth	هموار قطعه‌وار
curve	خم
path	گذر
plane relation	رابطهٔ مسطح
plus infinity	به علاوهٔ بی نهایت
point set topology	توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای
pointwise convergence	همگرائی نقطه‌وار
pointwise convergent	همگرای نقطه‌وار
sequence	دنبالهٔ
Poison	پواسن
integral formula	دستور انتگرال
summation formula	دستور جمعبندی
polar coordinates	مختصات قطبی
pole	قطب
polygon	چند ضلعی
polygonal arc	کمان چند ضلعی
polygonal path	گذر چند ضلعی
polygonally connected	چند ضلعی‌وار همبند
polynomial	چندجمله‌ای
positive	مثبت

part	قسمت
variation	تغییر
positive definite	معین مثبت
form	فرم
positively oriented path	گذر جهت‌دار باجهت مثبت
power	توان
power series	رشتهٔ توانی
expansion	بسط (به‌صورت)
prime	اول
factor	سازهٔ
principal	عمده
argument	شناسهٔ
logarithm	لگاریتم
part	قسمت
principle of induction	اصل استقرا
process	فرایند
product	حاصلضرب
projection	تصویر
proper	حقیقی
subset	زیرمجموعهٔ
pseudo-ordering	ترتیبنما
relation	رابطهٔ
pure mathematics	ریاضیات محض
quadratic	درجهٔ دوم
equation	معادلهٔ
form	فرم
polynomial	چندجمله‌ای
quadric surface	رویهٔ درجهٔ دو
quantum mechanics	مکانیک کوانتمی
quotient	خارج قسمت
random variable	متغیر تصادفی
range	برد
ratio test	آزمون نسبت
rational number	عدد گویا
real	حقیقی

axis	محور
exponential function	تابع نمائی
line	خط
number	عدد
number system	دستگاه عددها(ی)
part	قسمت
real-valued	حقیقی
function	تابع
sequence	دنبالهٔ
rearrangement	تجدید آرایش
reciprocal	متقابل
reciprocity law	قانون تقابل
rectangle	مستطیل
rectangular array	آرایش مستطیلی
rectangular coordinates	مختصات قائم
rectangular parallelepiped	مکعب مستطیل
rectifiable	با درازای متناهی
curve	خم
recursion formula	دستور بازگشتی
reduction	تحویل
formula	دستور
reference	کتاب مرجع
reflection	انعکاس، منعکس
reflexive	انعکاسی
relation	رابطهٔ
region	ناحیه
of integration	انتگرالگیری
regular part	قسمت موزون
relabel	برچسب مجدد
relation	رابطه
relative	نسبی
maximum	ماکزیمم
metric induced by ...	متر ... القا شده به وسیلهٔ ...
minimum	مینیمم
relative to	نسبت به
relativity	نسبیت
remainder	باقیمانده

term	جمله
removable	رفع شدنی
discontinuity	ناپیوستگی
singularity	استثنائی
singular point	نقطهٔ استثنائی
residue	باقیمانده
calculus	حساب
restriction	تحدید
Riemann	ریمان
condition	شرط
integrable	انتگرال . . . دارد
integral	انتگرال
Stieltjes integral	انتگرال . . . ـاشتیل‌یس
sum	مجموع
zeta function	تابع زتا(ی)
right half-plane	نیمهٔ راست صفحه
right hand	دست راستی
derivative	مشتق
limit	حد
right-handed Lipschitz condition	شرط لیپ‌شیتس دست راستی
right triangle	مثلث قائم‌الزاویه
root	ریشه
rotation	دوران
rule	قاعده
saddle point	نقطهٔ زینی
scalar	اسکالر
equation	معادله
scale	مقیاس
schwarzian derivative	مشتق شوارتزی
second derivative test	آزمون مشتق دوم
sector	قطاع
semimetric space	فضای نیمه متری
separable	جدائی‌پذیر
space	فضا(ی)
sequence	دنباله
of functions	توابع

series	رشته
of functions	توابع
set	مجموعه
of complex numbers	عددهای مختلط
of integers	عددهای صحیح
of rational numbers	عددهای گویا
of real numbers	عددهای حقیقی
set algebra	جبر مجموعه‌ای
set-theoretic identity	اتحاد نظریهٔ مجموعه‌ای
side condition	شرط جنبی
sign-preserving property	خاصیت محفوظ ماندن علامت
similar	متشابه
sets	مجموعه‌ها(ی)
simple	ساده
arc	کمان
closed curve	خم بسته
simply connected	همبند ساده
region	ناحیه
set	مجموعه
simply connectedness	همبندی ساده
sine	سینوس
singularity	استثنائی
slobbovian integral	انتگرال اسلوبووی
slope	ضریب زاویه‌ای
smallest member	کوچکترین عضو
smooth	هموار
space-filling curve	خم فضا پرکن
span	پیما
sphere	کره
spherical	کروی
cap	عرقچین
coordinates	مختصات
spherical solid	کرهٔ جامد
square	مربع
factor	سازه
square integrable function	تابعی که مربعش انتگرالپذیر است
statement	گزاره، عبارت

stationary	ایستا
point	نقطه
statistical mechanics	مکانیك آماری
step function	تابع پله‌ای
Stieltjes sum	مجموع اشتیل‌یس
stretching	انبساط
strictly decreasing	نزولی اکید
function	تابع
strictly increasing	صعودی اکید
function	تابع
strictly monotonic	یکنوای اکید
function	تابع
subcollection	زیر دسته
subinterval	زیر بازه
subscript	زیرنویس
subsequence	زیردنباله
subseries	زیر رشته
subset	زیرمجموعه
subspace	زیرفضا
substitution	جانشانی
subtraction	تفریق
sum	مجموع
function	تابع
summable	مجموعپذیر
sup norm	هنج سوپرمم
surface	رویه، سطح
symmetric	تقارنی
form	فرم
limit	حد
relation	رابطه
symmetrization	متقارن شده
symmetry	تقارن
tangent plane	صفحهٔ مماس
telescoping	توی هم رونده
series	رشته
sum	مجموع

term	جمله
terminology	اصطلاح
test	آزمون
text	کتاب درسی
theory	نظریه
theta function	تابع تتا
thick	ستبر
time interval	بازهٔ زمان
topological	توپولوژیک
image	نقش
mapping	نگاشت
property	خاصیت
total	کل
derivative	مشتق
variation	تغییر
transform	تبدیل
transformation	تبدیل
formula	دستور
transitive	متعدی
relation	رابطه
translation	انتقال
triangle	مثلث
triangle inequality	نامساوی مثلثی
triangular region	ناحیهٔ مثلثی شکل
trigonometric	مثلثاتی
identity	اتحاد
triple integral	انتگرال مثلث
turning point	نقطهٔ برگشت
two-valued function	تابع دو مقداری
Tylor formula	دستور تیلور
unbounded	بی‌کران
above	از بالا
sequence	دنباله
uncountable	شمارش ناپذیر
set	مجموعه
uniform	یکشکل

bound	کران
continuity	پیوستگی
Lipschitz condition	شرط لیپ‌شیتس
uniformly bounded	کراندار یکشکل
sequence	دنباله
uniformly continuous	پیوستهٔ یکشکل
function	تابع
union	اجتماع
unit	یکه
circle	دایره
coordinate vector	بردار مختصات
vector	بردار
unity	واحد
upper	بالائی
bound	کران
function	تابع
half-plane	نیمهٔ . . . صفحه
integral	انتگرال
limit	حد
Riemann sum	مجموع ریمان
Stieltjes sum	مجموع اشتیل‌یس
variable	متغیر
variation	تغییر
vector	بردار(ی)
analysis	آنالیز
equation	معادله
with n components	با n مؤلفه
vector-valued function	تابع برداری
version	روایت
vertical	قائم
direction	امتداد
vibration	ارتعاش
volume	حجم
Weierstrass M-test	آزمون M وایراشتراس
weighted average	میانگین وزندار

well-ordering principle	اصل خوش ترتیبی
winding number	عدد گردشی
with respect to	برحسب، نسبت به
wronskian	تابع ورونسکی
zero vector	بردار صفر

فهرست راهنما