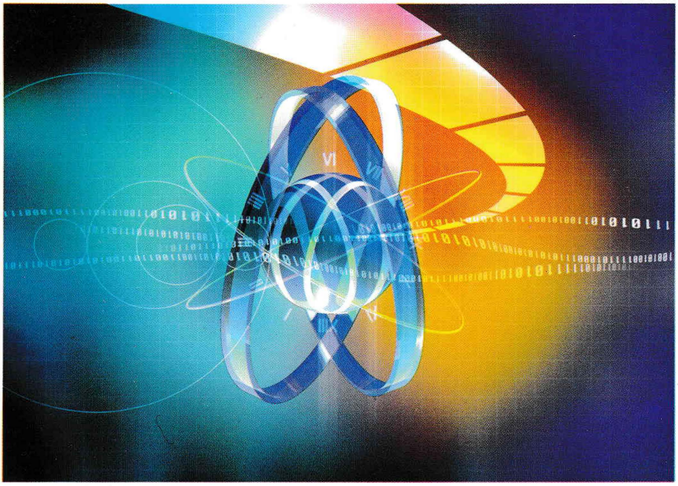
۲۰۱-ع

دانشگاه بوعلی سینا

ریاضیات به روش ساده

آنالیز ریاضی ۱



تألیف : دکتر غلامرضا صفاکیش

ریاضیات به روش ساده

آنالیز ریاضی ۱

تالیف: غلامرضا صفاکیش

انتشارات دانشگاه بوعلی سینا

QA صفا کیش همدانی ، غلامرضا ، ۱۳۴۵.

۳۰۰ ریاضیات به روش ساده؛آنالیز ریاضی ۱/ تالیف: غلامرضا صفا کیش همدانی .

۹ر۷ص / همدان:انتشارات دانشگاه بوعلی سینا ، ۱۳۸۹

۱۳۸۹ ۲۱۵ص.مصور.نمودار،شابک :۶-۰۲۹-۱۲۸-۶۰۰ -۹۷۸

۱.آنالیز ریاضی ، ۲ . آنالیز ریاضی – مسائل ، تمرینها و غیره . الف . عنوان.

۵۱۵

عنوان : ریاضیات به روش ساده (آنالیز ۱)

مولف: دکتر غلامرضاصفا کیش همدانی

ناشر: انتشارات دانشگاه بوعلی سینا

مدیر مسئول: محمد جواد یدالهی فر

چاپخانه : ادیب

صفحه و قطع : ۲۱۵-وزیری

نوبت چاپ: اول

تیراژ: ۱۰۰۰

قیمت : ۴۵۰۰۰ ریال

تاریخ انتشار : ۱۳۸۹

شماره کتاب : ۲۰۱ /ع

شابک : ۶-۰۲۹-۱۲۸-۶۰۰ -۹۷۸

مراکز فروش در همدان : ۱ . دانشگاه بوعلی سینا، اداره انتشارات تلفکس:۸۲۷۴۴۴۲ – ۰۸۱۱

۲ . خیابان شهید حسین فهمیده ، روبروی پارک مردم،فروشگاه اداره انتشارات

۳ . خیابان مهدیه روبروی خانه معلم – انتشارات دانشجو

نمایندگی فروش در تهران : ۱ . موسسه کتابیران ، میدان انقلاب ،خیابان لبافی نژادغربی(بعداز چهار راه کارگر جنوبی)،

بعد از فروشگاه شیلات ، پلاک ۲۳۷ تلفن:۶۶۴۲۳۴۱۶-۶۶۹۲۶۶۸۷

۲ . نوپردازان ، میدان انقلاب ، خیبان لبافی نژاد ، بین ۱۲ فروردین واردیبهشت ، پلاک ۲۰۶ تلفن : ۶۶۴۱۱۱۷۳-۶۶۴۹۴۴۰۹

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از کهن ترین شاخه های ریاضیات، شاخه آنالیز می باشد و باپیشرفت ریاضیات امروزه شاخه آنالیز خود به خود به چندین زیر شاخه تقسیم شده است. آنالیز ۱ پایه تمام دروس شاخه آنالیز است و مباحثی نظیر نظریه اندازه ، دروس آمار و احتمال و دروس هندسه نیز علاوه بر شاخه آنالیز به عنوان پس در آمد این درس قابل معرفی هستند. این کتاب شامل پنج فصل است که در فصل اول مفاهیم مقدماتی را معرفی نموده ایم.

در فصل دوم مفاهیم اولیه توپولوژیک متریک را معرفی می کنیم این فصل پایه ای برای درس توپولوژی عمومی نیز می باشد.

در فصل سوم دنباله ها در فضای متریک معرفی می شود در این فصل سری ها نیز از منظر دیگری بررسی می شوند و دیدگاهی که در اینجا برای بررسی دنباله و سری موجود است فراتر از دیدگاه حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

در فصل چهارم حد و پیوستگی توابع مورد بررسی قرار می گیرد و این بررسی از دیدگاهی کلی تر از دیدگاه حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی می باشد. در فصل پنجم مشتق توابع از دیدگاه آنالیز مورد بررسی قرار می گیرد.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

یکی از ستون های اصلی آنالیز، مجموعه ها می باشد که بحث کلی آن از حوصله این کتاب خارج است. در این مجموعه ها و مفاهیم وابسته را مورد بررسی قرار می دهیم. به عنوان ی‌ک مجموعه بسیار پر اهمیت مجموعه اعداد حقیقی را با نگاهی بسیار ظریف و ساختاری بررسی و ارزیابی قرار می دهیم و در ادامه به عنوان توسیعی از اعداد حقیقی فضای اعداد مختلط و سپس فضای R^n را بررسی می نماییم.

۱-۱ مجموعه ها

مجموعه ها را با حروف بزرگ و اعضای آنها را با حروف کوچک نشان می دهیم. وقتی که می نویسیم $a \in A$ یعنی a عضوی از مجموعه A یا بعبارتی a متعلق به A است.

۱-۱-۱ مجموعه های مساوی : دو مجموعه را مساوی گوییم هرگاه تمام اعضای یکی عضو دیگری باشد و می نویسیم $A=B$

۱-۱-۲ زیر مجموعه: A را زیر مجموعه B می نامیم و می نویسیم $A \subset B$ هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

۱-۱-۳ مجموعه اعداد حقیقی یکی از مهمترین مجموعه ها ، مجموعه اعداد حقیقی است که برای ساختن آن دو روش موجود است.

در روش اول ابتدا اعداد طبیعی ، سپس اعداد صحیح و در آخر اعداد گویا و اصم معرفی می شوند.

در روش دوم از روش اصل موضوعی استفاده می شود یعنی مجموعه اعداد حقیقی همواره با دو عمل معرفی می شود.

۱-۱-٤ مجموعه متناهی و شمارا : هر زیر مجموعه اعداد طبیعی که کراندار باشد مجموعه متناهی از اعداد طبیعی نامیده می شود و با هر زیر مجموعه از اعداد طبیعی که در تناظر یک به یک باشد ، مجموعه متناهی شمارش پذیر نامیده می شود همینطور هر مجموعه ای که با اعداد طبیعی در تناظر یک به یک باشد شمارش پذیر خوانده می شود.

به عنوان مثال مجموعه اعداد گویا با مجموعه اعداد صحیح شمارش پذیر می باشند.

هر اجتماع متناهی از مجموعه های متناهی ، متناهی است.

هر اجتماع شمارا از مجموعه های شمارش پذیر ، شمارش پذیر می باشد.

به عنوان نمونه مجموعه اعداد گویا را می توان اجتماعی از مجموعه های شمارا تلقی کرد.

تعریف : فرض کنید S یک مجموعه باشد ، یک ترتیب برای S عبارت است از رابطه ای چون ،، $<$ ،، بین اعضای S که دارای خواص زیر باشد :

۱) برای هر دو عضو x و y در S فقط و فقط یکی از روابط $y<x$ ، $y=x$ و $x<y$ برقرار است.

۲) اگر x ، y و z متعلق به S باشند آنگاه داریم :

$$x<y \ , \ y<z \ \Rightarrow \ x<z$$

۱-۱-۵ مجموعه مرتب : مجموعه S را مرتب می نامیم هرگاه برای اعضای آن یک ترتیب تعریف شده باشد.

مثال ۱ : اگر $S=Q$ و برای هر a,b متعلق به Q رابطه $(Q\ ,\ <)$ یک ترتیب معرفـی مـی کند که با ضابطه زیر معرفی می شود

$$a<b \quad <=> \quad b-a \in Q^+$$

خواص بنیادی اعداد حقیقی به عنوان یک میدان :

۱) $\forall a,b \in R \Rightarrow a+b \in R$

۲) $a+b=b+a$

۳) $\forall a \in R \quad \exists\ \cdot \in R \quad \ni \quad a+\cdot=a$

۴) $\forall a \in R \quad \exists\ (-a) \in R \quad \ni \quad a+(-a)=\cdot$

۵) $\forall a,b,c \in R \quad \Rightarrow \quad a+(b+c)=(a+b)+c$

۶) $\forall a,b \in R \quad \Rightarrow \quad a.b \in R$

۷) $\forall a,b \in R \quad \Rightarrow \quad a.b=b.a$

۸) $\forall a \in R \quad \exists\ 1 \in R \quad \exists\ a.1=1.a=a$

۹) $\forall a \in R \quad ,a \neq 0 \quad \exists \frac{1}{a} \in R \quad \exists a.\frac{1}{a}=1$

۱۰) $\forall a,b,c \in R \quad \Rightarrow \quad a(bc)=(ab)c$

۱۱) $\forall a,b,c \in R \quad \Rightarrow \quad a(b+c)=ab+ac$

خواص اخیر مجموعه اعداد حقیقی را نسبت به دو عمل ضرب و جمع معمولی بـه یـک میدان تبدیل می کند.

۱-۱-٦ خواص دیگر میدان :

۱۲) $x+y=x+z \Rightarrow \quad y=z$

۱۳) $x+y=x \quad \Rightarrow \quad y=\cdot$

۱٤) $x+y=\cdot \quad \Rightarrow \quad y=-x$

۱٥) $-(-x)=x$

۱٦) $x \neq 0 \qquad xy = x \qquad \Rightarrow y = 1$

۱۷) $x \neq 0 \qquad xy = xz \qquad \Rightarrow y = z$

۱۸) $x \neq 0 \qquad xy = 1 \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

۱۹) $x \neq 0 \qquad \frac{1}{1/x} = x$

۲۰) $x = 0???$

۲۱) $x \neq 0 \ , \ y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$

۲۲) $(-x)y = x(-y) = -xy$

۲۳) $(-x)(-y) = xy$

اثبات ۱۲

۱۲) $y = y + \cdot = y + (x + (-x)) = (y + x) + (-x) = (x + z) + (-x)$

$= (x + z) + (-x) = z + \cdot = z$

۱-۱-۷ تعریف میدان مرتب : مجموعه F را یک میدان مرتب می گویند اگر :

۱) F یک میدان باشد.

۲) F یک مجموعه مرتب باشد و در روابط زیر صدق کند :

۱) $\forall x, y \in F \ , \ x > 0 \ , \ y > 0 \ \Rightarrow \ xy > 0$

۲) $\forall x, y, z \in F \ , \ x < y \ \Rightarrow \ x + z < y + z$

۱-۱-۸ خواص میدان مرتب :

۱) $x > 0 \ \Rightarrow \ -x < 0$

۲) $x > 0 \ , \ y < z \ \Rightarrow \ xy < xz$

۳) $x < 0 \ , \ y < z \ \Rightarrow \ xy > xz$

٤) $\forall x \in F \ , \ x \neq 0 \ \Rightarrow x^2 > 0$

ه) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$

۱-۱-۹ اصل کامل بودن اعداد حقیقی : فرض کنید S یک مجموعه مرتب و

$E \subseteq S$

الف) عضوی مانند α در S را یک کران بالایی برای E می نامند هرگاه :

$$\forall x \in E \quad \Rightarrow \quad x \le \alpha$$

کران بالا را با « Ub » نمایش می دهیم.

ب) عضوی مانند β در S را کران پایین می گویند هرگاه :

$$\forall x \in E \quad \Rightarrow \quad x \ge \beta$$

وکران پایین را با « Lb » نمایش می دهیم.

توجه : کران بالایی وکران پایینی در صورت وجود برای یک مجموعه یگانه نمی باشند.

مجموعه E را کراندار از بالا می نامند هرگاه E دارای یک کران بالا باشد.

مجموعه E را کراندار از پایین می نامند هرگاه E دارای یک کران پایین باشد.

مثال۲ : مجموع N را مجموعه اعداد طبیعی و $E=\{۳،۵،۱۵،۱۸،۲۰\}$ در اینصورت ۲۰ یک کران بالا و ۳ کران پایین برای E است. همینطور اعداد ۱و۲ نیز کرانهای پایین، تمام اعداد بزرگتر از ۲۰ کرانهای بالای E می باشند.

سوأل : آیا عدد e (عدد نپر) یک کران پایین E است ؟

خیر ؛ زیرا E زیر مجموعه اعداد طبیعی است و $e \notin N$ ، بنابراین نمی تواند کران پایین باشد.

مثال۳ : اگر $E = \{x \mid x \in R^+\}$ آیا مجموعه E از بالا کراندار است ؟ از پایین چطور ؟

اگر فرض کنیم α یک کران بالایی برای E باشد آنگاه $(\alpha+۱)$ نیز متعلق به E خواهد بود و $\alpha < \alpha+1$ در نتیجه $1 \le 0$ و این غیر ممکن است. پس E کران بالا ندارد ولی از پایین کران دار است. زیرا هر عدد نامثبتی می تواند کران پایینی برای مجموعه E باشد.

مثال ٤ : زیر مجموعه $E=\left\{x \mid \ x=\frac{n}{n+۱} \quad \forall n \in N\right\} \subset R$ از بالا و پایین کراندار است و همه اعضای آن بین ½ و یک قرار دارد. اما اگر $E \subset R$ نبود مثلاً صفر نمی توانست کران پایین باشد.

۱)اگر E دارای یک کران بالایی باشد آنرا کراندار از بالا نامیم و اگر یک کران پایینی داشته باشد کراندار از پایین است. اگر از بالا و پایین کراندار باشد آنگاه E را کراندار می گوییم.

تعریف: اگر S یک مجموعه مرتب و $E \subseteq S$ آنگاه E کراندار از بالاست اگر دارای یک کران بالایی باشد.

تعریف : اگر E زیر مجموعه ای از مجموعه مرتب S باشد آنگاه عضوی مانند α در S را کوچکترین کران بالایی برای E می نامند هرگاه :

۱) α یک کران بالایی برای E باشد یعنی

$$\forall x \in E \Rightarrow x \le \alpha$$

۲) α از هر کران بالایی E کوچکتر باشد یعنی اگر β یک کران بالایی دیگر E باشد آنگاه:

$$\alpha \le \beta$$

به عبارت معادل اگر α کران بالایی E باشد و $\beta < \alpha$ آنگاه β نمی تواند یک کران بالایی E باشد.

کوچکترین کران بالای را با $lub\ E$ و یا $Sup\ E$ نشان می دهیم.

مثال ۵ : برای مجموعه $E=\left\{x \mid x=\frac{n}{n+1} : \forall n \in N\right\} \subset R$ خواهیم داشت

$$Sup\ E = ۱$$

$Max\ E =$ موجود نیست

۱-۱-۱۰ تذکر : کوچکترین کران بالایی یک مجموعه در صورت وجود یگانه است.

به عنوان نمونه مجموعه های N ، Z ، Q و R دارای Sup نمی باشند.

تعریف : عضوی مانند α از S را بزرگترین کران پایینی E می نامند هرگاه :

۱) α یک کران پایینی برای E باشد یعنی

$$\forall x \in E \qquad \Rightarrow \qquad x \geq \alpha$$

۲) α از هر کران پایینی بزرگتر باشد یعنی اگر β یک کران پایینی دیگر E باشد ، آنگاه :

$$\beta \leq \alpha$$

۱-۱-۱۱ تذکر : اگر مجموعه E متناهی باشد. آنگاه دارای عضوی با بزرگترین مقدار می باشد که آنرا Max می نامیم که در اینصورت $SupE=Max\ E$ و به صورت مشابه $inf\ E=min\ E.$

۱-۱-۱۲ تذکر : در حالت کلی $Sup\ E$ الزاماً متعلق به E نمی باشد. در صورتی که Sup در خود مجموعه E باشد آنرا با $Max\ E$ نمایش می دهند.

۱-۱-۱۳ تذکر : اگر مجموعه E شامل یک کران بالایی خود باشد. قطعاً این عضو کوچکترین کران بالایی E خواهد بود.

مثال٦ : اگر $E_2 = \{r \in Q, r \leq 0\}, E_1 = \{r \in Q, r < 0\}$ در اینصورت :

$SupE_1 = 0$ وجود ندا رد $= MaxE_1$

$SupE_2 = 0 \qquad MaxE_2 = 0$

۱-۱-۱٤ قضیه : فرض کنید S یک مجموعه مرتب و $E \subseteq S$, چنانچه $\propto$ یک کران بالایی برای E باشد در اینصورت $\propto$ کوچکترین کران بالایی E است اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in E \qquad \exists : \alpha - \varepsilon < x$$

اثبات : ($\Leftarrow$ فرض کنید α کوچکترین کران بالایی E و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. آنگاه چون $\alpha = SupE$ بنابراین $\alpha - \varepsilon$ کران بالایی برای E نخواهد بود.

($\Rightarrow$فرض کنید α یک کران بالایی است و $\beta < \alpha$ در اینصورت $\propto - \varepsilon < x$ قرار دهید.

$$\exists x \in E \qquad \ni: \alpha - \varepsilon < x \xrightarrow{\varepsilon = \alpha - \beta} \alpha - (\alpha - \beta) < x \Rightarrow \beta < x$$

بنابراین x هایی در E وجود دارد به طوریکه $\beta < x$. بنابراین $\beta \neq UbE$ در نتیجه :

$\alpha = SupE$

۱-۱-۱۵ اصل کامل بودن مجموعه اعداد حقیقی (اصل دد کیند) اگر S یک مجموعه مرتب باشد آنگاه گوییم S دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی یا خاصیت Lub است ، هرگاه زیر مجموعه E از S که غیر تهی و کران دار از بالا است دارای کوچکترین کران بالایی باشد.

نشان خواهیم داد که مجموعه اعداد حقیقی دارای خاصیت Lub است. اما مجموعه اعداد گویا یعنی Q دارای خاصیت Lub نیست. فرض کنید زیر مجموعه ای از A و B از اعداد گویا بصورت زیر تعریف شده باشند :

$$A = \{q \in Q^{+} : q^{۲} < ۲\}$$
$$B = \{q \in Q^{+} : q^{۲} > ۲\}$$

به سادگی می توان نشان داد که $B, A \neq \phi$ هستند و نیز A از بالا کراندار و B از پایین کراندار است. ثابت خواهیم کرد که مجموعه A در اعداد گویا دارای کوچکترین کران بالا نیست و B در مجموعه اعداد گویا دارای بزرگترین کران پایینی نمی باشد. (می خواهیم بگوییم که q نمی تواند کران بالا باشد)

فرض کنید $q \in Q^{+}$ اختیار شده باشد عدد دیگر p را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$p=q-\frac{q^{۲}-۲}{q+۲}=\frac{۲(q+۱)}{q+۲}\in Q^{+} \quad \underset{q<p\ ,\ ۰<p}{\Longrightarrow} \quad p^2=\left[\frac{2(q+1)}{q+2}\right]^2$$

$$p^{۲}-۲=\frac{۲(q^{۲}-۲)}{(q+۲)^{۲}} \quad (*) \qquad\qquad p^2-2=\left[\frac{2(q+1)}{q+2}\right]^2-2$$

(یک عدد قبل و یک عدد بعد از q برای A پیدا می کنیم.)

دو حالت زیر را در نظر می گیریم :

۱)اگر $q\in A$ ، آنگاه $q^2-2<0$ ، اکنون با توجه به رابطه(*)خواهیم داشت $p^2-2<0$

در نتیجه:

$$\Rightarrow p^2<2\Rightarrow p\in Q^{+},p\in A$$

بنابراین

$$p>q\xleftarrow{q^2-2<0}p=q-\frac{q^2-2}{q+2}$$

که نتیجه می گیریم کرانهایی بالایی A دقیقاً اعضای B می باشند و ثانیاً مجموعه A نمی تواند دارای بزرگترین مقدار باشد.

۲)اگر $q\in B$ آنگاه $q^2-2>0$ با توجه به رابطه (*) ، $p^2>2$ و چون $p\in Q^{+}$ در نتیجه $p\in B$ و این نشان می دهد که اولاً کرانهای پایینی مجموعه B اعضای مجموعه A می باشند و مجموعه B دارای کوچکترین عضو یا کوچکترین مقدار نمی باشد.

۱-۱-۱٦ نتیجه : زیر مجموعه A از اعداد مثبت و غیر تهی و کراندار است و در اعداد گویا دارای Sup نمی باشد و همچنین B زیر مجموعه ای است غیر تهی و کراندار از پایین از اعداد گویا دارای inf نمی باشد.

۱-۱-۱۷ تذکر : مجموعه های A,B در اعداد حقیقی به ترتیب دارای Sup و inf باشند و داریم

$$SupA=\inf B=\sqrt{2}$$

۱-۱-۱۸ قـضیه : (وجـود اعـداد حقیقی،کـانتور) میـدان مرتبـی وجـود دارد کـه دارای خاصیت Lub بوده و میدان اعداد گویا را به صورت زیر میدان شامل می شود. ایـن میـدان مرتب را مجموعه اعداد حقیقی نامیده و با R نمایش می دهیم.

۱-۱-۱۹ تذکر : اگر مجموعه S دارای خاصـیت Lub باشـد آنگـاه S دارای خاصـیت Glb (بزرگترین کران پایینی) نیز می باشد. یعنی هر زیر مجموعـه غیـر تهـی و کرانـدار از پایین مانند E از مجموعه S دارای بزرگترین کـران پـایینی در S مـی باشـد. زیـرا اگـر E کراندار از پایین و عضوی مانند α یک کران پایینی E باشد آنگاه برای مجموعه E کـه بصورت $E_1=\{-x:x\in E\}$ تعریف می شود کراندار از بالاست.

$$\alpha = LbE \;\Rightarrow\; \alpha\le x \;\;\forall\;\; x\in E \;\Rightarrow\; -\alpha\ge -x \;\;\forall\;\; x\in E \;\Rightarrow\; -\alpha = UbE_1$$

در نتیجه E_1 کراندار از بالاست. بنابه خاصیت Lub مجموعه S نتیجه می شود که مجموعه غیر تهی و کراندار از بالای E_1 دارای کـوچکترین کـران بـالایی در S مـی باشـد. اگـر E_1 $u=Sup$ نشان می دهیم که $inf\,E=-u$. باید نشان دهیم که

۱) عنصر u- یک کران پایینی برای مجموعه E_1 است. داریم :

$$U=SupE_1 \;\Rightarrow\; U=UbE_1 \;\Rightarrow\; \forall x\in E_1 \;\; U\ge -x \;\Rightarrow\; -U\le x$$
$$,\forall x\in E \;\Rightarrow\; -U=L.b \;\; E$$

۲)باید نشان دهیم که $-u$ بزرگترین کران پایینی E می باشد.

$$B>-u \;\Rightarrow\; -B<u \xrightarrow{u=SupE_1} \exists\; -x\in E_1 \quad \ni:\; -B<-x$$
$$\Rightarrow\; B>x \;,\; x\in E \;\Rightarrow\; B\ne L.b \;\; E$$

بنابراین u- بزرگترین کران پایینی E است در نتیجه $-u=inf\,E$

مثال۷ : اگر aE برای $a>0$ بصورت $aE=\{ab:b\in E\}$, تعریف شود نشان دهید

$$(1)\,Sup \;\; aE = a \;\; Sup \;\; E$$

$$(2)\; Sup \;\; \bar{a}E = a \;\; \inf \;\; E$$

جواب : (۱) اول نشان می دهیم که ac یک کران بالایی است و سپس نشان می دهیم ac کوچکترین کران بالایی است.

الف) $SupE=c \quad , \quad Sup\, aE = d$

$$\forall b \in E \qquad c \geq b, a \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad ac \geq ab$$

ac یک کران بالا برای aE است و $Supa\ E=d$. بنابراین $d \leq ac$

ب)فرض کنیم B یک کران بالایی برای aE باشد نشان می دهیم که $B>ac$. چون B کران بالایی aE می باشد در نتیجه برای هر $b \in E$ داریم $ab<B$ بنابراین $\forall b \in E \rightarrow b < B/a$ از اینجا چون $Sup\ \ E=C$ خواهیم داشت $C \leq B/a$. از اینرو $ac<B$ یعنی ac از هر کران بالا ، کوچکتر است.

۱-۲ نتایج اصل موضوع کامل بودن اعداد حقیقی

۱-۲-۱ قضیه (خاصیت ارشمیدسی) : اگر x,y دو عدد حقیقی و $x>۰$ آنگاه عدد طبیعی چون n موجود است به طوریکه $nx>y$

اثبات : اگر چنین n هایی وجود نداشته باشد آنگاه y برای مجموعه $A = \{nx : n \in N\}$ یک کران بالایی خواهد بود در نتیجه بنابه اصل کامل بودن اعداد حقیقی A دارای کوچکترین کران بالایی خواهد بود اگر فرض کنیم $SupA=a$ در اینصورت :

$$\forall n \in N \qquad a - x \geq nx = (n+۱)x - x$$

بنابراین $a\text{-}x$ یک کران بالایی برای مجموعه A خواهد بود و باید از کوچکترین کران بالایی ناکوچکتر باشد به عبارتی باید داشته باشیم $a \leq a - x$ که این متناقص با مثبت بودن x است.

۱-۲-۲ قضیه : برای هر عدد حقیقی x، عددی طبیعی مانند n وجود دارد بطوریکه $n>x$

اثبات : فرض کنیم عددی حقیقی مانند y وجـود داشـته باشـد بطوریکـه $\forall n \in \mathrm{N}, n \le y$ بنابراین y یک کران بالایی برای مجموعه غیر تهی است بنابه اصل کامل بودن اعداد حقیقـی مجموعه غیر تهی و کراندار از بالای N دارای کوچکترین کران بالایی می باشد.فرض کنیـد $a=SupN$ بنابراین:

$\forall n \in \mathrm{N}, a \ge n$

از آنجا که $n+1 \in \mathrm{N}$ و a یک کران بالای است خواهیم داشت :

$\forall n \in \mathrm{N} \quad a \ge n+1$

در نتیجه:

$\forall n \in \mathrm{N} \quad a-1 \ge n$

بنابراین $a-1$ یک کران بالایی برای N خواهد بود و a کوچکترین کـران بـالایی N اسـت باید داشته باشیم $a \le a-1$ در نتیجه $0 \le 1$ که تناقض اسـت. بنـابراین فـرض اولیـه باطـل خواهد شد.

۱-۲-۳ نتیجه : مجموعه اعداد طبیعی از بالا کراندار نیست.

۱-۲-٤ قضیه : برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی چون n وجود دارد بطوریکه $1/n < \varepsilon$

اثبات : چون $\varepsilon > 0$ است $1/\varepsilon$ عددی حقیقی و مثبت خواهد بود و بنابه قضیه قبل عـددی چون n موجود است که $n > 1/\varepsilon \Leftarrow 1/n < \varepsilon$

۱-۲-۵ قضیه : برای هر عدد حقیقی x، عددی صحیح چون n وجود دارد بطوریکه

$n \le x < n+1$

اثبات : $x \in R$ بنابراین $|x|>۰$ و با به توجه به قضایای قبل عددی طبیعی چون N وجـود دارد بطوریکه $|x|<N$ بنابراین $-N<x<N$ مجموعه متناهی از اعداد صحیح به صورت :

$A=\{-N,-N+1,\dots,-1,0,1,\dots,N\}$ و بزرگترین عضو مجموعه A که از x کوچکتر باشد را n می نامیم و در اینصورت خواهیم داشت $n \le x < n+1$ عدد n که در قضیه قبل بدست آمد جزء صحیح x نامیده می شود.

۱-۲-۶ قضیه : برای هر عدد حقیقی x و هر عدد طبیعی N عددی صحیح چون n موجود است بطوریکه

$$n/N \le x < \frac{n+1}{N}$$

اثبات : کافی است قضیه قبل را برای Nx بازنویسی کنیم در آن صورت می توان n را چنان یافت که $n<Nx<n+1$. اینک چون $N \in \mathrm{N}$ است خواهیم داشت

$$\frac{n}{N} \le x \le \frac{n+1}{N}$$

۱-۲-۷ قضیه : برای هر عدد حقیقی x و هر ε مثبت عددی گویا چون r وجود دارد به طوریکه $|x-r|<\varepsilon$ به عبارتی

$$\forall x \in R \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in Q \quad \ni \quad |x-r| < \varepsilon$$

اثبات : از آنجایی که $\varepsilon > 0$ داده شده می توان N را طوری داد که $1/N < \varepsilon$ اکنون با توجه به قضیه قبل می توان N را چنان یافت که $\frac{n}{N} \le x < \frac{n+1}{N}$ و در نتیجه $0 \le x - \frac{n}{N} < \frac{1}{N}$ اکنون r هایی که در جستجویش هستیم همان $\frac{n}{N}$ می باشد زیرا واضح است که $|x-\frac{n}{N}| < \varepsilon$ و قضیه به اثبات می رسد.

۱-۲-۸ قضیه : (چگالی اعداد گویا) بین هر دو عدد حقیقی حداقل یک عدد گویا وجود دارد به قسمی که:

$$\forall x,y \in R, x<y \qquad \exists r \in Q \qquad \ni: x<r<y$$

اثبات : فرض کنیم x,y دو عدد حقیقی باشند که $x<y$ از آنجا که $y-x>0$ است بنابه قضایای قبل عددی طبیعی چون N می توان یافت به طوریکه $\frac{1}{N} < y-x$ (میتوان $y-x$ را

به عنوان یک $0 < \varepsilon$ در نظر گرفت) بنابر قضایای قبلی می توان عددی صحیحی چون n یافت به طوریکه $\frac{n}{N} < y < \frac{n+1}{N}$ باشد از اینجا خواهیم دانست $0 \le y - \frac{n}{N} < \frac{1}{N}$ چون $\frac{1}{N}$ از y-x کوچکتر است بنابراین خواهیم داشت :

$$0 \le y - \frac{n}{N} < y - x$$

با اضافه کردن y- به طرفین نامساوی اخیر و سپس ضرب طرفین در یک عدد منفی خواهیم داشت

$$0 < y - \frac{n}{N} < y - x \xrightarrow{+(-y)} -y < -\frac{n}{N} < -x \overset{\times(-1)}{\Rightarrow} x < \frac{n}{N} < y$$

۱-۲-۹ تذکر : اگر x,y دو عدد گویا باشند بطوریکه $x<y$ آنگاه واضح است که عدد گویای $\frac{x+y}{2}$ بین این دو عدد خواهد بود و در این حالت اثبات قضیه بسیار راحت است.

۱-۲-۱۰ قضیه : (چگالی اعداد اصم) بین هر دو عدد حقیقی دلخواه حداقل یک عدد اصم وجود دارد به عبارتی :

$$\forall x, y \in R, x < y \ \ \exists \ \ q \in Q^{C} \ \ \ni: \ \ x < q < y$$

اثبات : می توان طرفین $x<y$ را در $\sqrt{2}$ ضرب نموداکنون بین دو عدد $\sqrt{2}y, \sqrt{2}x$ که دو عدد حقیقی می باشند با توجه به قضیه قبل الزاماً عددی گویا چون r وجود دارد به عبارتی داریم

$$\sqrt{2}x < r < \sqrt{2}y \Rightarrow x < \frac{r\sqrt{2}}{2} < y$$

با فرض $q = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ قضیه اثبات می شود.

۱-۲-۱۱ قضیه : (ریشه n ام) برای هر عدد دلخواه و مثبت x و عدد طبیعی n عدد مثبت و یگانه ای چون y موجود است بطوریکه $y^n = x$ (معمولاً y رابا نماد $x^{1/n}$ نمایش داده و آنرا ریشه n ام x می نامند :

$$\forall x \in R^+ \qquad \forall n \in N \quad \exists y \in R^+ \quad \ni: y^n = x$$

اثبات: نخست یگانگی y را ثابت می کنیم برای اثبات یگانگی فرض می کنیم y_2, y_1 اعدادی مثبت باشند بطوریکه $y_2^n = x, y_1^n = x$ در اینصورت یکی از این دو مقدار از دیگری بزرگتر می باشد بدون آنکه از کلیت مسأله کم شود فرض کنید $y_1 < y_2$ در اینصورت $y_1^n < y_2^n$ و از طرفی داریم $y_1^n - y_2^n = (y_1 - y_2)(y_1^{n-1} + \ldots + y_2^{n-1})$ ولی از طرفی : $y_1^n - y_2^n = x - x = 0$ $y_1 < y_2$ نمی تواند برقرار باشد و بطور مشابه $y_1 > y_2$ نمی تواند برقرار باشد در نتیجه

$$y_1 = y_2$$

حال برای اثبات وجود و امکان این تساوی $(y^n = x)$ فرض می کنیم $E = \{t \in R^+ \mid t^n < x\}$ نشان می دهیم E مجموعه ای ناتهی و کراندار است از بالا. از آنجاییکه $t = \dfrac{x}{x+1}$ عددی مثبت و کوچکتر از یک و کوچکتر از x است خواهیم داشت : $t^n < t, t < x$ در نتیجه $t^n < x$ و این یعنی $t \in E$ و در نتیجه E غیر تهی است. اکنون نشان می دهیم E از بالا کراندار است و $x+1$ یک کران بالایی برای مجموعه E می باشد.

فرض کنید $t > x+1$ در اینصورت $t > x$ و $t > 1$ و بنابراین $t^n > t$ و در نتیجه $t^n > x \Leftarrow t \notin E$ یعنی عضوی بزرگتر از $(x+1)$ وجود ندارد. در نتیجه t یی که بزرگتر $(x+1)$ باشددر مجموعه E نیست و این معادل باآن است که هر t ای در E دارای کوچکترین کران بالایخواهد بود. فرض کنید $y = SupE$، نشان می دهیم که $y^n = x$ و قضیه کامل می شود. برای آنکه نشان دهیم $y^n = x$ نشان خواهیم داد که دو حالت $y^n > x, \;\; y^n < x$ به تناقض منجر می شوند.

حالت اول : اگر $y^n < x$ باشد نشان خواهیم داد که عددی مثبت چون h وجود دارد به طوری که $y + h \in E$ و این خلاف تعریف y می باشد چون y را به عنوان Sup مجموعه E در نظر گرفته ایم. از آنجا که فرض کردیم $y^n < x$ ، عبارت $\dfrac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ ، عددی مثبت

و بنابه قضیه عددی چون N وجود دارد بطوریکه $\frac{1}{N} < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ اکنون با فرض $h=\frac{1}{N}$ خواهیم داشت $0<h<1$ ؛ $\frac{1}{N} < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$. توجه کنید که اگر a,b دو عدد حقیقی باشند بطوریکه $0<a<b$ آنگاه با استفاده از بسط نیوتن خواهیم داشت :

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \ldots + a^{n-1}) < (b-a)(nb^{n-1}) \qquad (*)$$

اکنون در بسط اخیر فرض کنید $a=y$ و $b=y+h$ است آنگاه با توجه به نامساوی خواهیم داشت :

$$(y+h)^n - y^n < nh(y+h)^{n-1}$$

حال به جای h از $\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ استفاده می کنیم :

$$(y+h)^n - y^n < nh(y+h)^{n-1} < n(y+h)^{n-1}\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}} < x-y^n$$

بنابراین :

$$(y+h)^n < x \Rightarrow y+h \in E$$

که با $y=SupE$ در تناقض است.

حالت دوم : اگر $y^n > x$ فرض کنیم نشان خواهیم داد عددی مثبت چون k وجود دارد بطوریکه $0<k<y$ و $y-k$ یک کران بالایی برای مجموعه E است. از آنجا که $y^n > x$ ، و عدد مثبت $k=\frac{y^n-x}{ny^{n-1}}$ در شرط $0<k<y$ صدق می کند ، توجه کنید که داریم $k=\frac{1}{n}(\frac{y^n-x}{y^{n-1}})=\frac{1}{n}(y-\frac{x}{y^{n-1}})$ و $\Leftarrow y > \frac{1}{n}(y-\frac{x}{y^{n-1}}) = k$. فرض کنید $t>y-k$ آنگاه خواهیم داشت :

$$t^n > (y-k)^n \Rightarrow y^n-(y-k)^n > y^n - t^n$$

با فرض $b=y$, $a=y-k$ از بسط نیوتن خواهیم داشت :

$$y^n-(y-k)^n<(y-(y-k))ny^{n-1}=\frac{y^n-x}{ny^{n-1}}xng^{n-1}\Rightarrow -(y-k)^n<-x$$

$$\Rightarrow (y-k)^n>x\Rightarrow t^n>x\Rightarrow t\notin E \qquad \forall t\in E\Rightarrow t<y-k$$

و این یعنی y-k کران بالایی برای E خواهد بود و این با Sup بودن y متناقض است

بنابراین حالت دوم نیز باطل است در نتیجه $y^n=x$.

۱-۳ فواصل بسته لانه ای :

اگر a,b دو عدد حقیقی و $a<b$

$\{x\in R\,|\,a\le x\le b\}=[a,b]$

$\{x\in R\,|\,a<x<b\}=(a,b)$

اگر $\{I_n\}$ دنباله ای از فواصل بسته باشد و در حالیکه

$I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq .....$

یا به عبارتی $I_n\supseteq I_{n+1}$. آنگاه علاقمندیم بررسی کنیم که چه موقع اشتراک فواصل مذکور بسته است ، چه موقع تهی و چه موقع ناتهی است.

مثال۸ : اگر $I_n=(0,\frac{1}{n})$ برای هر عدد طبیعی n ، فاصله مذکور طولی برابر $\frac{1}{n}$ دارد و نیز داریم $I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq .....$ اشتراک فواصل اخیر برابر تهی می باشد.

زیرا اگر x عدد مثبت باشد آنگاه باتوجه به طبق قضایای قبلی عددی چون $m\in N$ وجود دارد بطوریکه $\frac{1}{m}<x$ $\Leftarrow$ $x\notin I_m$ اعداد منفی و صفر نیز به هیچیک از I_nها تعلق ندارد

بنابراین هیچ عدد حقیقی در $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ نخواهد بود به عبارتی $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n=\phi$

مثال۹ : اگر $A_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ در اینصورت $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n=\{0\}$ بدیهی است که صفر متعلق به همه I_nها می باشد بنابراین در اشتراک آنها نیز خواهد بود و مشابه مثال قبل می توان نشان داد که هیچ عدد مثبت یا منفی در اشتراک A_n ها قرار ندارد.

مثال۱۰ : اگر $B_n=[n,+\infty]$ آنگاه $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n=\phi$ زیرا برای هر عدد حقیقی x چون m وجود دارد بطوریکه $x<m$ در نتیجه :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n=\phi \Leftarrow x\notin\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \Leftarrow x\in B_m$$

قضیه بعد نشان می دهد که اگر دنباله $\{I_n\}$ دنباله ای از فواصل بسته تو در تو باشد الزاماً اشتراک ناتهی است.

۱-۳-۱ قضیه : اگر $\{I_n\}$ دنباله ای از فواصل بسته از اعداد حقیقی باشد آنگاه $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ ناتهی است.

اثبات : فرض کنید $I_n=[a_n,b_n]$ و برای هر عدد طبیعی n ، $E=\{a_n:n\in N\}$ در اینصورت E کراندار از بالاست زیرا b_1 یک کران بالایی برای E است بنابه اصل کمال اعداد حقیقی E در مجموعه اعداد حقیقی دارای R دارای کوچکترین کران بالاست. فرض کنید $a=SupE$ در اینصورت $a\in\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ توجه کنید که بنابه تعریف a داریم $a\geq a_n$ و برای هر عدد طبیعی m داریم $a_m<a_{m+k}<b_{m+k}<b_k$ در نتیجه برای هر عدد طبیعی n داریم $a_n<b_k$ بنابراین هر یک از b_k ها یک کران بالایی برای E خواهد بود و چون a کوچکترین کران بالایی است خواهیم داشت $a\leq b_k$ از طرفی $a\geq a_k$ در نتیجه $a_k\leq a\leq b_k$ و این بدان معناست که a متعلق به همه I_n ها یا I_k می باشد پس $a\in\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$

به طور مشابه اگر فرض کنیم $F=\{b_n,n\in\mathrm{N}\}$ آنگاه F کران پایینی خواهد داشت و بنابه

اصل کمال بزرگترین کران پایینی دارد. به آسانی میتوان ثابت کرد که $b=\inf F\in\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ و چنانچه a,b یکی نباشد آنگاه به سادگی می توان ثابت کرد که :

$$[a,b]\subseteq\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$$

می توان قضیه اخیر را به عنوان یک اصل در نظر گرفت و خاصیت کمال اعداد حقیقی را به صورت قضیه بعدی اثبات کرد.

۱-۳-۲ قضیه : هر مجموعه کراندار از بالا و ناتهی از اعداد حقیقی دارای کوچکترین کران بالایی است.

اثبات : فرض کنید E مجموعه غیر تهی و کراندار از اعداد حقیقی باشد b کران بالایی آن باشد. چنانچه $a<b,a\in R$ کوچکترین کران بالایی E نباشد. آنگاه فاصله [a,b] را به عنوان I در نظر می گیریم نقطه وسط این فاصله را در نظر گرفته. اگر $\frac{a+b}{2}$ یک کران بالایی برای E بود آنگاه فرض می کنیم $I_2=[a_1,\frac{a+b}{2}]=[a_2,b_2]$. اگر $\frac{a+b}{2}$ کران بالایی E نبود آنگاه فرض می کنیم $I_2=[\frac{a+b}{2},b_1]=[a_2,b_2]$ اکنون بطور مشابه نقطه $\frac{a_2+b_2}{2}$ را در نظر می گیریم (که نقطه وسط I_2 است) مشابه قبل اگر $\frac{a_2+b_2}{2}$ کران بالایی E بود آنگاه :

$$I_3=[a_2,\frac{a_2+b_2}{2}]=[a_3,b_3]$$

و اگر $\frac{a_2+b_2}{2}$ کران بالایی E نبود. فرض می کنیم :

$$I_3=[\frac{a_2+b_2}{2},b_2]=[a_3,b_3]$$

با ادامه این رویه دنباله ای از واصل بسته تودرتو خواهیم یافت که داریم $I_n=[a_n,b_n]$ که $a_n \neq u.bE$, $b_n = u.bE$ و همچنین طول I_n برابر $\frac{b-a}{2^n}$. طبق اصل فواصل بسته تو در تو $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \phi$ و چون $\lim_{n\to\infty}(I_n)=\lim_{n\to\infty}(\frac{b-a}{2^n})=0$ ، اشتراک I_n ها تنها یک عضو دارد.

۱-۳-٤ تذکر : بدیهی است که اگر اشتراک I_n بیش از یک عضو داشته باشد آنگاه طبق آنچه گفته شد شامل یک فاصله بوده و طول آن نمی تواند به صفر همگرا باشد.) فرض کنید $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ نشان می دهیم که $\alpha = SupE$ است باید نشان دهیم که (۱) α یک کران بالایی برای مجموعه E است. (۲) α از هر کران بالا کوچکتر است.

(ب. خ) فرض کنید عضوی چون s که $s \in E$ که $\alpha < s$ باشد آنگاه خواهیم داشت $\alpha < s$ $\Leftarrow s-\alpha>0 \Leftarrow$ طبق اصل ارشمیدس و $b\text{-}a>۰$:

$$\frac{1}{n_0}<\frac{s-\alpha}{b-a} \quad \exists \quad n_0 \in \mathrm{N} \quad , \quad \frac{s-\alpha}{b-a}>0$$

از آنجا خواهیم داشت :

$$\frac{1}{n_0}<\frac{s-\alpha}{b-a} \quad \exists \quad \rightarrow \frac{1}{2^{n_0-1}}<\frac{s-\alpha}{b-a} \Rightarrow \frac{b-a}{2^{n_0-1}}<s-\alpha$$

و طول n_0ها برابر است با $\frac{b-a}{2^{n_0-1}} = I_{n_0}=b_{n_0}-a_{n_0}$ پس $b_{n_0}-a_{n_0}<s-\alpha \quad (*)$ از طرفی $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ در نتیجه عددی طبیعی چون m_0 وجود دارد که $\alpha \in I_{m_0}$ اگر فرض کنیم $k=\max\{n_0,m_0\}$ آنگاه داریم $a_{k_0} \leq \alpha \leq b_k \Leftarrow s-b_k \leq s-\alpha \leq s-a_k$ (**) با توجه به (*)و(**) نتیجه می شود که :

$b_k-a_k<s-a_k \Leftarrow b_k<s$ و چون b_k یک کران بالایی برای مجموعه E بود. به یک تناقض رسیدیم و بنابراین α کران بالایی خواهد بود.

(ما در این قضیه می خواستیم یک عضو مشترک پیدا کنیم)

(۲) فرض کنیم $\beta < \alpha$ باید نشان دهیم که β نمی تواند یک کران بالایی E باشد خواهیم داشت $0 < \alpha - \beta \Rightarrow \alpha > \beta \leftarrow$ پس بنابه قضیه بیان شده :

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{n_0} < \frac{\alpha-\beta}{b-a}$$

$$\exists \ n_0 \in N \ \ \ni: \ \frac{b-a}{2^{n_0}} < \alpha - \beta$$

بنابراین I_{n_0} موجود است بطوریکه $L\ (I_{n_0})$ بصورت زیر خواهد بود:

$$L(I_{n_0}) = b_{n_0} - a_{n_0} = \frac{b-a}{2^{n_0-1}} < \alpha - \beta \qquad (1)$$

از آنجا که $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ در نتیجه $\alpha \in I_{n_0}$ و $n_0 > 1,...$

بنابراین خواهیم داشت $a_{n_0} < \alpha < b_{n_0} \quad \Leftarrow \quad a_{n_0} < \alpha < b_{n_0}$

$$a_{n_0} - \beta < \alpha - \beta < b_{n_0} - \beta \qquad (2)$$

(۱) و (۲) نتیجه خواهد بود $b_{n_0} - a_{n_0} < b_{n_0} - \beta$

در نتیجه $a_{n_0} > \beta$ که تناقض است.

۱-٤ اعداد مختلط

تعریف : اگر a,b دو عدد حقیقی باشند (a,b) را با Z نشان داده و به آن « عدد مختلط » می گوییم و مجموعه اعداد مختلط را با $\not{C}$ یا C نمایش می دهیم. عملگر های جمع و بر ضرب روی C را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

شرط مساوی بودن :

$(a,b)=(c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a=c\ ,\ b=d$

۱-٤-۱ قضیه : مجموعه اعداد مختلط با اعمال جمع و ضرب تعریف شده یک میدان است.

اثبات : تنها وارون پذیری روی عمل ضرب را بررسی می کنیم. ۱۰ خاصیت دیگر به طور مشابه اثبات می شوند. برای عضو ناصفر $Z=(a,b)$ و معکوس ضربی به صورت :

$$z^{-1}=(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$$

معرفی می شود به سادگی می توانید ببینید که $z^{-1}=(1,0)$

توجه کنید اگر $a,b\in R$ به سادگی نتیجه می شود که :

$$(a,0)(b,0)=(ab,0)$$

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$

بنابراین اگر مجموعه تمام جفتهای مرتبی از اعداد حقیقی که در مؤلفه دوم در نظر بگیریم نسبت به عملگرهای C بسته و در نتیجه زیر میدانی از C می باشند.

و با توجه به اینکه هر عدد حقیقی مانند a را بصورت a_{n_0} در نظر گرفت نتیجه می شود که R به عنوان زیر میدانی از اعداد مختلط است.

تعریف : عدد مختلط (۱و۰) را با i نمایش می دهیم و داریم $i^2=-1$

$$i^2=(0,1)(1,0)=(-1,0)=-1$$

از اینجا می توان تساوی :

$$Z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

نتیجه : هر عدد مختلط را می توان بشکل $Z=a+bi$ که a را جزء حقیقی و b را جزء موهومی می نامیم نمایش داد.

تعریف : اگر $Z=a+bi$ یک عدد مختلط باشد آنگاه مزدوج Z را با $\overline{Z}$ نشان می دهیم :

$$\overline{Z}=a-bi$$

خواص زیر را بسادگی می توانید اثبات کنید.

خواص $\overline{Z}$:

$1) Z\overline{Z}\in R^+$

$2) Z\overline{Z}=0 \Leftrightarrow Z=0$

$3) \overline{(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)}=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}+\ldots+\overline{Z_n}$

$4) \overline{Z_1.Z_2\ldots Z_n}=\overline{Z_1}.\overline{Z_2}\ldots\overline{Z_n}$

$5) Z+\overline{Z}=2a=2\operatorname{Re}(z)$

$6) Z-\overline{Z}=2bi=2i\operatorname{Im}(z)$

بدیهی است که بنابه قضیه ریشه n ام با توجه به آنکه $Z\overline{Z} \in R^{+}$ و $(Z\overline{Z})^{\frac{1}{2}}$ موجود و یگانه است. این مقدار را با $|Z|$ نشان داده و آنرا قدر مطلق اعداد مختلط می نامیم.به عبارتی $|Z|$ برابراست با $(Z\overline{Z})^{\frac{1}{2}}$.

اگر $Z=a+bi$ به سادگی می توانید ثابت کنید که $|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$

۱-٤-۲ خواص قدر مطلق :

$1)\ |Z|\geq 0$

$2)\ |Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|$

$3)\ |\mathrm{Re}(z)|\leq|Z|$

$4)\ |\mathrm{Im}(z)|\leq|Z|$

$5)\ |Z_1+Z_2|\leq|Z_1|+|Z_2|$

اثبات (٥)

$$|Z_1+Z_2|^2=(Z_1+Z_2)(\overline{Z_1+Z_2})=(Z_1+Z_2)(\overline{Z_1}+\overline{Z_2})$$
$$=Z_1\overline{Z_1}+Z_1\overline{Z_2}+\overline{Z_1}Z_2+Z_2\overline{Z_2}=|Z_1|^2+Z_1\overline{Z_2}+\overline{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}}+|Z_2|^2$$
$$=|Z_1|^2+2\mathrm{Re}(Z_1\overline{Z_2})+|Z_2|^2\quad\leq\quad|Z_1|^2+2|Z_1\overline{Z_2}|+|Z_2|^2$$
$$=|Z_1|^2+2|Z_1||Z_2|+|Z_2|^2=(|Z_1|+|Z_2|)^2$$
$$|Z_1+Z_2|^2\leq(|Z_1|+|Z_2|)^2$$

نامساوی کوشی :

اگر $a_1,a_2,...,a_n$ و نیز $b_1,b_2,...,b_n$ اعداد مختلط باشند آنگاه :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i.\overline{b_i}\right|^2\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$$

اثبات : فرض کنید $A=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2$ و $B=\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$ و $C=\sum_{i=1}^{n}a_i.\overline{b_i}$

اگر $B=0$ ، نامساوی بدیهی است. فرض کنید :

$B>0 \Leftarrow \sum_{i=1}^{n}|Ba_i-Cb_i|^2\geq 0$ بنابراین خواهیم داشت :

$$\sum_{i=۱}^{n}| Ba_i - Cbi |^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(Ba_i - Cb_i)(Ba_i - Cb_i)$$
$$= \sum_{i=۱}^{n}(Ba_i - Cb_i)(B\overline{a_i} - \overline{Cb_i})$$
$$= B^۲\sum_{i=۱}^{n}| a_i |^۲ + C^۲\sum_{i=۱}^{n}| b_i |^۲ - B\overline{C}\sum a_i b_i - BC\sum b_i \overline{a_i}$$
$$= B^۲ A - B\overline{C}C - BC\overline{C} + | c |^۲ B$$
$$= B^۲ A - B| C |^۲ = B(BA - | C |^۲) \geq ۰, B \geq ۰$$
$$= BA\_| C |^۲ \geq ۰ \Rightarrow | C |^۲ \leq BA$$

در حالتی که $a_n,...,a_2,a_1$ و $b_n,...,b_2,b_1$ اعداد حقیقی هستند نامساوی کوشی بصورت زیر اثبات می شود.

اگر فرض کنیم $F(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2$ آنگاه $F(x)$ برای هر عدد حقیقی x نامنفی بوده و خواهیم داشت :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}(a^2{}_i x^2 + 2a_i b_i . x + b_i{}^2)^2$$

که چون $F(x)$ همواره نامنفی است خواهیم داشت:

$$x^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + x\sum_{i=1}^{n}2a_i b_i + \sum_{i=1}^{n}b^2{}_i \geq 0$$

از آنجا که این عبارت یک سه جمله ای درجه دوم است و بنابراین باید مبین آن (مبین $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\Delta = b^2 - 4ac$ است)نامثبت باشد بنابراین خواهیم داشت :

$$(\sum 2a_i b_i)^2 - 4\sum a_i{}^2 4\sum b_i{}^2 \leq 0$$

با ساده کردن ٤ از طرفین نامساوی خواهیم داشت:

$$(\sum a_i b_i)^2 - \sum a_i^2 \sum b_i^2 \leq 0$$

۱-۵ فضای هندسی R^n

اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ اعدادی حقیقی باشند آنگاه n تایی مرتب $(x_1, x_2, ..., x_n)$ را با X نشان داده و آنرا عضوی از فضای حاصلضرب $\underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n}$ می نامیم. این فضای حاصلضرب را با R^n نشان داده و خواهیم داشت :

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R, i = 1, ..., n\}$$

در حالت خاص که $n=1$ باشد همان فضای اعداد حقیقی حاصل می شود و برای $n=2$ صفحه اعداد مختلط یا صفحه دکارتی حاصل می شود. چنانچه $n=3$ باشد فضای هندسی R^3 و برای $n>3$ نمی توان تجسمی برای R^n بیان نمود.

اعضای R^n را با حروف بزرگ $X, Y, ..$ نمایش داده و عملهای جمع برداری و ضرب اسکالر را برای $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ و $\alpha \in R$ بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$\alpha . X = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha_n)$$

به سادگی می توان نشان داد که با اعمال فوق R^n یک فضای برداری است. همینطور برای عناصر فضای R^n ضرب داخلی دوبردار را بصورت :

$$X.Y = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

تعریف می کنیم در حالت خاص خواهیم داشت :

$$X.X = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

به سادگی می توان خواص زیر را اثبات نمود :

۱) $X.X = X^2 \geq 0$

تساوی زمانی برقرار است که X بردار صفر باشد.

برای هر سه بردار Z, Y, X عمل ضرب نقطه ای روی جمع بخش پذیر است یعنی :

۲) $X(Y+Z)=X.Y+X.Z$

۳) $(Y+Z)X=Y.X+Z.X$

٤) $(\propto Y)X=\propto(YX)=Y(\propto X)$

٥) $X.Y=Y.X$

۱-٥-۱ فضای نُرم شده : اگر x یک فضای برداری باشد آنگاه $f:x\to R$ را یک نرم روی x می نامیم هرگاه f سه شرط زیر را داشته باشد.

۱) $\forall x\neq 0 \quad f(x)>0 \quad , \quad f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

۲) $f(\alpha x)=(\alpha)f(x)$

۳) $f(X+Y)\leq f(X)+f(Y)$

معمولاً یک نرم را برای متمایز بودن از توابع چند متغیره بصورت $f(x)=\|x\|$ مشخص می کنیم.

تعریف : اگر بر مجموعه ای یک نرم موجود باشد آنگاه آن مجموعه را یک فضای نرم شده نامند. بعنوان نمونه تابع قدر مطلق ، فضای اعداد حقیقی و نیز اعداد مختلط را به یک فضای نرم شده تبدیل می کند. همینطور عملگر ضرب داخلی فضای R^n را به یک فضای نرم شده تبدیل می کند. برای اثبات این مطلب روابط (۱)و(۲)و(۳) را در تعریف نرم بررسی می کنیم.

خاصیت (۱) فی البداهه برقرار است زیرا توجه کنید که :

$$[x.x=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2>0 \quad x\neq 0] \ , \ [x.x=0 \ ; \ x=0]$$

برای اثبات خاصیت (۲) خواهیم داشت :

$$\|\alpha x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)^2}=|\alpha|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}=|\alpha| \ \|x^2\|$$

توجه کنید $\|x^2\|=x.x$.

برای اثبات خاصیت (۳) که همان نامساوی مثلثی است بصورت زیر از نامساوی کوشی استفاده می کنیم :

$$\| x+y \|^2=(x+y)(x+y)=x.x+y.x+x.y+y.y=\| x \|^2+\| 2x.y \|+\| y \|^2$$

از آنجا که $X.Y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ بنابراین داریم :

$$\| x+y \|^2 \le \| x \|^2+2\| xy \|^2+\| y \|^2=(\| x \|^2+\| y \|^2)$$

با جذر گرفتن از نامساوی آخر ، نامساوی مثلثی نیز اثبات می شود

مثال ۱۱: اگر برای هر نقطه x در R^n تابع $\| \ \|: R^n \to R$ بصورت $\| X \|=| x_1 |+...+| x_n |$ تعریف کنیم آنگاه بسادگی می توانیم بفهمیم که این تابع یک نرم بر فضای R^n است توجه کنید نرم معمولی که قبلاً بیان شد بصورت $\| x \|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}}$ نرم α بصورت زیر تعریف می شود :

$$\| X \|_\infty=Max\{| x_1 |,...,| x_n |\} \quad , \quad \| \ \|_\infty: R^n \to R$$

تعریف : اگر X یک فضای نرم شده بویسله دو نرم $\| \ \|,\| \ \|'$ باشد آنگاه نرم های مذکور معادل نامیده می شود. هرگاه اعداد مثبتی چون α , β موجود باشد بطوریکه

$$\propto \| x \|' \le \| x \| \le \beta \| x \|'$$

مثال ۱۲ : دو نرم $\| \ \|_1$ ، $\| \ \|_2$ معادل یکدیگر می باشند. زیرا داریم :

$$\frac{1}{2}\| X \|_1 \le \| X \|_2 \le n\| X \|_1$$

۱-۵-۲ فضای متریک : اگر X یک مجموعه ناتهی باشد تابع $d: X \times X \to R$ را یک تابع فاصله یا یک متریک بر روی X می نامند. هر گاه d دارای شرایط زیر باشد :

۱) $\mathrm{d(x,y)} \ge 0 \quad x \ne y \quad ; \quad d(x,y)=0 \quad x=y$

۲) $d(x,y)=d(y,x)$

۳) $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$

مجموعه همراه با تابع d را یک فضای متریک نامیده و بصورت (X,d) نمایش داده می شود و اگر متریک مشخص باشد و بیم اشتباه نرود فضای متریک را با همان X مشخص می کنیم.

نکته : هر فضای نرم شده ای یک فضای متریک است برای نرم X کافی است متر را بصورت $d(x,y)=||x-y||$ معرفی کنیم در اینصورت اثبات فضا های متریک به سادگی مشخص خواهد بود زیرا داریم :

$$d(x,y)=||x-y||\geq 0$$
$$d(x,x)=||x-x||=||0||$$
$$d(x,y)=||x-y||=||y-x||=d(y,x)$$
$$d(x,z)=||x-z||=||x-y+y-z||\leq||y-x||+||y-z||=d(x,y)+d(y,z)$$

مثال۱۳ : برای $X=\mathrm{R}$ مجموعه اعداد حقیقی متر معمولی بصورت $d(x,y)=|x-y|$ بسادگی می توانید ثابت کنید که R یک فضای متریک است.

مثال۱٤ : (فضای متریک مجزا یا گسسته) اگر X یک مجموعه غیر تهی باشد متریک گسسته بصورت :

$$d_1(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

تعریف می شود بسادگی می توانیم خواص متریک را برای متریک مجزا بررسی کنیم. این فضای متریک از اهمیت ویژه ای برخوردار است و چنانچه خواهید دید در بسیاری از موارد مثال نقض مناسب برای رد برخی گزاره ها است.

اگر X فضای متریک باشد آنگاه از یک متر می توان متر های جدیدی را معرفی کرد. به عنوان مثال اگر d یک متر باشد آنگاه d' با ضابطه:

$$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

یک متر جدید بر روی X خواهد بود. اثبات این مطلب نیز بعهده دانشجو است.

مثال ۱۵ : اگر (x,d) یک فضای متریک باشد و d' با ضابطه $d'(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$ یک متریک بر x خواهد بود.

می توانیم خاصیت نامساوی مثلثی را برای تعداد زیادی نقطه در فضا بیان کرد. اگر $n, p_1 \dots p_n$ نقطه از x باشد آنگاه خواهیم داشت :

$$d(p_1,p_n)\le d(p_1,p_2)+d(p_2,p_3)\dots+d(p_{n-1},p_n)$$

اثبات این تعمیم نیز با استقراء قابل انجام است.

همین طور اگر در فضای Y,X به ترتیب دارای مترهای d_2,d_1. باشند آنگاه $X\times Y$ نیز توسط متر :

$$d(p,q)=\sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2+(d_2(x_0,y_0))^2}$$

توجه کنید که $p=(x_1,y_1)$ و $q=(x_2,y_2)$

مثال۱۶ : مجموعه اعداد حقیقی همراه با متر معمولی را در نظر بگیرید یعنی فرض کنید $x=R$, $y=R$ در اینصورت $xy=R^۲=d$ بصورت زیر تعریف می شود :

$$d((a_1b_1),(a_2b_2))=\sqrt{d(a_1a_2)^2+d(b_1b_2)^2}$$

$$=\sqrt{|a_1-a_2|^2+|b_1-b_2|^2}=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

ملاحظه می شود که متر معرفی شده بر روی حاصلضرب R با خودش بصورت طبیعی به متر معمولی بر $R^۲$ مبدل کرد.

می توان بر فضای حاصلضرب X,Y متر را بصورت :

$$d(p,q)=\min\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}$$

معرفی نمود.

تمرینات فصل اول

۱- عدد گویایی بیابید که بسط اعشاری آن ۰/۳۳٤٤٤٤۰۰۰ باشد.

۲- اگر $q \in R$ اصم و $r \in R$ با شرط $r \neq 0$ گویا باشد، نشان دهید که $r+q$ و rq اصم هستند.

۳- ثابت کنید $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ گنگ است.

٤- اگر $n \in N$، نشان دهید که $n^2 > n$ و در نتیجه $1/n^2 \leq 1/n$.

۵- ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$، عدد $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ گنگ است.

٦- اگر $c \in R, c > 1$، نشان دهید که به ازای هر $n \in N$ ، $c^n \geq c$. (راهنمایی: $c = 1+a$ که آن $a > 0$.)

۷- فرض کنید عدد حقیقی x و عدد صحیح $N > 1$ داده شده باشند. ثابت کنید عددهای صحیحی مانند k,h وجود دارند بقسمی که $0 < k \leq N$ و $|kx-h| < 1/N$. راهنمایی $N+1$ عدد $tx-[tx]$ را به ازای $t = 0,1,\dots,N$ درنظر گرفته، نشان دهید بین این عددها دو عدد وجود دارند که تفاضل آنها حداکثر $1/N$ است.

۸- الف) ثابت کنید که هر مجموعه از اعداد حقیقی که غیرتهی و با پایان باشد دارای زبرینه و زیرینه است.

ب) اگر یک زیرمجموعهٔ R مانند S ، شامل یک کران بالای خود باشد، آنگاه این کران بالا زبرینهٔ S است.

پ) مثالی بزنید از مجموعه‌ای از اعداد گویا که کراندار باشد ولی زبرینهٔ گویا نداشته باشد.

ت) مثالی بزنید از مجموعه‌ای از اعداد اصم که زبرینهٔ گویا داشته باشد.
ث) ثابت کنید که اجتماع دو مجموعهٔ کراندار، کراندار است.
ج) مثالی بزنید از یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های کراندار که اجتماع آنها نیز کراندار باشد، و مثالی بیاورید که اجتماع بیکران باشد.
چ) اگر S یک مجموعهٔ کراندار در R باشد و $S_\circ$ زیرمجموعهٔ S و غیر تهی باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\inf S \le \inf S_\circ \le \sup S_\circ \le \sup S$$

گاهی اوقات مناسبتر است که این مطلب به صورتی دیگر بیان شود. فرض کنید $D \ne \phi$ $f: D \to R$ برد کراندار داشته باشد. هرگاه $D_\circ$ یک زیرمجموعهٔ غیرتهی D باشد،

$$\inf\{f(x): x \in D\} \le \inf\{f(x): x \in D_\circ\} \le \sup\{f(x): x \in D_\circ\} \le \sup\{f(x): x \in D\}$$

ح) فرض کنید Y,X مجموعه‌های غیرتهی باشند و $f: X \times Y \to R$ دارای برد کراندار در R باشد. بنویسید

$$f_۱(x) = \sup\{f(x,y), y \in Y\}, f_۲(y) = \sup\{f(x,y): x \in X\}.$$

آنگاه اصلی زبرینه‌های مکرر را ثابت کنید:

$$\sup\{f(x,y): x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_۱(x): x \in X\} = \sup\{f_۲(y): y \in Y\}.$$

ما گاهی اوقات این را به صورت نمادی زیر:

$$\sup_{x,y} f(x,y) = \sup_x \sup_y f(x,y) = \sup_y \sup_x f(x,y)$$

بیان می‌کنیم.

۹- inf , sup هر یک از مجموعه‌های اعداد حقیقی زیرین را بیابید:
آ) همهٔ عددها به شکل $۲^{-p} + ۳^{-q}, ۵^{-r}$، که در آن r,q,p همهٔ عددهای صحیح مثبت را بخود می‌گیرند.
ب) $S = \{x \mid 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$

ج) $S=\{x \mid (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)<0$ که در آن $a<b<c<d$.

۱۰- فرض کنید f و f_1 توابع تمرین ۸ باشند بنویسید

$$g_۲(y)=\inf\{f(x.y):x\in X\}.$$

ثابت کنید که

$$\sup\{g_۲(y):y\in Y\}\le \inf\{f_۱(x):x\in X\}$$

نشان دهید که امکان دارد نابرابری اکید برقرار باشد. ما گاهی این نابرابری را به صورت

$$\sup_y \inf_x f(x,y)\le \inf_x \sup_y f(x,y)$$

بیان می‌کنیم.

۱۱- در هر یک از حالتهای زیر،

همهٔ x و y های حقیقی را که در رابطهٔ داده شده صدق می‌کنند بیابید.

آ) $x+iy=|x-iy|$ ب) $x+iy=(x-iy)^۲$

پ) $\sum_{k=۱}^{۱۰۰} i^k = x+iy$

۱۲- فرض کنید X یک مجموعهٔ غیرتهی باشدو $f:X\to R$ دارای برد کراندار در R باشد. هرگاه $a\in R$ ، نشان دهید که

$$\sup\{a+f(x):x\in X\}=a+\sup\{f(x):x\in X\},$$
$$\inf\{a+f(x):x\in X\}=a+\inf\{f(x):x\in X\}.$$

فصل دوم

مفاهیم توپولوژی متریک

هرچند که توپولوژی مفهومی بسیار عمیق و پیشرفته است اما درک آن با توجه به مقایسه مفاهیم مربوطه با عالم خارج از ریاضیات این مفهوم را بسیار شهودی و عینی می نماید. در این فصل توپولوژی پایه را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲-۱ فضای متریک و همسایگی ها

۲-۱-۱ همسایگی : اگر X یک فضای متریک و $p \in X$ نقطه ای دلخواه و $r \in R$ عددی مثبت باشد آنگاه همسایگی به مرکز p و شعاع r را با $N_r(p)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$N_r(p) = \{x \in X : d(x,p) < r\}$$

بدیهی است که نقطه p داخل هر همسایگی دلخواهی از خود می باشد زیرا $d(p,p) = r < 0$. چنانچه نقطه p را از همسایگی $N_r(p)$ برداریم یک همسایگی محذوف p بدست می اید و آنرا با $N'_r(p)$ نشان می دهیم. در واقع داریم :

$$N'_r(p) = \{x \in X : 0 < d(x,p) < r\}$$

مثال۱ : اگر $x=R$ با متریک معمولی در نظر گرفته شود آنگاه همسایگی $N_r(p)$ یک فاصله باز بصورت $(p-r\ ,\ p+r)$ می باشد زیرا داریم :

$$N_r(p)=\{x\in R:d(x,p)=|x-p|<r\}=\{x\in R\mid -r<x-p<r\}$$
$$=\{x\in R\mid -r+p<x<r+p\}=(p-r,p+r)$$

در حالت کلی می توان نشان داد که هر فاصله باز در مجموعه اعداد حقیقی یک همسایگی است. بدیهی است که (a,b) یک همسایگی به مرکز $\frac{a+b}{2}$ و شعاع $\frac{b-a}{2}$ است.

نتیجه : در فضای متریک اعداد حقیقی همسایگی ها و فواصل باز بر یکدیگر منطبق اند.

مثال۲ : اگر X یک فضای متریک گسسته باشد آنگاه $N_r(p)$ تمام فضا یا یک نقطه از فضا است. به عبارتی اگر $r>1$ آنگاه $N_r(p)=x$ و اگر $0<r\leq 1$ آنگاه $N_r(p)=\{p\}$

توجه کنید داریم :

$$r>1\ :\ N_r(p)=\{x\in X:d(x,p)<r\}$$

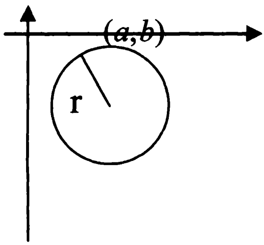
چون ۱ یا d(x,y)=۰ بنابراین برای $x\in X\ ,\ d(x,p)<r$ بنابراین $x\in N_r(p)$ در نتیجه $N_r(p)=x$

مثال۳ : در فضای R^2 با متریک معمولی هر همسایگی به مرکز (a,b) و شعاع r مجموعه نقاط داخل دایره ای به شعاع r و مرکز $p=(a,b)$ می باشند زیرا داریم :

$$N_r(p)=\{(x,y)\in R^2\mid d((x,y),(a,b))<r\}$$

$$=\{(x,y)\in R^2\mid \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$$

نمودار همسایگی نیز مطابق شکل مقابل است :



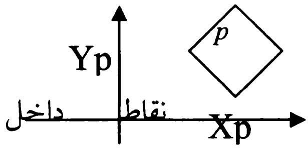
مثال٤ : در فضای R^3 با متریک معمولی هر همسایگی به مرکز (a,b,c) و شعاع r نقاط داخل کره ای به مرکز (a,b,c) و شعاع r می باشد.

مثال۵ : در فضای R^2 با متریک d_1 که بصورت :

$$d_1 = \| p - q_1 \| = | x_p - x_q | + | y_p - y_q |$$

معرفی می شود یک همسایگی به مرکز p و شعاع r عبارتست از :

$$N_r(p) = \{Q(p,q) \in R^2 \mid d(p,q) < r\}$$
$$= \{Q(x,y) \in R^2 \mid \ | x - x_p |^2 + | y - y_p |^2 < r\}$$

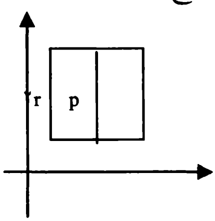


مطابق شکل بالا یک همسایگی به مرکز p و شعاع r تمام یک مربع (لوزی) است.

مثال٦ : در فضای R^2 با متریک d_∞ که به صورت :

$$d_\infty = \| p - q \|_\infty = \max\{| x_p - x_q | + | y_p - y_q |\}$$

معرفی می شود یک همسایگی به مرکز p و شعاع r مربعی است به ضلع $۲r$ و به مرکز p مطابق شکل مقابل



۲-۱-۲ تعریف : اگر X یک فضای متریک و $A \subseteq X$ آنگاه نقطه $x \in A$ را نقطه درونی A (interior point of A) گویند هرگاه یک همسایگی چون $N_r(x)$ موجود باشد بطوریکه $N_r(x) \subset A$ تمام نقاط درونی A را با A^o نمایش داده و آنرا درون A می نامیم به عبارتی داریم :

$$x \in A^o \iff \exists \ r > ۰ \ \ni: \ N_r(x) \subset A$$

مثال۷ : درون مجموعه $A = (۰,۲]$ در فضای R با متریک معمولی برابرست با $A^o = (0,2]$

همینطور در فضای A با متریک معمولی خواهیم داشت :

$$R^o = R \ , \ Q^o = \phi \ , \ Z^o = \phi$$

$(Q')^o=\phi$ هر همسایگی هیچ نقطه داخل $[0,2)$ ندارد.

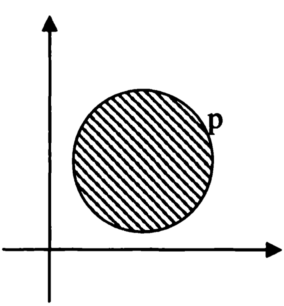
توضیح : چون هیچ نقطه Z نقطه درونی نمی باشد بنابراین $Z^o=\phi$ توجه کنید که نقاط روی محور مشخص می شوند و به عنوان نمونه هر همسایگی دلخواه به شعاع$1>r$ و مرکز۲ شامل هیچ نقطه ای بغیر از ۲ از z نیست ، بنابراین هیچ یک از نقاط Z نمی توانند نقطه درونی باشند. درست بصورت مشابه برای Q و Q' چون هر همسایگی شامل نقاطی از Q',Q نمی باشند بنابراین Q',Q هیچ نقطه درونی ندارند به عبارتی درون هر دو تهی است.

هر همسایگی نمی تواند فقط به Q یا فقط به Q' متعلق باشد.

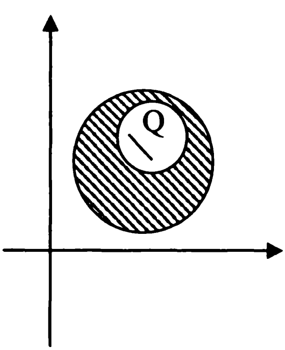
مثال۸ : در فضای R^2 با متریک معمولی برای $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$ خواهیم داشت :

$A^{\cdot}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$

توجه کنید نقاط روی دایره هیچ یک درونی نمی باشند زیرا مطابق شکل (۱) هر همسایگی به مرکز p (که نقطه ای بر روی دایره است) و شعاع دلخواه r شامل نقاطی از خارج دایره می باشد بنابراین نقاط روی دایره فقط درونی نمی باشند ولی تمام نقاطی که داخل دایره هستند نقطه درونی می باشند. زیرا اگر مطابق شکل (۲) اگر Q نقطه‌ای داخل دایره باشد و به فاصله ε از مرکز دایره باشد آنگاه همسایگی $N_{1-\varepsilon}(Q)$ تماماً داخل A قرار می گیرند بنابراین همه نقاط داخل دایره دایره درون دایره را تشکیل می دهند.



شکل(۱)



شکل(۲)

مثال۹ : در فضای اعداد حقیقی با متریک گسسته خواهیم داشت :

$Z^o = Z \;\; , \;\; R^o = R \;\; , \;\; Q^o = Q \;\; , \;\; (Q')^o = Q'$

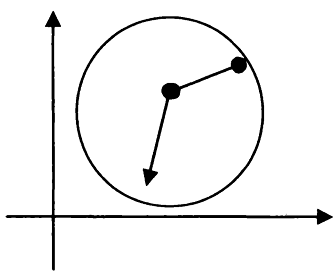
زیرا در فضای اعداد حقیقی با متریک گسسته هر همسایگی به مرکز یک نقطه و شعاع کمتر از یک خود آن نقطه می باشد بنابراین نه تنها در فضای اعداد حقیقی با متریک گسسته بلکه در هر فضای دلخواهی با متریک گسسته درون هر مجموعه درست برابر خود آن مجموعه است.

تعریف : اگر X فضای متریک باشد زیر مجموعه A از X را باز می نامیم هرگاه هر نقطه آن درونی باشد به عبارتی :

$$A \text{ باز } \Leftrightarrow A^o = A$$

مثال ۱۰ : در یک فضای متریک هر همسایگی یک مجموعه باز است. زیرا مطابق شکل زیر که در حالتی خاص از مسأله را نشان می دهد (فضای R^2) اگر $x : x \in N_r(p)$ باشد آنگاه

$$N_{r-d(x,p)}(x) \subseteq N_r(p)$$



مثال ۱۱ : اگر Xیک فضای متریک باشدX و ϕ باز خواهند بود. در فضای اعداد حقیقی با متریک معمولی فاصله $(1,2]$ باز نمی باشند زیرا عنصر ۱ نقطه درونی نیست.

تعریف : اگر x یک فضای متریک و A زیر مجموعه ای از آن باشد آنگاه نقطه $p \in X$ را « نقطه حدی » A می نامیم. هرگاه هر همسایگی محذوف از P حداقل دارای یک نقطه از A باشد به عبارتی :

x نقطه حدی A $\quad <==> \quad \forall r \in R^+ N'_r(x) \bigcap A \neq \phi$

مجموعه نقاط حدی A را با A' نشان می دهیم.

مثال۱۲ : اگر $A=Z$ آنگاه $A' = \phi$ و $Q' = R$ هر همسایگی دلخواه از Q شامل نقطه ای از R است.

۲-۱-۳ تذکر : هر نقطه درونی مجموعه A نقطه حدی نیز خواهد بود ولی نقاط حدی الزاماً نقاط درونی نخواهند بود.

مثال۱۳ : اگر $A = \{(x,y,z) \in R^۳ \ , \ x^۲ + y^۲ + z^۲ < ۱\}$ آنگاه :

$A' = \{(x,y,z) \in R^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

توجه کنید که A نقاط داخل کره واحد و A' نقاط داخل و روی کره واحد است. بطور کلی مجموعه نقاط حدی یک گوی باز در فضای اقلیدسی R^n تمام نقاط داخل گوی و روی گوی می باشد.

مثال۱۴ : مجموعه نقاط حدی مجموعه های متناهی الزاماً تهی می باشد زیرا اگر فرض کنیم

$A = \{x_1,...,x_n\}$ نشان می دهیم هیچ نقطه ای چون x نمی تواند نقطه حدی A باشد.

حالت (۱) :اگر $x \notin A$ آنگاه همسایگی به مرکز x وشعاع

$$r = \frac{1}{2}\min\{d(x_i,x_j) \mid j = 1,...,n, 1 \leq i \leq n, i \neq j\}$$

شامل هیچ نقطه ای از A نمی باشد.

۲-۱-۴ تعبیر هندسی : اگر x با هیچ یک از x_i ها یکی نباشد و x_j نزدیکترین نقطه از A به x باشد همسایگی به مرکز x و به شعاع r هیچ یک از عناصر A را در بر ندارد. **حالت**

(۲) : اگر $x \in A$ آنگاه اندیسی چون i موجود است بطوریکه $x = x_i$ اکنون اگر فرض کنیم :

$$r = \frac{1}{2}\min\{d(x_i, x_j) \mid j = 1, \ldots, n \quad , \quad i \neq j\}$$

آنگاه خواهیم داشت :

$$N'_r(x) \cap A = \phi$$

توجه کنید که اگر $N'_r(x) \cap A = \phi$ آنگاه عضوی چون x_j در A موجود است که با x مساوی نبوده و داریم $d(x_i, x_j) < r$ که متناقض انتخاب r است.

تعبیر هندسی در R^2 : اگر $x_1, \ldots, x_n$ ، n نقطه باشد. در این حالت به شعاع نصف فاصله نزدیکترین نقطه تا x_i یک همسایگی در نظر گرفته می شود این همسایگی غیر از x_i هیچ نقطه ای از A را شامل نمی شود در نتیجه اشتراک همسایگی محذوف مربوط با A تهی خواهد بود.

مثال ۱۵ : اگر $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in N\}$ زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد آنگاه $A' = \{0\}$ زیرا اگر $x < 0$ ، آنگاه $N_{|x|}(x) \cap A = \phi$ پس اعداد منفی نمی توانند نقطه حدی A باشند همینطور اگر $x > 0$ آنگاه می توان همسایگی محذوفی از x یافت که با A اشتراک نداشته باشند. برای این کار دو حالت در نظر می گیریم :

حالت اول : اگر $x \in A$ آنگاه عددی چون k موجود است که $x = \frac{1}{k}$ اکنون همسایگی محذوف $N'_{\frac{1}{k(k+1)}}(\frac{1}{k})$ شامل هیچ نقطه ای از A نمی باشد.

حالت دوم : اگر $x \notin A$ آنگاه با توجه به قضایای قبلی عددی چون k وجود دارد بطوریکه

$$\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k} \qquad (0 < x < 1)$$

در اینصورت همسایگی محذوف $N_r(x)$ که

$$r = \min\{\frac{1}{k} - x, x - \frac{1}{k+1}\}$$

هیچ اشتراکی با A نخواهد داشت. توجه کنید که برای $x>1$ همسایگی محذوف $N'_{x-1}(x)$ هیچ اشتراکی با A ندارد.

تا کنون ثابت کردیم که اعداد مثبت و اعداد منفی هیچیک نقطه حدی A نمی باشند. اکنون نشان می دهیم صفر نقطه حدی ، A می باشد. توجه کنید که $N_r(0)$ همواره شامل تعدادی از نقاط A می باشد زیرا طبق خاصیت ارشمیدسی برای $r>0$ دلخواه عددی چون n موجود است بطوریکه $0<\frac{1}{n}<r$. توجه کنید که $\frac{1}{n}\in N_r(0)$ خواهد بود و در نتیجه برای هر r دلخواه $N_r(0)\bigcap A-\{0\}\neq\phi$ بنابراین صفر نقطه حدی A می باشد.

تعریف : زیر مجموعه A از فضای متریک X بسته می باشد هرگاه شامل تمام نقاط حدی خود باشد به عبارتی : $A \leftrightarrow A'\subset A$ بسته است.

مثال۱۶ : در فضای متریک X خود X و ϕ مجموعه هایی بسته اند.

مثال۱۷ : زیرمجموعه های

$$I=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<1\} \text{ و } K=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2>1\}$$

در R^2 بسته نمی باشند. ولی زیر مجموعه های $J=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ و $B=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\geq 1\}$ و $D=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2=1\}$ در R^2 بسته هستند.

مثال۱۸ : در متریک گسسته تمام زیر مجموعه ها بسته می باشند.

۲-۱-۵ قضیه : اگر X یک فضای متریک و $A\subseteq X$ آنگاه نقطه $p\in A$ یک نقطه حدی است اگر و فقط اگر هر همسایگی p شامل تعدادی نامتناهی عضو از A باشد.

اثبات : فرض کنید p نقطه حدی A باشد با استفاده از برهان خلف اگر همسایگی محذوفی از p مانند $N'_r(p)$ فقط شامل تعدادی متناهی نقطه مانند $p_1,\dots,p_n$ از A باشد. آنگاه همسایگی محذوف $N'_h(p)$ که $h=\min\ \{\ d(p,p_i)\ |\ i=1,\dots,n\ \}$ هیچ اشتراکی با A نخواهد داشت و این متناقض با نقطه حدی بودن p است.

بنابراین هر همسایگی p شامل بی نهایت نقطه از A می باشد.

عکس این قضیه نیز بدیهی است زیرا اگر هر همسایگی p شامل تعداد بیشماری از عناصر A باشد p نقطه حدی A خواهد بود.

۲-۱-٦ قضیه : اگر X یک فضای متریک باشد آنگاه :

الف) هر اجتماع دلخواه از مجموعه های باز ، باز می باشد.

ب)هر اجتماع متناهی از مجموعه های بسته ، بسته می باشد.

اثبات : الف) اگر فرض کنیم $\{G_\alpha\}$ برای $\alpha \in T$ یک خانواده دلخواه از مجموعه های باز باشد در اینصورت باید نشان دهیم $\bigcup_{\alpha \in T} G_\alpha = G$ باز می باشد. بنابراین باید نشان دهیم که هر نقطه از G درونی است. اگر $x \in G$ آنگاه :

$\exists \alpha \in T \therefore x \in G_\alpha$

و چون G_α باز در نظر گرفته شده است بنابراین یک همسایگی از x مانند $N_r(x)$ موجود است بطوریکه $N_r(x) \subset G_\alpha$ است. از طرفی چون $G_\alpha \subset G$ است بنابراین $N_r(x) \subset G$ و این نشان می دهد که G مجموعه ای باز است.

ب) فرض کنید $F_1,...,F_n$ تعدادی مجموعه بسته باشند باید نشان دهیم که $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = F$ بسته است فرض کنید x نقطه حدی F باشد در اینصورت باید نشان دهیم که $x \in F$ است. از آنجاکه x نقطه حدی F است هر همسایگی F تعدادی نامتناهی (بیشماری) از عناصر F را دارا خواهد بود بنابراین باید هر همسایگی دلخواه x حداقل با یکی از F_i ها (برای $i = 1,...,n$) اشتراک نا متناهی داشته باشد آنگاه با F نیز اشتراک نا متناهی خواهد داشت. بنابراین x نقطه حدی یکی از F_i ها خواهد بود و چون هر یک از F_i ها بسته اند خود x متعلق به یکی از F_i ها بوده و در نتیجه $x \in F$ است و این برهان را تمام می کند.

مثال۱۹ : در مجموعه اعداد حقیقی $F_n=[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]$ زیر مجموعه ای بسته می باشد. اما از آنجاکه $\bigcup_{n=2}^{+\infty}F_n=(0,1)$ ملاحظه کنید که در اینجا اجتماع تعدادی نا متناهی مجموعه بسته باز است. بنابراین قضیه اخیر قسمت (ب) فقط برای اجتماع متناهی صحیح می باشد.

مثال ۲۰ : اگر فرض کنیم $G_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ و $n\in N$ باشد آنگاه هر یک از G_n ها باز می باشند ولی اشتراک $\bigcap_{n=2}^{+\infty}G_n=\{0\}$ که مجموعه ای بسته است. بنابراین اشتراک نامتناهی از مجموعه های باز می تواند بسته باشد.

مثال ۲۱ : اگر $f_n=[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ برای $n\in N$ آنگاه $\bigcup_{n=1}^{+\infty}f_n=(0\ ,\ 1]$. ملاحظه می شود که در اینجا اجتماعی نامتناهی از مجموعه های بسته، نه باز است و نه بسته.

۲-۱-۷ قضیه : اگر X یک فضای متریک باشد آنگاه:

الف) هر اشتراک دلخواه از مجموعه های بسته ، بسته می باشند.

ب)هر اشتراک متناهی از مجموعه های باز ، باز می باشند.

اثبات : با توجه به قوانین دمورگان و قضیه پیشین اثبات به سادگی انجام می شود. به عنوان نمونه قسمت ب را اثبات میکنیم. فرض کنید $\{F_\alpha\}$ برای $\alpha\in T$ خانواده دلخواهی از مجموعه های بسته باشد. در اینصورت باید نشان دهیم $\bigcap_{\alpha\in T}F_\alpha$ بسته است چون $G_\alpha=F_\alpha^c$ باز است طبق قضیه قبل $\bigcup_{\alpha\in T}G_\alpha$ باز خواهد بود بنابراین $\left(\bigcup_{\alpha\in T}G_\alpha\right)^c$ در نتیجه $\left(\bigcup_{\alpha\in T}G_\alpha\right)^c$ یا $\bigcap_{\alpha\in T}F_n$ بسته است و اثبات تمام میشود.

۲-۱-۸ قضیه : در هر فضای متریک دلخواه متمم زیر مجموعه های باز ، بسته است و بالعکس.

اثبات : فرض کنیم F زیر مجموعه ای بسته است نشان می دهیم F^c باز است. برای انجام این کار فرض می کنیم $x \in F^c$ نشان می دهیم که x نقطه درونی F^c است. از آنجا که F بسته است و $x \not\in F$ بنابراین x نقطه F نخواهد بود. بنابراین می توان همسایگی محذوف از x چون $N'_r(x)$ یافت بطوریکه $N'_r(x) \cap F = \phi$ است. (توجه کنید که اگر نتوان چنین همسایگی محذوفی یافت آنگاه x نقطه حدی F خواهد بود) بنابراین چون خود x نیز به F تعلق ندارد خواهیم داشت $N_r(x) \cap F = \phi$ و از اینجا نتیجه می شود که $N_r(x) \subset F^C$ و این نشان می دهد که F^c باز است.

بالعکس : فرض کنیم G زیر مجموعه ای باز است نشان می دهیم G^c بسته است. برای اینکار باید نشان دهیم که $x \in G^c$. اثبات را از طریق برهان خلف انجام می دهیم :

فرض کنیم $x \not\in G^c$ در اینصورت $x \in G$ و چون G باز است یک همسایگی از x مانند $N_r(x)$ موجود است بطوریکه $N_r(x) \subset G$ و این بدان معناست که یک همسایگی از x مانند $N_r(x)$ وجود دارد که با G^c اشتراک ندارد و این متناقض با نقطه حدی بودن x است و برهان تمام می شود.

مثال۲۲ : اگر X, d_1 فضای متریک مجزا باشد تمام زیر مجموعه های بسته و باز X را تعیین کنید.

اگر A زیر مجموعه دلخواهی از X باشد آنگاه می توان نوشت $A = \underset{x\in A}{U}\{x\}$ و از آنجا که هر مجموعه تک عضوی یک همسایگی در فضای متریک مجزا می باشد بنابراین A اجتماعی از مجموعه های باز خواهد بود و بنابراین A باز است. توجه کنید که هر اجتماع دلخواهی از مجموعه باز ، باز می باشد و چون A زیر مجموعه دلخواه بود بنابراین تمام زیرمجموعه های فضای متریک گسسته ، باز می باشند. بعلاوه تمام زیر مجموعه های X بسته نیز می باشند. زیرا مثلاً اگر B^c دلخواه انتخاب شود آنگاه با استدلالی که بیان شد B^c باز می باشد در نتیجه $B=(B^c)^c$ بسته خواهد بود.

۲-۱-۹ نتیجه : در فضای متریک گسسته هر زیر مجموعه ای هم باز و هم بسته است.

۲-۲ درون و بستار یک مجموعه

۲-۲-۱ درون یک مجموعه : اگر A در فضای متریک X داده شده باشد آنگاه مجموعه نقاط درونی A را ، درون A نامیده و با A^o نشان می دهیم. بنابراین برای هر نقطه $x \in A^o$ یک همسایگی چون $N_r(x)$ موجود است بطوریکه $N_r(x) \subset A$. می توان به طریقی دیگر درون یک مجموعه را به عنوان اجتماع تمام زیر مجموعه های بازی در نظر گرفت که درون A می باشند. به عبارتی : $G_\alpha \subset A$ و G_α باز و $\alpha \in I, A^o = \bigcup G_\alpha$ است.

مثال۲۳ : اگر $A=Q$ آنگاه $A^o = \phi$ است.

۲-۲-۲ خواص درون یک مجموعه :

۱) A^o یک زیر مجموعه باز می باشد.

۲) $A^o \subset A$

۳) A^o بزرگترین مجموعه بازی است که در داخل A قرار دارد.

٤) اگر $B \subset A$ آنگاه $B^o \subset A^o$

٥) $(A \bigcap B)^o = A^o \bigcap B^o$

٦) $A = A^o$ اگر و فقط اگر A باز باشد.

۲-۲-۳ تذکر : درحالت کلی $(A \bigcup B)^o$ برابر $A^o \cap B^o$ یا $A^o \bigcap B^o$ نمی باشد و در حالت کلی داریم

$$(A \bigcup B)^o \not\subset A^o \bigcap B^o$$

$$(A \bigcup B)^o \not\subset A^o \cup B^o$$

به عنوان مثال اگر $B=Q$, $A=Q'$ آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{l}(A\cup B)^o=(R)^o=R\\ A^o\cup B^o=\phi\cup\phi=\phi\end{array}\right\}(A\cup B)^o\neq A^o\cup B^o$$

اثبات: خواص اصلی به سادگی میسر است به عنوان نمونه خاصیت (٥) را ثابت می کنیم :

١) اگر $x\in(A\cap B)^o$ آنگاه یک همسایگی چون $N_r(x)$ موجود است بطوریکه $N_r(x)\subset A\cap B$ بنابراین $N_r(x)\subset A$ و $N_r(x)\subset B$ بنابراین $x\in A^o$ و $x\in B^o$ پس $x\in A^o\cap B^o$ و بنابراین $(A\cap B)^o\subset A^o\cap B^o$

٢) اکنون اگر $x\in A^o\cap B^o$ آنگاه $x\in A^o$ و $x\in B^o$ بنابراین یک همسایگی چون $N_{r_1}(x)$ موجود است بطوریکه $N_{r_1}(x)\subset A$ و نیز یک همسایگی از x چون $N_{r_2}(x)$ موجود است بطوریکه $N_{r_2}(x)\subset B$ اکنون قرار دهیم $r=\min\{r_1,r_2\}$ آنگاه $N_r(x)$ زیر مجموعه هردو A,B خواهد بود. در نتیجه $N_r(x)\subset A\cap B$ و از اینجا. $x\in(A\cap B)^o$ و در نتیجه $A^o\cap B^o\subset(A\cap B)^o$

با توجه به رابطه (١) و (٢) تساوی $(A\cap B)^o=A^o\cap B^o$ اثبات می شود.

٢-٢-٤ بستار یک مجموعه : در فضای متریک X ، بستار زیر مجموعه A را با $\overline{A}$ نمایش می دهیم و بستار A عبارتند از اجتماع A و نقاط حدی A به عبارتی :

$\overline{A}=A\cup A'$

می توان بستار یک مجموعه را به عنوان اشتراک تمام زیر مجموعه های شامل A که بسته نیز باشند در نظر گرفت به عبارتی داریم :

$$\overline{A}=\cap B_\alpha,\alpha\in I$$

مثال ٢٤ : اگر $A=Q$ آنگاه $\overline{A}=R$.

٢-٢-٥ خواص بستار یک مجموعه :

١) $\overline{A}$ یک زیر مجموعه بسته می باشد.

٢) $A\subset\overline{A}$

۳) $\overline{A}$ کوچکترین زیر مجموعه بسته ای است که A را در بر دارد.

٤) اگر $B \subset A$ آنگاه $\overline{B} \subset \overline{A}$

٥) $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$

٦) $A = \overline{A}$ اگر و فقط اگر A بسته باشد.

۲-۲-٦ تذکر : در حالت کلی $(\overline{A \cap B})$ برابر $\overline{A} \cap \overline{B}$ نمی باشد.

مثال۲٥ : اگر $A=Q$ و $B=Q'$ آنگاه داریم :

$$(\overline{A \cap B}) = \overline{\phi} = \phi$$
$$\overline{A} \cap \overline{B} = R \bigcap R = R$$

اثبات خواص بستار نیز بسادگی قابل انجام است پس فقط خاصیت (۳) را اثبات می کنیم :
برای اثبات خاصیت (۳) فرض کنیم B زیر مجموعه بسته ای باشد که شامل A است. نشان می دهیم $\overline{A} \subset B$ فرض کنیم $x \in \overline{A}$ در اینصورت $x \in A \bigcup A'$ که دوحالت پیش می آید $x \in A$ یا $x \in A'$.

حالت ۱ : اگر $x \in A$ آنگاه $x \in B$

حالت ۲ : اگر $x \in A'$ آنگاه بنا به تعریف A'برای $r>0$ ، $N_r'(x) \bigcap A \neq \phi$ و چون $A \subset B$ در نتیجه $N_r'(x) \bigcap B \neq \phi$ بنابراین نقطه x نقطه حدی B بوده و چون B بسته نیز هست بنابراین شامل تمام نقاط حدی خود می باشد در این حالت نیز نتیجه می گیریم $x \in B$ و این نشان می دهد $\overline{A} \subset B$ است.

مثال۲٦ : اگر $A = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$ زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد درون و بستار A را تعیین کنید.

درون A تهی است و نیز $\overline{A} = A \bigcup \{0\}$

مثال۲۷ : اگر $A = (0,1]$ آنگاه $\overline{A} = [0,1]$ و $A^0 = (0,1)$.

تعریف:مجموعه E رااز فضای X چگال گوییم هر گاه هر نقطه x از X یا به E و یا به E' متعلق باشد.

در واقع ملموس ترین مثال ا از یک زیر مجموعه، چگال ستارگان در آسمان میباشد.

مثال۲۸ : مجموعه Q در R چگال است

۲-۲-۷ قضیه : اگر A زیر مجموعه ای کراندار از اعداد حقیقی باشد آنگاه $infA$ و $SupA$ متعلق به $\overline{A}$ است.

اثبات : چون A کراندار است ، بنابراین عددی چون $\propto$ موجود است بطوریکه $SupA = \propto$ است. باید نشان دهیم که در هر همسایگی $\propto$ ، نقاط بیشماری از A قرار می گیرد. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد ، آنگاه عضوی چون $x \in A$ موجود است بطوریکه $x > \propto -\varepsilon$ زیرا در غیر اینصورت $\propto -\varepsilon$ یک کران بالایی A بوده و با تعریف Sup در تناقض است. بنابراین $N_\varepsilon(\propto) \bigcap A \neq \phi$. بنابراین هر همسایگی به مرکز $\propto$ ، شامل نقاطی از A می باشد چنانچه $\propto$ متعلق به A نباشد آنگاه $\propto$ نقطه حدی A بوده و در نتیجه $\propto \in \overline{A}$.

بدیهی است که اگر $\propto \in A$ آنگاه مجدداً $\propto \in \overline{A}$.

به طریق مشابه می توان نشان داد که $infA$ هم عضوی از $\overline{A}$ است.

باز بودن نسبی

۲-۲-۸ قضیه : زیر مجموعه E از Y باز است اگر و فقط اگر زیر مجموعه بازی چون G در X وجود داشته باشد به طوریکه $E = G \cap Y$ که در اینجا Y زیر فضایی از X می باشد.

اثبات : فرض کنیم E در Y باز باشد دراینصورت برای هر x از E یک همسایگی از x چون $N_r(x)$ موجود است بطوریکه $N_r(x) \subset E$. اکنون اگر قرار دهیم $G = \bigcup_{x \in E} N_r(x)$ آنگاه خواهیم داشت :

$$E = \bigcup_{x \in E} N_r^Y(x) \qquad E = G \bigcap Y$$

$N_r^Y(x)=\{y \mid d(x,y)<r, y\in Y\}$

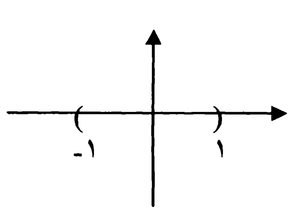
بر عکس : فرض کنید G زیر مجموعه بازی از X باشد بطوریکه $E=G\bigcap Y$ اگر $x\in E$ به دلخواه انتخاب شود آنگاه چون $x\in G$ نیز خواهد بود و چون G باز است یک همسایگی باز از نقاط X شامل x مانند $N_r(x)$ وجود دارد بطوریکه $N_r(x)\subset G$ در اینصورت $N_r(x)\bigcap y\subset G\bigcap y$ بنابراین چون $N_r(x)\bigcap y\subset E$ و داریم $N_r(x)=N_r(x)\cap y$ بنابراین $N_r(x)\subset E$ است و این بدان معناست که E در y باز است.

مثال ۲۹ : اگر $X=R$ و $Y=[\,۰،۱)$ در اینصورت $E=[0,\frac{1}{2})$ در Y ، باز است. زیرا اگر قرار دهیم $G=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ آنگاه $E=G\bigcap Y$

روش دوم : دلیل آنکه E نسبت به Y باز است آن است که همه نقاط E نسبت به y نقطه درونی E می باشند. تنها نقطه شک بر انگیز E همان صفر است. نشان می دهیم که این نقطه ، نقطه درونی E می باشد. توجه کنید که :

$$N_{\frac{1}{4}}^{y}(0)=\{x\in y \,||\, x-0|<\frac{1}{4}\}=[0,\frac{1}{4})\subset[0,\frac{1}{2})=E$$

مثال ۳۰ : اگر $X=R^۲$ و $Y=R$ و $E=(-۱،۱)$ در اینصورت E نسبت به Y باز است ولی نسبت به X نه باز است نه بسته. توجه کنید که داریم $E=Y\bigcap I$ که I نقاط درونی دایره واحد در صفحه می باشد و با استفاده از قضیه قبلی دیده می شود که E نسبت به R باز است. برای اثبات اینکه E نسبت به $R^۲$ نه باز است نه بسته توجه کنید که مطابق شکل بعد پاره خطی به طول ۲ مجموعه E را در صفحه تشکیل می دهد و اگر x نقطه دلخواهی از E باشد آنگاه هر همسایگی x شامل نقاط خارج از E خواهد بود و بنابراین E نمی تواند در $R^۲$ باز باشد. از طرفی E در $R^۲$ بسته نیز نمی باشد زیرا نقطه $(1,0)$ نقطه حدی E است ولی متعلق به E نیست.



تنها زیر مجموعه ای که در R باز ولی در R^2 بسته است خود R است. (R در R هم باز است و هم بسته)

مثال ۳۱ : اگر $E=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ و $Y=Q$ و $X=R$

آنگاه E نسبت به R چگونه است؟

E نسبت به Y باز است چون داریم :

$$E=(-\sqrt{۳},\sqrt{۳})\cap Q$$

۲-۲-۹ نتیجه : اگر $E\subset Y\subset X$ آنگاه E نسبت به Y بسته است اگر و فقط اگر مجموعه ای بسته مانند F در x وجود داشته باشد که $\mathrm{E}=Y\cap F$ باشد.

۲-۳ فشردگی در فضای متریک

اگر X فضایی متریک و K زیر فضایی از X باشد دسته ای از زیر مجموعه های X مانند :

$C=\{A_\alpha\},\alpha\in T$

یک پوشش برای K نامیده می شود هر گاه $K\subseteq\cup A_\alpha,\alpha\in T$. چنانچه عناصر پوشش همگی باز باشند آنگاه C را یک پوشش باز برای K می خوانیم و اگر A_α ها بسته باشند پوشش را پوششی بسته می نامیم. اگر T (مجموعه اندیس) متناهی باشد آنگاه C را یک پوشش متناهی می نامیم. در اینصورت گوییم K دارای پوشش متناهی است و چنانچه T شمارا باشد آنگاه C را یک پوشش شمارش پذیر می خوانند.

مثال۳۲ : اگر $C=\{(-n,n)\mid n\in N\}$ آنگاه C یک پوشش شمارا برای R خواهد بود زیرا داریم $R\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}(-n,n)$ همینطور اگر $e=\{\{x\}\mid x\in R\}$ آنگاه e یک پوشش نا شمارا برای R خواهد بود. توجه داشته باشید که اگر $x\in R$ آنگاه بنابر قضایای قبلی عددی طبیعی

چون n وجود دارد بطوریکه $|x|<n$ در نتیجه $x\in(-n,n)$ و چون x بصورت اختیاری انتخاب شد بنابراین $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$ و در نتیجه $R\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$.

اگر $J\subset T$ باشد و $C=\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ یک پوشش برای K باشد در اینصورت $C'=\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ را یک زیر پوشش برای K می نامیم اگر $K\subset\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$. بدیهی است که اگر J شمارا یا متناهی باشد آنگاه C'را به ترتیب یک زیر پوشش شمارا و متناهی خواهیم نامید.

مثال۳۳ : اگر قرار دهیم $C'=\{(-n,n)\mid n\in 2N\}$ آنگاه C' زیر پوششی برای R خواهد بود. بدیهی است که این زیر پوشش شمارا نیز می باشد.

در اینجا سوالی مطرح می شود و آن این است که آیا می توان زیر پوششی متناهی از C انتخاب کردکه R را بپوشاند ؟ پاسخ منفی است چون اگر E زیر پوششی متناهی از C باشد آنگاه:

$$\exists m\in N \qquad : \qquad \bigcup_{(-n,n)\subseteq C}(-n,n)=(-m,m)$$

چنانچه در تعریف بعد مشاهده می کنید علت عدم وجود زیر پوشش متناهی فشرده نبودن R است.

تعریف : اگر X فضای متریک و K زیر فضایی از آن باشد ، آنگاه k را فشرده می نامیم هرگاه هر پوشش باز برای K حداقل دارای یک زیر پوشش متناهی باشد. به عبارتی K فشرده است اگر و تنها اگر

$$\forall C, C=\{G_\alpha\}_{\alpha\in T} \qquad \exists\alpha_1,\dots,\alpha_n \qquad \ni: K\subseteq\bigcup_{i=1}^{N}G_{\alpha_i}$$

اثبات فشردگی یک مجموعه بطور مستقیم اغلب مشکل است ولی اثبات عدم فشردگی یک مجموعه مشکل زیادی ندارد برای اثبات عدم فشردگی یک مجموعه کافی است پوشش

بازی بدست آوریم که دارای هیچ زیر پوشش متناهی نباشد به عنوان نمونه در مثال قبلی دیدیم که R فشرده نمی باشد.

مثال ۳۴ : هر زیر مجموعه متناهی از فضای متریک X، فشرده است.

حل: اگر X یک فضای متریک و $K=\{x_1,\dots,x_n\}$ زیر مجموعه ای متناهی از آن باشد و $C=\{G_\alpha\}_{\alpha\in T}$ پوششی باز برای K باشد ، نشان می دهیم که می توان زیر پوششی متناهی از C استخراج نمود. از آنجا که $K\subset\bigcup\limits_{\alpha\in T}G\alpha$ بنابراین :

$$\forall i: i=۱,\dots,n \qquad x_i\in\bigcup_{\propto\in T}G_\propto$$

بنابراین عضوی مانند $\propto_i$ در T موجود است بطوریکه $x_i\in G_{\propto_i}$ در اینصورت $e=\{G_{\propto_1},G_{\propto_2},\dots,G_{\propto_n}\}$ زیر پوششی متناهی برای K خواهد بود. بنابراین K فشرده است.

مثال ۳۵ : ثابت کنید فاصله $(۰،۱)$ ، نا فشرده است.

کافی است پوششی از زیر مجموعه های باز R برای $(۰،۱)$ مثال بزنیم که هیچ زیر پوشش متناهی از آن برای $(۰،۱)$ نباشد. فرض کنید $G_n=(\frac{1}{n},1)$ در اینصورت $C=\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ پوششی برای $(۰،۱)$ است زیرا اگر $x\in(0,1)$ آنگاه بنابر خواصی که بیان شد عددی طبیعی چون n_0 موجود است بطوریکه $\frac{1}{n_0}<x$ در اینصورت $x\in(\frac{1}{n_0},1)$ و بنابراین $x\in G_{n_0}$ و چون x اختیاری انتخاب شد بنابراین خواهیم داشت $(0,1)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$. تاکنون نشان دادیم که $C=\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ پوششی باز برای $(۰،۱)$ است. اکنون نشان می دهیم که هیچ زیر پوششی متناهی از C نمی تواند $(۰،۱)$ را بپوشاند. با استفاده از برهان خلف فرض کنید $e=\{G_{n_1},G_{n_2},\dots,G_{n_n}\}$ زیر پوششی متناهی برای $(۰،۱)$ است. در اینصورت اگر فرض کنیم $K=\max\{n_1,\dots,n_m\}$ آنگاه خواهیم داشت :

$\bigcup_{i=1}^{m} G_{n_i} = (\frac{1}{k},1)$ در اینصورت $\frac{1}{2k} \in (0,1)$ ولی $\frac{1}{2k} \notin \bigcup_{i=1}^{m} G_{n_i}$. بنابراین فرض وجود زیر پوشش متناهی نقض می شود. بنابراین (۰،۱) فشرده نیست.

مثال۳٦ : تمام زیر فضاهای فشرده فضای متریک گسسته را مشخص کنید.

قبلاً دیدیم که در هر فضای متریک زیر مجموعه متناهی فشرده می باشند. در فضای متریک گسسته استثناً عکس این حکم نیز برقرار است. به عبارتی اگر K در فضای متریک گسسته X فشرده باشد آنگاه K متناهی است. زیرا اگر فرض کنیم $C = \{\{x\} \mid x \in k\}$ آنگاه C یک پوشش باز برای K خواهد بود. و چون K فشرده فرض شده است بنابراین تعدادی متناهی عنصر از C مثلاً $e = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}\}$ موجود است که پوشش متناهی برای K است در اینصورت $k \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و در نتیجه چون K زیر مجموعه مجموعه ای متناهی است پس خود نیز متناهی می باشد.

روش دیگر: نشان می دهیم که در فضای متریک گسسته زیر مجموعه های نامتناهی نمی توانند فشرده باشند. فرض کنید K زیر مجموعه نا متناهی است در این صورت $C = \{\{x\} \mid x \in K\}$ پوششی باز برای K می باشد و بدیهی است که این پوشش نا متناهی نیز می باشد و هیچ زیر پوشش متناهی C نیز نمی تواند K را بپوشاند زیرا اگر تعدادی متناهی تک نقطه (منظور عناصر C است) پوشش دهنده K باشد آنگاه K متناهی است که این یک تناقض است.

۲-۳-۱ قضیه : اگر X یک فضای متریک و Y زیر فضایی از آن باشد آنگاه زیر مجموعه K با شرط $K \subset Y \subset X$ نسبت به Y فشرده است اگر و فقط اگر نسبت به X فشرده باشد.

اثبات : فرض کنیم K نسبت به Y فشرده باشد نشان می دهیم K نسبتX نیز فشرده است. فرض کنیم $C = \{G_\alpha\}_{\alpha \in T}$ یک پوشش باز دلخواه برای K باشد که G_α ها در X باز اند چون کلاس $e = \{G_\alpha \cap Y \mid \alpha \in T\}$ پوششی باز از زیر مجموعه های Y برای K می باشد

و K نسبت به Y فشرده است بنابراین زیر پوششی متناهی از E برای K وجود خواهد داشت فرض کنید

$e_1=\{G_{\alpha_1}\cap Y, G_{\alpha_2}\cap Y,\ldots\ldots, G_{\alpha_n}\cap Y\}$

آن زیر پوشش متناهی باشد در اینصورت متناظر با e_1 ، زیر پوشش متناهی $C_1=\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2},\ldots\ldots, G_{\alpha_n}\}$ برای K حاصل می شود.

اثبات عکس : فرض کنیم K نسبت به X فشرده باشد نشان می دهیم K نسبت به Y نیز فشرده است. فرض کنیم $A=\{V_\alpha \mid \alpha\in J\}$ یک پوشش باز دلخواه برای K باشد که V_α ها در Y باز اند.

بنا به قضیه زیر مجموعه برای هر α در J زیر مجموعه بازی چون U_α نسبت به X موجود است بطوریکه $V_\alpha = Y\cap U_\alpha$ $(\alpha\in Y)$ اکنون کلاس $B=\{U_\alpha \mid \alpha\in Y\}$ یک پوشش باز برای K از زیر مجموعه های X خواهد بود و چون K نسبت به X فشرده است بنابراین زیر پوشش متناهی $\underline{B_1=\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2},\ldots, U_{\alpha_n}\}}$ موجود است که پوششی متناهی برای K می باشد.

متناظر با B_1 زیر پوششی متناهی $A=\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2},\ldots, V_{\alpha_n}\}$ برای K حاصل می شود. بنابراین K نسبت به Y فشرده است.

۲-۳-۲ قضیه : در هر فضای متریک زیر مجموعه های فشرده بسته اند.

اثبات : اگر K زیر مجموعه فشرده از X باشد نشان می دهیم K^C باز است. فرض کنیم $x\in K^C$ برای هر $y\in K$ داریم $r_y=d(x,y)>0$. اکنون اگر قرار دهیم $V_y=N_{\frac{r_y}{2}}(x)$ و $W_y=N_{\frac{r_y}{2}}(y)$. بدیهی است که $V_y\cap W_y=\phi$ برای هر $y\in K$ بعلاوه کلاس $C=\{W_y \mid y\in K\}$ پوششی باز برای K است و چون K فشرده است می توان زیر

پوششی متناهی از C مانند $C_1=\{W_{y_1},W_{y_2},...,W_{y_n}\}$ استخراج نمود. اکنون اگر قرار دهیم $V=\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ که $V=V_{y_l}$ در اینجا L چنان است که $V_{y_L}=\min\{V_{y_1},V_{y_2},...,V_{y_n}\}$. بدیهی است که $V\bigcap K=\phi$ بنابراین :

$$N_{r\frac{y_L}{2}}(x)\bigcap K=\phi$$

در نتیجه $N_{r\frac{y_L}{2}}(x)\subset K^C$ و لذا K^C باز است.

۲-۳-۳ قضیه : زیر فضاهای بسته یک فضای فشرده فشرده اند.

اثبات : فرض کنیم X یک فضای متریک و Y زیر فضایی فشرده از آن باشد و $K\subset Y$ بسته باشد در اینصورت فرض کنیم $C=\{G_\alpha\}_{\alpha\in T}$ یک پوشش باز دلخواه برای K باشد. نشان می دهیم زیر پوششی متناهی از C نیز K را خواهد پوشاند اگر K^C که زیر مجموعه ای باز خواهد بود را به C اضافه کنیم. پوشش باز $e=C\bigcup\{K^C\}$ برای Y بدست خواهد آمد. و چون Y فشرده است بنابراین از پوشش باز e می توان زیر پوششی چون $e_1=\{G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},...,G_{\alpha_n},K^C\}$ برای Y بدست آورد از اینجا زیر پوشش $C_1=\{G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},...,G_{\alpha_n}\}$ برای K حاصل می شود. بنابراین K نیز فشرده است.

از قضیه اخیر نتیجه می شود که اشتراک ۲ یا چند زیر فضای فشرده ، فشرده می باشد زیرا اگر K و F دو زیر مجموعه فشرده باشند آنگاه $F\bigcap K$ بسته بوده و $F\bigcap K\subset K$.

این مطلب برای تعدادی نامتناهی زیر مجموعه فشرده نیز برقرار است. به عبارتی اشتراک خانواده ای از زیر مجموعه های فشرده ، فشرده است.

مثال ۳۷ : اگر $K_n=[-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]$ خانواده ای ازمجموعه فشرده باشد.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]=[0,1]$$

اجتماع تعدادی متناهی از زیر فضاهای فشرده نیز ، فشرده است. زیرا اگر $K_1,K_2...K_n$ ، همگی فشرده باشند آنگاه $K=\bigcup_{i=1}^{n}K_i$ فشرده خواهد بود زیرا اگر $C=\{G_\alpha\}_{\alpha\in T}$ پوششی

باز و دلخواه برای K باشد آنگاه C پوششی برای هریک از $K_1, K_2 \dots K_n$ خواهد بود و چون K_iها فشرده اند برای هر K_i یک زیر پوشش متناهی از C مانند $C_{K_l} = \{G_{\alpha_{i_1}}, G_{\alpha_{i_2}}, \dots, G_{\alpha_{i_{kj}}}\}$ (برای i=۱,...,n) بنابراین $C_K = \bigcup_{i=1}^{n} C_{K_i}$ و $C_K = \{G_{\alpha_{11}}, G_{\alpha_{12}}, \dots, G_{\alpha_{1_K}}, \dots, G_{\alpha_{n_1}}, \dots, G_{\alpha_{nK_n}}\}$

توجه کنید که این مطلب در مورد تعدادی دلخواه از مجموعه های فشرده صادق نیست به عبارتی ممکن است اجتماع تعداد بی شماری از زیر مجموعه های فشرده نا فشرده باشند. به عنوان نمونه اگر $K_x = \{x\}; x \in (0,1)$ در اینصورت برای هر x ، K_x فشرده است اما در $\bigcup_{x\in(0,1)} K_x = (0,1)$ نافشرده است.

۲-٤ فواصل در فضای R^K

اگر زیر مجموعه G از R^K به صورت :

$$G_j = \{\ (x_۱, \dots, x_k) \mid x_i \in R\ ,\ x_j > a\ ,\ i = ۱, \dots, k\ \}$$

تعریف شده باشد که در اینجا a عددی حقیقی است. چنین زیر مجموعه ای در R^K باز خواهد بود. در واقع این مجموعه نیمی از فضای R^K است. مجموعه هایی بصورت

$$\{(x_۱, \dots, x_k) \mid a_i < x_i < b_i \qquad i = ۱, \dots, n\}$$

فاصله ای باز در R^K است که خود اشتراک 2^k زیر مجموعه شبیه G_j می باشد.

به عنوان نمونه $I = \{\ (x,y) \mid ۱ < x < ۲\ ,\ ۰ < y < ۳\ \}$ یک فاصله در $R^۲$ است که اشتراک ٤ نیم صفحه می باشد. هر یک از G_j ها را می توان به عنوان یک نیم فضا تعریف کرد.

به همین ترتیب $I = \{(x_۱, \dots, x_k) \mid a_i \le x_i \le b_i \qquad i = ۱, \dots, n\}$ را یک فاصله بسته در R^K می نامیم.

۲-٤-۱ قضیه : اگر $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از فواصل بسته تو در تو در R^K باشد آنگاه اشتراک $\{F_n\}$ ها ناتهی می باشد به عبارتی $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{F_n\} \neq \phi$.

اثبات : اگر برای هرعدد طبیعی n :

$$F_n = \{(x_1,.x_k) \mid a_{i_n} \leq x \leq b_{i_n} \qquad i=1.,\ldots,k\}$$

در اینصورت برای هر i که $1 \leq i \leq k$ دنباله ای از فواصل بسته تو در توی R مانند $\{I_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$ حاصل می شود. که در اینجا $I_{n_i} = [a_{n_i}, b_{n_i}]$. در نتیجه دنباله $\{I_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از فواصل بسته اعداد حقیقی است که تو در تو می باشد و چنانچه قبلاً دیدیم نا تهی خواهد بود در نتیجه :

$$\exists x_i^* \in R \ni : x_i^* \in \bigcap\{I_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$$

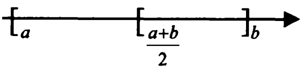
بنابراین

$$x^* = (x^*_1,\ldots,x^*_n) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

۲-٤-۲ قضیه : هر زیر مجموعه بسته کراندار در R فشرده است.

اثبات : هر زیر مجموعه بسته کراندار در R را می توان در فاصله بسته ای چون $[a,b]$ قرار داد

اگر ثابت کنیم هر فاصله بسته در R فشرده است آنگاه طبق قضیه قبل I فشرده است زیرا طبق قضیه قبلی. اکنون ثابت می کنیم $I=[a,b]$ در R فشرده است. با استفاده از برهان خلف فرض کنیم چنین نباشد یعنی پوششی باز چون $C = \{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ برای $[a,b]$ وجود دارد که دارای هیچ زیر پوششی باز متناهی نمی باشد اگر با انتخاب $C = \frac{a+b}{2}$ فاصله I را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم آنگاه الزاماً یکی از دو زیر فاصله توسط تعدادی متناهی عنصر از C پوشیده نمی شود. اسم این فاصله را I_1 در نظر می گیریم. مثلاً بدون آنکه از کلیت کم شود. مطابق شکل مقابل فرض کنید I_1 زیر فاصله سمت راست باشد :



(توجه کنید اگر هر دو زیر فاصله توسط تعداد متناهی از عناصر C پوشیده شوند آنگاه I نیز چنین است که تناقض است.)

اکنون درست با عملیات مشابه I_1 را نصف می کنیم. دو زیر فاصله به طولهای $\dfrac{b-a}{4}$ حاصل می شود که حداقل یکی از آنها توسط تعدادی متناهی از عناصر C پوشیده نمی شود نام آن زیر فاصله را I_2 قرار می دهیم. فرض کنید با تکرار این عمل زیر فاصله ای چون I_n با طول $\dfrac{b-a}{2^n}$ حاصل شده که توسط تعدادی متناهی عنصر از C پوشش داده نمی شود. مجدداً I_n را نصف می کنیم یکی از دو زیر فاصله که آنرا I_{n+1} می نامیم استخراج می شود که توسط تعدادی متناهی عنصر از C پوشش داده نمی شود.

با این عملیات دنباله ای از فواصل ساخته می شود که دارای خواص زیر است :

۱) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset .... \supset I_n \supset I_{n+1} \supset ....$

۲) I_n ها بسته و دارای طول $\dfrac{b-a}{2^n}$ می باشند.

۳) هیچیک از I_n ها توسط تعدادی متناهی عنصر پوشیده نمی شوند.

چون I_n ها تو در تو و بسته می باشند الزاماً اشتراکی نا تهی خواهند داشت. فرض کنید $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. چون C پوششی برای I بود بنابراین $x^* \in \bigcup_{\alpha \in j} G_\alpha$. بنابراین عضوی از C چون G_{α_0} موجود است بطوریکه $x^* \in G_{\alpha 0}$ و چون G_{α_0} باز است یک همسایگی از x* مانند $N_\varepsilon(x^*)$ موجود است بطوریکه $N_\varepsilon(x^*) \subset G_{\alpha_0}$. اکنون اگر n_0 بقدر کافی بزرگ باشد آنگاه $\dfrac{b-a}{2^{n_0}}$ از ε کوچکتر خواهد بود.و در نتیجه $I_{n_0} \subset N_\varepsilon(x^*) \subset G_{\alpha_0}$ و این تناقض آشکار خواهد بود زیرا طبق نتیجه (۳) هیچیک از I_n ها توسط تعداد متناهی عنصر از C پوشیده نمی شوند.

بنابراین فرض اولیه نقض می شود و I فشرده خواهد بود.

۲-٤-۳ قضیه :هر زیر مجموعه بسته کراندار از R^k فشرده است.

اثبات : اگر F زیر مجموعه بسته و کرانداری از R^k باشد آنگاه می توان فاصله بسته ای چون I در R^k چنان یافت $F \subset I$ اگر ثابت کنیم I فشرده است با توجه به قضایای قبلی F نیز فشرده خواهد بود.

می توان I را به صورت $I = \{(x_۱,..x_k) \mid a_i \le x_i \le b_i \quad i = ۱,...,k\}$ نمایش داد و توجه کنید که اگر x,y دو عنصر I باشند آنگاه فاصله این دو حد اکثر برابر $H = \sqrt{\sum_{i=۱}^{k}(b_i - a_i)^۲}$است زیرا داریم :

$$\| x - y \|^۲ = \sum_{i=۱}^{k}(x_i - y_i)^۲ \le \sum_{i=۱}^{k}(b_i - a_i)^۲$$

توجه کنید که در اینجا همواره $| x_i - y_i | \le | b_i - a_i |$ اکنون برای اثبات فشرده بودن I از برهان خلف کمک می گیریم.

فرض کنیم پوششی چون $C = \{G_\propto\}_{\propto \in j}$ برای I وجود دارد که هیچ زیر پوشش متناهی برای I نمی باشد.

فاصله I را با قرار دادن $C_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ برای $i = ۱,..,k$ به ۲^k زیر فاصله تقسیم می کنیم.

اکنون یکی از این ۲^k زیر فاصله موجود است که توسط تعداد متناهی عنصر از $C = \{G_\propto\}_{\propto \in j}$ پوشیده نمی شود. نام این زیر فاصله را I_2 می گذاریم. اکنون مشابه حالات قبل خود I_2 را به ۲^k زیر فاصله تقسیم می کنیم حداقل یکی از این 2^k زیر فاصله که توسط تعدادی متناهی عنصر از $C = \{G_\propto\}_{\propto \in j}$ پوشیده نمی شود نام آنرا I_2 می گذاریم درست مراحل قبلی را روی I_2 پیاده می کنیم تا I_3 بدست آید. اگر n بار این مراحل را تکرار کنیم ، زیر فاصله ای چون I_n حاصل می شود که توسط تعدادی متناهی عنصر از C پوشیده نمی شوند I_n را به ۲^k زیر فاصله تقسیم می کنیم مانند قبل حداقل یکی از

این زیر فاصله ها توسط تعدادی متناهی عنصر از C پوشیده نمی شود نام آنرا I_{n+1} قرار می دهیم و مراحل قبل را طی می کنیم در اینصورت دنباله ای از فواصل بسته تو در تو بدست می آید که دارای خواص زیر است :

۱) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset .....\supset I_n \supset I_{n+1} \supset ....$

۲) به ازای هر عدد طبیعی n ، I_n توسط تعدادی متناهی عنصر از C پوشیده نمی شود.

۳)اگر y, x دو عنصر از I_n باشند آنگاه خواهیم داشت : $\| x-y \| \le \frac{H}{2^n}$

اکنون دنباله ای از فواصل بسته تو در تو چون $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ ساخته شد و بنا به قضایای اشتراک این فواصل بسته تو در تو نا تهی خواهد بود. فرض کنید $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ با توجه به آنکه $C=\{G_\alpha\}_{\alpha\in j}$ پوششی برای I بود بنابراین $x^* \in I \subset \bigcup_{\alpha\in j} G_\alpha$.

بنابراین عنصری چون G_{α_0} از C موجود است بطوریکه : $x^* \in G_{\alpha_0}$ و چون G_{α_0} باز است عدد مثبتی چون r موجود است بطوریکه $N_r(x^*) \subset G_{\alpha_0}$ اکنون اگر n_0 بقدر کافی بزرگ اختیار شود $\frac{H}{2^{n_0}} < r$ خواهد بود در نتیجه $I_{n_0} \subset G_{\alpha_0}$ زیرا از آنجا که x^* عنصری از I_n است اگر x عنصری دلخواه از I_{n_0} باشد آنگاه $\| x-x^* \| \le \frac{H}{2^{n_0}} < r$ بنابراین $x \in N_r(x^*)$ و بدین سان تناقض مورد نیاز بدست می آید. چون هر یک از I_n ها توسط تعدادی متناهی عنصر از C پوشیده نمی شد در حالیکه I_{n_0} توسط تعدادی متناهی عنصر پوشیده شد.

در فضای متریک زیر مجموعه E کراندار نامیده می شود اگر یک همسایگی مانند N از نقاط X وجود داشته باشد بطوریکه E زیر مجموعه آن همسایگی باشد. بخصوص در فضای R^K می توان آن همسایگی را نسبت به مرکز مبدأ در نظر گرفت.

۲-٤-٤ قضیه :هر زیر مجموعه نا متناهی از یک زیر فضای فشرده دارای یک نقطه حدی است.

اثبات : اگر K زیر فضایی فشرده و E زیر مجموعه ای نا متناهی از K باشد با استفاده از برهان خلف فرض کنید E دارای هیچ نقطه حدی در K نباشد در اینصورت اگر x را از K اختیار کنیم آنگاه x نقطه حدی E نخواهد بود در نتیجه یک همسایگی از x مانند $N_{r_x}(x)$ موجود است که حداکثر شامل تعدادی متناهی از عناصر E است. در واقع می توان این همسایگی را چنان اختیار کرد که حداکثر یک نقطه از E را که خود x است. شامل باشد. اکنون دسته $C=\{N_{r_x}(x)\}_{x\in K}$ پوششی باز برای K خواهد بود و طبق فرض فشرده بودن K زیر پوشش متناهی از C برای K می توان استخراج کرد. فرض کنید $N_{r_{x_1}}(x_1),\ldots,N_{r_{x_n}}(x_n)$ زیر پوشش متناهی K باشد در اینصورت چون $E\subset K$ بنابراین $E\subset\bigcup_{i=1}^{n}N_{r_{x_i}}(x_i)$ و این تناقض نا متناهی بودن E است. چون طبق فرض هر یک از $N_{r_{x_i}}(x_i)$ حداکثر تعدادی متناهی از عناصر E را در بر می گیرد.

توجه کنید که در قضیه قبل فشرده بودن K الزامی می باشد. زیرا به عنوان مثال $Z\subset R$ و با آنکه Z تعدادی نا متناهی عنصر دارد ولی دارای نقطه حدی نمی باشد.

نتیجه : اگر E یک زیر مجموعه نا متناهی و کراندار از R^K باشد آنگاه E دارای نقطه حدی در R^K خواهد بود.

اثبات : چون E در R^K کراندار می باشد می توان آنرا مشمول فاصله بسته ی کرانداری چون I در R^K در نظر گرفت و طبق قضیه چون I فشرده است E دارای نقطه حدی در I خواهد بود و اثبات کامل می شود.

۲-٤-٥ قضیه : اگر E زیر مجموعه ای از R^K باشد آنگاه احکام زیر با یکدیگر معادل اند:

۱) زیر مجموعه E بسته و کراندار است.

۲) E فشرده است.

۳) هر زیر مجموعه نامتناهی از E دارای حداقل یک نقطه حدی در E می باشد.

اثبات : هم ارزی (۱)و(۲) قبلاً ثابت شده است. همینطور از گزاره (۲) با توجه به قضیه اخیر گزاره (۳) نتیجه می شود برای تکمیل اثبات کافی است از گزاره (۳) گزاره (۱) را ثابت کنیم.

نخست نشان می دهیم که E کراندار است با استفاده از برهان خلف اگر E کراندار نباشد آنگاه هیچ همسایگی به مرکز مبدأ نمی تواند شامل E باشد بنابراین برای هر عدد طبیعی n می توان عنصر x_n از E را چنان یافت که $\|x_n\|>n$ در اینصورت اگر S متشکل از تمام x_n ها باشد به عبارتی $S=\{x_n\in R^K \mid \|x_n\|>n, x_n\in E\}$ آنگاه S زیر مجموعه ای نا متناهی از E است و باید یک نقطه حدی داشته باشد. فرض کنید x^* نقطه حدی S باشد در اینصورت باید $N_1(x^*)$ شامل تعداد نا متناهی عنصر از S باشد و این تناقض است چون اگر $M=[\|x^*\|+۲]$ آنگاه حداکثر M عنصر از S می تواند در $N_1(x^*)$ قرار گیرد بنابراین فرض کراندار نبودن E باطل می شود. اکنون نشان می دهیم که E بسته است. مجدداً از برهان خلف کمک می گیریم. فرض کنیم E بسته نباشد در اینصورت نقطه ای چون x^* موجود است که x^* نقطه حدی E بوده و به E تعلق ندارد. بداینصورت برای هر عدد طبیعی n عنصری چون x_n از E موجود است بطوریکه $\|x_n-x^*\|<1/n$. اگر S متشکل از همه این x_n ها باشد آنگاه S غیر تهی و نا متناهی خواهد بود توجه کنید که اگر S متناهی باشد آنگاه $\|x_n-x^*\|$ نمی تواند از همه $1/n$ ها کوچکتر باشد. بنابر فرض S دارای یک نقطه حدی در E خواهد بود. نشان می دهیم که آن نقطه حدی باید x^* باشد.

زیرا اگر فرض کنیم y یک نقطه حدی S باشد آنگاه خواهیم داشت : (۱)

$$\|x_n-y\|=\|x_n-x^*+x^*+y\|\geq-\|x_n-x^*\|+\|x^*-y\|>-1/n+\|x^*-y\|$$

اکنون از آنجا که x^* مخالف y در نظر گرفته شده است بنابراین $\|x^*-y\|>0$ بنابراین می توان n را چنان یافت که :

$$(۲)\quad \frac{2}{n}<\|x^*-y\| \;\Rightarrow\; \frac{1}{n}<\frac{\|x^*-y\|}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{n}>-\frac{\|x^*-y\|}{2}$$

با توجه به رابطه (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$\|x_n - y\| > -\frac{1}{n} + \|x^* - y\| > \frac{-\|x^* - y\|}{2} + \|x^* - y\| = \frac{\|x^* - y\|}{2} \quad (۳)$$

و این تناقض آشکار خواهد بود. زیرا y به عنوان نقطه حدی S تلقی شده بود در حالیکه نا مساوی (۳) نشان می دهد که در یک همسایگی y به شعاع $\frac{\|x^* - y\|}{2}$ حداکثر تعدادی متناهی عنصر از S وجود دارد.

۲-۵ فضای همبند

تعریف: اگر X یک فضای متریک باشد آنگاه زیر مجموعه های A,B را جدا پذیر می نامیم اگر $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \phi$ در واقع دو مجموعه جدا پذیر با دو مجموعه جدا از هم اختلاف دارند.

مثال۳۸ : دو مجموعه $(۱،۲),(۰،۱)$ جدا پذیر می باشند ولی $(۱،۲),(۰،۱]$ با آنکه از هم جدا می باشند ولی جدا پذیر نیستند در واقع دو مجموعه جدا پذیر را می توان توسط یک مرز از یکدیگر جدا کرد.

تعریف : زیر مجموعه E از فضای X همبند است هرگاه نتوان E را بصورت اجتماع دو مجموعه جدا پذیر نوشت.

به عبارتی E هم بند است اگر نتوان زیر مجموعه هایی چون B , A یافت بطوریکه :

$$E = A \cup B \qquad , \qquad A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \phi$$

مثال۳۹ : مجموعه $E=[۱،۲]$ همبند است ولی زیر مجموعه $F = (1,2) \cup [2,3)$ نا همبند می باشد چون می توان F را بصورت اجتماع $F = [1,2] \cup (2,3)$ نوشت که این دو جدا پذیر بوده و اجتماعشان برابر F است.

مثال۴۰ : هر همسایگی در صفحه همبند می باشد.

۲-۵-۱ قضیه :اگر E زیر مجموعه ای از R باشد آنگاه E همبند است اگر و فقط اگر دارای خاصیت زیر باشد.

$\forall x,y\in E, z\in R, x<z<y \Rightarrow z\in E$

اثبات : فرض کنید E زیر مجموعه ای همبند از R باشد فرض کنید x,y نقاطی از E باشند بطوریکه $x<y$ و برای بعضی از z ها که $x<z<y$ داشته باشیم $z\notin E$ مجموعه های A_Z, B_Z را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$A_Z = E\bigcap(-\infty, z) \qquad B_Z = E\bigcap(z,+\infty)$

از آنجا که $x\in A_Z$ و $y\in B_Z$ نتیجه می شود که $A_Z\neq\phi, B_Z\neq\phi$

بنا به تعریف داریم که A_Z زیر مجموعه $(-\infty,z)$ و B_Z زیر مجموعه $(z,+\infty)$ است در نتیجه $A_Z\bigcap\overline{B}_Z=\phi$ و $B_Z\bigcap\overline{A}_Z=\phi$ و $E=A_Z\bigcup B_Z$ بنابراین E اجتماع دو زیر مجموعه جدا پذیر بوده و باید همبند نباشد و این خلاف فرض است. بنابراین :

$\forall x,y\in E, z\in R, x<z<y \Rightarrow z\in E$

فرض کنیم E دارای خاصیت زیر باشد

$\forall x,y\in E, z\in R, x<z<y \Rightarrow z\in E$

باید ثابت کنیم که E همبند است.

بنا به برهان خلف اگر E همبند نباشد آنگاه زیر مجموعه های غیر تهی و جدائی پذیر A,B وجود دارند بطوریکه :

$E=A\cup B, A\cap\overline{B}=\phi, \overline{A}\cap B=\phi$

فرض کنید $x\in A$ و $y\in B$ و $x<y$ باشد آنگاه $A\bigcap[x,y]$ کراندار است. بنا بر این بنا به خاصیت $L.U.B$ برای R نتیجه می شود که $Sup(A\bigcap[x,y])$ موجود است فرض کنید :

$z=Sup(A\bigcap[x,y])$

آنگاه توجه کنید که $A\bigcap[x,y]\subset A$ و $Sup(A\bigcap[x,y])\leq Sup(A)$ در نتیجه

$$z=Sup(A\bigcap[x,y])\Rightarrow z\in\overline{A}$$

بنابراین

$$z\in\overline{A},\overline{A}\bigcap B=\phi\Rightarrow z\notin B$$

از اینجا نتیجه میشود

$$z\in[x,y]\Rightarrow z\notin B$$

مسائل حل شده فصل دوم

مثال ٤١ : همه نقطه‌های انباشتگی یا حدی مجموعه‌های زیر را در R مشخص نمایید و در هر مورد تعیین کنید که مجموعه باز است یا بسته.

الف) همه اعداد صحیح

ب) بازه $]a,b[$

پ) همه اعداد گویا

ت) همه عددهای به شکل $۲^{-n}+۵^{-m}$ $\quad(m,n=1,2,\ldots)$

ث) همه عددهای به شکل $(-۱)^n+\left(\frac{۱}{m}\right)$ $\quad(m,n=1,2,\ldots)$

ج) همه عددهای به شکل $\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{m}\right)$

چ) همه اعداد به شکل $\dfrac{(-1)^n}{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)\right]}$

حل: الف) نقاط انباشتگی یا حدی تهی می‌باشد زیرا اگر $x,x\in R$ صحیح باشد همسایگی $N'_\delta(x)\cap Z=\phi$ و اگر $x\notin Z$ آن‌گاه $N'_\delta(x)\cap Z=\phi$ که در این‌جا

$\delta = \min\{x-[x],[x]+1-n\}$

توجه کنید که در این‌جا δ فاصله x تا نزدیکترین عدد صحیح می‌باشد. مجموعه Z بسته است.

ب) مجموعه $[a,b]$ نه باز است و نه بسته.

$[a,b]=$ نقاط حدی

پ) تمام اعداد حقیقی نقطه حدی مجموعه اعدادگویا می‌باشد. این مجموعه نه باز است و نه بسته.

ت) تمام نقاط به شکل 2^{-n} برای $n\in N$ و 5^{-m} برای $m\in N$ و نقطه صفر نقاط حدی مجموعه می‌باشند. مجموعه نه باز است و نه بسته.

ث) نقاط حدی این مجموعه $\{-1,1\}$ است. این مجموعه نه باز است و نه بسته.

اگر m ثابت باشد نقاط حدی نداریم.

ج) تمام نقاط بصورت $\frac{1}{n}$ برای $n\in N$ نقطه‌ی حدی این مجموعه بوده و علاوه بر این صفر نیز یک نقطه حدی است. این مجموعه نه باز است و نه بسته.

چ) نقاط $\{-١,١\}$ نقاط حدی این مجموعه بوده و مجموعه نه باز است و نه بسته.

مثال ٤٢ : اگر x یک فضای متریک باشد و $E\subset X$ آن‌گاه مجموعه نقاط حدی E همواره بسته است.

حل: باید نشان دهیم که E' بسته است.

راه حل اول: نشان خواهیم داد که E' شامل نقاط حدی است. یعنی $(E')'\subset E'$

$q\in(E')'\Rightarrow \forall N_r(q)\Rightarrow N_r(q)\cap E'\neq\phi$

$N_r(q)=\{p\in x, ٠\langle d(p,q)\langle r\}$

فرض کنید

$N_r(q)\cap E' \neq \phi \Rightarrow p \in N_r(q)\cap E' \to p \in E' \quad , \quad 0 < d(p,q) < r$ ۱

$p \in E' \Rightarrow \forall N_r(p) \Rightarrow N_r(p)\cap E \neq \phi \Rightarrow \exists x \in N_r(p)\cap E$

$\Rightarrow x \in N_r(p), x \in E \Rightarrow 0 < d(x,p) < r, x \in E$ ۲

۱,۲

$d(x,q) \leq d(x,p)+d(p,q) < r+r \Rightarrow d(x,q) < 2r$

$\forall r > 0, \forall Nr(q), Nr(q)\cap E \neq \phi \Rightarrow q \in E'$

$\forall q \in (E')' \Rightarrow q \in E', (E')' \subset E'$

راه دوم: نشان دهید $(E')^C$ باز است یعنی هر نقطه $x \in (E')^C$ درونی است.

نقیض نقطه حدی

$x \in (E')^C \Rightarrow x \notin E' \xrightarrow{\text{نقیض نقطه حدی}} \exists N_r(x): N_r(x)\cap E = \phi$

نشان می‌دهیم $N_r(x)\cap E'$ تهی است.

فرض کنید $y \in N_r(x)\cap E' \Rightarrow y \in N_r(x), y \in E'$

$y \in N_r(N) \xrightarrow{N_r(x)\ \text{باز است}} \exists N_h(y): N_h(y) \subset N_r(x)$

$y \in E' \xrightarrow{\text{نقطه حدی}} N_h(y)\cap E \neq \phi$

و این خلاف فرض $\phi = N_r(x)\cap E$ است و در نتیجه y وجود ندارد پس

$N_r(x)\cap E' = \phi$

مثال ۴۳ : فرض کنید x یک فضای متریک باشد. ثابت کنید هر زیرمجموعه باز از X اجتماعی از همسایگی‌ها از نقاط X است یا

$G \underset{\text{باز}}{\subset} X \Rightarrow G = \bigcup_{x\in G} N_r(x)$

و $N_r(x) = \{ y \in X : d(X,y) < r\}$

حل:

$$x \in G \Rightarrow \exists Nr(x) \ni Nr_x(x) \subset G \Rightarrow \bigcup_{x\in G} Nr_x(x) \subset G$$

و بنا به تعریف $N_r(x)$ نتیجه می‌شود که:

$$\forall x \in G \Rightarrow \exists N r_x(x) \ni x \in N r_x(x)$$
$$\xrightarrow{Nr_x(x) \subset \cup Nr_x(x)} x \in \bigcup N r_x(x) \Rightarrow G \subset \bigcup_{x\in G} N r_x(x)$$

مثال ٤٤ : اگر A,B در فضای متریک x چگال باشد آیا $A \cap B, A \cup B$ نیز چگال‌اند؟

حل: $A \cup B$ همیشه چگال می شود ولی $A \cap B$ در حالت کلی چگال نمی‌شود برای مثال به ازاء $B = Q', A = Q$ داریم که :

$$\overline{A \cap B} = \overline{\phi} \neq \overline{A} \cap \overline{B} = x$$

مثال ٤٥ : اگر B, A زیرمجموعه X باشند آن‌گاه

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

و در حالت کلی

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$$

حل:

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow \forall N_r(x): N_r(x) \cap (A \cap B) \neq \phi$$
$$\Rightarrow N_r(x) \cap A \neq \phi, N_r(x) \cap B \neq \phi \Rightarrow x \in \overline{A}, x \in \overline{B} \Rightarrow$$
$$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

حالت تساوی می‌تواند اتفاق نیافتد مانند مثال٤٤:

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

مثال ٤٦ : اگر B باز باشد و B در X چگال باشد آن‌گاه

$$\overline{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}$$

حل: $\overline{A\cap B}=(A\cap B)\cup(A\cap B)'$, $\overline{A}\cap B\subset\overline{A\cap B}$

$x\in\overline{A}\cap B\Rightarrow x\in\overline{A},x\in B$

اگر $x\in\overline{A}\Rightarrow x\in A$ یا $x\in A'$

اگر $x\in A\xrightarrow{x\in B}x\in A\cap B\xrightarrow{A\cap B\subset\overline{A\cap B}}x\in\overline{A\cap B}$

اگر $x\in A'\xrightarrow{x\in B}\forall N_r(x)\,,N_r(x)\cap A\neq\phi$

$x\in B\overset{B\ \text{باز}}{\Rightarrow}\exists N_h(x)\ni N_h(x)\subset B$

همسایگی $N_r(x)$ را می‌توان بصورت یک همسایگی مانند G از x تبدیل کنید بطوریکه $G\cap(A\cap B)\neq\phi$ بنابراین x نقطه صدق $A\cap B$ خواهد بود پس

$\forall x\in\overline{A}\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)'\Rightarrow x\in\overline{A\cap B}$

$A\cup B$ همواره چگال است زیرا اگر n نقطه‌ای دلخواه باشد همواره

$N_r(x)\cap A\neq\phi$, $N_r(x)\cap B\neq\phi$ (برای r دلخواه) بنابراین

$$N_r(x)\cap(A\cup B)\neq\phi$$

در نتیجه $x\in(A\cup B)'$ و چون xدر X اختیاری بود بنابراین $X\subset(A\cup B)'$ و این نشان می‌دهد که $(A\cup B)$در X چگال است.

مثال ٤٧ : مثالی بیاورید که

$A^\circ=B^\circ=\phi$ ولی $(A\cup B)^\circ=X$

حل: با فرض $A=Q$, $B=Q'$ ملاحظه می‌شود که $A^\circ=B^\circ=\phi$

$$(A\cup B)^\circ=(R)^\circ=R=X$$

مثال ٤٨ : اگر A , Bدر Xچگال باشند و B در Xباز باشد نشان دهید $A\cap B$ در X چگال است

$$\begin{matrix}A\subseteq X\subseteq\overline{A}\\ B\subseteq X\subseteq\overline{B}\end{matrix}\Rightarrow A\cap B\subseteq X\subseteq\overline{A\cap B}$$

روش دوم: $A\bigcap B\subseteq X\subseteq \overline{B}\subseteq \overline{A\bigcap B}$ چون B باز و A چگال $B\subseteq \overline{A\bigcap B}$ پس
$\overline{B}\subseteq \overline{\overline{A\bigcap B}}=\overline{A\bigcap B}$ در نتیجه $A\bigcap B\subset X\subseteq \overline{B}$ بنابراین $A\bigcap B\subseteq X\subseteq \overline{A\bigcap B}$

روش اول: باید نشان داد $X\subseteq \overline{A\bigcap B}$ فرض کنیم $x\in X$ در این صورت اگر $x\in A\bigcap B$ مسئله حل است. اگر $x\not\in A\bigcap B$ آنگاه برای هر $r\rangle 0$ نشان می‌دهیم $N_r(x)\bigcap A\bigcap B\neq \phi$

چون $x\in \overline{B}$ بنابراین $\exists r\in N_r(n), y\in B$ اکنون چون B باز است داریم:
$\exists\, r' \ni: N_{r'}(y)\subset B$ در این صورت $N_{r'}(y)\subset B\subset N_r(x)$, $r''=\min\{r', r-d(x,y)\}$

اکنون چون A چگال است $\qquad$ و چون $N_{r''}(y)\bigcap A\neq \phi$ $N''_r(y)\subset B$ بنابراین

$N_{y''}(y)\bigcap(A\bigcap B)\neq \phi$ با توجه به آنکه $N_r=(y)p\subset N_r(x)$ بنابراین

$N_r(x_N)\bigcap(A\bigcap B)\neq \phi$

مثال ۴۹ : اگر A در X چگال باشد و B باز باشد آن‌گاه $B\subset \overline{A\bigcap B}$

$\overline{A}\bigcap B\subseteq \overline{A\bigcap B}\Rightarrow B\subseteq \overline{A\bigcap B}$

$A\subseteq X\subseteq \overline{A}$ $\quad A$ چگال

$B\subseteq X\subseteq \overline{A}$

$B\bigcap \overline{A}=B$

مثال ۵۰ : ثابت کنید تنها زیرمجموعه‌های هم باز و هم بسته در R با متریک معمولی خود R و ϕ هستند.در مورد R^2 چه می‌توان گفت.

حل: باز و بسته بودن هر دو مجموعه R و ϕ به سادگی انجام می‌پذیرد. توجه کنید که R باز است زیرا اگر $x\in R$ آنگاه $(x-\delta, x+s)\subset R$ بنابراین هر نقطه R درونی بوده و R باز است. از طرفی ϕ به انتفالی مقدم باز است و از آن‌جا که متمم مجموعه‌های باز، بسته است. در نتیجه R و ϕ بسته می‌باشند.

اکنون نشان می‌دهیم که هیچ زیرمجموعه‌ای از R غیر از تهی و R هم باز و هم بسته نیست زیر مجموعه ناتهی A را درنظر بگیرید که $A\neq R$ و فرض کنید A هم بسته و هم باز است با این فرض به تناقض خواهیم رسیدچون A ناتهی است عنصری چون x موجود

است که $x \in A$ از طرفی چون $A \neq R$ عنصری چون y موجود است بطوریکه $y \notin A$. دو حالت پیش می‌آید.

حالت ۱ : اگر $x \langle y$ فرض $A_x = \{ a \in A \mid a \langle y \}$

اکنون A_x زیرمجموعه‌ای کران‌دار از بالاست که طبق اصل کامل بودن اعداد حقیقی دارای Sup می‌باشد. فرض کنید $b = Sup\ A_x$ ازآن‌جا که فرض کردیم A بسته است خواهیم داشت $b \in A$ و در نتیجه $b \in A_x$ از طرفی چون A را باز درنظر گرفتیم و $b \in A$ درنتیجه یک همسایگی از b مانند $N_r(b)$ وجود دارد بطوریکه $N_r(b) \subset A$ بنابراین

$$(b-r\ ,\ b+r) = N_r(b) \subset A$$

بنابراین به ازای عنصری چون c که $\circ \langle c \langle r$ خواهیم داشت: $b+c \in A_x$ و این تناقض است چون فرض کرده بودیم که b , $SupA_x$ می‌باشد.

حالت ۲: اگر $y \langle x$ درست مشابه حالت ۱ فرض کنید

$B_x = \{ a \in A \mid a \rangle y \}$ و عملیات مشابه را روی $\inf B_x$ انجام دهید.

- در مورد R^2 , R^k مطلب مشابه برقرار می‌باشد. و تنها زیرمجموعه‌های هم باز و هم بسته R^2 , R^k ϕ و تمام فضا می‌باشد.

مثال ۵۱ : ثابت کنید برای هر دو زیرمجموعه A و B داریم:

۱) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

۲) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

مثالی برای نقض تساوی در رابطه (۲) ارائه دهید.

حل قسمت اول:

$$x \in (A \cap B)^\circ \Rightarrow \exists r\ ,\ N_r(x) \subset A \cap B \Rightarrow$$
$$N_r(x) \subset A\ \ ,\ \ N_r(x) \subset B$$
$$x \in A^\circ\ \ ,\ \ x \in B^\circ \Rightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ$$

$$1 \qquad (A\cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$$

$$x\in A^\circ\cap B^\circ \Rightarrow x\in A^\circ \Rightarrow \exists r_1 \ , \ N_{r_1}(x)\subset A$$

$$x\in B^\circ \Rightarrow \exists r_2 \ , \ N_{r_2}(x)\subset A$$

$$r=\min\{r_1 \ , r_2\}\Rightarrow N_r(x)\subset A\cap B \Rightarrow x\in (A\cap B)^\circ$$

$$2\Rightarrow A^\circ\cap B^\circ \subset (A\cap B)^\circ \underset{1,2}{\Rightarrow} A^\circ\cap B^\circ = (A\cap B)^\circ$$

حل قسمت دوم:

$$x\in A^\circ\cup B^\circ \Rightarrow x\in A^\circ \text{ یا } x\in B^\circ$$

$$\Rightarrow \exists r_1 : N_{r_1}(x)\subset A \quad \text{یا} \quad \exists r_2 : N_{r_2}(x)\subset B$$

$$r=\max\{r_1 \ , r_2\} \rightarrow N_r(x)\subset (A\cup B) \Rightarrow$$

$$x\in (A\cup B)^\circ \Rightarrow A^\circ\cup B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$$

بعنوان مثال نقض برای عدم برقراری تساوی در رابطه دوم فرض کنید. $A=Q$, $B=Q'$

در این صورت $A^\circ\cup B^\circ=\phi$ درحالیکه $(A\cup B)^\circ = R$

مثال۵۲ : اگر A , B زیرمجموعه هایی از R^k باشند

$$\overline{A\cap B}\subset \overline{A}\cap\overline{B}$$

و اگر A باز باشد $\leftarrow$ $A\cap\overline{B}\subseteq \overline{A\cap B}$

- مثالی برای نقض تساوی در روابط اخیر ارائه دهید.

حل قسمت اول:

$$x\in \overline{A\cap B} \Rightarrow x\in (A\cap B)\cup (A\cap B)'$$

حالت۱

$$\begin{cases} x\in A\cap B & \Rightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\in \overline{A} \wedge x\in\overline{B} \Rightarrow \\ x\in (A\cap B)' & \Rightarrow \forall r>0 \quad Nr(x)\cap (A\cap B)\neq \phi \quad x\in \overline{A}\cap\overline{B} \end{cases}$$

حالت۲

$$\Rightarrow \forall \ r>0 \quad Nr(x)\cap A\neq\phi \ , Nr(x)\cap B\neq \phi$$

$$\Rightarrow x\in A' \ , \ x\in B'$$

$$\Rightarrow x\in\overline{A} \ , \ x\in\overline{B} \Rightarrow x\in \overline{A}\cap\overline{B}$$

ملاحظه می‌شود که در هر حالت رابطه $\overline{A\cap B}\subset \overline{A}\cap \overline{B}$ برقرار است برای ارائه مثالی که تساوی این دو را در حالت کلی نقض کند فرض کنیم $B=Q'$, $A=Q$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\overline{A\cap B}=\overline{\phi}=\phi \qquad\qquad \overline{A}\cap \overline{B}=R\cap R=R$$

حل قسمت دوم: $x\in A\cap \overline{B}\Rightarrow x\in A \ , \ x\in \overline{B}$

$(۱) \quad Nr(x)\subset A \quad \Rightarrow \forall\ r\rangle ۰$ چون A باز است

$(۲) \quad x\in \overline{B}\Rightarrow Nr(x)\cap B\neq \phi$

$$(۱),(۲)\Rightarrow Nr(x)\cap (A\cap B)\neq \phi \Rightarrow x\in \left(\overline{A\cap B}\right)$$

برای ارائه مثال نقض تساوی فرض کنید $B=[1,2]\ ,\ A=(1,2)$

$$A\cap \overline{B}=(۱\ ,\ ۲)\cap \left[\overline{۱,۲}\right]=(۱\ ,\ ۲)\cap [۱,۲]=(۱\ ,\ ۲)$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{(۱\ ,\ ۲)\cap [۱\ ,\ ۲]}=\left(\overline{۱\ ,\ ۲}\right)=[۱\ ,\ ۲]$$

$$(۱\ ,\ ۲)\overset{\subset}{\neq}[۱,۲]$$

مثال۵۳ : هرگاه $A\subset R^n$ ثابت کنید مجموعه نقاط تنهای A حداکثر شمارش‌پذیر است. (منظور از نقطه تنها نقطه‌ای است چون x که عدد مثبتی چون r موجود باشد که $Nr(x)\cap A=\{x\}$)

ب: اگر E باز باشد، آنگاه هر نقطه آن درونی بوده و در نتیجه $E\subset E^\circ$، از طرفی می‌دانیم $E\subset E^\circ \Leftarrow E=E^\circ$، آنگاه چون با توجه به قسمت قبل E°باز است E نیز باز خواهد بود.

پ: هرگاه $G, G\subset E$ باز، $G\subset E^\circ$، فرض کنیم $x\in G$، در این صورت چون G باز است، یک همسایگی از x مانند $Nr(x)$است، در نتیجه x نقطه درونی E بوده و x متعلق به E°است.

ت: باید نشان دهیم $\left(E^\circ\right)^c=\left(\overline{E^c}\right)$

اگر $x \in (E^c)'$ آنگاه $x \notin E^\circ$ بنابراین $\phi \neq Nr(x) \cap E^{\circ c}$ و این یعنی x یا نقطه E^c است و یا متعلق به E^c است در نتیجه $x \in \overline{E^c}$ برای اثبات طرف دیگر اگر $x \in (E^c)'$ یا $x \in E^c \Leftarrow x \in (\overline{E^c})$ اگر $x \in E^c$ آنگاه x نقطه درونی E نبوده و داریم $x \in (E^\circ)^c$

اگر $x \in (E^\circ)^{c'}$، آنگاه هر همسایگی x با E^c اشتراک داشته و هیچ همسایگی u داخل E نمی‌باشد درنتیجه $x \notin E^\circ$ یا $x \in (E^\circ)^c$

ث: خیر بعنوان مثال اگر $E=Q$ آنگاه $Q^\circ = \phi$ ولی درون $\overline{E}$

$$(\overline{E})^\circ = R$$

ج: خیر مجدداً اگر $E=Q$ آنگاه $\overline{E} = R$ درحالیکه

$$(\overline{E})^\circ = \phi$$

مثال ۵٤ : فرض کنید $k \subset R^1$ از o و عددهای $1/n$، به ازای $n = 1,2,3,\ldots$، تشکیل شده باشد. مستقیماً از تعریف (بدون استفاده از قضیهٔ هاینه – برل) ثابت کنید که k فشرده است.

فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in j}$ یک پوشش باز باشد ، از آنجا که صفر عنصری از k است یکی از عناصر پوشش مذکور مانند $G_{\alpha_\circ}$ وجود دارد که صفر را دربردارد از آن‌جا که $G_{\alpha_\circ}$ باز است صفر نقطه درونی آن بوده و یک همسایگی چون $N_\varepsilon(b)$ وجود دارد، بطوریکه $N_\varepsilon(b) \subset G_{\alpha_\circ}$ اکنون برای $\varepsilon \rangle \circ$ عددی چون n موجود است $\frac{1}{n} \langle \varepsilon$ بنابراین $G_{\alpha_\circ}$ شامل تمام نقاط k غیر از احتمالاً $\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ است. از آن‌جا که $\{G_\alpha\}_{\alpha \in j}$ پوششی برای k بوده، هر یک از عناصر $\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1$ متعلق به یکی از G_αها می‌باشد.

درهر صورت اگر $1 \in G_{\alpha_1}, \frac{1}{2} \in G_{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{n-1} \in G_{\alpha_{n-1}}$ آنگاه $\{G_{\alpha_i}\}$ پوششی متناهی برای k خواهد بود و این همان پوششی است که منتظرش بودیم.

مثال ۵۵ : مجموعهٔ فشرده‌ای از اعداد حقیقی بسازید که نقاط حدی آن مجموعهٔ شمارشپذیری تشکیل دهند.

اگر فرض کنیم $M:\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\ \middle|m,n\in N\right\}$ آنگاه نقاط حدی M عبارتند از: $k:\left\{1/n\ \middle|n\in N\right\}U\{\circ\}$ و بدیهی است که این مجموعه شمارش‌پذیر می‌باشد اکنون نشان می‌دهیم که این مجموعه فشرده است.

مشابه اثبات تمرین (۱۲) عمل خواهیم کرد، اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in j}$ پوشش باز برای M باشد، آنگاه یکی از عناصر پوششی مانند G_α موجود است که صفر را دربردارد مانند مسأله قبل می‌توان N را چنان یافت که $\varepsilon\rangle\frac{1}{N}$، اکنون $G_{\alpha_\circ}$ دارای تمام نقاط حدی M غیر از احتمالاً $\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1$ می‌باشد، اکنون $G_\alpha,\ldots,G_{\alpha_1}$ به ترتیب شامل $1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n-1}$ آنگاه $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ چنان وجود دارند که داریم: $N_{\varepsilon_i}(1/i)\subset G_i$, اکنون برای هر i تعدادی متناهی عنصر به صورت $\frac{1}{i}+\frac{1}{n}$ ، $i=1,\ldots,n$ وجود داشته که داخل G_{α_1} نباشد فرض کنید تعداد این عناصر M باشد، در این صورت اگر هر یک از این عناصر متعلق به یکی از G_α ها باشد، مثلاً اگر $G_{\alpha_N},\ldots,G_{\alpha_{N+m-1}}$ شامل آن M نقطه باشد آنگاه $\left\{G_{\alpha_i}\right\}_{i=\circ}^{i=N+M-1}$ پوششی برای k خواهد بود.

تمرینات فصل دوم

۱- ثابت کنید تنها مجموعه‌های هم باز و هم بسته در R^1 مجموعهٔ تهی و خود R^1 می‌باشندو آیا گزاره‌ای مشابه این برای R^2 نیز درست است؟

۲- ثابت کنید که مقطع هر دستهٔ با پایان از مجموعه‌های باز در R^p باز است.

۳- ثابت کنید هر مجموعهٔ بسته در اشتراک دسته‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز می‌باشد.

٤- مثالی از یک مجموعه در R^2 بزنید که نه باز باشد نه بسته. درستی ادعای خود را ثابت کنید.

۵- ثابت کنید که یک مجموعهٔ بستهٔ کراندار و ناتهی مانند s در R^1 یا بازه‌ای از بازه‌های باز، که نقطه ی انتهایی آنها متعلق به S می‌باشند، بدست‌آورد.

٦- نشان دهید که یک زیرمجموعه R^p باز است اگر و فقط اگر این مجموعه اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر از گویهای باز باشد. (راهنمایی: مجموعهٔ تمام نقاط در R^p که همهٔ مختصاتشان اعدادی گویا باشند، شمارش‌پذیر است.)

۷- فرض کنید که S' مجموعهٔ مشتق و $\overline{S}$ بست مجموعهٔ S در R^n باشند. ثابت کنید:

آ) S' در R^n بسته است؛ یعنی، $(S')' \subseteq S'$

ب) هرگاه $S \subseteq T$، آنگاه $S' \subseteq T'$

ج) $(S \cup T)' = S' \cup T'$

د) $(S)' = S'$

ه) $\overline{S}$ در R^n بسته است.

و) $\bar{S}$ مساوی اشتراک همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ R^n است که حاوی S باشند. یعنی، $\bar{S}$ عبارت از کوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای است که حاوی S باشد.

۸- هر زیرمجموعهٔ بستهٔ R^p مقطع دسته‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز است.

۹- فرض کنید F دسته‌ای از مجموعه‌ها در R^n باشد، و قرار دهید

$$T = \bigcap_{A \in F} A \quad , \quad S = \bigcup_{A \in F} A$$

برای هر یک از گزاره‌های زیر یا برهانی ارائه دهید یا مثالی برای نقض بیان کنید.

آ) هرگاه X یک نقطهٔ انباشتگی T باشد،آنگاه X یک نقطهٔ انباشتگی هر یک از مجموعه‌های A و B هست.

ب) هرگاه X یک نقطهٔ انباشتگی S باشد، آنگاه X یک نقطهٔ انباشتگی دست کم یک مجموعه مانند A در F خواهد بود.

۱۰- فرض کنید B,A زیرمجموعه‌های R باشند. نشان دهید که حاصلضرب دکارتی $B \quad A$ در $R^۲$ باز است اگر و فقط اگر B,A در R باز باشند.

۱۱- اگر $S \subseteq R^n$ ، ثابت کنید که دستهٔ نقطه‌های تنهای S شمارشپذیر است.

۱۲- فرض کنید B,A زیرمجموعه‌های R باشند. نشان دهید که حاصلضرب دکارتی $B \quad A$ در $R^۲$ بسته است اگر و فقط اگر B,A در R بسته باشند.

۱۳- ثابت کنید مجموعهٔ گرده‌های باز در صفحهٔ xy به مرکز (x,x) و شعاع $x > ۰$ (x گویا)، یک پوشش شمارشپذیر مجموعهٔ $\{(x,y) \mid x > ۰, y > ۰\}$ می‌باشد.

۱۴- فرض کنید $I_n \subseteq R^p$ حجره‌هایی باز به صورت

$$I_n = (۰,۱/n) \times \cdots \times (۰,۱/n)$$

باشند، نشان دهید که این حجره‌ها آشیانی‌اند. اما شامل هیچ نقطهٔ مشترکی نیستند.

۱۵- دستهٔ F مرکب از بازه‌های باز به شکل

$$]1/n\,,\,2/n[\quad \text{، که در آن} \quad n = ۲,۳,\ldots$$

یک پوشش باز بازهٔ باز $]0, 1[$ می‌باشد. بدون استفاده از قضیه ثابت کنید که هیچ زیردستهٔ متناهی F بازهٔ $]0, 1[$ را نمی‌پوشاند.

۱۶- فرض کنید فواصل بستهٔ $I_n \subseteq R^p$ به صورت

$$J_n = [n,+\infty)\times\cdots\times[n,+\infty)$$

داده شده باشند. نشان دهید که این فواصل آشیانی هستند، اما شامل هیچ نقطهٔ مشترکی نیستند.

۱۷- مجموعه‌ای مانند S مثال بزنید که بسته باشد ولی کراندار نباشد، و یک پوشش باز و شمارشپذیر مانند F بیابید که هیچ زیرمجموعهٔ متناهی آن S را نپوشاند.

۱۸- فرض کنید $A = \{۱/n : n \in N\}$ نشان دهید که هر نقطهٔ A در R یک نقطه کرانه‌ای است و ۰ تنها نقطهٔ تجمع A در R است.

۱۹- مجموعهٔ S در R^n با این خاصیت داده شده است که به ازای هر X در S، گویی n بعدی مانند $B(X)$ هست بقسمی که $B(X)\cap S$ شمارشپذیر است. ثابت کنید که S شمارشپذیر است.

۲۰- فرض کنید B,A زیرمجموعه‌های R^p باشند و x یک نقطهٔ تجمع $A\cap B$ در R^p باشد. ثابت کنید که x هم نقطهٔ تجمع A و هم نقطهٔ تجمع B است.

۲۱- فرض کنید $S \subseteq R^n$ و S شمارشپذیر نباشد. همچنین T مجموعهٔ نقطه‌های تراکم S باشد. ثابت کنید:

الف) $S-T$ شمارشپذیر است،

ب) $S\cap T$ شمارشپذیر نیست،

پ) T مجموعه‌ای است بسته،

ت) T حاوی هیچ نقطهٔ تنها نیست.

۲۲- فرض کنید B,A زیرمجموعه‌های R^p باشند و x یک نقطهٔ تجمع $A\cup B$ در R^p باشد. ثابت کنید که x یا نقطهٔ تجمع A است یا نقطهٔ تجمع B.

۲۳- فرض کنید که $S\subseteq R^n$. نقطهٔ X در R^n را یک نقطهٔ تراکم S نامیم در صورتی که به ازای هر گوی n بعدی مانند $B(X)$، $B(X)\cap S$ شمارشپذیر نباشند. ثابت کنید هرگاه S شمارشپذیر نباشد، آنگاه S نقطهٔ تراکمی مانند X در خود دارد.

۲٤- نشان دهید که هر نقطه در مجموعهٔ کانتور F هم نقطهٔ تجمع F و هم نقطهٔ تجمع F^c است.

۲۵- ثابت کنید هر دسته از مجموعه‌های باز از هم جدا در R^n لزوماً شمارشپذیر است. دسته‌ای از مجموعه‌های بستهٔ از هم جدا مثال بزنید که شمارشپذیر نباشند.

۲٦- ثابت کنید اگر K زیرمجموعهٔ فشردهٔ R باشد، آنگاه K به عنوان زیرمجموعه‌ای از $R^۲$ نیز فشرده است.

۲۷- مجموعهٔ S در R^nرا کامل گوئیم در صورت که $S=S'$ ، یعنی اگر S بسته بوده حاوی هیچ نقطهٔ تنهائی نباشد. ثابت کنید هر مجموعهٔ بستهٔ شمارش‌ناپذیر مانند F در R^n را می‌توان به شکل $F=A\cup B$ درآورد، که در آن A کامل، و B شمارش‌پذیر باشد (قضیهٔ کانتور - بندیکسون).

۲۸- ثابت کنید فاصلهٔ $J=\{(x,y): ۰\le x\le ۱\ ,\ ۰\le y\le ۱\}$ در $R^۲$ فشرده است.

۲۹- ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ متناهی یک فضای متری بسته است.

۳۰- مقطع دو مجموعهٔ باز فشرده است اگر و فقط اگر تهی باشد. آیا امکان دارد مقطع دستهٔ بی‌پایانی از مجموعه‌های باز از یک مجموعهٔ فشردهٔ غیرتهی باشد؟

۳۱- ثابت کنید اجتماع تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های فشردهٔ M فشرده است.

۳۲- اگر F یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^2 $G,$ مجموعهٔ بازی شامل F باشد، آنگاه چندضلعی بسته‌ای مانند C وجود دارد که تماماً در G واقع است و F را محصور می‌نماید.

۳۳- فضای متری Q (عددهای گویا) را با متر اقلیدسی R در نظر بگیرید. فرض کنید که S عبارت باشد از عددهای گویای بازهٔ باز $]a,b[$ ، که در آن b,a گنگ باشند. در این صورت، ثابت کنید S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ کراندار Q است که فشرده نیست.

۳۴- فرض کنید $\{H_n : n \in N\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ R^p باشد با این خاصیت که هیچ یک از H_n ها شامل مجموعه‌ای باز و غیرتهی نباشد. (برای مثال، H_n می‌تواند یک نقطه یا یک خط در $\,_{\text{۲}}$ باشد.) فرض کنید $G \neq \phi$ یک مجموعهٔ باز باشد.

الف) اگر $x_1 \in G \setminus H_1$ نشان دهید که گوی بسته‌ای مانند B_1 به مرکز x_1 وجود دارد به قسمی که $H_1 \cap B_1 = \phi, B_1 \subseteq G$.

ب) اگر $x_2 \in H_2$ به درون B_1 متعلق باشد. نشان دهید که گوی بسته‌ای مانند B_2 به مرکز x_2 هست به قسمی که B_2 در درون B_1 واقع است و $H_2 \cap B_2 = \phi$.

پ) با ادامهٔ این عمل، خانواده‌ای آشیانی از گویهای بسته به دست می‌آید به طوری که $H_n \cap B_n = \phi$ طبق قضیهٔ (مقطع کانتور)، نقطه‌ای مانند x_0 مشترک در تمام B_n ها وجود دارد. نتیجه بگیرید که $x_0 \in G \setminus \bigcup H_n$، پس G نمی‌تواند در $\bigcup H_n$ باشد. این نتیجه صورتی از قضیه‌ای است که اغلب قضیهٔ رسته‌ای بر ۱ نامیده می‌شود.

۳۵- اگر B,A دو زیرمجموعهٔ دلخواه فضای متری M باشند، ثابت کنید که:

الف) $A^\circ = M - M - A$

ب) $(M - A)^\circ = M - \overline{A}$

پ) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

ت) $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^\circ = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i^\circ)$ که در آن هر $A_i \subseteq M$.

ث) اگر F دسته‌ای نامتناهی از زیرمجموعه‌های M باشد،

$$(\bigcap_{A\in F} A)^\circ \subseteq \bigcap_{A\in F}(A^\circ).$$

ج) مثالی بزنید که به ازای آن در (ث) تساوی برقرار نباشد. $A_n = \left[0,1+\frac{1}{n}\right]$

چ) $\bigcup_{A\in F}(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int}(\bigcup_{A\in F} A)$.

ح) دستهٔ F را طوری بسازید که متناهی بوده به ازای آن در (آ) تساوی برقرار نباشد.

۳۶- یک خط در R^2 مجموعه‌ای از نقاط (x,y) است که در معادله‌ای به شکل $ax+by+c=0$ که در آن $(a,b)\neq(0,0)$ صدق می کند. با استفاده از تمرین ۳۴ نشان دهید که R^2 اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر از خطوط نیست.

۳۷- آ) اگر A در M باز یا بسته باشد، $(\partial A)^\circ = \phi$ منظور از ∂A مرز A می‌باشد.

ب) مثالی بزنید که به ازای آن $(\partial A)^\circ = M$.

۳۸- اگر B,A زیرمجموعه‌های همبند R^p باشند، با ذکر مثالهایی نشان دهید که $A\setminus B, A\bigcap B, A\bigcup B$ می‌توانند همبند یا ناهمبند باشند.

۳۹- هرگاه $\operatorname{int} A = \operatorname{int} B = \phi$ و A در M بسته باشد، آنگاه

$$\operatorname{int}(A\cup B) = \phi$$

۴۰- نشان دهید که مجموعهٔ

$$A = \{(x,y)\in R^2 : 0 < y \le x^2, x\neq 0\}\bigcup\{(0,0)\}$$

در R^2 همبند است. با این حال هیچ خم چندضلعی که تماماً در A واقع باشد وجود ندارد که $(0\ ,\ 0)$ را به دیگر نقاط مجموعه وصل کند.

۴۱- هرگاه $\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$، آنگاه $\partial(A\cup B) = \partial A\cup\partial B$.

۴۲- نشان دهید که مجموعهٔ

$$S=\left\{(x,y)\in R^{2}: y=Sin\frac{1}{x}, x\neq 0\right\}\cup\{(0,y): -1\leq y\leq 1\}$$

در R^{2} همبند است. با این حال همیشه نمی‌توان دو نقطه در S را با یک چندضلعی (یا یک خم پیوسته) که تماماً در S واقع باشد به یکدیگر وصل کرد.

فصل سوم

دنباله ها در فضای متریک

در این فصل مقوله دنباله را در فضای متریک مورد بررسی و کنکاش قرار می دهیم و با توجه به آنکه بررسی دنباله ها از انعطافپذیری ویژه ای برخوردار است تعداد زیادی مسائل حل شده در این فصل ارائه شده است.

۳-۱ دنباله ها در فضای متریک

اگر X یک فضای متریک باشد آنگاه $\{p_n\}$ دنباله ای از نقاط x در نظر بگیرید دنباله $\{p_n\}$ را همگرا به نقطه p در X می نامند هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N وجود داشته باشد بطوریکه $\forall n \geq N$ نتیجه شود که $d(p, p_n) < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \quad \ni \forall n \geq N \Rightarrow d(p, p_n) < \varepsilon$$

در این صورت گوییم :

$$p_n \to p \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} p_n = p$$

دنباله $\{p_n\}$ را واگرا می نامند هرگاه همگرا نباشد.

مثال ۱ : ثابت کنید دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ در فضای متریک اعداد حقیقی همگرا است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad , \qquad d(x,y)=|x-y| \; \forall x,y\in R$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists N>0 \;\ni \forall n\geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$

کافی است قرار دهیم

$$n=[\frac{1}{\varepsilon}]+1 \; .$$

مثال ۲ : نشان دهید دنباله $\{(-1)^n\}$ واگراست :

حل: فرض کنید همگرا باشد یعنی $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = p$ در اینصورت داریم

$$\forall \varepsilon>0, \exists N>0 \;\ni \forall n\geq N \Rightarrow |(-1)^n-p|<\varepsilon$$

$$n=2k \qquad , \qquad 2k\geq n \qquad \Rightarrow \quad |(-1)^{2k}-p|<\varepsilon \Rightarrow |1-p|<\varepsilon$$

$$n=2k+1 \qquad , \qquad 2k+1\geq n \Rightarrow \quad |(-1)^{2k+1}-p|<\varepsilon \Rightarrow |1+p|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 2=1+1=1-p+p+1\leq |(1-p)+(1+p)|\leq |1-p|+|1+p|<\varepsilon+\varepsilon$$

$$\Rightarrow 1<\varepsilon$$

در اینجا برای ε محدودیت ایجاد شده و این با تعریف همگرایی در تناقض است بنابراین دنباله $\{(-1)^n\}$ واگراست.

۳-۱-۱ قضیه : اگر X یک فضای متریک باشد آنگاه :

۱)دنباله$\{p_n\}$ به نقطه p در X همگراست $\Leftrightarrow$ هر همسایگی از نقطه p دارای تعداد بیشماری از نقاط $\{p_n\}$ باشد. برای هر همسایگی V از نقطه p عددی مانند N_r وجود داشته باشد که

$$\forall n \geq N_r \Rightarrow p_n \in V.$$

۲)اگر دنباله$\{p_n\}$ همگرا باشد حد آن یگانه است.

۳)اگر دنباله$\{p_n\}$همگرا باشد کراندار است.

٤)اگر E زیر مجموعه ای از X و نقطه $p \in X$ یک نقطه حدی E باشد آنگاه دنباله ای مانند$\{p_n\}$ از نقاط E وجود دارد که $p_n \to p$.

اثبات (۱) : اگر $p_n \to p$ و V یک همسایگی از نقطه p باشد

$$V = \{q \in X : d(p,q) < r\}, r > 0$$

از آنجا که $p_n \to p$ آنگاه :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \ni \forall n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon$$
$$\forall r > 0 \ , \ \exists \ N_r \ \ni: \ \forall n \geq N_r \ \Rightarrow \ d(p_n, p) < r \ \Rightarrow \ p_n \in V$$

فرض کنید برای هر همسایگی V از p داریم که :

$$\exists \ N_r \geq 0 \ \ni \ \forall n \geq N_r \ \Rightarrow \ p_n \in V$$

اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد همسایگی از pباشد ε بصورت زیر

$$V = \{q \in X : d(p,q) < \varepsilon\}$$

تعریف کنید. بنا به فرض در این حالت داریم که :

$$\exists N_r = N > 0 \ \ni \ \forall n \geq N \Rightarrow p_n \in V \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N > 0 \ . \ni \ \forall n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon$$

اثبات (۲) : فرض کنید $p_n \to p$ و $p_n \to p'$ و $p \neq p'$ آنگاه :

$$p \neq p' \Rightarrow d(p, p') \neq 0$$

بنا به تعریف حد دنباله ها :

$p_n \to p \Rightarrow \forall \varepsilon > \cdot \ \exists \ N_1 > \cdot \ \ni \ \forall n \geq N_1 \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon$

$p_n \to p' \Rightarrow \forall \varepsilon > \cdot \ \exists \ N_2 > \cdot \ \ni \ \forall n \geq N_2 \Rightarrow d(p_n, p') < \varepsilon$

از نا مساوی مثلثی استفاده می کنیم داریم

$d(p,p') \leq d(p,p_n) + d(p_n,p') \qquad \forall n$

اگر $N = \max\{N_1, N_2\}$ آنگاه :

$\forall n \geq N \Rightarrow d(p,p') \leq d(p,p_n) + d(p_n,p') < 2\varepsilon \Rightarrow d(p,p') < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$p \neq p' \Rightarrow 0 < d(p,p') < 2\varepsilon \qquad\qquad \forall \varepsilon > 0$

اگر $\varepsilon = \frac{1}{2} d(p,p') \Rightarrow \varepsilon > 0$ داریم :

$0 < d(p,p') < 2 \times \frac{1}{2} d(p,p') = d(p,p') \quad \Rightarrow p = p'$ تناقض

اثبات (۳) : فرض کنید $p_n \to p$ آنگاه :

$\forall \varepsilon > \cdot \exists N > \cdot \ \ni: \forall n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon$

فرض کنید ε ثابت باشد آنگاه یک سری وجود دارد (برای مثال $\varepsilon = 1$) بطوریکه $\forall n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon$ آنگاه فرض کنید :

$r = \max\{d(p_1,p), d(p_2,p), \ldots, d(p_{N-1},p), 1\} \Rightarrow d(p_n,p) \leq r \quad \forall n \in N$

در نتیجه مجموعه نقاط دنباله $\{p_n\}$ یعنی دنباله $\{p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots\}$ در داخل همسایگی به مرکز p و به شعاع r قرار گرفته و بنا به تعریف کراندار است.

اثبات (٤) : اگر p نقطه حدی E باشد :

$\forall n \in N \exists p_n \in E \ \ni d(p_n, p) < \frac{1}{n}$

بدین ترتیب دنباله $\{p_n\}$ از نقاط E تشکیل می شود که به p همگراست اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد آنگاه :

$\exists N > \cdot \ \ni \ \frac{1}{N} < \varepsilon \xrightarrow{(\text{lub}\,2)} \forall n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

$\forall n \geq N, d(p_n, p) < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow p_n \to p$

تذکر : عکس قسمت (۳) درست نیست یعنی دنباله های کراندار الزاماً همگرا نمی باشند.

مثال۳ : دنباله $\{(-1)^n\}$ همگرا نمی باشد در حالی که $1 \leq |(-1)^n|$.

۳-۱-۲ قضیه : اگر $\{s_n\},\{t_n\}$ دنباله ای از اعداد مختلط باشند بطوریکه $t_n \to t$ و $s_n \to s$ آنگاه :

۱) $s_n \pm t_n \to s \pm t$ دنباله $\{s_n \pm t_n\}$ همگراست.

۲)اگر c یک عدد مختلط باشد آنگاه $ct_n \to ct$ یعنی دنباله $\{ct_n\}$ همگراست.

۳) $s_n t_n \to st$ دنباله $\{s_n t_n\}$ همگراست.

٤)اگر $s \neq 0$ باشد اگر $\frac{t_n}{s_n} \to \frac{t}{s}$ آنگاه دنباله $\frac{\{t_n\}}{\{s_n\}}$ همگراست.

اثبات (۱) :

$$t_n \to t \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 > 0 \ \ni \ \forall n \geq N_1 \Rightarrow |t_n - t| < \varepsilon/2$$

$$s_n \to s \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 > 0 \ \ni \ \forall n \geq N_2 \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon/2$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall n \geq N \qquad |s_n + t_n - t - s| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |(s_n + t_n) - (s + t)| < \varepsilon \Rightarrow s_n + t_n \to s + t$$

اثبات (۲) : واضح است در تعریف قرار دهید $|t_n - t| < \varepsilon/c$ آنگاه $|ct_n - ct| < \varepsilon$ خواهد بود.

اثبات (۳) :

$$|s_n t_n - st| = |s_n t_n - s_n t + s_n t - st| \leq |s_n||t_n - t| + |t||s_n - s|$$

چون s_n کراندار است پس وجود دارد M هایی بطوریکه $|s_n| < M$

و چون $t_n \to t$ در نتیجه :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \Rightarrow |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

وچون $s_n \to s$ بنا بر این :

$$\forall n \geq N_2 \Rightarrow |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2(|t|+1)}$$

در اینجا $|t|+1$ و قرار می دهیم چون ممکن است t صفر باشد پس اگر $N=\max\{N_1,N_2\}$ آنگاه :

$$\forall n\ge N \Rightarrow |s_nt_n-st|\le M\frac{\varepsilon}{2M}+|t|\frac{\varepsilon}{2(|t|+1)}<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n>0 \quad \ni: \quad \forall n\ge N\Rightarrow |s_nt_n-st|<\varepsilon\Rightarrow s_nt_n\to st$$

اثبات (٤) : اول نشان دهید $\frac{1}{s_n}\to\frac{1}{s}$ با استفاده از اینکه s_n کراندار پس وجود دارد M هایی که $s_n<M$ و با انتخاب $\varepsilon=M|s|$ در تعریف بدست می آید :

$$\left|\frac{1}{s_n}-\frac{1}{s}\right|=\frac{|s-s_n|}{|s_n||s|}\le\frac{|s_n-s|}{M|s|}<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{s_n}\to\frac{1}{s}$$

آنگاه طبق قسمت سوم قضیه خواهیم داشت

$$\frac{t_n}{s_n}\to\frac{t}{s}$$

۳-۲ دنباله ها در R^k

۳-۲-۱ قضیه : دنباله $\{x_n\}$ در R^K یعنی $x_n=(x_{n,1},\dots,x_{n,k}),\forall n\in N$ به نقطه ای مانند x در R^K (وقتی که $x=(x_1,\dots,x_k)$) همگراست اگر و فقط اگر:

$$x_{n,i}\to x_i,\forall i\le k$$

اثبات : فرض کنید $x_n\to x$ آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ وجود دارد N بطوریکه

$$d(x_n,x)=\|x_n-x\|$$
$$\forall n>N\Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$$

بنا به قضیه خوانده شده داریم که :

$$|x_{n,i}-x_i|\le\|x_n-x\| \quad \forall i=1,\dots,k \quad \Rightarrow|x_{n,i}-x_i|<\varepsilon \quad \forall i=1,\dots,k$$
$$\therefore \quad x_{n,i}\to x_i$$

اگر $x_{n,i}\to x_i$ آنگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_i > 0 \quad \exists \forall n \geq N_i \Rightarrow | x_{n,i} - x_i | < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{k}}$$

$$\forall n > N_i \quad , \quad (x_{n,i} - x_i)^2 < \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow (x_{n,i} - x_i)^2 < \varepsilon \Rightarrow \| x_n - x \| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

$$\forall n \geq N = \max\{N_1,...,N_k\} \qquad \therefore x_n \to x$$

۳-۲-۲ دنباله های یکنوا از اعداد حقیقی

دنباله $\{x_n\}$ در اعداد حقیقی را صعودی می نامند هر گاه :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ...$$

دنباله $\{x_n\}$ در اعداد حقیقی را نزولی می نامند هر گاه :

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ...$$

دنباله $\{x_n\}$ اکیداً صعودی می نامند هرگاه در رابطه (۱) تساویها برداشته شود و همچنین برای دنباله نزولی مطلب مشابه قابل بیان است. یک دنباله صعودی یا نزولی را دنباله یکنوا می نامند.

۳-۲-۳ قضیه : یک دنباله یکنوا همگراست اگر و فقط اگر کراندار باشد.

اثبات : هر دنباله همگرا کراندار است و فقط طرف دوم قضیه اثبات لازم دارد.

فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ یکنوا و کراندار است نشان می دهیم که همگراست.

حالت اول : فرض کنید x_n یک دنباله صعودی و کراندار باشد اگر E مجموعه نقاط برد دنباله $\{x_n\}$ باشد یعنی $E = \{x_n : n \in N\}$ آنگاه E یک مجموعه غیر تهی و کراندار از اعداد حقیقی است. بنا به خاصیت $L.U.B$ اعداد حقیقی نتیجه می شود که E دارای کوچکترین کران بالایی در R است. فرض کنید $x=SupE$ نشان خواهیم داد که $x_n \to x$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد آنگاه بنا به تعریف کوچکترین کران بالایی

$$\exists y \in E \quad \ni: x - \varepsilon < y$$

(زیرا در غیر اینصورت $x-\varepsilon$ یک کران بالایی E بوده و باید $x-\varepsilon \geq x$ و این تناقض است)

از آنجا که $y \in E$ نتیجه می شود که :

$$\exists N \in N \ \ni \ x_N \in E \ , \ y = x_N \ \therefore \ x - \varepsilon < x_N$$

ولی دنباله $\{x_n\}$ صعودی است در نتیجه :

$$\forall n \geq N \Rightarrow x_n \geq x_N$$

ولی $x_N > x - \varepsilon$ پس داریم که :

$$\forall n \geq N \Rightarrow x_N > x - \varepsilon \quad x = \sup E \Rightarrow x_n < x \quad \forall n \in N \Rightarrow x - \varepsilon < x_n \leq x$$

$$\xRightarrow{x<x+\varepsilon} \ x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

$$\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow x_n \to x$$

حالت دوم : اگر $\{x_n\}$ دنباله ای نزولی و کراندار باشد آنگاه دنباله $\{-x_n\}$ دنباله ای صعودی و کراندار خواهد بود و بنا به قسمت اول دنباله صعودی $\{-x_n\}$ همگرا ست و در نتیجه $\{x_n\}$ همگرا خواهد بود

$$x_n \to x \qquad x = \inf E$$

دنباله های کوشی

اگر X یک فضای متریک باشد آنگاه دنباله $\{x_n\}$ از نقاط X را کوشی می نامند هر گاه :

$$\forall \varepsilon > \cdot \ \ \exists N > \cdot \ \ni \forall m, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

نشان خواهیم داد که هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است و در فضای متریک اعداد حقیقی هر دنباله کوشی نیز همگراست.

ولی در حالت کلی در هر فضای متریکی دنباله های کوشی الزاماً همگرا نمی باشند. برای مثال دنباله $\frac{1}{n}$ در فضای متریک اعداد مثبت همگرا نمی باشد آنگاه $\frac{1}{n} \to 0$ و صفر در فضای متریک اعداد مثبت قرار ندارد ولی می توان نشان داد که دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ کوشی است.

تعریف : فضای متریک X را کامل نامیم هر گاه هر دنباله کوشی از نقاط X همگرا باشد.

برای مثال فضای متریک اعداد حقیقی یا اعداد مختلط و بطور کلی R^K یک فضای متریک کامل است.

۳-۲-٤ قضیه : در هر فضای متریک هر دنباله همگرایی کوشی است.

اثبات : اگر $\{x_n\}$ دنباله همگرایی از فضای متریک X باشد بطوریکه $x_n \to x$ آنگاه باید نشان دهیم که :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N > 0 \ \ni \forall m,n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

چون $x_n \to x$ نتیجه می شود که :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N > 0 \ \ni \forall n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon/2$$

چون $x_m \to x$ بنابراین :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N > 0 \ \ni \forall m \geq N \Rightarrow d(x, x_m) < \varepsilon/2$$

با استفاده از نا مساوی مثلثی نتیجه می شود :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

پس دنباله $\{x_n\}$ کوشی است.

۳-۲-۵) تذکر : عکس قضیه قبل همواره برقرار نیست یعنی فضای متریکی وجود دارند که در آنها دنباله های کوشی همگرا نیستند.

مثال۳ : اگر $X=R^+$ فضای اعداد مثبت با متریک اقلیدسی باشد ، آنگاه دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ در این فضا همگرا نیست.

بنابراین در فضای اعداد مثبت R^+ دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ کوشی خواهد بود ولی همگرا نیست. ولی دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ در فضای اعداد حقیقی همگرا و در نتیجه کوشی است.

مثال٤ : فرض کنید برای $n \in N$ داشته باشیم :

$$x_n = ۱ + ۱/۲ + ۱/۳ + \ldots + ۱/n$$

$$x_۱ = ۱ \qquad x_۲ = ۱/۲ \qquad x_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + ۱/n$$

می توان نشان داد که $\{x_n\}$ کوشی نیست و در نتیجه در فضای متریک اعداد حقیقی همگرا نیست. مطابق تعریف دنباله کوشی در اعداد حقیقی داریم

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; N > 0 \;\; \ni \forall m,n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon$$

فرض کنید $m>n$.

$$x_n - x_m = (1+ 1/2 + \dots + 1/n) - (1 + 1/2 + \dots + 1/n + 1/{n+1} + \dots + 1/m)$$

$$\Rightarrow x_n - x_m = -(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m})$$

$$\Rightarrow x_m - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} \qquad m > n+1, m > n+2, \dots$$

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \;\; ,\dots, > \frac{1}{m} \qquad x_m - x_n > \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_{m-n} = \frac{m-n}{m}$$

با فرض $m=۲n$ (اگر شرط کوشی بر قرار باشد چون برای تمام m,n ها رابطه را داریم اشکالی در انتخاب فرض وجود ندارد)

$$x_{2n} - x_n > \frac{2n-n}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{2n} - x_n > \frac{1}{2}$$

بنابراین $d(x_{۲n}, x_n) > \frac{۱}{۲}$ برای n های با اندازه کافی بزرگ بنابراین دنباله $\{x_n\}$ کوشی نیست و در نتیجه همگرا نیست.

۳-۲-٦ مسأله : نشان دهید دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ در فضای متریک اعداد حقیقی کوشی است.

اثبات : فرض کنیم $\varepsilon > 0$ مثبت داده شده باشد اگر $N > \frac{1}{\varepsilon}$ انتخاب کنیم و $m>n>N$ در این صورت داریم :

$$|x_m - x_n| = |\frac{۱}{m} - \frac{۱}{n}| = \frac{۱}{m} - \frac{۱}{n} < \frac{۱}{n} < \frac{۱}{N} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > ۰ \;\; \exists \;\; N > ۰ \;\; \forall m,n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

بنابراین دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ کوشی است.

۳-۲-۷ مسأله : نشان دهید دنباله $\{x_n\}$ که بصورت

$$x_1=\frac{1}{1!}\ ,\ x_2=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\ ,\ x_n=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+.....+\frac{(-1)^{n+1}}{n!},.....$$

تعریف می شود کوشی است.

اثبات :

$$\Rightarrow x_m-x_n=\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}+\frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!}+......+\frac{(-1)^m}{m!}$$

داریم که $2^r\le r!$ پس :

$$|x_n-x_m|\le\frac{1}{(n+1)!}+......+\frac{1}{m!}\le\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+....+\frac{1}{2^{m-1}}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

بنابراین دنباله $\{x_n\}$ کوشی است.

نشان خواهیم داد در فضای اقلیدسی R^k هر دنباله ای که کوشی باشد همگراست.

۳-۲-۸ قضیه : اگر $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در فضای R^k باشد آنگاه $\{x_n\}$ همگراست.

اثبات : فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در R^k باشد آنگاه :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ N>0\ \ni:\forall n,m\ge N\Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

فرض کنید $\varepsilon=1$ ثابت باشد آنگاه :

$$\exists\ N>0\ \ni:\forall n,m\ge N\Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon\Rightarrow d(x_n,x_m)=\|x_n-x_m\|\Rightarrow\|x_n-x_m\|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\big|\|x_n\|-\|x_m\|\big|\le\|x_n-x_m\|<1\Rightarrow\|x_n\|-\|x_m\|<1\Rightarrow\|x_n\|<1+\|x_m\|$$

فرض کنید $(n>m)$ قرار دهید.

$$\|x_n\|<1+\|x_m\|\ \ ,\ \forall n\ge m$$

فرض کنید

$$M=\max\{\|x_1\|,...,\|x_{m-1}\|,1+\|x_m\|\}$$

آنگاه بازاء تمام n ها

$$\|x_n\|<M:$$

اکنون با توجه به همگرایی دنباله های کراندار کوشی نتیجه حاصل می شود.

تعریف زیر دنباله ها : اگر $\{x_n\}$ دنباله از نقاط فضای متریک X باشد و $\{n_i\}$ دنباله ای صعودی از اعداد مثبت باشد یعنی $n_۱ \le n_۲ \le n_۳ \le ....$ آنگاه $\{x_{n_i}\}$ دنباله ای از نقاط X خواهد بود و آنرا زیر دنباله $\{x_n\}$ می نامند.

۳-۲-۹ قضیه : دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک X همگرا به x می باشد اگر و فقط اگر هر زیر دنباله آن همگرا بوده و حد آنها برابراست

فرض کنید $x_n \to p$ و یک زیر دنباله $\{x_{k(n)}\}$ را در نظر مي گيريم به ازاء هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N هست بقسمی که به ازاء هر $n \ge N$ داریم $d(x_n, p) < \varepsilon$. چون $\{x_{k(n)}\}$ یک زیر دنباله است پس عددی صحیح مانند M هست (این M می تواند خود N نیز باشد زیرا $k(n) \ge n \ge N$ چون $k(n)$ صعودی است) بقسمی که به ازاء هر $n \ge M$ و $k(n) \ge N$ از این روی $n \ge M$ نتیجه می شود که $d(x_{k(n)}, p) < \varepsilon$ یعنی $x_{k(n)} \to p$ به قراری عکس قضیه هم واضح است چون دنباله $\{x_n\}$ خود زیر دنباله ای از خودش است و چون هر زیر دنباله همگرایی به p است پس دنباله $\{x_n\}$ هم به p همگراست یعنی $x_n \to p$.

مثال۵ : می توان نشان داد $\{a_n\}$ دنباله ای است حقیقی بقسمی که به ازاء هر $n \ge 1$ $|a_{n+2} - a_{n+1}| \le \frac{1}{2} |a_{n+1} - a_n|$ نشان دهید $\{a_n\}$ همگراست.

قرار می دهیم $b_n = |a_{n+1} - a_n|$ در اینصورت $0 \le b_{n+1} \le \frac{1}{2} b_n$ می توان نشان داد که $0 \le b_{n+1} \le \frac{b_1}{2^n}$ بنابراین $b_n \to 0$ همچنین اگر $m>n$ باشد داریم

$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-1} (a_{K+1} - a_K)$ پس

$$|a_m - a_n| \le \sum_{k=n}^{m-۱} b_k \le b_n (۱ + \frac{۱}{۲} + ... + \frac{۱}{۲^{m-۱-n}}) < ۲b_n$$

پس از این نتیجه می شود که a_n کوشی است.

۳-۲-۱۰ قضیه : اگر X یک فضای فشرده باشد آنگاه هر دنباله از نقاط X دارای حداقل یک زیر دنباله همگراست.

اثبات :اگر X یک فضای فشرده شده و $\{p_n\}$ دنباله ای از نقاط X باشند اگر

$E=\{p_n \mid n\in N\}$

برد دنباله فوق اگر E متناهی باشد آنگاه نقطه ای مانند $p\in E$ و دنباله ای مانند n_i از اعداد طبیعی وجود دارد بطوریکه $p_{n1}=p_{n2}=.....=p, n_1<n_2<....$ بدین ترتیب $\{p_{n_i}\}$ تشکیل می شود که به p همگراست. اگر E نامتناهی باشد آنگاه بنا به قضیه (هر زیرمجموعه نا متناهی از یک فضای فشرده دارای یک نقطه حدی است) نتیجه می شود که دارای یک نقطه حدی مانند p در X می باشد و بنا به قضیه (اگر p نقطه حدی E باشد آنگاه دنباله ای از نقاط E وجود دارد که به p همگراست) دنباله ای از نقاط E وجود دارد بطوریکه به نقطه p همگراست از آنجا که p نقطه حدی E می باشد نتیجه می شود که عدد طبیعی n_1 وجود دارد بطوریکه $p_{n_1}\in E$ بوده $d(p,p_{n_1})<1$ (p نقطه حدی E به عبارتی $p_{n_1}\in E\cap N_1(p) \Leftrightarrow N_1(p)\cap E\neq\phi$) به همین ترتیب با استفاده از تعریف نقطه حدی :

$$\exists n_2\in N, n_2>n_1, p_{n_2}\in E, d(p,p_{n_2})<\frac{1}{2}$$

$$\exists n_3\in N, n_3>n_2, p_{n_3}\in E, d(p,p_{n_3})<\frac{1}{3}$$

$$\exists n_i\in N, n_i>n_{i-1}, p_{n_i}\in E, d(p,p_{n_i})<\frac{1}{i}$$

در نتیجه زیر دنباله $\{p_{n_i}\}$ تشکیل می شود و $p_{n_i}\to p$

$\forall \varepsilon >0 \;\; \exists N >0 \;\; \ni \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

$\forall i \geq N \Rightarrow d(p_{n_i}, p) < \dfrac{1}{i} \leq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$

$\therefore \forall \varepsilon >0 \;\; \exists N >0 \;\; \ni \forall n \geq N \Rightarrow d(p_{n_i}, p) < \varepsilon \qquad \therefore p_{n_i} \to p$

توجه کنید که بازای هر i داریم $n_i > i$.

۳-۲-۱۱ نتیجه : اگر فضای متریک X دارای خاصیت قضیه قبل باشد یعنی هر دنباله از نقاط X دارای حداقل یک زیر دنباله همگرا باشد در این صورت X را فشرده دنباله ای می نامند. می توان نشان داد که هر فضای فشرده دنباله ای فشرده است پس :

اگر X فشرده دنباله ای باشد آنگاه X فشرده است.

۳-۲-۱۲ نتیجه : اگر دنباله $\{x_n\}$ از نقاط R^K کراندار باشد آنگاه حداقل دارای یک زیر دنباله همگراست.

۳-۲-۱۳ قضیه : هر دنباله کوشی در R^K دارای یک زیر دنباله همگراست.

اثبات : دنباله های کوشی کراندارند بنابراین دارای یک زیر دنباله همگرا می باشند.

۳-۲-۱٤ قضیه : اگر $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی از نقاط R^K باشد بطوریکه زیر دنباله همگرایی از آن وجود داشته باشد آنگاه دنباله $\{x_n\}$ همگراست.

اثبات : دنباله $\{x_n\}$ کوشی است بنابراین

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; \ni \forall m,n \geq N \Rightarrow \| x_n - x_m \| < \varepsilon$

دنباله $\{x_n\}$ بنا به فرض دارای یک زیر دنباله همگرا مانند $\{x_{n_i}\}$ می باشد که $x_{n_i} \to x$ آنگاه :

$\forall \varepsilon > ۰ \;\; \exists N_۱ > ۰ \;\; \ni \forall n_i \geq N_۱ \Rightarrow \| x_{n_i} - x \| < \varepsilon$

فرض کنید $K = \max\{N_1, N\}$ آنگاه :

$\forall t \geq K \underset{k \geq N_1}{\overset{t \geq N_1}{\Longrightarrow}} \| x_t - x \| < \varepsilon \qquad *$

با قرار دادن $t=m$ در تعریف کوشی بودن دنباله داریم که :

$\| x_n - x \| < \varepsilon \Rightarrow \| x_n - x \| \leq \| x_n - x_t \| + \| x_t + x \|$

$\forall n \geq k \Rightarrow \| x_n - x \| < \varepsilon + \varepsilon = ۲\varepsilon$

$t \geq k \underset{t \geq N}{\overset{k \geq N}{\Longrightarrow}} n \geq N \Rightarrow \| x_n - x_t \| < \varepsilon$

در نتیجه

$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists N \quad \ni: \forall n \geq N \Rightarrow \| x_n - x \| < ۲\varepsilon \therefore x_n \to x$

۳-۲-۱۵ قضیه : هر دنباله در R^K همگراست اگر و فقط اگر کوشی باشد.

هر دنباله همگرایی کوشی است (از قبل)

اگر $\{x_n\}$ دنباله کوشی باشد بنابر قضایای قبلی همگراست.

۳-۲-۱۶ نتیجه : فضای اقلیدسی R^K کامل است.

۳-۲-۱۷ نتیجه : اگر بر روی فضای R^K متریک $d(x,y) = \| x - y \|_\infty$ در نظر بگیرید آنگاه فضای (R^K, d) کامل است.

۳-۲-۱۸ قضیه : اگر $\{p_n\}$ دنباله ای از نقاط فضای متریک X باشد آنگاه مجموعه تمام حدود زیر دنباله های همگرای $\{p_n\}$ بسته است.

اثبات : فرض کنید E مجموعه تمام زیر دنباله های $\{p_n\}$ باشد (یعنی برای هر نقطه از E زیر دنباله ای از $\{p_n\}$ وجود دارد که به آن نقطه همگراست باید نشان دهیم E بسته است. فرض کنید q نقطه حدی E باشد آنگاه عدد طبیعی مانند n_1 می توان یافت بطوریکه $p_{n1} \neq q$ در غیر اینصورت (مثلاً وقتی که دنباله $\{p_n\}$ همگرا باشد) مجموعه E متناهی و در نتیجه بسته است. آنگاه $d(p_n, q) > 0$ می باشد فرض کنید $\delta = d(p_1, q)$ از آنجا که q نقطه حدی E می باشد نتیجه می شود در هر همسایگی از q نقاطی از مجموعه E قرار

دارند بنابراین نقطه ای مانند x در E وجود دارد بطوریکه $d(x, p) < \frac{\delta}{2^i}$ از آنجا که $x \in E$ نتیجه می شود که x حد زیر دنباله ای از $\{p_n\}$ مانند $\{p_{ni}\}$ خواهد بود یعنی $p_{ni} \to x$ بنابراین :

$$d(p_{ni}, x) < \frac{\delta}{2^i} \qquad (n_i > n_{i-1})$$

با استفاده از نا مساوی مثلثی داریم که :

$$d(p_{ni}, q) \le d(p_{ni}, x) + d(x, q)$$

$$\Rightarrow d(p_{ni}, q) \le \frac{\delta}{2^i} + \frac{\delta}{2^i} = \frac{2\delta}{2^i} = \frac{\delta}{2^{i-1}} \therefore d(p_{ni}, q) \le \frac{\delta}{2^{i-1}} \Rightarrow p_{ni} \to q$$

q حد زیر دنباله ای از $\{p_n\}$ می باشد و بنا به تعریف E باید $q \in E$ و مجموعه E بسته است.

۳-۳ حدود بالایی وپایینی

اگر $\{x_n\}$ دنباله ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و E مجموعه تمام حدود زیر دنباله های همگرایی $\{x_n\}$ فرض شود (بنا به قضیه وایرشتراس مجموعه E غیر تهی است) توجه کنید که E مجموعه غیر تهی و کراندار از اعداد حقیقی می باشد بنابراین $SupE$ و $infE$ در اعداد حقیقی موجود است.

فرض کنید $S_* = \inf E$, $S^* = \sup E$ در اینصورت S^*, S_* را به ترتیب حدود بالایی و پایینی $\{x_n\}$ نامیده و با نماد های زیر نمایش داده می شوند.

$$S^* = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n\} \qquad S_* = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_n\}$$

$$S^* = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \qquad S_* = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

برای مثال دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ را در نظر بگیرید. $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$

این دنباله همگراست بنابراین هر زیر دنباله آن همگرا بوده و حد آن یگانه است پس :

$E=\{0\} \qquad \sup E=0 \qquad \inf E=0$

$\limsup_{n\to\infty} 1/n = \liminf_{n\to\infty} 1/n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$

مثال٦ : دنباله $(-1)^n$ را در نظر بگیرید. این دنباله کراندار ولی واگرا است و زیر دنباله های آن دارای حدود {۱و۱-} می باشد پس

$E=\{-۱,۱\} \qquad \sup E=۱ \qquad \inf E=-۱$

$\limsup_{n\to\infty}(-۱)^n=۱ \ , \liminf_{n\to\infty}(-۱)^n=-۱$

خواص حدود بالایی و پایینی :

۳-۳-۱ قضیه : فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای کراندار باشد آنگاه S^* دارای خواص زیر است :

۱) $S^* \in E$

۲)اگر $x>S^*$ آنگاه عددی مانند N وجود دارد بطوریکه

$\forall n\geq N \Rightarrow x_n<x$

۳) S^* با خواص ۱و۲ یگانه است.

٤)خواص ۱و۲و۳ با تغییر مناسب برای S_* بر قرار است.

اثبات (۱) : E مجموعه ای بسته است (E یعنی مجموعه تمام حدود زیر دنباله های همگرای $\{x_n\}$) بنابراین $\inf E, \sup E$ متعلق به E می باشد.

اثبات (۲) : با استفاده از برهان خلف فرض کنید عددی مانند x وجود دارد بطوریکه $x>S^*$ و برای تعداد بیشماری اعداد طبیعی داریم که آن گاه با استفاده از تعریف E نتیجه می شود که عضوی مانند y در E وجود دارد بطوریکه $x\leq y$ ولی $x>S^*$ در نتیجه باید $\forall x\in N \quad x\leq x_n$ داشته باشیم :

$y\geq x>S^* \Rightarrow y>S^*$

و این با تعریف S^* $(S^*=\sup E)$ در تناقض است بنابراین

$\forall x>S^* \quad \exists N>0 \quad \ni: \forall n\geq N \Rightarrow x_n<x$

اثبات (۳) فرض کنید x_2, x_1 با خواص S^* موجود باشند اگر $x_2 > x_1$ می توان عدد حقیقی مانند x پیدا کرد بطوریکه $x_1 < x < x_2$ آنگاه با استفاده از **(۲)** و اینکه $x_1 < x$ نتیجه می شود که :

$\exists N > 0 \ \ni: \forall n \geq N \Rightarrow x_n < x$

ولی $x < x_2$ و در نتیجه $n \geq N \Rightarrow x_n < x_2$ و با خاصیت **(۱)** برای x_2 در تناقض است.

۳-۳-۲ قضیه: دنباله $\{x_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر :

$$\lim_{n\to\infty} \sup(x_n) = \lim_{n\to\infty} \inf(x_n)$$

اگر مقدار مشترک x فرض شود آنگاه $x_n \to x$

اثبات <= روشن است.

=> اگر $\lim\sup(x_n) = \lim\inf(x_n) = x$, $\varepsilon > 0$ داده شده باشد.

$$x + \varepsilon > x \xrightarrow[x = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n]{} \exists N_1 > 0 \ \ni \forall n \geq N_1 \Rightarrow x_n < x + \varepsilon$$

$$x - \varepsilon < x \xrightarrow[x = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n]{} \exists N_2 > 0 \ \ni \forall n \geq N_2 \Rightarrow x_n > x - \varepsilon$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow x_n \to x$$

تمام دنباله ها درمثال های زیر از اعداد تشکیل شده اند و کراندارند.

$$\lim_{n\to\infty} \sup(t_n + s_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup t_n + \lim_{n\to\infty} \sup s_n \qquad (۱$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf(t_n + s_n) \geq \lim_{n\to\infty} \inf t_n + \lim_{n\to\infty} \inf s_n \qquad (۲$$

$\lim\sup s_n < v$, $\lim\sup t_n < u$ آنگاه تعدادی متناهی n هست که t_n از u بزرگتر است تعدادی متناهی s_n هست که از v بزرگترند. بنابراین بازای تعدادی متناهی از n ها $t_n + s_n > u + v$ یعنی :

$$\lim\sup(t_n + s_n) \leq u + v$$

فرض کنیم (۲) : $u<\liminf_{n\to\infty} s_n$, $v<\liminf_{n\to\infty} t_n$ آنگاه تعدادی متناهی از n ها موجود اند بطوریکه $s_n<u$, $t_n<v$ بنابراین برای تعدادی متناهی از s_n+t_n داریم $s_n+t_n<u+v$ و در نتیجه :

$$\liminf_{n\to\infty} s_n+t_n \geq u+v$$

۳) $\forall n$ $t_n \leq s_n$ آنگاه $\limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n$, $\liminf_{n\to\infty} t_n \leq \liminf_{n\to\infty} s_n$

٤) $\liminf s_n \leq \limsup(s_n)$

٥)

$$\limsup_{n\to\infty} ks_n = \begin{cases} k\limsup(s_n) & k>0 \\ k\liminf(s_n) & k<0 \end{cases}$$

اثبات (۳) : اگر $u>\limsup s_n$ آنگاه تعدادی متناهی عنصر s_n از u بزرگترند و چون $t_n \leq s_n$ پس

$$\limsup(t_n) \leq u$$

اثبات (٤) : اگر قرار دهیم $w<\liminf s_n$ و $v>\limsup s_n$ آنگاه تعدادی متناهی از عناصر $\{s_n\}$ از v بزرگترند و تعدادی متناهی از w بزرگترند که این یعنی $w \leq v$

۳-۳-۳ سری ها : اگر $\{a_n\}$ دنباله از اعداد (مختلط یا حقیقی) باشد و

$$s_n = a_1+a_2+....+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

آنگاه دنباله $\{s_n\}$ دنباله مجموع های جزیی نامیده و کمیت $a_1+a_2+....=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را یک سری از اعداد نامند در صورتی که دنباله $\{s_n\}$ همگرا باشد سری $\sum a_n$ همگراست و در صورت واگرا بودن $\{s_n\}$ سری $\sum a_n$ واگراست. اگر دنباله $\{s_n\}$ به عددی مانند s همگرا باشد یعنی $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ آنگاه گوییم حد مجموع سری $\sum a_n$ برابر s می باشد و بصورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

مثال۷ : سری $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ در نظر بگیرید

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right] \\
n=1 &\Rightarrow \frac{1}{4-1} = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right] \\
n=2 &\Rightarrow \frac{1}{16-1} = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right] \\
n=3 &\Rightarrow \quad = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right] \\
n=4 &\Rightarrow \quad = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{7}\right]
\end{aligned}\right\} a_1+\ldots+a_n = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1}-1\right]$$

$$\Rightarrow s_n = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1}-1\right] \Rightarrow \lim s_n = \tfrac{1}{2}$$

مثال۸ : اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد آیا سری $\sum a_n{}^2$ نیز همگراست ؟ خیر

۳-۳-٤ آزمون کوشی : سری $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \ni \forall m \geq n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

اثبات : سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر دنباله مجموعه های جزیی آن یعنی $\{s_n\}$ ها همگراباشد $\Leftrightarrow$ دنباله $\{s_n\}$ کوشی باشد.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \ni \forall m, n \geq N \Rightarrow | s_m - s_n | < \varepsilon$$

فرض کنید $m>n$ باشد :

$$s_m = a_1 + a_2 + \ldots. + a_n + a_{n+1} + \ldots.. + a_m$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots. + a_n$$

$$s_m - s_n = a_{n+1} + ... + a_m = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k|$$

$$\Rightarrow |s_m - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon \qquad m > n > N$$

بنابراین سری $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; \ni \forall m \ge n \ge N \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$$

۳-۳-۵ نتیجه : اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

اثبات : در قضیه کوشی فرض کنید $m=n$ باشد.

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n \quad , \quad |\sum_{k=n}^{m} a_k| = |a_n| < \varepsilon$$

بنابراین نتیجه می شود که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; \ni \forall n \ge N \;\; , \;\; |a_n - 0| < \varepsilon$

راه حل دوم : توجه کنید که اگر $\{s_n\}$ دنباله مجموع های جزیی سری $\sum a_n$ باشد آنگاه $a_1 = s_1 \quad , \quad a_n = s_n - s_{n-1}$ از همگرایی سری $\sum a_n$ نتیجه می شود که :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n - 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

۳-۳-٦ تذکر : عکس قضیه قبل درست نیست یعنی سری های واگرایی وجود دارند که حد جمله عمومی آنها صفر است.

مثال۹ : سری همساز

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را همساز می نامند $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ولی

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + ... + \tfrac{1}{n} \qquad \forall n \in N$$

دنباله $\{s_n\}$ کوشی نیست در نتیجه واگرا است. بنابراین سری $\sum \frac{1}{n}$ واگرا است.

۳-۳-۷ سریهای غیر منفی :

اگر $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی غیر منفی باشد آنگاه سری $\sum a_n$ را یک سری با جملات غیر منفی می نامند اگر s_n دنباله مجموعه های جزیی سری فوق را تشکیل دهیم.

$s_1 = a_1 \geq 0 \qquad s_2 = a_1 + a_2 = a_2 + s_1 \geq s_1$

$s_1 \leq s_2 \leq s_3 ..... \leq s_n \leq ....$

در نتیجه $\{s_n\}$ یک دنباله صعودی است و بنا به قضیه خوانده شده دنباله $\{s_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر کراندار باشد.

۳-۳-۸ قضیه :یک سری با جملات غیر منفی همگراست اگر و فقط اگر دنباله مجموعه های جزیی آن کراندار باشد.

برای تشخیص همگرایی سریهای غیر منفی آزمونهای دیگری را بررسی می کنیم.

۳-۳-۹ آزمون مقایسه :

۱)هرگاه عددی مانند N_0 وجود داشته باشد بقسمی که

$\forall n \geq N_0 \qquad |a_n| \leq C_n$

آنگاه در صورت همگرا بودن سری $\sum C_n$ نتیجه می شود که سری $\sum a_n$ نیز همگراست.

۲)هرگاه عددی مانند N_0 موجود باشد بطوریکه $a_n \geq b_n \geq 0$ و $\forall n \geq N_0$ اگر $\sum b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ هم واگرا می باشد.

اثبات (۱) : سری $\sum C_n$ همگراست بنا به قضیه کوشی

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; \ni \forall m \geq n \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n}^{m} C_k| < \varepsilon$$

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon \qquad \forall m \geq n > N$$

بنا به قضیه کوشی سری $\sum a_n$ همگرا است.

توجه کنید که سری $\sum C_n$ از جملات نا منفی تشکیل شده است.

اثبات (۲) : اگر $\sum a_n$ همگرا باشد بنا به (۱) سری $\sum d_n$ همگرا می شود و این خلاف فرض است پس از واگرای $\sum d_n \;\Leftarrow\; \sum a_n$ واگراست.

۳-۳-۱۰ سری های هندسی : اگر $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی غیر منفی باشد آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (وقتی که $a_n = r^n$ $r>0$ بازاء هر n در N) را یک سری هندسی می نامند. اگر $\{s_n\}$ دنباله مجموع های جزیی سری هندسی آن باشد آنگاه :

$$s_n = 1 + r + r^2 + \ldots\ldots + r^n$$

$$rs_n = r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots + r^{n+1} \Rightarrow s_n - rs_n = 1 - r^{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n(1-r) = 1 - r^{n+1} \Rightarrow s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad \forall n \in N$$

۱)اگر $0 \le r < 1$ باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ در نتیجه $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-r}$ بنابراین در حالت $0 \le r < 1$ سری هندسی همگراست و داریم :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

۲)اگر $r \ge 1$ آنگاه سری هندسی واگراست.

اگر $r = 1$ سری بصورت $r^n = 1$, $s_n = \overbrace{1+1+\ldots\ldots+1}^{n} = n$ آنگاه $\{n\}$ دنباله جزیی سری فوق می باشد. که کراندار نیست بنابراین همگرا نمی باشد یعنی واگراست پس سری در این حالت واگراست. اگر r>۱ باشد $\lim_{n\to\infty} r^n \ne 0$ در اینصورت سری واگراست.

۳-۳-۱۱ قضیه : اگر $0 \le a < 1$ باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ همگراست و داریم $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ و در غیر اینصورت سری واگراست.

۳-۳-۱۲ قضیه کوشی برای سری ها غیر منفی : اگر $\{a_n\}$ دنباله ای نزولی از اعداد غیر منفی باشد آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر سری $\sum_{k=۰}^{\infty} ۲^k a_{۲k}$ همگرا باشد.

اثبات : فرض کنید t_k, s_n مجموع های جزیی سری های فوق باشند یعنی :

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots\ldots\ldots + 2^k a_{2k}$$

با توجه به غیر منفی بودن سری های فوق کافی است که نشان دهیم دنباله های جزیی سری ها یعنی $\{s_n\}, \{t_k\}$ کراندار است.

دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت اول : اگر $n<۲^k$ باشد آنگاه :

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n \le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) +$$
$$(a_8 + a_9 + . + a_{15}) + \ldots + (a_{2k} + \ldots + a_{2^{K+1}} - 1) \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a = t_k$$
$$\Rightarrow s_n \le t_k$$

تذکر : با استفاده از نزولی بودن دنباله $\{a_n\}$ داریم :

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$$

حالت دوم: اگر $۲n \ge 2^k$ باشد آنگاه :

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n \ge a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + \ldots) \ge$$
$$\tfrac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{k-1} a_{2k} = \tfrac{1}{2}[a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2k}] \tfrac{1}{2} t_k$$
$$\Rightarrow s_n \ge \tfrac{1}{2} t_k$$

از موارد (۱) و (۲) نتیجه می شود که هر دو دنباله $\{s_n\}, \{t_n\}$ با هم کراندارند یا هر دو کراندار نیستند.

مثال ۱۰ : سری $\sum \frac{1}{n^p}$ را یک سری p می نامند. با استفاده از قضیه کوشی می توان همگرایی سری فوق را بررسی کرد.

۱) اگر $p \le 0$ سری $\sum \frac{1}{n^p}$ واگرا است (حد جمله عمومی مخالف صفر خواهد بود) توجه کنید که دنباله $\{\frac{1}{n^p}\}$ برای $p>0$ نزولی و غیر منفی است. بنابراین سری $\sum \frac{1}{n^p}$ همگرا است اگر و فقط اگر $\sum 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum 2^k (2^k)^{-p} = \sum (2^k)^{1-p} = \sum (2^{1-p})^k$ سری هندسی است بنابراین اگر $a = 2^{1-p}$ آنگاه سری همگراست.

وقتی که $0 \le a < 1 \Leftarrow p > 1$ و سری واگرا است اگر $0 < p \le 1$ باشد در نتیجه $\sum \frac{1}{n^p}$ برای تصاویر $p \le 1$ واگراست و برای $p > 1$ همگراست.

مسائل حل شدهٔ فصل سوم

۱- ثابت کنید همگرایی $\{S_n\}$ همگرایی $\{|S_n|\}$ را ایجاب می‌کند. آیا عکس این هم درست است؟

با توجه به نامساوی $\left| |S_n| - |S| \right| < |S_n - S|$ همگرایی $\{S_n\}$ همگرایی $\{|S_n|\}$ را ایجاب می‌کند.

خیر دنباله $\{(-1)^n\}$ واگراست ولی دنباله $\{|(-1)^n|\}$ یا $\{1\}$ همگراست.

۲- حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ را حساب کنید.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

در مزدوج مخرج ضرب کرده

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}=\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}=\frac{1}{2}$$

۳– هرگاه $s_1=\sqrt{2}$ و $(n=1,2,3,\ldots)$ $s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{S_n}}$ ثابت کنید $\{S_n\}$ همگراست و به ازای $.S_{n_i}<2\ ,\ n=1,2,3,\ldots$

هر دنباله کراندار و یکنوا همگراست.

با توجه به قضیه بالا و استقرا ثابت می‌کنیم $|S_n|$ صعودی و از بالا کراندار است.

$$n=۱\quad \sqrt{۲}\le\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\quad\Rightarrow S_۱<S_۲$$

فرض : $S_k\le S_{k+۱}$ حکم : $S_{k+۱}\le S_{k+۲}$

$s_{k+۱}=\sqrt{۲+\sqrt{S_k}}\le\sqrt{۲+\sqrt{S_{k+۱}}}=S_{k+۲}\Rightarrow S_{k+1}\le S_{k+2}\Rightarrow$ صعودي است $\{S_n\}$

ثابت می‌کنیم $S_n<۲$. میدانیم $s_1=\sqrt{2}\le 2$ اکنون فرض می‌کنیم $S_k<۲$ ثابت می کنیم

$S_{k+۱}<۲$ داریم

$$S_{k+۱}=\sqrt{۲+\sqrt{B_k}}<\sqrt{۲+\sqrt{۲}}<\sqrt{۲+۲}<۲$$

پس $S_{k+۱}<۲$. کراندار و صعودی است پس همگراست.

٤– حدود بالایی و پایینی دنبالهٔ $\{S_n\}$ را که به صورت

$$S_۱=۰;s_{۲m}=\frac{S_{۲m-۱}}{۲};S_{۲m+۱}=\frac{۱}{۲}+S_{۲m}$$

تعریف شده بیابید.

داریم $S_۱=۰\ ,\ S_{۲m}=S_{\frac{۲m-۱}{۲}}\ ,\ S_{۲m+۱}=\frac{۱}{۲}+S_{۲m}$ با جایگذاری داریم:

$S_1 = 0 \;,\; S_2 = 0 \;,\; S_3 = \frac{1}{2} \;,\; S_4 = \frac{1}{4} \;,\; S_5 = \frac{3}{4} \;,\; S_6 = \frac{3}{8}$

$S_7 = \frac{7}{8} \;,\; S_8 = \frac{7}{16} \;,\; S_9 = \frac{15}{16}$

داریم: $\{S_{2m}\},\{S_{2m+1}\}$ دو زیر دنباله از S_n هستند باید ثابت کنیم این دو زیردنباله صعودی واز بالا کراندار است و درنتیجه همگرا است.

$S_1 < S_3 \;,\; S_2 < S_4$ فرض می‌کنیم $S_{2k} < S_{2k+2} < S_{2k-1} < S_{2k+1}$

ثابت می‌کنیم $S_{2k+1} < S_{2k+3} \;,\; S_{2k+2} < S_{2k+4}$ داریم:

$$S_{2k+1} = \frac{1}{2} + S_{2k} < \frac{1}{2} + S_{2k+2} = S_{2k+3}$$

ثابت کردیم صعودی است

حال باید ثابت کنیم $S_{2k+4} = \frac{S_{2k+3}}{2} > \frac{S_{2k+1}}{2} = S_{2k+2}$ کراندار است.

$S_1 < 1$ فرض کنیم $\leftarrow \quad S_{2k-1} < 1$

$S_{2k} < \frac{1}{2}$ فرض می کنیم $S_2 < \frac{1}{2}$ باید ثابت کنیم $S_{2k+1} < 1 \,,\, S_{2k+2} < \frac{1}{2}$

$$S_{2k+1} = \frac{1}{2} + S_{2k} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad S_{2k+2} = S_{\frac{2k+1}{2}} < \frac{1}{2}$$

فرض می‌کنیم $\lim\limits_{M\to\infty} S_{2m-1} = L \Leftarrow \lim\limits_{M\to\infty} s_{2m} = \lim\limits_{M\to+\infty} \frac{S_{2M-1}}{2} = L/2$

از طرفی داریم

$$L = L/2 + 1/2 \Rightarrow L = 1 \,,\, L/2 = 1/2$$

۵- ثابت کنید که اگر $a_n \geq 0$، همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ را ایجاب می‌کند.

فرض می‌کنیم به A همگرا باشد $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \left[\left(\sqrt{a_n}\right)^2\right]^{1/2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sum\left[\left(\sqrt{a_n}\right)^2\right]^{1/2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$$

با توجه به نامساوی کشی شوارتز $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{a_n}\right)^2\right]^{1/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right]^{1/2} \quad \forall n \in N$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست پس اگر $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n} \le (AB)^{1/2}$$

پس چون جملات سری مثبت هستند دنبالهٔ مجموع جزیی سری کراندار است پس درنتیجه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ همگراست.

۶- هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا و $\{b_n\}$ یکنوا کراندار باشد، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ همگرا است.

فرض می‌کنیم $\{b_n\}$ نزولی باشد $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$. چون $\{b_n\}$نزولی و از پایین کراندار می‌باشد $\{b_n\}$ همگراست. پس قرار می‌دهیم

$(n=1,2,\ldots)\quad c_n=b_n-b$ چون $\{b_n\}$ نزولی است $\{C_n\}$نیز نزولی می‌باشدو همگرا به صفر است و چون $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا می‌باشد دنبالهٔ جمعهای جزیی آن کراندار است پس همگراست.

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}a_nc_n=c}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(b_n-b)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n-b\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=c+bA$$

در حالتی که b_n صعودی باشد اثبات چنین است فقط $c_n=b-b_n$ و

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=n$$

۷- شعاع همگرایی هر یک از سریهای توانی زیر را بیابید:

(آ) $\sum_{n=۱}^{\infty} n^{۳} z^n$ (ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{n!} z^n$

(پ) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{n^۲} z^n$ (ت) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۳}{۳^n} z^n$

آ: با توجه به قضیه ریشه n ام

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|n^3|}$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{n^3} = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\alpha} = 1$$

ب: $\alpha = \lim_{n\to\infty} Sup \dfrac{۲^{n+۱}/(n+۱)!}{۲^n/n!}$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} Sup \left|\frac{۲}{n+۱}\right| = ۰$$

پس $r=\infty$ شعاع سری توانی است.

پ:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{\left|\frac{۲^n}{n^۲}\right|} = \lim Sup \frac{۲}{\sqrt[n]{n^۲}} = ۲$$

$r = \frac{1}{2}$ شعاع همگرایی سری توانی است.

ت: $\alpha = \lim_{n\to+\infty} Sup \sqrt[n]{\left|\frac{n^3}{3^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} Sup \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3} = \frac{1}{3}$ شعاع همگرایی $r=3$

۸– فرض کنید ضرایب سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ اعداد صحیحی باشند که بی‌نهایت از آنها ناصفرند. ثابت کنید شعاع همگرایی آن حداکثر یک است.

(برهان خلف) فرض می‌کنیم شعاع همگرایی سری توانی بیشتر از ۱ باشد $r = \frac{1}{\alpha}$

$$r = \frac{۱}{\lim_{n\to+\infty} Sup \sqrt[n]{|a_n|}} > ۱ \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} Sup \sqrt[n]{a_n} < ۱$$

$$\exists\ N > ۰ \qquad \forall\ n \ge N \quad \sqrt[n]{|a_n|} < ۱ \Rightarrow |a_n| < ۱$$

چون $a_n \in Z$, $\forall N > 0$ پس $\forall n > N$, $a_n = 0$ که با فرض مسئله در تناقض است پس باید $r \leq 1$

۹- فرض کنید $a_n > 0$, $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد.

(آ) ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ واگراست.

(ب) ثابت کنید $\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{S_{N+k}} \geq 1 - \frac{S_N}{S_{N+k}}$ و نتیجه بگیرید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ واگرا می‌باشد.

(پ) ثابت کنید $\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ و نتیجه بگیرید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ همگراست.

(ت) دربارهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ چه می‌توان گفت؟

الف: برهان خلف فرض می‌کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ همگرا باشد پس باید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ پس

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \quad \forall N > N \ \frac{a_n}{1+a_n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow a_n < \varepsilon + \varepsilon a_n \Rightarrow a_n (1-\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow a_n < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

قرار می‌دهیم $m = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $\forall n \geq N$, $a_n < m$ پس $a_n + 1 < m + 1$ در نتیجه

$$\forall n \geq N , \frac{a_n}{m+1} < \frac{a_n}{1+a_n} \Rightarrow a_n < (m+1) \frac{a_n}{1+a_n}$$

و چون $\sum_{n=1}^{\infty} (m+1) \frac{a_n}{1+a_n}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا می‌باشد که با فرض مسأله در تناقض است پس سری واگراست.

ب) چون $a_n > 0$ پس هرگاه $m > n$ آنگاه $S_m > S_n$ پس

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geq \frac{a_{n+1}}{S_{n+k}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+k}} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} = \frac{a_{n+k} - S_n}{S_{n+k}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$$

از طرفی $\sum a_n$ نیز واگراست و چون $a_n \rangle ۰$ پس $\{S_n\}$ واگراست پس $\underset{n\to\infty}{Lim} S_n = \infty$ و

$\sum_{n=N+۱}^{N+k} \frac{a_n}{S_n} \geq ۱ - \frac{S_n}{S_{n+k}}$ با ثابت نگه‌داشتن N و گرفتن k به قدر کافی بزرگ داریم

$\sum_{n=N+۱}^{N+k} \frac{a_n}{S_n} \geq \frac{۱}{۲}$ در نتیجه $\sum \frac{a_n}{S_n}$ واگراست.

پ) هرگاه $m > n$ آنگاه $S_m > S_n$ بنابراین

$$\frac{a_n}{S_n^۲} \leq \frac{a_n}{S_n S_{n-۱}} = \frac{S_n - S_{n-۱}}{S_n S_{n-۱}} = \frac{۱}{S_{n-۱}} - \frac{۱}{S_n}$$

و $$\sum \frac{a_n}{S_n^{\;۲}} = \frac{a_۱}{S_۱^۲} + \frac{a_۲}{S_۲^{\;۲}} + \cdots + \frac{a_N}{S_N^{\;۲}} \leq \frac{a_۱}{S_۱^۲} + \left(\frac{۱}{S_۱} - \frac{۱}{S_۲}\right) + \left(\frac{۱}{S_۲} - \frac{۱}{S_۳}\right) + \cdots + \left(\frac{۱}{S_N} - \frac{۱}{S_{N+۱}}\right)$$

$$\Rightarrow \sum \frac{a_n}{S_n^{\;۲}} \leq \frac{a_۱}{S_۱^۲} + \frac{۱}{S_۱} - \frac{۱}{S_{N+۱}} \leq \frac{۱}{S_۱^۲} + \frac{۱}{S_۱}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک سری با جمله‌های مثبت است که دنبالهٔ جمعهای جزیی آن کراندار است پس سری همگراست.

ت) $\forall \quad n = 1, 2, \ldots$ $\quad \frac{a_n}{1+n^2 a_n} \leq \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}$ و چون $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست

و جمله‌های سری نامنفی هستند بنابراین $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ همگراست.

هرگاه $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ در این صورت $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ واگراست.

$n = m^2 \quad \forall m \rangle ۰ \quad a_n = 1$ اگر $n \neq m^۲ \quad \forall m \in N \quad a_n = \frac{۱}{n^۲}$

آنگاه $\sum a_n$ همگراست و $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ همگراست چون بر دو سری همگرا شکسته می‌شوند.

اگر $\underset{n\to+\infty}{Lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

اثبات: $\underset{n\to+\infty}{Lim\,Sup}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

از آنجا که $\underset{n\to+\infty}{Lim\,Sup}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ بنابراین عددی طبیعی چون N و عددی مثبت و کوچکتر از یک بطوریکه

$$\forall n \quad n\rangle N \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\beta$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$|a_{N+p}|<\beta\ |a_{N+p-1}|<\beta^{2}\ |a_{N+p-2}|<|a_{N+1}|<\beta\ |a_N|<\beta^{p}\ |a_N|$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\forall \quad n>N \quad |a_n|<\beta^{n-N}\ |a_N|$$

از آنجا که $\sum_{n=N}^{+\infty}\beta^{n-N}|a_N|$ یک سری همگراست. (چون قسمتی از یک سری هندسی است با قدر نسبت $\beta<1$ است.)

در نتیجه $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ یک سری همگراست (باتوجه به آزمون مقایسهٔ جملات) از آنجا که تعدادی متناهی جمله در همگرایی یا واگرایی بی‌تأثیر می‌باشد بنابراین $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ همگراست.

در نتیجه $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ همگرای مطلق بوده و در نتیجه $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ همگراست.

۱۰- اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد آیا سری $\sum a_n^2$ نیز همگراست. خیر.

زیرا بعنوان مثال $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ یک سری همگراست. چون طبق آزمون لایب نیتز وقتی $n\to+\infty$ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ به صفر همگراست و در نتیجه چون سری متناوب است همگراست. اما

سری $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2$ بصورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ نوشته می‌شود که سری هارمونیک می‌باشد و واگراست.

۱۱– اگر $\underset{n\to\infty}{Lim\ Sup}\ \left|\sqrt[n]{a_n}\right|<۱$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست.

اثبات: از آنجا که $\underset{n\to\infty}{Lim\ Sup}\ \left|\sqrt[n]{a_n}\right|<۱$ بنابراین عددی طبیعی چون N و عددی مثبت و کوچکتر از یک مانند β موجود است بطوریکه

$$\forall \quad n>N \quad \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|<\beta \qquad\qquad a_n<\beta$$

۱۲– فرض کنید $\sum a_n$ همگرا باشد. قرار دهید

$$r_n=\sum_{x=n}^{\infty}a_x$$

الف) ثابت کنید که اگر $x<n$،

$$\frac{a_x}{r_x}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>۱-\frac{r_n}{r_x},$$

و نتیجه بگیرید که $\sum\frac{a_n}{r_n}$ واگراست.

ب) ثابت کنید

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}<۲\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_n+۱}\right),$$

و نتیجه بگیرید که $\sum\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ همگراست.

$\forall n=۱,۲,\ldots,\ a_n>۰$ پس اگر $x_۱<x_۲$ آنگاه $r_{x۱}>r_{x۲}$ پس داریم:

الف)

$$\frac{a_x}{r_x}+\frac{a_{x+۱}}{r_{x+۱}}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>\frac{a_x}{r_x}+\frac{a_{x+۱}}{r_x}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>\frac{a_x+a_{x+۱}+\cdots+a_{x-۱}}{r_x}=\frac{r_x-r_n}{r_x}$$

پس

$$\frac{a_x}{r_x}+\frac{a_{x+۱}}{r_{x+۱}}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>۱-\frac{r_n}{r_x}$$

و چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست داریم

$$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists N>۰ \ \forall n>N \qquad r_n=\sum_{n=m}^{\infty} a_m<\varepsilon$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} r_n=۰$ حال اگر M را ثابت نگه داشته و n را به سوی بی‌نهایت میل دهیم داریم:

$$Lim\left(\frac{a_n}{r_x}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}\right)\geq 1-Lim\frac{r_n}{r_m}=1$$

دنبالهٔ جمعهای جزیی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$ کشی نیست پس همگرا نمی‌باشد.

ب)

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}=\frac{۲a_n}{۲\sqrt{r_n}}\langle\frac{۲a_n}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+۱}}}=\frac{۲a_n\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+۱}}\right)}{r_n-r_{n+۱}}=\frac{۲a_n\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+۱}}\right)}{a_n}$$

بنابراین $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}<۲\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+۱}}\right)$

ثابت می‌کنیم دنباله جمعهای جزیی سری $\sum\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ کراندار است و چون جملـه‌هـای سـری مثبت هستند پس سری همگراست.

$$\sum\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}\langle 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}}\right)=2\left[\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2}\right)+\left(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_3}\right)+\cdots\left(\sqrt{r_N}-\sqrt{r_{N+1}}\right)\right]$$

$$=2\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_{N+1}}\right)$$

۱۳– ثابت کنید که حاصل ضرب مشی دو سری به طور مطلق همگرا به طور مطلق همگرا است.

فرض می‌کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ به طور مطلق همگرا بوده و $\sum c_n$ حاصلضرب دو سری باشد پس $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ همگرا می‌باشد برای اثبات همگرایی $\sum | c_n |$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{k} | c_h | = |a_0 b_0| + |a_0 b_1 + b_0 a_1| + \cdots +$$
$$|a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0| \le \left(|a_0|\,|b_0|\right) + \left(|a_0|\,|b_1| + |b_0|\,|a_1|\right)$$
$$+ \cdots \left(|a_0|\,|b_k| + |a_1|\,|b_{k-1}| + \cdots + |a_k|\,|b_0|\right)$$
$$= \left(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_k|\right)\left(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_k|\right) =$$
$$\left(\sum_{n=0}^{k} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{k} |b_n|\right)$$

$\forall\ k = 1,2,3,\ldots \qquad \exists\ x_1, x_2$

پس نشان دادیم دنبالهٔ $\sum_{n=0}^{k} |b_n| \le x_2 \quad , \quad \sum_{n=0}^{k} |a_n| \le x_1$

جمعهای جزیی $\sum_{n=0}^{\infty} | c_n |$ کراندار است $\qquad \forall\ k \in N\ ,\ \sum_{n=0}^{k} |c_n| \le x_1 x_2$

پس همگراست.

۱٤– چنانچه $\{S_n\}$ دنبالهٔ مختلطی باشد، میانگینهای حسابی آن σ_n ها را با

$(n = 0,1,2,\ldots)\ \ \sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$ تعریف می‌کنیم

(آ) هرگاه $Lim S_n = S$، ثابت کنید $Lim \sigma_n = S$.

(ب) دنبالهٔ $\{S_n\}$ را قسمی بسازید که در عین اینکه $Lim \sigma_n = 0$ همگرا نباشد.

(پ) آیا می‌شود به ازای هر n، $S_n > 0$ و با اینکه $Lim \sigma_n = 0$ ، داشته باشیم $Lim \sup S_n = \infty$؟

(ت) به ازای هر $n \ge 1$ قرار دهید $a_n = S_n - S_{n-1}$. نشان دهید که

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k$$

فرض کنید $Lim(na_n)=\circ$ و $\{\sigma_n\}$ همگرا باشد. ثابت کنید $\{S_n\}$ همگرا است. (این عکس قسمت (آ) را به دست می‌دهد منتها با فرض اضافی $na_n\to\circ$.)

(ث) آخرین نتیجه را از این فرض ضعیفتر به دست آورید: فرض کنید $M<\infty$، به ازای هر n، $|na_n|\le M$, $Lim\sigma_n=\sigma$. با تکمیل شرح مختصر زیر، ثابت کنید $LimS_n=\sigma$:

هرگاه $m<n$ آنگاه

$$S_n-\sigma_n=\frac{m+۱}{n-m}(\sigma_n-\sigma_m)+\frac{۱}{n-m}\sum_{i=m+۱}^{n}(S_n-S_i).$$

برای این iها،

$$\left|S_n-S_i\le\frac{(n-i)M}{i+۱}\le\frac{(n-m-۱)M}{m+۲}.\right|$$

$0<\varepsilon$ ثابتی اختیار کرده، به هر n عدد صحیح m را طوری مربوط نمایید که در

$$m\le\frac{n-\varepsilon}{۱+\varepsilon}<m+۱$$

صدق کند. در این صورت، $(m+۱)/(n-m)\le ۱/\varepsilon$, $|S_n-S_i|<M\varepsilon$. از اینرو،

$$\lim_{n\to\infty}\sup|S_n-\sigma|\le M\varepsilon.$$

چون ε دلخواه بوده، پس $\lim_{n\to\infty}S_n=\sigma$.

الف) $|S_n|\le M_1$ $\quad \exists x_1<n \quad \forall x>\circ$ پس اگر $x=x_1+|S|$ آنگاه

$$\forall \quad n>\circ \quad |S_n-S|<x$$

• از طرفی $|S_n-S|<\varepsilon/2$ $\qquad \forall\varepsilon>\circ \quad \exists N_1\in N\ni\forall n>N_1$

$$|S_n-S|=\left|\frac{S_\circ+S_1+\cdots+S_n}{n+1}-S\right|=\left|\frac{(S_\circ-S)+(S_1-S)+\cdots+(S_n-3)}{n+1}\right|$$

$$\forall \quad n\ge N_1 \quad |\delta_n-S|<\frac{N_1x}{n+1}+\frac{(x+1)-N_1}{n+1}x\ \varepsilon/2<\frac{N_1x}{n+1}+\varepsilon/2$$

N_2 را چنان انتخاب می‌کنیم که $n\ge N_2$, $\dfrac{N_1x}{n}<\varepsilon/2$

$N_2=\left[\dfrac{2N_1x}{\varepsilon}\right]+1$ پس $N=max\{N_1,N_2\}$ بنابراین

$$\forall \ n \geq N \qquad |\delta_n - S| < \varepsilon$$

و از طرفی چون $\varepsilon \rangle ۰$ دلخواه است پس $\lim\limits_{n_i \to \infty} \delta_n = S$

ب)

$$S_n = \begin{cases} k & n = ۱۰^k (k = ۰, ۱, ۲, \ldots) \\ {}^{۱}\!/_{n^۲} & n \neq ۱۰^k (k = ۰, ۱, ۲, \ldots) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} s_n = +\infty \ , \ \lim_{n\to\infty} \delta_n = ۰$$

چون $\forall_n \in N$ وقتی $10^k \langle u \langle 10^{k+1}$

$$\delta_n < \left[\frac{k(k+۱)}{۱۰^k} + \frac{\sum\limits_{k=۱}^{n} {}^{۱}\!/_{n^۲}}{n} \right]$$

وقتی $k , n \to \infty$ و چون $\sum {}^{1}\!/_{x^2}$ همگراست.

قسمت پ حل نشده

$$\left(\frac{k(k+1)}{10^k} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}}{n} \right) \to ۰$$

ت)

$$\frac{۱}{n+۱} \sum_{k=۱}^{n} k a_n = \frac{۱}{n+۱} (a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + n a_n) =$$

$$\frac{۱}{n+۱} ((S_۱ - S_۰) + ۲(S_۲ - S_۱) + \cdots + n(S_n - S_{n-۱})) =$$

$$\frac{۱}{n+۱} (-(S_۰ + S_۱ + \cdots + S_n) + (n+۱) S_n) = S_n - \frac{S_۰ + S_۱ + \cdots + S_n}{n+۱} = S_n - \delta_n$$

با توجه به قسمت الف: $\forall n : 1,2,3,\ldots \qquad b_n = n a_n$

همگراست $\frac{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}{n+1}$ آنگاه $\left[S_n - \delta = t_n \Rightarrow S_n = t_n + \delta_n\right]$

$$Lim\, S_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\, t_n + \underset{n\to\infty}{Lim}\, \delta_n = \circ + \underset{n\to\infty}{Lim}\, \delta_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\, \delta_n$$

ث) اگر $x < n$ آنگاه

$$S_n - \delta_n = S_n - \frac{S_\circ + S_1 + \cdots + S_x + S_{x+1} + \cdots + S_n}{n+1}$$

$$S_n - \frac{S_\circ + S_1 + \cdots + S_x}{n+1} + \left(\frac{x+1}{n+1} - 1\right)\left(\frac{S_{x+1} + \cdots + S_n}{n-x}\right) =$$

$$\frac{-S_\circ + S_1 + \cdots + S_x}{n+1} + \left(\frac{x+1}{n+1}\right)\left(\frac{S_{x+1} + \cdots + S_n}{n-x}\right) + S_n -$$

$$\frac{S_{x+1} + \cdots + S_n}{n-x} = \left(\frac{x+1}{n-x}\right)\left[\frac{(x-n)(S_\circ + \cdots + S_n)}{(n+1)(x+1)} + \frac{S_{n+1} + \cdots + S_n}{n+1}\right]$$

$$+ \frac{1}{x-n}\left[(n-x)S_n - (S_{x+1} + \cdots + S_n)\right] = \frac{x+1}{n-x}\left[\frac{S_\circ + \cdots + S_n}{n+1} - \frac{S_\circ + \cdots + S_n}{n+1}\right] +$$

$$\frac{1}{n-x}\left[(S_n - S_{n+1}) + (S_n - S_{n+2}) + \cdots + (S_n - S_x)\right] = \frac{x+1}{n-x}(\delta_n - \delta_x) + \frac{1}{n-x}\sum_{i=x+1}^{n}(S_n - S_i)$$

$\varepsilon > \circ$ را فرض می‌کنیم وجود دارد x را طوری انتخاب کنیم

$$\forall n \in N \qquad x \le \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} \langle x+1 \Rightarrow \frac{x+1}{n-x} \le \frac{1}{\varepsilon}$$

و همچنین برای $i \ge n+1$ داریم:

$$\left|S_n - S_i\right| = \left|\sum_{k=i+1}^{n}(S_k - S_{k-1})\right| \le \sum_{k=i+1}^{n}\left|S_k - S_{k-1}\right| \le$$

$$\sum_{k=i+1}^{n}\frac{x}{k} \le (x-i)\frac{M}{i+1} \le \left(\frac{n-(x+1)x}{x+2} < \varepsilon\, x\right)$$

بنابراین $\left|S_n - \delta_n\right| < \frac{\left|\delta_n - \delta_x\right|}{\varepsilon} + x\,\varepsilon$ و چون $\{\delta_n\}$ همگراست کشی می‌باشد. پس $\underset{x\to\infty}{Lim\ Sup}\left|S_n - \delta_n\right| \le x\varepsilon$ و چون $\varepsilon \rangle \circ$ دلخواه است داریم:

$$Lim \sup |S_n - \delta_n| = ۰$$

پس

$$Lim \sup |S_n - \delta| \le Lim \sup |S_n - \delta_n| + Lim \sup |\delta_n - \delta| = ۰$$

یعنی
$$\lim_{n \to \infty} S_n = \delta$$

۱۵- عدد مثبت α را ثابت نگهدارید و $x_۱$ را بزرگتر از $\sqrt{\alpha}$ گرفته، $x_۲, x_۳, x_۴, \ldots$ را با فرمول بازگشتی

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$

تعریف کنید.

(آ) ثابت کنید $\{x_n\}$ نزول می‌کند و $Lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(ب) قرار دهید $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$ و نشان دهید که $\varepsilon_{n+۱} = \frac{\varepsilon_n^۲}{۲x_n} < \frac{\varepsilon_n^۲}{۲\sqrt{\alpha}}$

پس با فرض $\beta = ۲\sqrt{\alpha}$، خواهید داشت

$$\varepsilon_{n+۱} < \beta\left(\frac{\varepsilon_۱}{\beta}\right)^{۲^n} \qquad (n = ۱,۲,۳,\ldots)$$

(پ) این دستورالعمل خوبی است برای محاسبهٔ ریشه‌های دوم، زیرا فرمول بازگشتی ساده بروی همگرایی بی‌نهایت سریع صورت می‌گیرد. به عنوان مثال، اگر $\alpha = ۳$ و $x_۱ = ۲$، نشان دهید که $\varepsilon_۱ / \beta < \frac{۱}{۱۰}$، و لذا

$$\varepsilon_۵ < ۴ \times ۱۰^{-۶} \quad , \quad \varepsilon_۶ < ۴ \times ۱۰^{-۳۲}$$

الف) $n = 1,2,5,\cdots$, $x - n > \sqrt{\alpha}$, $x_1 > \sqrt{\alpha}$ فرض می‌کنیم $x_n > \sqrt{\alpha}$ ثابت می‌کنیم

$$x_{n+1} > \sqrt{\alpha}$$

$$x_{n+۱} > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{x_n^۲ + \alpha}{۲x_n} > \sqrt{\alpha}$$

چون $x_n > ۰$ نامساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$x_n^۲+\alpha>۲x_n\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \left(x_n-\sqrt{\alpha}\right)>\circ$

چون نامساوی برقرار است $x_{n+۱}>\sqrt{\alpha}$ ثابت می‌کنیم $\{x_n\}$ نزولی است. به ازای $n=1,2,\ldots$

$$x_{n+۱}<x_n \Leftrightarrow \frac{x_n^۲+\alpha}{۲x_n}<x_n \Leftrightarrow x_n^۲+\alpha<۲x_n^۲ \Leftrightarrow x_n^۲-\alpha>\circ$$

چون $\forall n=۱,۲,\ldots$, $x_n>\sqrt{\alpha}$ پس $x_n^۲-\alpha>\circ$ پس $x_{n+۱}<x_n$ بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و از پایین کراندار است پس همگراست فرض می‌کنیم $Lim\ x_n=L$

پس $2L^2=L^2+\alpha$ در نتیجه $L=\sqrt{\alpha}$

$$L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{\alpha}{L}\right)$$

۱٦– فرض کنید $\{p_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در فضای متری X، و زیردنباله‌ای از آن مانند $\{p_{n_i}\}$ به نقطهٔ $p\in X$ همگرا باشد. ثابت کنید تمام دنبالهٔ $\{p_n\}$ همگرا به p خواهد بود.

ε رامثبت و دلخواه انتخاب می‌کنیم و چون $\{p_n\}$ دنباله‌ای کشی است پس

$$\exists N_1\in N\ \forall m,n\geq N_1 \quad d(p_n,p_m)<\varepsilon/2\ ,\ \lim_{k\to\infty} p_{x_k}=p$$

بنابراین

$$\exists k_1\in N\ ,\ \forall k\geq k_1 \quad d\left(p_{n_k},p\right)<\varepsilon/2$$

$$N=Max\{N_1,n_{k_1}\},\ \forall n\geq N \qquad n_N\geq N\Rightarrow$$

$$d(p_n,p)\leq d\left(p_n,p_{n_k}\right)+d\left(p_{n_k},p\right)<\varepsilon/2+\varepsilon/2<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n=p$$

۱۷– قضیهٔ زیر را ثابت کنید: هرگاه $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته و کراندار در فضای متری تام X باشد، $E_n = E_{n+1}$ و $\lim_{n\to\infty} diam E_n = 0$ آنگاه $\bigcap_1^\infty E_n$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است.

حل: به ازای $n = 1,2,3,\ldots$ ، E_n زیر فضایی تام از X می‌باشد چون هر دنباله کوشی مثل $\{x_k\}$ در E_n در X کشی در نتیجه X همگرا است. مثلاً $Lim\, x_k = x$ پس $x \in E_n$ از طرفی چون E_n بسته می‌باشد $x \in E_n$ در نتیجه $\{x_n\}$ در E_n به x همگرا می‌باشد.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ حداکثر یک عضو دارد چون در غیر این صورت

$$diam\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) > 0 \quad \text{پس} \quad Lim\, diam\, E_n \ge diam\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) > 0$$

و چون $\forall n = 1,2,\ldots$ ، E_n ناتهی است $x \in E_n$ انتخاب می‌کنیم و

$x_m \in E_n \quad \forall m \ge n$ ، $\lim_{k\to\infty} diam\, E_k = 0$ پس $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کشی در E_n می‌باشد.

اکنون $n_0 \in N$ را یک ثابت در نظر می‌گیریم چون E_{n_0} یک فضای تام است پس $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ در E_{n_0} همگراست فرض می‌کنیم $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ ، $m \ge n_0$ و چون $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ زیردنبالهٔ همگرایی از $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ است پس $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ بنابراین

$$x \in E_n \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

۱۸– فرض کنید X یک فضای تام، و $\{G_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز و چگال X باشد. قضیهٔ بئر را ثابت کنید؛ یعنی؛ ثابت کنید $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ تهی نیست. (در واقع ، این مجموعه در X چگال است). راهنمایی: دنباله‌ای از همسایگیهای منقبض مانند E_n را بیابید بطوریکه $E_n \subset G_n$، و تمرین ۲۱ را به کار برید.

G_n برای هر $n = 1,2,3,\ldots$ در X چگال می‌باشد پس G_n تهی نمی‌باشد $x_1 \in G_1$ فرض کنیم $\exists r > 0 \ni N_r(x_1) \subseteq G_1$

اگر $0 < r_1 < r/2 \quad \Rightarrow \quad \overline{N}r_1(x_1) \subseteq G_1$

از طرفی چون G_2 در X چگال است.

$N_{r_1}(x_1)\bigcap G_2 \neq \phi \;\Rightarrow\; x_2 \in N_{r_1}(x_1)\bigcap G_2$

را درنظر می‌گیریم و چون اشتراک دومجموعهٔ باز مجموعه‌ای باز است

$\exists\; r_2 > 0 \quad \ni \quad 0 < r_2 < r_1/2 \quad , \quad \overline{N}_{r_2}(x_2) \subseteq G_2 \cap N_{r_1}(x)$

همین روند را ادامه می‌دهیم و اگر قرار دهیم $\qquad E_n = \overline{N}_{r_n}(x_n), n = 1,2,\ldots$

در این صورت E_nها زیرمجموعه‌هایی غیرتهی و بسته و کراندار می‌باشند که $\lim\limits_{n\to+\infty} diam\, E_n = 0 \qquad E_{n+1} \subseteq E_n$ پس در شرایط تمرین ۲۱ صدق می‌کند در نتیجه

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \neq \phi$ و چون $\forall_n = 1,2,\ldots$

$\Leftarrow E_n \subseteq G_n \qquad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \neq \phi$ یعنی $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ در X چگال است

زیرا

$\forall x \in X \quad , \quad \forall r > 0 \quad N_r(x)\bigcap G_1 \neq \phi$

قرار می‌دهیم

$\forall n = 2,3,\ldots \quad A_n = G_n \quad , \quad A_1 = N_r(x)\bigcap G_1$

و مانند ساختن E_nها در بالا این روند را ادامه می‌دهیم

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi \Rightarrow \phi \neq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcap A_n$ پس $(N_r(x)\bigcap G_1)\bigcap\left(\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} G_n\right) \neq \phi$

پس $N_r(x)\bigcap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n\right) \neq \phi$ یعنی

$$x \in \left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n}\right) \Rightarrow X = \left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n}\right)$$

۱۹– فرض کنید $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ دنباله‌هایی کشی در فضای متری X باشند. نشان دهید که دنبالهٔ $\{d(p_n,q_n)\}$ همگراست. راهنمایی: به ازای هر n,m.

$$d(p_n,q_n) \le d(p_n,p_m) + d(p_m,q_m) + d(q_m,q_n)$$

از این نتیجه می‌شود که اگر n,m بزرگ باشند.

$$\left|d(p_n,q_n)-d(p_m,q_m)\right|$$

کوچک خواهد بود.

چون R فضایی تام است $\{d(p_n,q_n)\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است پس فقط باید نشان دهیم $\{d(p_n,q_n)\}$ کشی است

$$\forall \varepsilon > \circ \quad \exists N > \circ \quad \forall m \geq N \ , \forall n \geq N \quad \left|d(p_n,q_n)-d(p_m,q_m)\right| < \varepsilon$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد $\{p_n\}$ در X کشی است بنابراین

$$\exists \quad N_۱ > \circ \quad \forall m \geq N_۱ \ , \quad \forall \ n \geq N_۱ \qquad d(p_m, p_n) < \varepsilon/۲$$

و همچنین $\{q_n\}$ در X کشی است پس

$$\exists \quad N_۲ > \circ \quad \forall m \geq N_۲ \ , \quad \forall \ n \geq N_۲ \qquad d(q_m, q_n) < \varepsilon/۲$$

$$N = Max\,\{N_۱, N_۲\}$$

هرگاه $m \geq N \ , \quad n \geq N$ آن‌گاه داریم

$$d(p_n,q_n) \leq d(p_n,p_m)+d(p_m,q_m)+d(p_m,q_n) < d(p_m,q_m)+\varepsilon$$

بنابراین $d(p_n,q_n) = d\,(p_m,q_m) < \varepsilon$ به همین ترتیب نشان می‌دهیم

$$d(p_m,q_m)-d(p_n,q_n) < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\left|\, d(p_n,q_n)-d(p_m,q_m)\right| < \varepsilon$$

۲۰– فرض کنید X یک فضای متری باشد.

(آ) فرض کنید X^* مجموعهٔ تمام رده‌های هم‌ارزیی باشد که این طور به دست می‌آیند. چنانچه

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n) = \cdot$$

ثابت کنید این یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

(ب) فرض کنید X^* مجموعهٔ تمام رده‌های هم‌ارزیی باشد که این طور به دست می‌آیند. چنانچه $P \in X^*\ , \ Q \in X^*\ , \ \{p_n\} \in P\ , \ \{q_n\} \in Q$ ، تعریف کنید

$$\Delta(P,Q)=\lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n)$$

این حد، بنابر تمرین ۲۳، وجود دارد. نشان دهید که اگر $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ با دنباله‌هایی هم‌ارز خود عوض شوند، عدد $\Delta(P,Q)$ تغییری نمی‌کند، و لذا، Δ یک تابع فاصله در X^* می‌باشد.

(پ) ثابت کنید فضای متری X^* حاصل تام است.

(ت) به ازای هر $p\in X$، دنباله‌ای کشی هست که تمام جملات آن P اند. فرض کنید P_p آن عنصر از X^* باشد که حاوی این دنباله است. ثابت کنید به ازای هر $p,q\in X$،

$$\Delta(p_n,p_q)=d(p,q)$$

به عبارت دیگر، نگاشت φ که با $\varphi(p)=p_p$ تعریف می‌شود یک یکمتری (یعنی نگاشتی حافظ فاصله) از X بتوی X^* می‌باشد.

(ث) ثابت کنید $\varphi(x)$ در X^* چگال است و در صورت تام بودن X، $\varphi(X)=X^*$. بنابر (ت)، می‌توان $\varphi(X)=X$ را یکی کرد؛ و در نتیجه، X را به این صورت که در فضای متری تام X^* نشانیده شده در نظر گرفت. فضای X^* را تتمیم X می‌نامیم.

آ- فرض می‌کنیم $A=\{\{p_n\}\mid \{p_n\}$ دنباله‌ای کشی در X می‌باشد $\}$ با استفاده از تعریف هم ارزی ثابت می‌کنیم $\{p_n\}\sim\{q_n\}\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n)=0$

$$\{p_n\}\sim\{p_n\}\Leftarrow \lim d(p_n,p_n)=0\Leftarrow d(p_n,p_n)=0\quad \forall n=1,2,3,\ldots\{p_n\}\in A \quad (1$$

$$\{p_n\}\sim\{q_n\}\Rightarrow \lim(p_n,q_n)=0\Rightarrow \lim(q_n,p_n)=0\Rightarrow\{q_n\}\sim\{p_n\} \quad (2$$

3) اگر $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{c_n\}$ سه عضو دلخواه از A باشند بطوریکه

$$\{p_n\}\sim\{q_n\}\quad,\quad \{q_n\}\sim\{c_n\}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to 0} d(p_n,q_n)=0\ ,\ \lim_{n\to 0}(q_n,c_n)=0$$

پس از طرفی برای هر $n=1,2,\ldots$

$$0\le d(p_n,c_n)\le d(p_n,q_n)+d(q_n,c_n)$$

$$\lim d(p_n,c_n)\le \lim d(p_n,q_n)+\lim(q_n,c_n)=0+0$$

پس $\{p_n\}\sim\{c_n\}$

ب- فرض کنیم $X^* = A/\sim$ $\quad X^* = \{ [\{p_n\}] \mid \{p_n\} c A \}$

که $[\{p_n\}] = \{\{q_n\} \in A \mid \{p_n\} \sim \{q_n\}\}$

$$\Delta = X^* \times X^* \to R$$
$$\Delta([\{p_n\}],[\{q_n\}]) = \lim_{n\to+\infty} d(p_n , q_n)$$

تابع Δ خوش تعریف می‌باشد زیرا به ازای هر عضو از $X^* \times X^*$ یک و فقط یک عضو به R نسبت می‌دهد.

فرض می‌کنیم $([\{p_n\}],[\{q_n\}]) = ([\{p'_n\}],[\{q'_n\}])$ بنابراین $\{q_n\} \sim \{q'_n\}$ و $\{p_n\} \sim \{p'_n\}$

پس

$$Lim(p_n, p'_n) = \circ \,,\ Lim(q_n, q'_n) = \circ$$

داریم

$$\forall n = 1,2,\ldots\ d(p_n,q_n) \le d(p_n,p'_n) + d(p'_n,q'_n) + d(q'_n,q_n)$$
$$d(p'_n,q'_n) \le d(p'_n,p_n) + d(p_n,q_n) + d(q_n,q'_n)$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n) \le \lim_{n\to\infty} d(p'_n,q'_n)$$
$$\lim_{n\to\infty} d(p'_n,q'_n) \le \lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n)$$

بنابراین

$$\Delta([\{p_n\}],[\{q_n\}]) = \Delta([p'_n],[\{q'_n\}])$$

اگر

$$\{p'_n\} \in p \,,\ \{q'_n\} \in Q \qquad , \quad p = [\{p_n\}] \,,\ Q = [\{q_n\}]$$

آن‌گاه

$$\Delta(p,Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n) = \lim_{n\to\infty}(p'_n,q'_n)$$

پ- فرض می‌کنیم $\{x_k\}$ دنباله‌ای کشی در X^* باشد نشان می‌دهیم $\{x_k\}$ در X^* همگراست

روشن است که $\forall\ k=1,2,\ldots$ دنباله‌ای کشی مانند $\left\{p_n{}^k\right\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد بطوریکه $\left\{p_n{}^k\right\}\in x_k$ ادعا می‌کنیم $\left\{p_n{}^n\right\}$ دنباله‌ای کشی در X است. بطوریکه $\underset{k\to\infty}{Lim}\, x_k=\left\{p_n{}^n\right\}$ پس $Limx_k\in X^*$ یعنی X^* فضایی تام است. فرض می‌کنیم $\varepsilon\rangle ۰$ دلخواه باشد چون $\{x_k\}$ در X^* کشی است $\Delta\left(x_{k۱},x_{k۱}\right)<\varepsilon/۳$ $\exists N_۱>۰\ni\forall\quad k_۱,k_۲\geq N_۱\ ,$ پس

$$Limd\left(p_n^{k۱},p_n^{k۲}\right)<\varepsilon/۳$$

$$\left(\exists N_۲>۰\ \ni\forall\ n\geq N_۲\quad d\left(p_n^{k۱},p_n^{k۲}\right)<\varepsilon/۳\right)$$

چون $\left\{p_n^{k_1}\right\}\in x_{k_1}$, $\left\{p_n^{k_2}\right\}\in x_{k_2}$ دنباله‌هایی کشی هستند پس

$$N=max\{N_1,N_1,N_1,N_1\}$$

$$\exists\ \ N_3>۰\ \ni\forall m,n\geq N_3\qquad d\left(p_m{}^{k_1},p_n{}^{k_2}\right)<\varepsilon/3$$

$$\exists\ \ N_4>۰\ \ni\forall m,n\geq N_4\qquad d\left(p_m{}^{k_1},p_n{}^{k_2}\right)<\varepsilon/3$$

$$\forall k\ ,\ m,n\geq N\ \ d\left(p_n^n,p_m^m\right)\leq d\left(p_n^n,p_m^n\right)+d\left(p_m^n,p_m^k\right)+$$

$$d\left(p_m^k,p_m^m\right)<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$$

بنابراین $\left\{p_n^n\right\}$ در X کشی است قرار می‌دهیم $\underset{k\to\infty}{Lim}\,x_k=p,p:\left[\left\{p_n^n\right\}\right]$

$$\underset{k\to\infty}{Lim}\,x_k=p\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>۰\,\exists N\rangle ۰\ \forall k\geq N$$

اثبات می‌کنیم $\Delta\left(x_k,p\right)<\varepsilon$

اگر و فقط اگر $\forall\varepsilon>۰\,\exists N>۰\ \ni\forall\ k\geq N\ \underset{n\to\infty}{Lim}\,d\left(p_n^k,p_n^n\right)<\varepsilon$

اگر و فقط اگر $\forall\varepsilon>۰\,\exists N>۰\ \ni\forall\ k,n\geq N\ d\left(p_n^k,p_n^n\right)<\varepsilon$

چون برای هر k و n طبیعی $d\left(p_n^k,p_n^n\right)\leq d\left(p_n^k+p_k^k\right)+d\left(p_k^k,p_n^n\right)$ از طرفی $\left\{p_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{p_n^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کشی هستند پس

$$\exists N > \circ \quad \forall k,n \geq N \quad d\left(p_n{}^k, p_k^k\right) < \varepsilon/_{۲},$$
$$d\left(p_k{}^k, p_n^n\right) < \varepsilon/_{۲} \Rightarrow d\left(p_n{}^k, p_n^n\right) < \varepsilon$$

ت)

فرض می‌کنیم $p \in X$ اگر $\forall n = ۱,۲,\ldots$ $\{p_n\}_{n=۱}^{\infty}, p_n = p$ دنباله‌ای است که دامنهٔ آن فقط از عضو p تشکیل شده است پس کشی است بنابراین $p_p = [\{p_n\}] = [\{p_n\}] \in X^*$ تابع ϕ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $\phi : X \to X^*$

$\forall p \in X \ \phi(p) = [\{p\}]$ تابع ϕ یک به یک است همچنین

$$\Delta(\phi(p),\phi(q)) = \Delta\left(p_p, p_q\right) = Lim d\left(p_n, q_n\right) =$$

در نتیجه ϕ یک به یک بروی و متری از X بتوی X^* است.

$$d(p,q) \ \forall p,q \in X$$

ث) کافی است ثابت کنیم $X^* \subseteq \overline{\phi(x)}$ فرض می‌کنیم $p = [\{p\}] \in X^*$ نشان می‌دهیم دنباله‌ای از اعضای $\phi(x)$ به $[\{p_n\}]$ میل می‌کند.

$\forall \ n = 1,2,\ldots p_n \in X$ قرار می‌دهیم

$$p_{p_1} = [\{p_1\}], p_{p_2} = [\{p_2\}], \ldots, p_{p_n} = [\{p_n\}]$$

واضح است که $\forall n = 1,2,\ldots$ $\phi(p_n) = p_{p_n}$ پس $p_{p_n} \in \phi(X)$ اکنون ثابت می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} p_{p_n} = p$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{p_n} = p \Leftrightarrow \forall \varepsilon > \circ \ \exists N > \circ \ \ni \ \forall k \geq N \ \ \Delta\left(p_{p_k}, p\right) < \varepsilon$$

اگر و فقط اگر

$$\forall \varepsilon > \circ \ \exists N > \circ \ni \forall k \geq N \quad \lim_{n\to\infty} d\left(p_k, p_n\right) < \varepsilon$$

اگر و فقط اگر

$$\forall \varepsilon > \circ \ \exists N > \circ \ni \forall k,n \geq N \quad d\left(p_k, p_n\right) < \varepsilon$$

و چون $\{p_n\}$ دنباله‌ای کشی است نتیجه حاصل است.

اگر X تام باشد برای دنباله‌ای کشی مانند $\{p_n\}$ می‌توان فرض کرد $\lim_{n\to\infty} p_n = p$

که در آن $p\in X$ واضح است که $p=[\{p_n\}]=[\{p\}]$ پس $p\in\phi(X)$ یعنی $\phi(p)=p$
بنابراین $X^*=\phi(X)\Leftarrow X^*\subseteq\phi(X)$

۲۱– فرض کنید X آن فضای متریی باشد که نقاطش اعداد گویا و متر آن $d(x,y)=|x-y|$ است. تتمیم این فضا چیست؟

با توجه به تمرین ۱۹ قسمت ت می‌توانیم $X,\phi(X)$ را یکی در نظر بگیریم همچنین $\overline{\phi(X)}=X^*$ پس اگر $\phi(X)=X\Rightarrow\overline{\phi(X)}=R$ در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم $X^*=R$ تقسیم فضای X است.

چون R فضایی تام است $\{d(p_n,q_n)\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است. پس فقط باید نشان دهیم $\{d(p_n,q_n)\}$ کشی است.

$$\forall\varepsilon>0\qquad\exists N>0\qquad\forall m\ge N\,,\ \forall\ n\ge N$$
$$|\,d(p_n,q_n)-d(p_m,q_m)|<\varepsilon$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. داریم $\{p_n\}$ در X کشی است بنابراین

$$\exists N_1>0\qquad\forall\ \ m\ge N_1\ \ ,\quad\forall n\ge N_1\qquad d(p_m,p_n)<\frac{\varepsilon}{2}$$

و همچنین $\{q_n\}$ در X کشی است پس

$$\exists N_2>0\qquad\forall\ \ m\ge N_2\ \ ,\quad\forall n\ge N_2\qquad d(q_m,q_n)<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$N=\max\{N_1,N_2\}$$

هرگاه $m\ge N$, $n\ge N$ آنگاه داریم

$$d(p_n,q_n)\le d(p_n,p_m)+d(p_m,q_m)+d$$
$$d(q_m,q_n)<d(p_m,q_m)+\varepsilon$$

بنابراین

$$d(p_n,q_n)-d(p_m,q_m)<\varepsilon$$

به همین ترتیب نشان می‌دهیم

$$d(p_m,q_m)-d(p_n,q_n)<\varepsilon$$

بنابراین

$$\left|d(p_n,q_n)-d(p_m,q_m)\right|<\varepsilon$$

۲۲– با توجه به تمرین ۲۰ قسمت ت می‌توانیم X ,$\phi(X)$ را یکی درنظر بگیریم. همچنین

$$\overline{\phi(X)}=X^*$$

پس اگر

$$\phi(X)=Q\Rightarrow\overline{\phi(X)}=R$$

در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم $X^*=R$ تتمیم فضای X است.

همچنین اگر E از پایین کراندار باشد مثلاً $a=\inf E$,$(a,+\infty)$ نیز یکی از آن بازه‌هاست.

پس

۱) اگر E از بالا و پایین بی‌کران باشد آنگاه a_n,b_n که $E^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$

اگر $(a_n,b_n)\neq(a_m,b_m)\Rightarrow(a_n,b_n)\cap(a_m,b_m)=\phi$

۲) اگر E فقط از بالا کراندار باشدآنگاه

$$E^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\cup(b,+\infty)$$

که $b=\sup E$ و

$\forall \quad m,n$ اگر $(a_n,b_n)\neq(a_m,b_m)\Rightarrow(a_n,b_n)\cap(a_m,b_m)=\phi$

۳) اگر E فقط از پایین کراندار باشد آنگاه

$$E^c=(-\infty,a)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right)$$

٤) اگر E از بالا و پایین کراندار باشد

$$E^c=(-\infty,a)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right)\cup(b,+\infty)$$

درهر چهارمورد فوق بازهٔ (a_n,b_n)برای هر $n\in N$ بازهٔ باز متناهی است و

$a=\inf\ E$, $b=\sup E$,

$\forall m,n\in N$

$$(a_n,b_n)\neq(a_m,b_m)\Rightarrow(a_n,b_n)\cap(a_m,b_m)=\phi$$

۲۳– فرض می‌کنیم $x\in X$ پس $x\in\overline{E}$ ، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در E وجود دارد که $\lim\limits_{n\to\infty}=x$ به وضوح $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در X است پس دنباله‌ای کشی در E می‌باشد، f بر E بطور یکنواخت پیوسته است پس $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای کشی در R است پس $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای همگرا در R است پس می‌توان فرض کرد

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y_x$

آنگاه $\sum a_n$ واگراست و $\sum\frac{a_n}{1+na_n}$ همگراست چون به دو سری همگرا شکسته می‌شوند.

فرض کنید $a_n>0$ ، $\sum a_n$ همگرا باشد. قرار دهید

(آ) ثابت کنید که اگر $m<n$، $\frac{a_m}{r_m}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>1-\frac{r_n}{r_m}$ و نتیجه بگیرید که $\sum\frac{a_n}{r_n}$ واگراست.

(ب) ثابت کنید $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}<2\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}}\right)$ و نتیجه بگیرید که $\sum\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ همگراست.

$\forall n=1,2,\ldots \qquad a_n>0$

پس اگر $x_1<x_2$ آنگاه $r_{m1}>r_{m2}$ پس داریم :

$$\frac{a_m}{r_m}+\frac{a_{m+1}}{r_{m+1}}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>\frac{a_m}{r_m}+\frac{a_{m+1}}{r_m}+\cdots+\frac{a_m}{r_m}>\frac{a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{n-1}}{r_m}=\frac{r_m-r_n}{r_m}$$

پس

$$\frac{a_m}{r_m}+\frac{a_{m+1}}{r_{m+1}}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>1-\frac{a_n}{r_m}$$

و چون $\sum\limits_{m=n}^{\infty}a_n$ همگراست

$$\forall \varepsilon > ० \quad \exists N > ० \qquad \forall n \geq N \quad r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon$$

بنابراین $\underset{n\to\infty}{Lim}\, r_n = ०$ حال اگر x را ثابت نگه داشته و n را به سوی بی‌نهایت میل دهیم داریم:

$$Lim\left(\frac{a_m}{r_m}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}\right) \geq 1 - Lim\frac{r_n}{r_m} = 1 - \frac{Lim r_n}{r_m}$$

دنبالهٔ جمعهای جزیی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$ کشی نیست پس همگرا نمی‌باشد.

ب-

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} = \frac{۲a_n}{۲\sqrt{r_n}} < \frac{za_n}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+۱}}} = \frac{۲a_n\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+۱}}\right)}{r_n - r_{n+۱}} = \frac{۲a_n\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+۱}}\right)}{a_n}$$

بنابراین

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < ۲\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+۱}}\right)$$

ثابت می‌کنیم دنبالهٔ جمعهای جزیی سری $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ کراندار است و چون جمله‌های سری مثبت هستند پس سری همگراست.

$$\sum\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+۱}}\right) = ۲\left(\sqrt{r_۱}-\sqrt{r_۲}\right)+\left(\sqrt{r_۲}-\sqrt{r_۳}\right)+\cdots+\left(\sqrt{r_N}-\sqrt{r_{N+۱}}\right) =$$

$$۲\left(\sqrt{r_۱}-\sqrt{r_{N+۱}}\right)$$

۲۴- ثابت کنید که حاصل ضرب کشی دو سری به طور مطلق همگرا است.

فرض می کنیم $\sum_{n=०}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=०}^{\infty} b_n$ بطور مطلق همگرا بوده و $\sum c_n$ حاصلضرب دو سری می‌باشد.

پس $\sum_{n=०}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=०}^{\infty}|b_n|$ همگرا می‌باشند.

برای اثبات همگرایی $\sum|c_n|$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n| = |a_0 b_0| + |a_0 b_1 + b_0 a_1| + \cdots + |a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0| \le \left(|a_0|\,|b_0|\right) +$$
$$\left(|a_0|\,|b_1| + |b_0|\,|a_1|\right) + \cdots + \left(|a_0||b_k| + |a_1||b_{k-1}| + \cdots + |a_k||b_0|\right) =$$
$$\left(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_k|\right)\left(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_k|\right) = \left(\sum_{n=0}^{k}|a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{k}|b_n|\right).$$

$\forall k = 1,2,3,\ldots \qquad \exists\, m_1, m_2$

$$\sum_{n=0}^{k}|a_n| \le m_1 \;,\; \sum_{n=0}^{k}|b_n| \le m_2 \;,$$

$$\forall k \in N \quad , \quad \sum_{n=0}^{k}|c_n| \le m_1, m_2 \;,$$

پس نشان دادیم دنبالهٔ جمعهای جزیی $\sum_{n=0}^{k}|c_n|$ کراندار است پس همگرا می‌باشد.

۲۵– چنانچه $\{s_n\}$ دنبالهٔ مختلطی باشد؛ میانگینهای حسابی آن σ_nها را با

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

تعریف می‌کنیم.

(آ) هرگاه $Lim\, s_n = s$ ، ثابت کنید $Lim\sigma_n = s$.

(ب) دنبالهٔ $\{s_n\}$ را قسمی بسازید که در عین اینکه $Lim\sigma_n = 0$ همگرا نباشد.

(پ) آیا می‌شود به ازای هر n، $s_n > 0$ و با اینکه $Lim\sigma_n = 0$، داشته باشیم $Lim\sup s_n = \infty$؟

(ت) به ازای هر $n \ge 1$ قرار دهید $a_n = s_n - s_{n-1}$. نشان دهید که $s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k a_k$ فرض کنید $Lim(na_n) = 0$, $\{\sigma_n\}$ همگرا باشد. ثابت کنید $\{s_n\}$ همگرا است. (این عکس قسمت (آ) را به دست می‌دهد منتها با فرض اضافی $na_n \to 0$.)

(ث) آخرین نتیجه را از این فرض ضعیفتر به دست آورید: فرض کنید $M < \infty$، به ازای هر n، $|na_n| \le M$, $Lim\sigma_n \doteq \sigma$. با تکمیل شرح مختصر زیر، ثابت کنید $Lims_n = \sigma$، آنگاه

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+۱}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{۱}{n-m}\sum_{i=m+۱}^{n}(s_n - s_i)$$

برای این i ها

$$|s_n - s_i| \le \frac{(n-i)M}{i+۱} \le \frac{(n-m-۱)M}{m+۲}.$$

$\varepsilon > ۰$ ثابتی اختیار کرده، به هر عدد صحیح m را طوری مربوط نمایید که در $m \le \frac{n-\varepsilon}{۱+\varepsilon} < m+۱$ صدق کند. در این صورت $(m+۱)/(n-m) \le ۱/\varepsilon$, $|s_n - s_i| < M\varepsilon$. از اینرو، $\underset{n\to\infty}{Lim}\sup|s_n - \sigma| \le M\varepsilon$.

آ-

$$\forall n > ۰ \quad \exists m_۱ > n \quad |s_n| \le m_۱$$

پس اگر $m = m_1 + |s|$ آنگاه

$$\forall n > ۰ \quad |s_n - s| \le m$$

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists N_۱ \in N \quad \ni \forall n > N_۱ \quad |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

از طرفی

$$|\sigma_n - s| = \left|\frac{s_۰ + s_۱ + \cdots + s_n}{n+۱} - s\right| = \left|\frac{(s_۰ - s) + (s_۱ - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+۱}\right|$$

$$\forall n \ge N_۱ |\sigma_n - s| < \frac{N_۱ m}{m+۱} + \frac{(n+۱) - N_۱}{n+۱} \times \frac{\varepsilon}{۲} < \frac{N_۱ m}{n+۱} + \frac{\varepsilon}{۲}$$

N_2 را چنان انتخاب می‌کنیم که $N_۲ = \left[\frac{۲N_۱ m}{\varepsilon}\right] + ۱$

$$\frac{N_۱ m}{n} < \frac{\varepsilon}{۲}, \ n \ge N_۲$$

پس

$$N=\max\{N_۱,N_۲\}$$

بنابراین
$$\forall n\ge N\quad |\sigma_n - s|<\varepsilon$$

و از طرفی چون $\varepsilon>\circ$ دلخواه است پس $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s$

ب-

$$s_n=\begin{cases} k & n=10^k\left(k=\circ,1,2,\ldots\right)\\ \dfrac{1}{n^2} & n\neq 10^k\left(k=\circ,1,2,\ldots\right)\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup s_n=+\infty\quad,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\circ$$

چون $\forall n\in N$ وقتی $10^k \langle n \langle 10^{k+1}$

$$\sigma_n \langle \left[\frac{k(k+1)}{10^k}+\frac{\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}}{n}\right]$$

وقتی $k,n\to\infty$ و چون $\sum\frac{1}{m^2}$ همگراست برای $n\to\infty$ داریم،

$$\left(\frac{k(k+۱)}{۱۰^k}+\frac{\sum_{m=۱}^{n}\frac{۱}{m^۲}}{n}\right)\to\circ$$

$$\Rightarrow \lim\sigma_n=\circ$$

ت-

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}ka_n=\frac{1}{n+1}\left(a_1+2a_2+\cdots+na_n\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\left(s_1-s_\circ\right)+2\left(s_2-s_1\right)+\cdots+n\left(s_n-s_{n-1}\right)\right)$$

$$=s_n-\frac{s_\circ+s_1+\cdots s_n}{n+1}=s_n-\sigma_n$$

با توجه به قسمت آ

$$\forall n=۱,۲,۳,\ldots\qquad b_n=na_n$$

همگراست $\dfrac{\sum_{k=۱}^{\infty} b_k}{n+۱}$ آنگاه

$$s_n - \sigma_n = t_n \Rightarrow s_n = t_n + \sigma_n$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n + \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \circ + \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

ث- اگر $m<n$ آنگاه

$$s_n - \sigma_n = s_n - \frac{s_\circ + s_1 + \cdots + s_m + s_{m+1} + \cdots + s_n}{n+1}$$

$$= s_n - \frac{s_\circ + s_1 + \cdots + s_m}{n+1} + \left(\frac{m+1}{n+1} - 1\right)\left(\frac{s_{m+1} + \cdots + s_n}{n-m}\right)$$

$$= \frac{-(s_\circ + s_1 + \cdots + s_m)}{n+1} + \left(\frac{m+1}{n+1}\right)\left(\frac{s_{m+1} + \cdots + s_n}{n-m}\right)$$

$$+ s_n - \frac{s_{m+1} + \cdots + s_n}{n-m} =$$

$$\frac{m+۱}{n-m}\left[\frac{(m-n)(s_\circ + \cdots + s_m)}{(n+۱)(n+۱)} + \frac{s_{m+۱} + \cdots + s_n}{n+۱}\right]$$

$$\frac{۱}{n-m}\left[(n-m)s_n - (s_{m+۱} + \cdots + s_n)\right]$$

$$= \frac{m+۱}{n-m}\left[\frac{s_\circ + \cdots + s_n}{n+۱} - \frac{s_\circ + \cdots + s_m}{m+}\right] +$$

$$\frac{۱}{n-m}\left[(s_n - s_{m+۱}) + (s_n - s_{m+۲}) + \cdots + (s_n - s_n)\right]$$

$$\frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n}(s_n - s_i)$$

$\varepsilon > \circ$ را فرض می‌کنیم وجود دارد m را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\forall n \in N \quad m \le \frac{n-\varepsilon}{۱+\varepsilon} < m+۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{m+۱}{n-m} \le \frac{۱}{\varepsilon}$$

و همچنین برای $i \geq m+1$ داریم

$$\left| s_n - s_i \right| = \left| \sum_{k=i+1}^{n} \left(s_k - s_{k-1} \right) \right| \leq \sum_{k=i+1}^{n} \left| s_k - s_{k-1} \right| \leq \sum_{k=i+1}^{n} \frac{m}{k} \leq (n-i)\frac{m}{i+1} \leq \frac{(n-(m+1)m)}{m+2} < \varepsilon m$$

بنابراین

$$\left| s_n - \sigma_n \right| < \frac{\left| \sigma_n - \sigma_m \right|}{\varepsilon} + m\varepsilon$$

و چون $\{\sigma_n\}$ همگرا است کشی می‌باشد.

پس

$$\lim_{n\to\sigma} \sup \left| s_n - \sigma_n \right| \leq m\varepsilon$$

و چون $\varepsilon > 0$ و دلخواه است داریم

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| s_n - \sigma_n \right| = 0$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| s_n - \sigma \right| \leq \lim_{n\to\infty} \sup \left| s_n - \sigma_n \right| +$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \sigma_n - \sigma \right| = 0$$

یعنی

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sigma$$

۲۶- عدد مثبت α را ثابت نگهدارید. x_1 را بزرگتر از $\sqrt{\alpha}$ گرفتـه، x_2 , x_3 , x_4 , ...

را با فرمول بازگشتی $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right)$ تعریف کنید.

(آ) ثابت کنید $\{x_n\}$ نزول می‌کند و $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(ب) قرار دهید $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$ پس با فرض $\beta = 2\sqrt{\alpha}$ خواهید داشت.

$$\varepsilon_{n+1} < \beta \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta} \right)^{2n} \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

(پ) این دستورالعمل خوبی است برای محاسبهٔ ریشه‌های دوم، زیرا فرمول بازگشتی ساده و همگرایی بی‌نهایت سریع صورت می‌گیرد. به عنوان مثال، اگر $\alpha = ۳$ و $x_۱ = ۲$، نشان دهید که $\varepsilon_۱ / \beta < \frac{۱}{۱۰}$ و بنابراین $\varepsilon_۵ < ۴\times ۱۰^{-۱۶}$, $\varepsilon_۶ < ۴ \times ۱۰^{-۳۲}$

آ - استقرا $n=1,2,3,\ldots$ $\quad x_n > \sqrt{\alpha}$

$x_۱ > \sqrt{\alpha}$ فرض می‌کنیم $x_n > \sqrt{\alpha}$ ثابت می‌کنیم $x_{n+۱} > \sqrt{\alpha}$

$$x_{n+۱} > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{x_n^۲ + \alpha}{۲x_n} > \sqrt{\alpha}$$

چون $x_n > ۰$ نامساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$x_n^۲ + \alpha > ۲x_n\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \left(x_n - \sqrt{\alpha}\right)^۲ > ۰$$

چون نامساوی برقرار است

$$x_{n+1} > \sqrt{\alpha}$$

ثابت می کنیم $\{x_n\}$ نزولی است

به ازای $n = ۱,۲,\ldots$

$$x_{n+۱} < x_n \Leftrightarrow \frac{x_n^۲ + \alpha}{۲x_n} < x_n \Leftrightarrow x_n^۲ + \alpha < ۲x_n^۲ \Leftrightarrow x_n^۲ - \alpha > ۰$$

چون $\forall n = ۱,۲,\ldots$, $x_n > \sqrt{\alpha}$ پس $x_n^۲ - \alpha > ۰$ پس $x_{n+۱} < x_n$ بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و از پایین کراندار است پس همگراست. فرض می‌کنیم

$$Lim x_n = L$$

$$L = \frac{۱}{۲}\left(L + \frac{\alpha}{L}\right)$$

پس $۲L^۲ = L^۲ + \alpha$ درنتیجه $L = \sqrt{\alpha}$

ب-

$$\varepsilon_{n+۱} = x_{n+۱} - \sqrt{\alpha} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) - \sqrt{\alpha} = \frac{x_n^۲ + \alpha - ۲x_n\sqrt{\alpha}}{۲x_n} = \frac{\left(x_n - \sqrt{\alpha}\right)^۲}{۲x_n} < \frac{\varepsilon^۲ n}{۲\sqrt{\alpha}}$$

$\beta = 2\sqrt{\alpha}$ داریم

$$\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\varepsilon_n^2}{\beta} = \beta\left(\frac{\varepsilon_n}{\beta}\right)^2 < \beta\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{\beta}\right)^2 < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n}$$

پ- هرگاه $\alpha = 3$, $x_1 = 2$ آنگاه

$$\varepsilon_1 = x_1 - \sqrt{\alpha} = 2 - \sqrt{3} < 0/3 \ , \ \beta = 2\sqrt{3} > 3$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\beta} < \frac{0/3}{\beta} < \frac{0/3}{3} = \frac{1}{10}$$

$$\varepsilon_5 < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^4} < 4\times\left(\frac{1}{10}\right)^{16} = 4\times 10^{-16}$$

$$\varepsilon_6 < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^5} < 4\times\left(\frac{1}{10}\right)^{32} = 4\times 10^{-32}$$

۲۷- $\alpha > 1$ را ثابت نگهدارید. x_1 را بزرگتر از $\sqrt{\alpha}$ گرفته، تعریف کنید

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}$$

(آ) ثابت کنید $x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$

(ب) ثابت کنید $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$

(پ) ثابت کنید $Lim x_n = \sqrt{\alpha}$

(ت) سرعت همگرایی این فرایند را با فرایند وصف شده در تمرین ۱۶ مقایسه نمایید.

از روش استقرا داریم $k = 1,2,3,\ldots$ ثابت می‌کنیم $x_{2k-1} > \sqrt{\alpha}$, $x_{2k} < \sqrt{\alpha}$ از طرفی و $x_1 > \sqrt{\alpha}$

$$x_2 < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 + x_1}{1 + x_1} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha - \sqrt{\alpha} < x_1\left(\sqrt{\alpha} - 1\right) \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha} - 1\right) < x_1\left(\sqrt{\alpha} - 1\right)$$

و چون $\sqrt{\alpha} - 1 > 0$ نامساوی برقرار است.

اگر و تنها اگر $\sqrt{\alpha} < x_1$ پس $x_2 < \sqrt{\alpha}$

$x_{2k-1} > \sqrt{\alpha}$, $x_{2k} < \sqrt{\alpha}$ فرض می‌کنیم

$x_{2k+2} < \sqrt{\alpha}$, $x_{2k+1} > \sqrt{\alpha}$ ثابت می‌کنیم

$$x_{2k+2} > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha + x_{2k}}{1 + x_{2k}} > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha} - 1\right) > x_{2k}\left(\sqrt{\alpha} - 1\right) \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} > x_{2k}$$

در نتیجه $x_{2k+1} > \sqrt{\alpha}$ و همچنین $\sqrt{\alpha} > x_{2k+2}$ اگر و تنها اگر

$$\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha} - 1\right) \langle x_{2k+1}\left(\sqrt{\alpha} - 1\right) \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} \langle x_{2k+1} \Rightarrow x_{2k+2} \langle \sqrt{\alpha}$$

آ-

$$\forall\ k = 1,2,3,\ldots x_{2k-1} > x_{2k+1} \Leftrightarrow x_{2k-1} > \frac{\dfrac{x_{2k-1} + \alpha}{x_{2k-1} + 1} + \alpha}{\dfrac{x_{2k-1} + \alpha}{x_{2k-1} + 1} + 1} \Leftrightarrow x_{2k+1} > \frac{(\alpha + 1)x_{2k-1} + 2\alpha}{2x_{2k-1} + \alpha + 1} \Leftrightarrow$$

$$2x_{2k-1}^2 + (\alpha + 1)x_{2k-1} > (\alpha + 1)x_{2k-1} + 2\alpha \Leftrightarrow$$

برقرار می‌باشد

$$x_{2k-1}^2 > \alpha$$

زیرا $x_{2k-1} > \sqrt{\alpha}$ پس

$$x_{2k-1} > x_{2k+1}$$

ب-

$$\forall\ k = 1,2,3,\ldots \qquad x_{2k} \rangle x_{2k+2} \Leftrightarrow x_{2k-1} \frac{(\alpha + 1)x_{2k} + 2\alpha}{2x_{2k} + \alpha + 1}$$

برقرار می باشد

$$x_{2k}^2 < \alpha$$

$$x_{2k} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow x_{2k} < x_{2k+2}$$

پ- $\{x_{2k-1}\}$ دنباله‌ای نزولی و از پایین به $\sqrt{\alpha}$ کراندار است و $\{x_{2k}\}$ صعودی و از بالا به $\sqrt{\alpha}$کراندار است فرض می‌کنیم هر دو دنباله همگرا باشند و

$$\lim_{x \leftarrow \infty} x_{2k-1} = m_1, \ \lim x_{2k} = m_2$$

از طرفی داریم

$$x_{۲k+۱}=\frac{(\alpha+۱)x_{۲k-۱}+۲\alpha}{۲x_{۲k-۱}+\alpha+۱}$$

پس

$$m_1=\frac{(\alpha+1)m_1+2\alpha}{2m_1+\alpha+1}\Rightarrow\alpha=m_1^2\Rightarrow m_1=\sqrt{\alpha}$$

و می‌دانیم

$$x_{2k+2}=\frac{(\alpha+1)x_{2k}+2\alpha}{2x_{2k-1}+\alpha+1}\Rightarrow m_2\sqrt{\alpha}$$

$$\forall\varepsilon\rangle ۰ \quad \exists \quad N_1,N_2 \ni \forall n\geq N_1 \qquad \left|x_{2n-1}-\sqrt{\alpha}\right|<\varepsilon$$

$$\forall n\geq N_2 \quad \left|x_{2n}-\sqrt{\alpha}\right|<\varepsilon$$

$$N=2\max\{N_1,N_2\} \quad \forall n\geq m \quad \left|x_n-\sqrt{\alpha}\right|<\varepsilon$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$$

ت- همگرایی $\{x_n\}$ در تمرین ٢٦ سریعتر از تمرین ٢٧ می‌باشد.

٢٨- فرمول بازگشتی تمرین ٢٦ را با $x_{n+۱}=\frac{p-۱}{p}x_n+\frac{\alpha}{p}x_n-p+۱$ که در آن p عدد صحیح مثبت ثابتی است، عوض کرده رفتار دنبالهٔ $\{x_n\}$ حاصل را توصیف نمایید.

اگر $p=1 \Leftarrow x_n=a$ و هرگاه $p\neq 1$ باشد $x_n>\sqrt[p]{a}$ همچنین دنباله‌ای که حاصل می‌شود نزولی است و

$$Lim x_n=\sqrt[p]{a}$$

با استقرا ثابت می‌کنیم

$$\forall n=۱,۲,۳,\dots \qquad x_n>\sqrt[p]{a}$$

$$n=۱ \qquad x_۱>\sqrt[p]{a}$$

$x_n>\sqrt[p]{a}$ فرض می‌کنیم

$x_{n+1} > \sqrt[p]{a}$ ثابت می‌کنیم

$$x_{n+1} > \sqrt[p]{a} \Leftrightarrow \frac{p-1}{p}x_n + \frac{a}{px_n^{p-1}} > \sqrt[p]{\alpha} \Leftrightarrow \frac{(p-1)x_n^p + a}{px_n^{p-1}} > \sqrt[p]{a}$$
$$\Leftrightarrow (p-1)x_n^p + a > p\, x_n^{p-1}\sqrt[p]{a}$$

چون $p \geq ۲$, $\sqrt[p]{a} < x$ آخرین نامساوی برقرار است

پس $x_{n+1} > \sqrt[p]{a}$

پس $\forall n = 1,2,3$

$$x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow \frac{p-۱}{p}x_n + \frac{a}{px_n^{p-۱}} \leq x_n \Leftrightarrow \frac{(p-۱)x_n^p + a}{px_n^{p-۱}} \leq x_n \Leftrightarrow$$
$$(p-۱)x_n^p + a \leq px_n^p \Leftrightarrow a \leq x_n^p \Leftrightarrow \sqrt[p]{a} \leq x_n$$

بنابراین

$$x_{n+1} \leq x_n$$

و چون $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی است که از پایین به $\sqrt[p]{a}$ کراندار است همگرا می‌باشد پس

$Lim x_n = A$

$$x_{n+1} = \frac{(p-1)x_n^p + a}{px_n^{p-1}} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

بنابراین

$$A = \frac{(p-۱)A^p + a}{pA^{p-۱}} \Rightarrow pA^p = (p-۱)A^p = (p-۱)A^p + \alpha$$

پس $A^p = a$ یعنی $A = \sqrt[p]{a}$

۲۹– به هر دنبالهٔ $a = \{\alpha_n\}$، که در آن α_n مساوی ۰ یا ۲ است، عدد حقیقی

$x(a) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\alpha_n}{۳^n}$ را کنید مجموعهٔ تمام $x(a)$ ها دقیقاً همان مجموعهٔ کانتور است.

مربوط نمایید. ثابت

$$E_۱ = \left[۰,\frac{۱}{۳}\right] \cup \left[\frac{۲}{۳},۱\right]$$

$$E_۲ = \left[۰,\frac{۱}{۹}\right] \cup \left[\frac{۲}{۹},\frac{۳}{۹}\right] \cup \left[\frac{۶}{۹},\frac{۷}{۹}\right] \cup \left[\frac{۸}{۹},۱\right]$$

E_n ها همان E_nهای تعریف‌شده در مجموعهٔ کانتور هستند E_n اجتماع ۲^nبازه است که طول هر کدام $\frac{۱}{۳^n}$ می‌باشد فرض می‌کنیم $x(a)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n}{۳^n}$ که۲ یا ∘ $a(n)=$

$$x_k(a)=\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n}{3^n} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

$x_k(a)$ عضو ابتدای یکی از بازه‌ها در E_k است و

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{2}{3^{k+1}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\frac{2}{3^{k+1}}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3^k}$$

پس $x(a)\in E_k$ و چون $k\in N$ دلخواه است

پس $x\in E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$

برعکس فرض می‌کنیم

$$\frac{1}{3^k}=\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$$

پس هر عضو به شکل $\frac{1}{3^k}$ نمایشی به صورت $\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ دارد که در آن $a_n=2$می‌باشد،

فرض می‌کنیم x عضوی از مجموعهٔ کانتور باشد و $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$ در مبنای ۳ باشد که در آن x_n مساوی ۰ یا ۱ یا ۲ می‌باشد.

اگر تمام x_n ها مساوی ۰ یا ۲ باشد آنگاه x به صورت $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$ دارد. فرض می‌کنیم k کوچکترین اندیسی باشد که $x_k=1$ پس در اینصورت $\sum_{n=1}^{k}\frac{x_n}{3^n}$ نقطهٔ انتهایی مربوط به بازه‌ای در E_k است که فاصلهٔ این نقطه تا نقطهٔ ابتدای بازهٔ بعد در E_kحداقل $\frac{1}{3^k}$ است و از طرفی $\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\le\frac{1}{3^k}$ پس $\forall n\ge k$ تمام x_nها یا صفر هستند یا دو، اگر تمام x_nها صفر باشد $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ که

$\forall n\langle k \quad a_n = x_n \ \forall n\langle k \quad a_n = 2, \forall n = k \quad a_n = ۰$ و

یعنی x به صورت مسأله است و اگر تمام x_n ها دو باشند

$$x = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{۳^n} \qquad \forall n\langle k \quad a_n = x_n$$

$\forall n\langle k \quad a_n = ۰, \qquad \forall n = k \quad a_n = ۲$ و

پس مجموعهٔ تمام $x(a)$ ها دقیقاً همان مجموعهٔ کانتور است.

۳۰– فرض کنید $\{p_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در فضای متری X، و زیردنباله‌ای از آن مانند $\{p_{nt}\}$ به نقطهٔ $p \in X$ همگرا باشد. ثابت کنید تمام دنبالهٔ $\{p_n\}$ همگرا به P خواهد بود.

$\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n$ حداکثر یک عضو دارد. چون در غیر اینصورت:

$diam\left(\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n\right) > ۰$ ، $E_{n+۱} \subset E_n$ در نتیجه خواهیم داشت: $\lim_{n\to\infty} diam\left(\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n\right) > ۰$ که با فرض مسئله در تناقض است.

۳۱– قضیهٔ زیر را ثابت کنید: هرگاه $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته و کراندار در فضای متری تام X باشد، $E_n = E_{n+۱}$، و $\lim_{n\to\infty} diam E_n = 0$ آنگاه $\bigcap_{i}^{\infty} E_n$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است.

تعریف ۱: مجموعه هیچ‌جا چگال زیرمجموعه از فضای متری (X,d) هیچ‌جا چگال نامیده می‌شود اگر نقاط درونی بست آن تهی باشد یعنی $\left(\overline{A}\right)^{\circ} = \phi$.

(چون $B^{\circ} = \left(B^c\right)^c$ برای زیرمجموعه B برقرار است پس زیرمجموعه A هیچ جا چگال است اگر و تنها اگر $\left(\overline{A}\right)^{\circ}$ در X چگال باشد.) مانند مجموعه کانتور که هیچ‌جا چگال است.

تعریف ۲: دسته اول یا ناکافی زیرمجموعه Y از فضای متری را دسته اول گویند هرگاه دنباله $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های هیچ‌جا چگال وجود داشته باشد بطوریکه $Y = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$

تعریف ۳: فضای بئر یک فضای متری فضای بئر نامیده می‌شود اگر هر مجموعه ناتهی باز آن مجموعه دسته اول نباشد.

لم : یک فضای متریک فضای بئر ' ست اگر و تنها اگر هر اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز چگال آن باز هم چگال باشد.

برهان- فرض می‌کنیم (X,d) یک فضای بئر باشد و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز چگال در X باشد نشان می‌دهیم $A=\bigcap_{1}^{\infty} A_n$ در X چگال است. لازم است نشان دهیم برای هر زیرمجموعه باز ناتهی o از x : $A\bigcap o\neq\phi$.

برهان خلف-

فرض می‌کنیم که $A\bigcap o=\varphi$ برای مجموعه بازی مانند o درست باشد. بنابراین:

$$X=\varphi^c=\left(A\bigcap o\right)^c=A^c\bigcup o^c$$

در نتیجه

$$o=X\bigcap o=\left(A^c\bigcup o^c\right)\bigcap o=A^c\bigcap o=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\bigcap o=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n^c\bigcap o\right)$$

۳۲- فرض کنید X یک فضای متری تام و $\{G_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز و چگال X باشد. قضیهٔ بئر را ثابت کنید. یعنی، ثابت کنید $\bigcap_{i}^{\infty} G_n$ تهی نیست. (در واقع، این مجموعه در X چگال است). راهنمایی: دنباله‌ای از همسایگیهای منقبض مانند E_n را بیابید بطوری که $E_n\subset G_n$، و تمرین ۲۱ را به کار برید.

ε را مثبت و دلخواه انتخاب می‌کنیم و چون $\{p_n\}$ دنباله‌ای کشی است پس

$$\exists N_1\in N \qquad \forall m\geq w_1,\, n\geq N_1 \quad d\left(p_n,p_m\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} p_{x_k}=p$$

بنابراین

$\exists k_1 \in N \ni \forall \ k \geq k_1 \quad d\left(p_{n_k}, p\right) < \frac{\varepsilon}{2}$
$N = \max\left\{N_1, n_{k_1}\right\} \forall n \geq N \ \ n_N \geq N$

$$\Rightarrow d(p_n, p) \leq d\left(p_n, p_{n_N}\right) + d\left(p_{n_N}, p\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to\infty} p_n = p$$

۳۳- فرض کنید $\{p_n\},\{q_n\}$ دنباله‌هایی کشی در فضای متری X باشند. نشان دهید که دنبالهٔ $\{d(p_n,q_n)\}$ همگراست. راهنمایی: به ازای هر m و n.

$$d(p_n,q_n) \leq d(p_n,q_m) + d(p_m,q_m) + d(q_m,p_n)$$

از این نتیجه می‌شود که اگر m و n بزرگ باشند، $|d(p_n,q_n) - d(p_m,q_m)|$ کوچک خواهد بود.

به ازای $E_n, n = 1,2,3,\ldots$ زیرفضایی تام از x می‌باشد چون هر دنبالهٔ کشی مثل $\{x_k\}$ از E_n در x کشی در نتیجه در x همگرا است. مثلاً $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ پس $x \in \overline{E_n}$ از طرفی چون E_n بسته می‌باشد $x \in E_n$. در نتیجه $\{x_n\}$ در E_n به x همگرا می‌باشد.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ حداکثر یک عضو دارد چون در غیر اینصورت

$$diam\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) > 0$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} diam E_n \geq diam\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) > 0$$

و چون $x \in E_n$ ناتهی است E_n

$\forall \ n = 1,2,\ldots$

انتخاب می‌کنیم و

$$\forall \ m \geq n \quad x_m \in E_n$$

و

$$\lim_{k\to\infty} diam E_k = 0$$

پس $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کشی در E_n می‌باشد. اکنون $n_\circ \in N$ را یک ثابت درنظر می‌گیریم چون $E_{n_\circ}$ یک فضای تام است پس $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ در $E_{n_\circ}$ همگراست. فرض می‌کنیم $\lim\limits_{m\to\infty} xm = x$ و چون $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ زیردنبالهٔ همگرایی از $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ است

پس

$$\lim_{m\to\infty} xm = x$$

بنابراین

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \qquad \Leftarrow x \in E_n \qquad \forall n = 1,2,\dots$$

۳۴– فرض کنید X یک فضای متری باشد.

(آ) دو دنبالهٔ کشی $\{p_n\},\{q_n\}$ در X را هم‌ارز نامند هرگاه

$$\lim_{n\to+\infty} d(p_n, q_n) = 0$$

ثابت کنید این یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

(ب) فرض کنید X^* مجموعهٔ تمام رده‌های هم‌ارزیی باشد که این طور به دست می‌آیند. چنانچه $p \in X^*$, $Q \in X^*$, $\{p_n\} \in P$, $\{q_n\} \in Q$، تعریف کنید

$$\Delta(p,Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$$

این حد، بنابر تمرین ۲۳، وجود دارد. نشان دهید که اگر $\{p_n\},\{q_n\}$ با دنباله‌هایی هم‌ارز خود عوض شوند، عدد $\Delta(p,Q)$ تغییری نمی‌کند، و لذا Δ یک تابع فاصله در X^* می‌باشد.

(پ) ثابت کنید فضای متری X^* حاصل تام است.

(ت) به ازای هر $p \in X$، دنباله‌ای کشی هست که تمام جملات آن p اند. فرض کنید p_p آن عنصر از X^* باشد که حاوی این دنباله است. ثابت کنید به ازای هر $p,q \in X$

$$\Delta(p_p, p_q) = d(p,q)$$

به عبارت دیگر نگاشت φ که با $\varphi(p) = p_p$ تعریف می‌شود یک یکمتری (یعنی نگاشتی حافظ فاصله) از X بتوی X^* می‌باشد.

(ث) ثابت کنید $\varphi(x)$ در X^* چگال است و در صورت تام بودن X ، $\varphi(X) = X^*$ بنابر (ت) ، می‌توان X و $\varphi(x)$ را یکی کرد؛ و در نتیجه، X را به این صورت که در فضای متری تام X^* نشانیده شده در نظر گرفت. فضای X^* را تتمیم X می‌نامیم.

برای هر $G_n, n = ۱,۲,۳,\ldots$ در x چگال می‌باشد پس G_n تهی نمی‌باشد

$x_1 \in G_1$ فرض می‌کنیم

$$\exists r > ۰ \quad \ni: N_r(x_1) \subseteq G_1$$

اگر $۰ < r_۱ < \frac{r}{۲} \Rightarrow \overline{N}_{r۱}(x_۱) \subseteq G_۱$

از طرفی چون $G_۲$ در X چگال است

$$N_{r_1}(x_1) \cap G_2 \neq \phi \Rightarrow x_2 \in N_{r_1}(x_1) \cap G_2$$

را در نظر می‌گیریم و چون اشتراک دو مجموعهٔ باز مجموعه‌ای باز می‌باشد.

$$E_{r۲} > ۰ \ni \quad ۰ < r_۲ < \frac{r_۱}{۲},$$

$$\overline{N}_{r_2}(x_2) \subseteq G_2 \cap N_{r_1}(x)$$

همین روند را ادامه می‌دهیم و اگر قرار دهیم

$$E_n = \overline{N}_{r_n}(x_n) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

در اینصورت E_n ها زیرمجموعه‌هایی غیرتهی ، بسته و کراندار می‌باشند که

$$E_{n+1} \subseteq E_n, \qquad \lim_{n\to\infty} E_n = ۰$$

پس در شرایط تمرین قبل صدق می‌کند در نتیجه $\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n \neq \phi$ و چون

$$E_n \subseteq G_n \quad \forall n = 1,2,\ldots$$

در نتیجه

$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} G_n \neq \phi$$

یعنی $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G$ در X چگال است زیرا

$$\forall x\in X\,,\forall\, r>\circ \quad N_r(x)\bigcap G_1\neq\phi$$

قـرار مـی‌دهـیم

$$A_1 = N_r(x)\bigcap G_1$$

$$\forall\ n=1,2,3,\ldots \qquad A_n = G_n\,,$$

و این بدان معناست که o یک مجموعه دسته اول است و لذا طبق فرض باید تهی باشد که با انتخاب o در تناقض است و لذا A در X چگال است.

فرض می‌کنیم هر اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بـاز چگـال در X چگـال باشـد. O یک مجموعه باز دسته اول از X باشد نشان می‌دهیم $o=\phi$. دنبالهٔ $\{A_n\}$ از مجموعـه‌هـای هیچ‌جا چگال را طوری انتخاب می‌کـنیم کـه $o=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. بنـابراین $\left\{\left(\overline{A}_n\right)^c\right\}$ یـک دنبالـه از زیرمجموعه‌های باز چگال در X را تشکل می‌دهـد. پـس طبـق فـرض $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\overline{A}_n\right)$ در X چگال است ولی:

$$o\subset\bigcup_{n=1}^{N}\overline{A}_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\overline{A}_n\right)^c = A\subset o^c \Rightarrow X=\overline{A}\subset\left(o^c\right)=o^c$$

یعنی $o=\phi$ و اثبات کامل می‌شود.

قضیه بئر:

هر فضای متری تام یک فضای بئر است.

برهان-

فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز در X باشـد. طبـق لـم بایـد نـشان دهـیم $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ در X چگال است. بنابراین اگر $x\in X$, $r>\circ$ ، ثابت می‌کنیم:

$$\check{N}_r(x)\bigcap A\neq\phi$$

فرض کنید $B_r(a)=\{x\in X: d(x,a)\leq r\}$. چون A_1 در X باز و چگال است پـس $x\in X$ و $\circ < r_1 \leq 1$ وجـود دارد بطوریکـه $B_{r_1}(x_1)\subset N_r(x)\bigcap A_1$ اکنـون بـه اسـتقرا اگـر

$x_1,\ldots,x_n$ و $r_1,\ldots,r_n$ انتخـــاب شـــده باشـــند $x_{n+۱}\in X$ ، $۰<r_{n+۱}\le\frac{۱}{n+۱}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $B_{r+1}(x_{n+1})\subset N_{r_n}(x_n)\bigcap A_{n+1}$.پس به ازای هر n دنباله $\{x_n\}$ از X ودنبالـــــه $\{r_n\}$ از اعــــداد حقیقـــــی وجـــود دارنـــد بطوریکـــــه :

$۰\langle r_n\le\frac{1}{n}$, $B_{r+1}(x_{n+1})\subset B_{r_n}(x_n)\bigcap A_{n+1}$. اکنون قرار می‌دهیم $B_n=B_{r_n}(x_n)$ ، برای هـر n.

پس هر B_n ناتهی و بسته است و برای هر n $B_{n+1}\subset B_n$.

بعلاوه $d(B_n)\le 2r_n\le\frac{2}{n}$. در نتیجه $Lim d(B_n)۰$. پس با توجه به تمرین قبل yای وجـود دارد که $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ و در نتیجه $y\in N_r(x)\bigcap A$ یعنی $N_r(x)\bigcap A\ne\phi$.

و مانند ساختن E_nها در بالا این روند را ادامه می‌دهیم

$$\phi\ne\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Rightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\ne\phi$$

پس

$$N_r(x)\bigcap\left(\bigcap_{n=۱}^{\infty}G_n\right)\ne\phi$$

یعنی

$$x\in\left(\bigcap_{n=۱}^{\infty}G_n\right)\Rightarrow X=\left(\bigcap_{n=۱}^{\infty}G_n\right)$$

تمرینات فصل سوم

۱- اگر به ازای هر $n\ge ۱$، $a_{n+۲}=(a_{n+۱}+a_n)/۲$، نشان دهید که

$$\left|a_n - \frac{a_1 + 2a_2}{3}\right| \le \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} |a_l - a_1| \qquad a_n \to (a_1 + 2a_2)/30$$

راهنمایی. $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$

۲- نشان دهید که $\underline{\underline{\lim}}(1/n - 1/(n+1)) = 0$.

۳- اگر $1 > x_1 > 0$، و به ازای هر $n \ge 1$، $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$، ثابت کنید که $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی است و دارای حد صفر است.

٤- فرض کنید $X = (x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد و بطوری که $Lim(x_{n+1} \setminus x_n) > 1$. نشان دهید که X یک دنبالهٔ کراندار نیست و لذا همگرا نمی‌باشد.

۵- دو دنباله از عددهای صحیح مثبت مانند $\{a_n\}$, $\{b_n\}$را به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف کنید: قرار دهید $a_1 = b_1 = 1$ و به ازای $n \ge 2$, b_n, a_n را از متحد قرار دادن قسمتهای گویا و گنگ معادلهٔ زیرین بدست آورید:

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2$$

ثابت کنید که به ازای $a_n^2 - 2b_n^2 = 1, n \ge 2$. از این نتیجه بگیرید که با مقادیر بزرگتر از $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ $a_n / b_n \to$ و با مقادیر کوچکتر از $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ $2b_n / a_n \to$.

٦- فرض کنید $X = (x_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی اکیداً مثبت باشد به طوری که $Lim\left(x_n^{1/n}\right) > 1$. نشان دهید که X یک دنبالهٔ کراندار نیست و لذا همگرا نمی‌باشد.

۷- به ازای $n \ge 1$، دنبالهٔ حقیقی $\{x_n\}$ در معادلهٔ $7x_{n+1} = x_n^3 + 6$ صدق می‌کند. اگر $x_1 = 1/2$، ثابت کنید که این دنباله صعودی است و حد آن را بیابید. اگر $x_1 = 3/2$ یا $x_1 = 5/2$، چه خواهد شد؟

۸- دنباله‌ای همگرا از اعداد حقیقی اکیداً مثبت مانند x_n مثال بزنید که $Lim\left(x_n^{1/n}\right) = 1$. دنبالهٔ واگرایی مثال بیاورید که این خاصیت را داشته باشد.

۹- اگر به ازای هر $n \geq ۱$، $|a_n| < ۲$ و

$$|a_{n+۲} - a_{n+۱}| \leq \frac{۱}{۸}|a_{n+۱}^۲ - a_n^۲|$$

ثابت کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا است.

۱۰- فرض کنید $y_۱ = ۱$، و به ازای $n \in N$ ، $y_{n+۱} = (۲ + y_n)^{۱/۲}$ نشان دهید که (y_n) یکنوا و کراندار است. حد آن چیست؟

۱۱- در فضای متری (S,d)، فرض کنید که $x_n \to x$, $y_n \to y$، ثابت کنید که $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

۱۲- همگرایی یا واگرایی دنبالهٔ (x_n) را، که در آن

$$x_n = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n}, n \in N \quad \text{به ازای}$$

تعیین نمایید.

۱۳- مستقیماً نشان دهید که

(الف) $\left(\frac{۱}{n}\right)$ (ب) $\left(\frac{n+۱}{n}\right)$ (پ) $\left(۱ + \frac{۱}{۱!} + \cdots + \frac{۱}{n!}\right)$

دنباله‌ای کوشی هستند.

۱٤- مستقیماً نشان دهید که

(الف) $((-۱)^n)$، (ب) $(n + (-۱)^n / n)$ (پ) $(n^۲)$

دنباله‌های کوشی نیستند.

۱۵- فرض کنید X آن فضای متریی باشد که نقاطش اعداد گویا و متر آن $d(x,y) = |x - y|$ است، تتمیم این فضا چیست؟

فصل چهارم

حد و پیوستگی توابع

یکی از زیباترین توسیع ها در آنالیز توسیع تعریف پیوستگی از فضای اعداد حقیقی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال به فضای متریک است. در آنالیز ریاضی پیوسگی تعریفی ساده و در عیّن حال عمیق دارد و در ژرفای مفاهیم ریاضی یکی از زیباترین مفاهیم، تعریف پیوستگی با استفاده از مجموعه ها میباشد.

٤-١ حد توابع

اگر Y و X دو فضای متریک و $E \subset X$ و تابع $f : E \to Y$ تعریف شده باشد اگر نقطه $p \in X$ یک نقطه حدی E باشد آنگاه گوئیم $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$ اگر و تنها اگر :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \ni \forall x \in E \ \ , \ \ 0 < d_x(x,p) < \delta \Rightarrow d_y(f(x),q) < \varepsilon$$

توجه کنید که $p \in X$ و در حالت کلی لزومی ندارد که $p \in E$ باشد ولی از آنجا که p نقطه حدی E می باشد نتیجه می شود که تابع f در همسایگی محذوفی از p تعریف شده

است. اگر به جای فضاهای متریک X,Y فضای اعداد حقیقی با اعداد مختلط را داشته باشیم آنگاه تابع با مقادیر حقیقی یا مقادیر مختلط در نظر گرفته می شود و

$$\lim_{x\to p} f(x)=q \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta>0 \ \ \ni \forall x\in E \ , \ 0<|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-q|<\varepsilon$$

به عنوان نمونه نشان می دهیم $\lim_{x\to 1} 3x-2=1$.

$$|3x-2-1|=|3x-3|=3|x-1|<\varepsilon$$

کافی است فرض کنید $\delta\le\frac{\varepsilon}{3}$ آنگاه :

$$\forall x\in R \qquad 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |(3x-2)-1|<\varepsilon$$

قضیه بعد نشان می دهد که برای بررسی خواص حد توابع می توان از خواص مشابه دنباله ها استفاده کرد.

۱-۱-٤ قضیه : اگر X,Y فضای متریک و $E\subset X$, $p\in X$ نقطه حدی E و تابع $f:E\to Y$ تعریف شده است آنگاه $\lim_{x\to p} f(x)=q$ اگر و فقط اگر برای هر دنباله $\{p_n\}$ از نقاط E با خواص زیر :

۱) $\{p_n\}\subset E$

۲) $p_n\to p$

۳) $p_n\neq p$ برای بعضی n داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(p_n)=q$

اثبات : فرض کنید $\lim_{x\to p} f(x)=q$ و $\{p_n\}$ دنباله ای از نقاط E با شرایط ۱و۲و۳ باشد

باید نشان دهیم که $\lim_{n\to\infty} f(p_n)=q$ اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد آنگاه :

$$\because \lim_{x\to p}(f)=q \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta>0 \ni: \forall x\in E$$

$$0<d_x(x,p)<\delta \Rightarrow d_y(f(x),q)<\varepsilon$$

و از آنجا که $p_n \to p$ نتیجه می شود :

$$\exists N>0 \ni: \forall n>N \quad d_x(p_n,p)<\delta$$
$$\because p_n \neq p \Rightarrow 0<d_x(p_n,p)<\delta$$

در نتیجه :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N>0 \quad \ni \forall n \geq N \Rightarrow 0<d_x(p_n,p)<\delta \Rightarrow d_y(f(p_n),q)<\varepsilon$$
$$\therefore \forall \varepsilon>0 \quad \exists N>0 \quad \ni \forall n \geq N \Rightarrow d_y(f(p_n),q)<\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(p_n)=q$$

فرض کنید برای هر دنباله $\{p_n\}$ با شرایط ۱و۲و۳ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(p_n)=q$ باید ثابت کنیم $\lim_{x\to p} f(x)=q$ برای اثبات از برهان خلف استفاده می کنیم. اگر $\lim_{x\to p} f(x)\neq q$ آنگاه تعریف نقیض حد را می نویسیم :

$$\exists \varepsilon_0>0 \quad \ni \forall \delta>N \quad , \quad \exists x\in E \quad \ni: \quad 0<d(x,p)<\delta \Rightarrow d_y(f(x),q)\geq \varepsilon_0$$

بنابراین اگر

$$s=1 \quad \exists p_1\in E \quad \ni: d(p_1,p)<1 \qquad d_y(f(p_1),q)\geq \varepsilon_0$$
$$s=\frac{1}{2} \quad \exists p_2\in E \quad \ni: 0<d_x(p_2,p)<\frac{1}{2} \qquad d_y(f(p_2),q)\geq \varepsilon_0$$

$$s=\frac{1}{n} \quad \exists p_n\in E \quad \ni: 0<d_x(p_n,p)<\frac{1}{n} \qquad d_y(f(p_n),q)\geq \varepsilon_0$$

بدین ترتیب دنباله $\{p_n\}$ از نقاط E با شرایط ۱و۲و۳ تشکیل می شود که

$$d_x(f(p_n),q)\geq \varepsilon_0$$

و این با $\lim_{n\to\infty} f(p_n)=q$ در تناقض است بنابراین با استفاده از برهان خلف

$$\lim_{x\to p} f(x)=q$$

۴-۱-۲ نتیجه: حد توابع در صورت وجود یگانه است.

اثبات : اگر $\lim_{x\to p} f(x)=q_1$ و $\lim_{x\to p} f(x)=q_2$ و $q_1 \neq q_2$ بنا به قضیه قبل برای هر دنباله $\{p_n\}$ از نقاط E که $p_n \to p$ و $p_n \neq p$ باید $f(p_n)\to q_1$ و $f(p_n)\to q_2$ یعنی دنباله $\{f(p_n)\}$ دارای حدود q_1,q_2 باشد و این تناقض است چون حد دنباله یگانه اند پس $q_1=q_2$

٤-١-٣ نتیجه :اگر f و g توابعی با مقادیر حقیقی و مختلط باشند و $\lim_{x\to p} f(x)=q$, $\lim_{x\to p} g(x)=l$ آنگاه :

الف) $\lim_{x\to p}(f(x)\pm g(x))=q\pm l$

ب) $\lim_{x\to p} f(x)g(x)=ql$

پ) $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{q}{l}$

اثبات : با استفاده از قضیه قبل فرض کنید $\{p_n\}$ دنباله ای از اعداد باشد که $p_n\to p$ و $p_n\neq p$ آنگاه $f(p_n)\to q$ و $g(p_n)\to l$ با استفاده از خواص دنباله ها نتیجه می شود :

$$f(p_n)\pm g(p_n)\to q\pm l$$
$$f(p_n)g(p_n)\to ql$$
$$l\neq 0 \Rightarrow (\frac{f}{g})(p_n)\to \frac{q}{l}$$

و بنا به عکس قبل :

$$\lim_{x\to p} f(x)\pm g(x)=q\pm l$$
$$\lim_{x\to p} f(x)g(x)=ql$$
$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{q}{l}$$

مثال ۱ : نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ در صفر حدش موجود نیست.

$$p_n=\{\frac{1}{n}\}\ ,\ p_n\to 0\ ,\ p_n\neq 0\Rightarrow f(p_n)=f(\frac{1}{n})=1\ ,\ f(p_n)\to 1$$

$$p_n=\{-\frac{1}{n}\}\ ,\ p_n\to 0\ ,\ p_n\neq 0\Rightarrow f(p_n)=f(-\frac{1}{n})=-1\ ,\ f(p_n)\to -1$$

$1\neq -1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ موجود نیست.

مثال۲: اگر $f(x)=\begin{cases}x & x\in Q'\\ 1-x & x\in Q\end{cases}$ نشان دهید که $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ برای هر $a\in R$ موجود نیست.

اگر حد $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ موجود و مساوی L باشد برای هر عدد گویا مانند a دنباله ای از اعداد اصم مانند $\{a_n\}$ وجود دارد بطوریکه $a_n\to a$ آنگاه بنا به قضیه با توجه به تعریف تابع و اصم بودن جملات $\{a_n\}$ نتیجه می شود که $f(a_n)=0$

$$f(a_n)\to L\Rightarrow L=0$$

دنباله $\{b_n\}$ از جملات گویا را نیز می توان اختیار کرد بطوریکه $b_n\to a$ (برای مثال اگر a گویا باشد فرض کنید $\forall n\in N$ $b_n=a+1/n$)

$$\text{قضیه قبل}\ \Rightarrow f(b_n)\to L\overset{f(b)\to 1}{\Longrightarrow} L\to 1$$

پس $L=0$, $L=1$ بایکدیگر تناقض دارد پس حد $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ وقتی که a یک گویا باشد موجود نیست.

اگر a غیر گویا باشد و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=M$ آنگاه بنا به قضیه چگالی اعداد گویا دنباله ای مانند $\{a_n\}$ از اعداد گویا وجود دارد بطوریکه :

$$a_n\to a \qquad f(a_n)\to M \qquad \Rightarrow M=1$$

از طرف دیگر $b_n=a+1/n$ برای هر n از آنجا که $a\notin Q$ نتیجه می شود که $b_n\notin Q$ و

$b_n \to 0 \quad \Rightarrow f(b_n) \to M$

پس $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود نیست.

مسأله : فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q' \\ 1-x & x \in Q \end{cases}$ آنگاه فقط در $x_0 = \frac{1}{2}$ پیوسته است.

٤-٢ پیوستگی

تعریف پیوستگی در فضای متریک : فرض کنید X,Y فضا های متریک ، $E \subset X$ و نقطه $p \in E$ تابع $f : E \to Y$ تعریف شده باشد آنگاه تابع f در نقطه p پیوسته است اگر و فقط اگر:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \ni \forall x \in E \;\; , \;\; d_x(x,p) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon$

اگر X,Y فضای متریک اعداد حقیقی یا مختلط باشند آنگاه f در نقطه p پیوسته است اگر و فقط اگر:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \ni \forall x \in E \;\; , \;\; |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

در تعریف پیوستگی اگر p نقطه حدی E باشد و $p \in E$ آنگاه f در نقطه p پیوسته است اگر و فقط اگر:

$\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$

یادآوری : اگر $X \;,\; Y$ دو مجموعه غیر تهی باشند و تابع $f : X \to Y$ تعریف شده باشد اگر $E \subset X$ باشد آنگاه :

$f(E) = \{f(x) : \forall x \in E\}$

$f(E)$ را نقش مستقیم f بر روی E می نامند و $f(E) \subset Y$ اگر $F \subset Y$ آنگاه :

$f^{-1}(F) = \{x \in X \mid f(x) \in F\}$

که این نقش معکوس F تحت تابع f می نامند و $f^{-1}(F) \subset E$.

۱-۲-٤ قضیه : اگر X,Y فضای متریک و $f:X\to Y$ تعریف شده باشد آنگاه تابع f بر روی X پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر زیر مجموعه باز v از Y مجموعه $f^{-1}(v)$ در X باز باشد. (یعنی f بر روی X پیوسته است اگر و فقط اگر نقش معکوس هر زیر مجموعه باز X یک مجموعه باز در X باشد.)

فرض کنید f بر روی X پیوسته است یعنی در تمام نقاط X تابع f پیوسته می باشد و v یک زیر مجموعه باز Y باشد باید نشان دهید که $f^{-1}(v)$ یک زیر مجموعه باز X است. یعنی هر نقطه $p\in f^{-1}(v)$ یک نقطه درونی است.

$$\because\ p\in f^{-1}(v)\Rightarrow f(p)\in v \underset{f(p)}{\overset{v\ \text{باز}}{\Rightarrow}}\ \exists\varepsilon>0\ \ni N_\varepsilon(f(p))\subset v$$

از طرفی تابع f در نقطه p پیوسته است بنابراین :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\ :\ \ni\forall x\in X\ ,\ d_x(x,p)<\delta\Rightarrow d_y(f(x),f(p))<\varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x)\in N_\varepsilon(f(p))\ \overset{N_\varepsilon(f(p))\subset v}{\Longrightarrow}\ f(x)\in v\Rightarrow x\in f^{-1}(v)$$

$$\therefore\ \forall x\in X\ ,\ d_x(x,p)<\delta\Rightarrow x\in f^{-1}(v)$$

فرض کنید $N_\delta(p)=\{x\in X,d_x(x,p)<\delta\}$ آنگاه $N_\delta(p)$ همسایگی از نقطه p می باشد و $N_\delta(p)\in f^{-1}(v)$ در نتیجه نقطه p یک نقطه درونی $f^{-1}(v)$ می باشد و $f^{-1}(v)$ یک زیر مجموعه باز X خواهد بود.

$\Leftarrow$فرض کنید برای هر زیر مجموعه باز v در Y داشته باشیم که $f^{-1}(v)$ در X باز است و اگر $p\in X$ باشد باید نشان دهید که f در نقطه p پیوسته است. اگر $\varepsilon>0$ داده باشد آنگاه مجموعه v را بصورت زیر تعریف کنید :

$$v=\{y\in Y:d_y(y,f(p))<\varepsilon\}$$

آنگاه v یک زیر مجموعه باز Y می باشد و در نتیجه $f^{-1}(v)$ یک زیر مجموعه باز X خواهد بود و اگر $p\in f^{-1}(v)$ و بنا به باز بودن $f^{-1}(v)$ نتیجه می شود که p نقطه درونی است بنابراین :

$$\exists\delta>\cdot \ni N_\delta(p)\subset f^{-1}(v) \qquad \therefore \forall x\in N_\delta(p)\Rightarrow f(x)\in f(v)$$

$$N_\delta(p)=\{x\in X, d_x(x,p)<\delta\}\Rightarrow x\in f^{-1}(v)\Rightarrow f(x)\in v\Rightarrow d_y(f(x),f(p))<\varepsilon$$

تابع f در نقطه p پیوسته است.

٤-۲-۲ نتیجه : تابع $f:X\to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر زیر مجموعه بسته F در Y مجموعه $f^{-1}(F)$ در X بسته باشد.

اثبات : توجه کنید که $(f^{-1}(F))^C=f^{-1}(F^C)$ آنگاه برای مجموعه بسته F در Y مجموعه $f^{-1}(F)$ در X بسته است اگر و فقط اگر $(f^{-1}(F))^C$ در X باز باشد $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F^C)$ در X باز باشد $\Leftrightarrow$ F^C در Y باز باشد $\Leftrightarrow$ f بر روی X پیوسته باشد.

٤-۲-۳ نتیجه : اگر $f:X\to Y$ یک تابع باشد آنگاه حکمهای زیر معادلند:

۱)تابع f بر روی X پیوسته است.

۲)نقش معکوس زیر مجموعه باز v در Y (مجموعه $f^{-1}(v)$) در X باز است.

۳)نقش معکوس زیر مجموعه بسته A در Y (مجموعه $f^{-1}(A)$) در X باز است.

٤-۲-٤ تذکر : قضیه فوق برای نقشهای مستقیم در حالت کلی بر قرار نیست برای مثال $\overline{f(A)}\supset f(\overline{A})$ تابع $f:R\to R$ را بصوررت زیر تعریف می کنیم :

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

آنگاه f همواره پیوسته است و $f(R)=(\cdot,1]$ فضای متریک R هم باز و هم بسته است در صورتیکه $(\cdot,1]$ نه باز و نه بسته است مثلاً اگر $\delta=(-1,1)$ آنگاه $f(\delta)=(\frac{1}{2}\ ,\ 1]$

$$x\in\delta\Rightarrow -1<x<1\Rightarrow 0\le x^2<1\Rightarrow 1\le x^2+1<2\Rightarrow \tfrac{1}{2}<\frac{1}{x^2+1}\le 1$$

توجه کنید که δ باز است ولی $f(\delta)$ باز نیست.

مثال۳ : برای تابع $f(x)=x^3-x$ داریم:

$f(-1/5\,,\,1/5)=[-2,2]$

نافشرده فشرده

٤-۲-۵ قضیه پیوستگی و فشردگی : اگر $f:x\to y$ پیوسته باشد و X یک فضای متریک فشرده آنگاه $f(x)$ یک زیر فضای فشرده است.

اثبات اگر $\{v_\alpha\}_{\alpha\in J}$ پوشش بازی از زیر مجموعه های باز y برای $f(x)$ باشد یعنی

$$f(x)\subset\bigcup_{\alpha\in J}v_\alpha$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x))\subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in J}v_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in J}f^{-1}(v_\alpha)\Rightarrow x\subset\bigcup_{\alpha\in J}f^{-1}(v_\alpha)$$

با استفاده از پیوستگی f و باز بودن مجموعه v_α در y نتیجه می شود که برای هر $\alpha\in j$ مجموعه $f^{-1}(v_\alpha)$ در x باز است و در نتیجه $\{f^{-1}(v_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ پوشش باز برای X خواهد بود ولی x فشرده است بنابراین

$$\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\ \ni: X\subset\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(v_{\alpha_i})\Rightarrow f(X)\subset f(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(v_{\alpha_i}))\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}v_{\alpha_i}$$

پس $f(x)\subset\bigcup_{i=1}^{n}v_{\alpha_i}$ بنابراین هر پوشش باز برای $f(X)$ دارای یک زیر پوشش باز متناهی است و در نتیجه $f(X)$ فشرده است.

روش دوم برای اثبات برای ε داده شده $N_\varepsilon(x)$ $\{N_\varepsilon(y)\}_{y\in r}$ پوششی باز برای r خواهد بود.

در این صورت $\{f^{-1}(N_\varepsilon(y))\}_{y\in Y}$ پوششی باز برای x خواهد بود بخصوص چون $f^{-1}(N_\varepsilon(y))$ باز است می‌توان δ_y را چنان یافت که $N_{\delta_y}(f^{-1}(y))\subset f^{-1}(N_\varepsilon(y))$ باشد. اکنون $\{N_{\delta_y}(f^{-1}(y))\}_{y\in Y}$ پوششی باز برای X خواهد بود. و چون X فشرده است تعدادی متناهی از عناصر پوشش اخیر X را خواهد پوشاند.

بنابراین $\delta_{y_1},\dots,\delta_{y_n}$ چنان موجودند که $N_{\delta_{y_1}}\left(f^{-1}(y_1)\right),\dots,\delta_{\delta_{y_n}}\left(f^{-1}(y_n)\right)$ پوشـشی بـرای X خواهد بود. چنانچه فرض کنیم

$$\delta = \min\{\delta_{y_1},\dots,\delta_{y_n}\}$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\forall\ \varepsilon\rangle \circ\ \ \exists\delta\rangle\circ \ni \forall x\in D_f$$
$$d_X(x,y)\langle\delta \Rightarrow d_Y\ \left(f(x),f(y)\right)\langle\ \varepsilon$$

٤-٢-٦ تذکر عکس قضیه قبل درست نیست یعنی اگر $f:X\to Y$ پیوسته باشد و $f(X)$ فشرده باشد آنگاه الزاماً x فشرده نیست.

٤-٢-٧ تذکر اگر $f:X\to Y$ پیوسته باشد آنگاه برای هر زیر مجموعه فشرده $E\subset X$ مجموعه $f(E)$ در y فشرده است.

٤-٢-٨ تذکر اگر $f:X\to Y$ پیوسته و X فشرده باشد آنگاه $f(X)$ یک زیر مجموعه کراندار و بسته از فضای متریک Y می باشد. بطور کلی توابع پیوسته بر روی مجموعه های فشرده کراندارند.

٤-٢-٩ تذکر اگر $Y=R^K$ فضایی اقلیدسی و متریک R^K باشد و X فشرده و تابع $f:X\to R$ پیوسته باشد آنگاه f بر روی X کراندار و بسته است. (قضیه هاینه بورل) $f(X)$ یک زیر مجموعه فشرده در R^K خواهد بود و بنا به قضیه هاینه بورل یک مجموعه بسته و کراندار است.

٤-٢-١٠ قضیه مقادیر ماکزیمم و مینیمم : اگر X° یک فضای فشرده و $f:X\to R$ یک تابع پیوسته باشد آنگاه f بر روی X کراندار بوده و مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را در X اختیار می کند یعنی وجود دارد x_1,x_2 در X بطوریکه :

$$f(x_1)=\sup\{f(x):\forall x\in X\}$$
$$f(x_2)=\inf\{f(x):\forall x\in X\}$$

اثبات : از فشردگی X نتیجه می شود که $f(X)$ یک زیر مجموعه فشرده R و بنا به قضیه هاینه بورل یک مجموعه بسته و کراندار است بنابراین اعدادی مانند M , m وجود دارند بطوریکه $\forall x \in X \quad m \le f(x) \le M$ و از آنجا که $f(X)$ دارای inf , sup خواهد بود ولی $f(X)$ بسته است. بنا به قضیه خوانده شده :

$$\inf f(X) \in f(X) \Rightarrow \exists x_۱ \in X \ni: \sup f(X) = f(x_۱)$$
$$\sup f(X) \in f(X) \Rightarrow \exists x_۲ \in X \ni: \inf f(X) = f(x_۲)$$

و در نتیجه می ثوان نوشت :

$$f(x_۱) = \max\{f(x) : x \in X\}$$
$$\Rightarrow f(x_۲) < f(x) < f(x_۱)$$
$$f(x_۲) = \min\{f(x) : x \in X\}$$

٤-۲-۱۱ قضیه اگر Y , X فضای متریک و تابع $f : X \to Y$ پیوسته باشد آنگاه در صورتیکه E زیر مجموعه همبندی از مجموعه X باشد آنگاه $f(E)$ همبند است.

اثبات : با استفاده از برهان خلف اگر $f(E)$ در Y همبند نباشد آنگاه مجموعه های غیر تهی و جداپذیر مانند B , A از نقاط Y وجود دارد بطوریکه $f(E) = A \bigcup B$ که $\overline{A} \bigcap B = \phi$, $A \bigcap \overline{B} = \phi$ آنگاه :

$$f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$$
$$E \subset f^{-1}(f(E)) \Rightarrow E \underset{*}{\subsetneq} f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$$

مجموعه های G , H را بصورت زیر تعریف کنید :

$$G = E \bigcap f^{-1}(A)$$
$$H = E \bigcap f^{-1}(B)$$

آنگاه G , H زیر مجموعه های غیر تهی و جدا پذیر از X می باشند که $E = G \bigcup H$.

فرض کنید $x \in E$ آنگاه

$* \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ یا $x \in f^{-1}(B) \quad \Rightarrow x \in E \bigcap f^{-1}(A)$ یا $\; x \in E \bigcap f^{-1}(B)$

$x \in G$ یا $\; x \in H \Rightarrow x \in G \bigcup H \Rightarrow E \subset G \bigcup H$

از طرف دیگر :

$$\forall y \in G \bigcup H \Rightarrow y \in E \Rightarrow G \bigcup H \subset E \Rightarrow E = G \bigcup H$$

نشان خواهیم داد که :

$$G \bigcap \overline{H} = \phi \quad , \quad \overline{G} \bigcap H = \phi$$

توجه کنید که $A \subset \overline{A}$ در نتیجه $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\overline{A})$ پس :

$$E \bigcap f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\overline{A}) \Rightarrow G \subset f^{-1}(A)$$

از آنجا که f بر x پیوسته است ، و $\overline{A}$ زیر مجموعه بستاری از y است پس $f^{-1}(\overline{A})$ یک زیر مجموعه بسته خواهد بود و

$$G \subset f^{-1}(\overline{A}) \overset{G\text{تعریف}}{\Rightarrow} \overline{G} \subset f^{-1}(\overline{A}) \Rightarrow f(\overline{G}) \subset f(f^{-1}(\overline{A})) \subset \overline{A}$$

و از طرف دیگر :

$$\because H = E \bigcap f^{-1}(B) \Rightarrow f(H) = f(E \bigcap f^{-1}(B)) \subseteq B \qquad \therefore f(H) \subseteq B$$

داشتیم $f(\overline{G}) \subset \overline{A}$ و از آنجا که $\overline{A} \bigcap B = \phi$ نتیجه می شود که :

$$\overline{G} \bigcap H = \phi$$

و بطور مشابه می توان نوشت و نشان داد که $\overline{G} \bigcap H = \phi$ بنابراین H,G جدا پذیرند. پس E اجتماع دو مجموعه جدائی پذیر است و بنا به تعریف هم بند نیست و این خلاف فرض است با استفاده از برهان خلف نتیجه می شود که $f(E)$ همبند است.

۴-۲-۱۲ نتیجه (قضیه نقاط میانی) اگرتابع f با مقادیرحقیقی روی روی فاصله بسته $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته باشدو N عدد دلخواهی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه حداقل یک نقطه مانند C در (a,b) وجود دارد بطوریکه $f(c)=N$

۴-۲-۱۳ نتیجه (قضیه بولتزانر) : اگر f تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی بر روی $[a,b]$ باشد بطوریکه $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند $(f(a)f(b)<0)$ آنگاه حداقل یک نقطه مانند $C \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه $f(C)=0$

اثبات : دو حالت زیر اتفاق می افتد :

$f(a)<0<f(b)$ یا $f(b)<0<f(a)$

$\exists C\in(a,b)\ni: f(C)=۰$

در هر حالت $N=۰$ را در قضیه قبل قرار دهید اگر f بر روی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<۰$ باشد آنگاه معادله $f(x)=۰$ در فاصله (a,b) دارای یک ریشه است.

مثال٤ : نشان دهید تابع f با ضابطه x^3-3x+1 در $[-۲،۰]$ دارای یک ریشه است.

(حل تابع f روی R پیوسته است)

$f(-2)=-1<0 \qquad f(0)=1 \qquad f(x)=x^3-3x+1$

$f(0)f(-2)=-1<0\Rightarrow \exists C\in(-2,0)\ni f(c)=0$

معادله حداقل دارای یک ریشه است.

مثال٥: اگر $a<b$ باشد و تابع $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $\exists x\in[a,b]\ni: f(x)=x$ یعنی f دارای یک نقطه ثابت است.

حل : تابع $\forall x\in[a,b]\quad g(x)=f(x)-x$ پیوسته است و $g(a)g(b)<۰$ پس وجود دارد $C\in(a,b)$ بطوریکه $g(C)=0\Rightarrow f(C)=C$

مثال٦ : اگر $a>۰$ و n یک عدد طبیعی باشد نشان دهید که عدد معینی مانند b وجود دارد بطوریکه $b^n=a$

٤-۳ پیوستگی یکنواخت

پیوستگی یکنواخت :اگر X,Y در فضای متریک و $f:X\to Y$ یک تابع پیوسته باشد آنگاه f در تمام نقاط X پیوسته است یعنی :

$$\forall\varepsilon>۰\ \exists\delta>۰\ \ni\forall x_۱,x_۲\in X\ ,\ d_x(x_۱,x_۲)<\delta\Rightarrow d_y(f(x_۱),f(x_۲))<\varepsilon$$

در حالت کلی مقدار δ به ε و نقاط x_1, x_2 وابسته است در صورتی که δ فقط بستگی به ε داشته باشد یعنی $\delta = \delta(\varepsilon)$ آنگاه تابع f را بر روی x پیوسته یکنواخت یا پیوسته یک شکل می نامند بنابراین fبر روی x پیوسته یکنواخت است هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni \forall p,q \in X, d_x(p,q) < \delta \Rightarrow d_y(f(p), f(q)) < \varepsilon$$

مثال۷ : پیوستگی تابع $f(x) = x^2$ را بررسی کنید.

تابع fبر روی R همواره پیوسته است حال پیوستگی یکنواخت آنرا چک می کنیم.

$a \in R \qquad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \;, \; \forall x \in D_f \;, \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

حل : همسایگی کمکی

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x+a)(x-a)| = |x-a||x+a| \quad x \to a \Rightarrow |x-a| < |a|$$

به $\quad |x+a| = |x-a+2a| \le |x-a| + 2|a| < |a| + 2|a| = 3|a| \quad \therefore |x+a| < 3|a| \, (a \neq 0)$

$$|x^2 - a^2| = |x+a||x-a| < 3|a||x-a| < \varepsilon \Rightarrow |x-a| < \frac{\varepsilon}{3|a|} \qquad \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3|a|}, |a|\right\}$$

چون δ به ε و نقطه a وابسته است بنابراین در حالت کلی تابع $f(x) = x^2$ بر روی R پیوسته یکنواخت نمی باشد.

مثال۸ : اگر $f(x) = x^2$ آنگاه fبر روی $(0,a)$ وقتی که α یک عدد ثابت باشد پیوسته یکنواخت است.

$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a|$$

$$x, a \in (0, \alpha) \Rightarrow x < \alpha, a < \alpha \Rightarrow |x+a| \le |x| + |a| \le 2\alpha$$

$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a| \le 2\alpha |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |x-a| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$$

کافی است فرض کنید $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ آنگاه $\delta > 0$ ، $\delta = \delta(\varepsilon)$ و

$$\forall x \in (0,a), |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$$

بنابراین تابع f بر روی $(0,a)$ پیوسته یکنواخت است.

مثال۹ : پیوستگی یکنواخت $f(x) = \frac{1}{x}$ را بررسی کنید.

تابع f بر روی نقاط مخالف صفر پیوسته است.

$$a \in R \quad , \quad a \neq 0 \quad , \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-x}{ax}\right| = \frac{|a-x|}{|a||x|} = \frac{|x-a|}{|a||x|}$$

$$x \to a \Rightarrow x - a \to 0 \qquad |x-a| < \frac{1}{2}|a|$$

$$||x| - |a|| \leq |x-a| < \frac{1}{2}|a| \Rightarrow -\frac{1}{2}|a| < |x| - |a| < \frac{1}{2}|a| \Rightarrow \frac{1}{2}|a| < |x| < \frac{3}{2}|a|$$

$$\Rightarrow \frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{2|x-a|}{|a||a|} < \varepsilon \Rightarrow |x-a| < \frac{\varepsilon |a|^2}{2} \qquad \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon |a|^2}{2}, \frac{1}{2}|a|\right\}$$

δ به ε و نقطه a وابسته است بنابراین در حالت کل تابع f بر روی مجموعه اعداد مخالف صفر پیوسته یکنواخت نیست.

مثال۱۰ : تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر روی $\{x \in R : x > \alpha, \alpha > 0\}$ پیوسته یکنواخت است.

$$\left|\frac{۱}{x} - \frac{۱}{a}\right| < \varepsilon \qquad x > \alpha, a > \alpha \Rightarrow |x| > \alpha, |a| > \alpha \Rightarrow |x||a| > \alpha^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{|x||a|} < \frac{۱}{\alpha^{۲}}$$

$$\left|\frac{۱}{x} - \frac{۱}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|x||a|} < \frac{|x-a|}{\alpha^{۲}} < \varepsilon \Rightarrow |x-a| < \varepsilon\alpha^{۲}$$

پس کافی است $\delta \geq \varepsilon\alpha^2$ در نتیجه تابع f بر روی $\{x \in R, x > \alpha\}$ پیوسته و یکنواخت است.

تابع f پیوسته یکنواخت :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \forall p,q \in X, d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p),f(q)) < \varepsilon$$

تابع f پیوسته یکنواخت نسیت :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists p,q \in X$$
$$d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p),f(q)) \geq \varepsilon_0$$

٤-۳-۱ قضیه : تعریف پیوستگی یکنواخت را می توان بر حسب دنباله ها بصورت زیر تعریف کرد.

اگر X,Y فضای متریک و $f: X \to Y$ تعریف شده باشد آنگاه f بر روی x پیوسته یکنواخت و است اگر برای هرعدد ε و هر جفت دنباله های $\{q_n\},\{p_n\}$ از نقطه x عددی مانند $\delta > ۰$ وجود داشته باشد بطوریکه :

$$d_x(p_n,q_n) < \delta \Rightarrow d_y(f(p_n),f(q_n)) < \varepsilon$$

تابع $f: X \to Y$ پیوسته یکنواخت نمی باشد اگر عدد مثبتی مانند $\varepsilon_{.} > ۰$ (موجود باشد) و دو دنباله $\{q_n\},\{p_n\}$ وجود داشته باشد که

$$d_x(p_n,q_n) \to 0 \Rightarrow, d_x(f(p_n),f(q_n)) \geq \varepsilon_0$$

مثال ۱۱ : آیا تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ در فاصله $(۰،۱)$ پیوسته یکنواخت است.

$$p_n = \frac{1}{n}, \forall n \in N \qquad , \qquad q_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in N \qquad p_n - q_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$f(p_n) = f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \qquad f(q_n) = f(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1$$

$$\Rightarrow |f(p_n) - f(q_n)| = |n-n-1| = 1$$

اگر $\varepsilon_0 = 0.5$ را اختیار کند نتیجه می شود که f بر روی $(۰،۱)$ پیوسته یکنواخت نیست.

٤-۳-۲ قضیه : اگر X فشرده و $f: X \to Y$ پیوسته باشد آنگاه f بر روی X پیوسته یکنواخت است.

اثبات : اگر f بر روی X پیوسته یکنواخت باشد آنگاه عدد مثبتی مانند ε_0 و دنباله هایی مانند $\{q_n\},\{p_n\}$ از نقاط x وجود دارند بطوریکه

$$d_x(p_n,q_n)<\frac{1}{n}\Rightarrow d_Y\big(f(p_n),f(q_n)\big)<\varepsilon. \qquad \forall n\in N$$

از آنجا که X فشرده است بنا به قضیه خوانده شده (هر دنباله از نقاط یک فضای فشرده دارای یک زیر دنباله همگراست) نتیجه می شود که دنباله $\{p_n\}$ دارای یک زیر دنباله همگرا مانند $\{p_{n_k}\}$ می باشد اگر فرض کنیم $p_{n_k}\to p$ زیر دنباله ای مانند $\{q_{n_k}\}$ از دنباله $\{q_n\}$ نیز حاصل می شود که الزاماً به p همگرا خواهد شد زیرا :

$$d_x(q_{n_k},p)\le d_y(q_{n_k},p_{n_k})+d_x(p_{n_k},p)\to 0$$

ولی تابع f در تمام نقاط x و در نتیجه در نقطه p پیوسته است بنابراین دنباله های $\{f(q_{n_k})\},\{f(p_{n_k})\}$ به نقطه *f(p)* همگرا خواهد بود و $d_y(f(p_{n_k}),f(q_{n_k}))\to 0$

و این خلاف فرض $d_y(f(p_k),f(q_{n_k}))\ge\varepsilon_0$ است. بنا به برهان خلف تابع f بر روی X پیوسته یکنواخت است.

۴-۳-۳ نتیجه : اگر f تابعی پیوسته روی فاصله بسته $[a,b]$ باشد آنگاه f پیوسته یکنواخت است.

۴-۳-۴ قضیه : (پیوستگی ترکیب توابع) اگر X,Y,Z فضاهای متریک باشند و $E\subset X$ باشد و تابع $f:E\to Y$ و تابع f در نقطه $p\in E$ پیوسته و تابع $g:f(E)\to Z$ در نقطه *f(p)* پیوسته باشد آنگاه تابع gof در نقطه p پیوسته است $(gof:E\to Z)$

اثبات : اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد از آنجا که g در نقطه *f(p)* پیوسته است نتیجه می شود :

$$1)\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\ni:\forall y\in f(E),d_y(y,f(p))<\delta\Rightarrow d_Z(g(y),g(f(P)))<\delta$$

بنا به پیوستگی تابع در نقطه p نتیجه می شود :

$$2)\forall\delta>0\exists\delta_1\ni\forall x\in E\ \ d_x(x,p)<\delta_1\Rightarrow d_y(f(x),f(p))<\delta$$

بنابراین نتیجه می شود که :

$$d_x(x,p)<\delta_1 \Rightarrow d_y(f(x),f(p))<\delta \overset{f(x)\in f(E)}{\Longrightarrow} d_Z(g(f(x)),g(f(p))<\varepsilon$$

$$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta_1 \ni \forall x\in E \;\; d_x(x,p)<\delta_1 \Rightarrow d_Z(g(f(x)),g(f(p))<\varepsilon$$

پس تابع gof در نقطه p پیوسته است.

٤-۳-۵ قضیه (پیوستگی تابع معکوس) : اگر X یک فضای فشرده و Y یک فضای متریک و تابع $f:X\to Y$ یک به یک و پوششی و پیوسته باشد آنگاه تابع معکوس آن بر روی Y پیوسته است.

اثبات : چون f یک به یک پوششی است تابع معکوس آن بصورت $f^{-1}:Y\underset{onto}{\overset{1-1}{\longrightarrow}}X$ تعریف شده است فرض کنید f پیوسته باشد باید نشان دهیم که برای هر مجموعه باز $v\subset X$ مجموعه $(v)^{-1}(f^{-1})$ در Y باز است از آنجا که $(f^{-1})^{-1}(v)=f(v)$ می باشد بنابراین کافی است ثابت کنیم برای هر مجموعه باز v در X مجموعه $f(v)$ در Y باز است اگر v^C متمم مجموعه v در X باشد آنگاه v^C مجموعه بسته فضای فشرده X بوده و در نتیجه فشرده است و بنا به پیوستگی تابع مجموعه $f(v)^C$ یک زیر مجموعه فشرده فضای متریک Y خواهد بود در نتیجه $f(v)^C$ یک زیر مجموعه بسته Y می باشد ولی $f(v)^C=(f(v))^C$ زیرا تابع f بر روی X پوششی است بنابراین $(f(v))^C$ در Y بسته و در نتیجه $f(v)$ در Y باز است بنابراین f^{1} یک تابع پیوسته روی Y می باشد.

در قضیه قبل فشرده بودن فضای X الزامی است.

مثال۱۲ : اگر $X=[0,2\pi]$ و Y زیر فضایی از R^2 باشد و

$$f:X\to R^2 \qquad f(t)=(\cos t,\sin t) \qquad \forall t\in[0,2\pi]$$

می توان نشان داد که تابع f بر روی x پیوسته است و چون تابع $sin\ t$ و $cos\ t$ پیوسته و یک به یک و پوششی نیز می باشند پس تابع معکوس آن موجود است ولی f^{-1} نا پیوسته است.

ناپیوستگی ها : فرض کنید تابع f با مقدار های حقیقی بر (a,b) تعریف شده باشد اگر x در فاصله باز (a,b) باشد آنگاه حدود راست و چپ تابع f در نقطه x بترتیب با x^+ و x^- نمایش می دهند یعنی :

$$f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t) \qquad \forall t \in (a,b)$$

$$f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t) \qquad \forall t \in (a,b)$$

با استفاده از دنباله ها می توان تعاریف حدود راست و چپ را بشکل زیر تغیر داد تابع f در نقطه x دارای حد راست است اگر برای هر دنباله $\{t_n\}$ فاصله (a,b) که :

$$t_n \to x \Rightarrow f(t_n) \to f(x^+)$$

(دنباله $\{t_n\}$ باید از نقاط $x < t_n < y$ اختیار شده باشد.)

یا $f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$ اگر و فقط اگر :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni: \forall t \in (a,b), 0 < t - x < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x^+)| < \varepsilon$$

٤-٣-٦ قضیه : تابع f در نقطه x دارای حد است اگر و فقط اگر حدود چپ و راست تابع در نقطه x موجود و برابر باشند.

تعریف : اگر تابع f در نقطه x پیوسته باشد و لی $f(x^+), f(x^-)$ هر دو موجود باشد در اینصورت گوی‌یم f در نقطه x نا پیوسته از نوع اول است اگر $f(x^-)$ یا $f(x^+)$ موجود نباشد در اینصورت پیوستگی از نوع دوم است.

تابع یکنوا :اگر f تابعی با مقادیر حقیقی باشد که بر روی (a,b) تعریف شده باشد آنگاه f بر روی (a,b) یکنوا صعودی است هرگاه :

$$\forall x, y \in (a,b) \quad x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$$

تابع f بر روی (a,b) بطور یکنوا نزولی است هرگاه :

$$\forall x, y \in (a,b) \quad x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$$

تابع f بر روی (a,b) یکنوا می نامند هر گاه f صعودی یا نزولی باشد اگر f بر روی (a,b) صعودی باشد آنگاه تابع $-f$ بر روی (a,b) نزولی است. تابع یکنوا لزوماً روی فاصله باز (a,b) پیوسته نمی باشد.

برای مثال اگر $f(x)=\begin{cases}0 & \forall x\in[0,1]\\ 1 & \forall x\in(1,2]\end{cases}$ آنگاه f بر روی $[۰،۲]$ صعودی است ولی در نقطه $x=۱$ نا پیوسته است. می توان نشان داد که توابع یکنوا در نقاط درونی فاصله تعریف شده دارای حدود یکطرفه اند.

٤-٣-٧ قضیه : اگر f بر روی $[a,b]$ صعودی باشد و $x\in(a,b)$ آنگاه حدود $f(x^+),f(x^-)$ وجود دارند و

١) $f(x^-)=\sup\{f(t):a<t<x\}$

٢) $f(x^+)=\inf\{f(t):x<t<b\}$

٣) $f(x^-)\le f(x)\le f(x^+)$

٤) $\forall x,y\in(a,b) \quad , \quad a<x<y<b\Rightarrow f(x^+)\le f(y^-)$

اثبات : اگر $a<t<x$ باشد بنا به صعودی بودن تابع f داریم که $f(t)\le f(x)$ بنابراین $f(t)\le f(x)\Leftarrow a<t<x$ و در نتیجه $f(x)=ub\,\{f(t),a<t<x\}$ و بنابراین مجموعه $\{f(t),a<t<x\}$ دارای کوچکترین کران بالائی می باشد.

فرض کنید باید ثابت کنیم $L=f(x^-)$ یعنی $L=\lim\limits_{t\to\bar{x}} f(t)$ و $L=\sup\{f(t):a<t<x\}$ و فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. آنگاه $L-\varepsilon$ نمی تواند یک کران بالائی برای مجموعه $\{f(t),a<t<x\}$ باشد. بنابراین عددی مانند $a<t_\varepsilon<x$ وجود دارد بطوریکه $L-\varepsilon<f(t_\varepsilon)\le L$ بنابراین عدد مثبتی مانند δ وجود دارد بطوریکه $t_\varepsilon=x-\delta$ و در نتیجه $L-\varepsilon<f(x\overset{(1)}{-}\delta)\le L$ از آنجا که f صعودی است نتیجه می شود:

$$\forall t, x-\delta < t < x \Rightarrow f(x-\delta) \le f(t) \le f(x) \qquad (2)$$
$$(1),(2) \Rightarrow \forall t, x-\delta < t < x \Rightarrow l-\varepsilon \le f(x-\delta) \le f(t) \le L < L+\varepsilon$$

پس $l-\varepsilon < f(t) < L+\varepsilon$ در نتیجه :

$$\Rightarrow |f(t)-L| < \varepsilon, \forall t, x-\delta < t < x$$
$$\Rightarrow \forall t \in (a,b), -\delta < -x+t < 0 \Rightarrow |f(t)-L| < \varepsilon$$
$$\therefore L = \lim_{t \to x^-} f(t) = L \Rightarrow f(x^-) = L$$

بنا به تعریف L و کران بالا بودن $f(x)$ داریم که :

$$f(x) \ge L$$
$$f(x) \ge f(x^-)$$

بطور مشابه می توان نشان داد که :

$$f(x^+) = \inf\{f(t) : x < t < b\} \qquad f(x) \le f(x^+)$$

در نتیجه ۱ و ۲ و ۳ اثبات می شود.

برای اثبات ٤ فرض کنید :

$$a < x < y < b \quad , \quad f(x^+) = \inf\ \{f(t) : x < t < b\}$$

اگر تعریف فوق را برای فاصله (a,y) بکار ببرید.

$$f(x^+) = \inf\{f(t) : x < t < b\}$$
$$f(y^-) = \sup\{f(t) : x < t < y\} \Rightarrow \sup\{f(t) : a < t < y\}$$
$$\therefore f(x^+) = \inf\{f(t) : x < t < y\}$$
$$f(y^-) = \sup\{f(t) : x < t < y\} \Rightarrow f(x^+) \le f(y^-)$$

٤-۳-۸ تذکر : قضیه فوق را نمی توان برای تابع نزولی با تغییرات مناسب اثبات کرد.

٤-۳-۹ تذکر : با استفاده از قضیه قبل می توان نشان داد که مجموعه نقاط ناپیوستگی توابع یکنوا شمارش پذیر است.

٤-۳-۱۰ قضیه : اگر تابع f بر روی (a,b) یکنوا باشد مجموعه نقاط ناپیوستگی آن شمارش پذیر است.

فرض کنید E مجموعه نقاط نا پیوستگی تابع f در فاصله (a,b) باشد آنگاه بنا به قضیه قبل در هر نقطه مانند $x \in E$ حدو: یک طرفه $f(x^+), f(x^-)$ وجود دارند و $f(x^+) < f(x^-)$ فرض کنید f روی (a,b) صعودی ! ست بنا به قضیه چگالی اعداد گویا نتیجه می شود که برای هر $x \in E$ عدد گویایی مانند r_x وجود دارد که $f(x^-) < r_x \le f(x^+)$ آنگاه نگاشت $x \to r_x$ از مجموعه E به زیر مجموعه ای از اعداد گویا حاصل می شود که یک به یک است بنابراین E شمارش پذیر است.

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1^{\ +}) \le f(x_2^{\ -})$$
$$, f(x_1^{\ -}) \le r_{x_1} \le f(x_1^{\ +}) \le r_{x_2} \le f(x_1^{\ +}) \Rightarrow r_{x_1} \le r_{x_2}$$

مثال ۱۲ : ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ موجود نیست.

دو دنباله معرفی می کنیم که حد هر دو صفر است ولی حد Sin عناصر دو دنباله متفاوت است.

$y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ و $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi}$ در اینصورت واضح است که x_n, y_n هر دو به صفر همگرایند ولی داریم : $f(x_n) = \sin\dfrac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + \pi) = 0$ بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ از طرفی $f(y_n) = \sin\dfrac{1}{y_n} = \sin(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}) = 1$ بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$

در نتیجه حد تابع $\sin\dfrac{1}{x}$ در ۰ موجود نمی باشد.

روش دوم : می توانید از برهان خلف استفاده کنید

مثال ۱۳ : تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ ۱ - x & x \notin Q \end{cases}$ فقط در $x_0 = \dfrac{1}{2}$ پیوسته است.

اثبات : نخست نشان می دهیم که تابع فوق در $\dfrac{1}{2}$ پیوسته است. فرض کنید $0 < \varepsilon$ داده شده باشد در اینصورت اگر $\delta \le \varepsilon$ باشد خواهیم داشت :

$$\left(| x - \frac{۱}{۲} | < \delta \Rightarrow | x - \frac{۱}{۲} | < \varepsilon , | (۱ - x) - \frac{۱}{۲} | < \varepsilon \right)$$

بنابراین ثابت شد که تابع در $\frac{1}{2}$ حدی برابر $\frac{1}{2}$ دارد اکنون نشان می دهیم که در سایر اعداد تابع حد ندارد. چنانچه $a \in R$ ، $a \neq \frac{1}{2}$ دو حالت پیش می آید :

$$| x - \tfrac{1}{2} | < \delta \Rightarrow \begin{cases} \overset{x \in Q}{} | (1-x) - \tfrac{1}{2} | = | \tfrac{1}{2} - x | = | x - \tfrac{1}{2} | < \delta \leq \varepsilon \Rightarrow | f(x) - \tfrac{1}{2} | < \varepsilon \\ \underset{x \in Q'}{} | x - \tfrac{1}{2} | < \delta \leq \varepsilon \Rightarrow | f(x) - \tfrac{1}{2} | < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow f(x) - \tfrac{1}{2} | < \varepsilon$$

حالت اول : $a \in Q$ در اینصورت دو دنباله $x_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ ، $y_n = a - \frac{1}{n}$ در اینصورت با آنکه x_n , y_n دو دنباله همگرا به a می باشند ولی داریم :

$$f(x_n) = f(a + \tfrac{\sqrt{2}}{n}) = a + \tfrac{\sqrt{2}}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

$$f(y_n) = f(a + \tfrac{1}{n}) = a + \tfrac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(y_n) = 1 - a$$

از آنجا که $a \neq 1 - a$ بنابراین حد دودنباله داده شده متفاوت است بنابراین حد تابع موجود نیست.

حالت دوم : اگر $a \in Q'$ آنگاه با توجه به چگال بودن اعداد گویا و گنگ در مجموعه اعداد حقیقی می توان دنباله q_n را از اعداد گنگ و دنباله p_n را از اعداد گویا چنان انتخاب کرد که هر دو دنباله به a همگرا باشند. در اینصورت بدیهی است که :

$$f(q_n) = q_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(q_n) = \lim_{n \to \infty} q_n = a$$

$$f(p_n) = 1 - p_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(p_n) = \lim_{n \to \infty} (1 - p_n) = 1 - a$$

مجدداً مانند حالت اول ملاحظه می شود که حد دو دنباله p_n و q_n که هر دو به a همگرایند دو مقدار متفاوت می باشد.

۴-۳-۱ قضیه : اگر X فشرده و $f:X\to Y$ پیوسته باشد آنگاه f پیوسته یکنواخت است.

اثبات اگر $f:X\to Y$ پیوسته باشد و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. برای هر $y\in f(x)$ مجموعه $f^{-1}(N_\varepsilon(y))$ زیر مجموعه بازی از X° خواهد بود. با توجه به اینکه کلاس $Y\in F(x)$ $C=\{F^{-1}(N_\varepsilon(Y)\}$ پوششی باز برای x می باشد و بخصوص اگر $f(x)=y$ آنگاه یک همسایگی از x مانند $N_{\delta(x)}(x)$ وجود دارد که $N_{\delta(x)}(x)\subset f^{-1}(N_\varepsilon(y))$ اکنون کلاس $C=\{N_{\delta(x)}(x)\}_{x\in X}$ پوششی باز برای x خواهد بود. چون x فشرده است بنابراین تعدادی متناهی از عناصر C وجود دارد که x را می پوشاند. چنانچه $N_{\delta(x_1)}(x_1),\dots,N_{\delta(x_n)}(x_n)$ پوشش مورد نظر باشد با فرض $\delta=\min\{\delta_{x_1},\dots,\delta_{x_n}\}$ خواهیم داشت :

$$d(x,y)<\delta\Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$$

توجه کنید که δ فقط وابسته به ε می باشد و پیوستگی یکنواخت ثابت می شود.

مثال ۱۵- فرض کنید $[x]$ بزرگترین عدد صحیح موجود در x باشد، یعنی، $[x]$ عدد صحیحی باشد که $x-۱<[x]\leq x$; $(x)=x-[x]$, را جزء کسری x فرض کنید. ناپیوستگیهای توابع $[x]$ و (x) چه هستند؟

اکنون فرض می‌کنیم

$$\forall\,\varepsilon>\circ\ \ \exists n\in Z\ \ \ni n<x_\circ<n+۱\ ,\ x\in R-z$$

قرار می‌دهیم $\delta=\min\{x_\circ-n\ ,\ n+1-x_\circ\}$ بدیهی است که δ مثبت است و

$\forall x\in R\ \ |x-x_\circ|\langle\delta\ \Rightarrow n\langle x\langle n+۱$ پس $[x]=[x_\circ]=n\Rightarrow\ \ \circ=|[x]-[x_\circ]|\langle\,\varepsilon$

پس تابع $[x]$ درهر عدد حقیقی ناصحیح پیوسته است.

هرگاه $x\in Z$, $(x_\circ)=\circ$، برای $\varepsilon=\frac{1}{2}$

$$\forall\delta\rangle\circ\qquad\exists x\in R\ \ \ni x_\circ-\delta\langle x\langle x_\circ\qquad x_\circ-\tfrac{۱}{۲}\langle x\langle x_\circ\ \Rightarrow x\rangle\ \tfrac{۱}{۲}$$

پس تابع $[x]$ در هر $x_\circ \in Z$ ناپیوسته است. هرگاه $x_\circ \in R-Z$

$$\exists n \in Z \qquad \ni \quad n\langle x_\circ \langle n+1$$

$$\forall\, \varepsilon \rangle \circ \qquad \delta = \min\,\{\,\varepsilon\,,\, x_\circ - n\,,\, n+1-x_\circ\,\}$$

بدیهی است که δ مثبت است و

$$\forall\, x \in R \qquad |\,x - x_\circ| \langle \delta \Rightarrow n \langle\, x \,\langle\, n+1$$

پس

$$[x]=[x_\circ]=n$$

$$|\,[x]-[x_\circ]\,| = |\,x-[x_\circ]-x_\circ+[x]\,| = |\,x-x_\circ\,| \langle \delta \le \varepsilon$$

پس تابع $[x]$ در هر عدد حقیقی ناصحیح پیوسته است.

مثال ۱۶: فرض کنید f یک تابع حقیقی باشد که بر (a,b) تعریف شده است. ثابت کنید مجموعهٔ نقاطی که در آنها f ناپیوستگی ساده دارد حداکثر شمارش‌پذیر است. راهنمایی فرض کنید E مجموعه‌ای باشد که بر آن $f(x-) < f(x+)$. به هر نقطهٔ x اط E سه‌تایی (p,q,r) از اعداد گویا را چنان مربوط کنید که

(آ) $f(-x) < p < f(+x)$

(ب) $a < q < t < x$ رابطهٔ $f(t) < p$ را ایجاب کند؛

(پ) $x < t < r < b$ رابطهٔ $f(t) > p$ ر ایجاب نماید.

مجموعهٔ تمام این سه‌تایی‌ها شمارش‌پذیر است. نشان دهید که هر سه‌تایی به حداکثر یک نقطه از E مربوط است. همین روش را برای ناپیوستگیهای سادهٔ نوع دیگر به کار برید.

فرض می‌کنیم

$$E_1 = \{\, x \in (a,b) \mid f(x^-) \langle\, f(x^+) \,\}$$

$$E_2 = \{\, x \in (a,b) \mid f(x^-) \rangle\, f(x^+) \,\}$$

$$E_3 = \{\, x \in (a,b) \mid f(x^-) = f(x^+) \neq f(x) \,\}$$

در این صورت $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ مجموعه تمام نقاطی است که F در آن‌ها ناپیوستگی ساده دارد. ثابت می‌کنیم E_3, E_2, E_1 شمارش‌پذیر هستند.

E_1: فرض می‌کنیم $x \in E_1$ پس $f(x^-) \langle f(x^+)$ پس

$\forall \varepsilon \rangle 0 \quad \exists \delta_1, \delta_2 \rangle 0 \quad \ni \forall t \quad x - \delta_2 \langle t \langle x \quad \Rightarrow$

$f(x^+) - \varepsilon \langle f(t) \langle f(x^+) + \varepsilon \ (I)$

$\forall \ni \rangle 0 \quad \exists \delta_1, \delta_2 \rangle 0 \qquad \ni \forall t$

$x - \delta_2 \langle t \langle x \quad \Rightarrow \quad f(x^-) - \varepsilon \langle f(t) \langle f(x^-) + \varepsilon \quad (II)$

$p \in Q$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(x^-) < p < f(x^+)$ قرار مـی‌دهـیم $\varepsilon = f(x^+) = p$ پس

پس با توجه به (I)

$\exists \ \delta_1 > 0 \qquad \ni \forall \ t \qquad\qquad x < t < x + \delta_1$

$p = f(x^+) - (p(x^+) - p) < f(t)$

و اکنون قرار می‌دهیم $\varepsilon = p - f(x^-)$ بنابر (II) $\delta_2 > 0$ای هست بطوریکه به ازای هر t

$x - \delta_2 < t < x$ داریم:

$f(t) < f(x^-) + (p - f(x^-)) = p$

حال اعداد گویای q,r را چنان انتخاب می‌کنیم که $x < r < x + \delta_1$ و $x - \delta_2 < q \langle x$ و اگر $a<q<t<x$ آنگاه $f(t)<p$، همچنین اگر $x<t<r<b$، آنگاه $f(t)>p$ به این ترتیـب، بـه هر عضو از E سه تایی (p,q,r) از اعداد گویا نظیر می‌شود و هر سه تایی با حداکثر یـک عضو از E_1 متناظر است زیرا در غیر این صورت سه‌تایی گویایی مانند (p,q,r) کـه بـه دو عضو x,y (مثلاً $x < y$) نظیر می‌شـود. بنـابراین بـه ازای هـر t وقتـی $a<q<t<x$ آنگـاه $f(t)<p$ و به ازای هر t، وقتـی $x<t<r<b$ آنگـاه $f(t)>p$ (III) بـه ازای هـر t وقتـی $a<q<t<y$ آنگاه $f(t)<p$ (IV) به ازای هر t، وقتی $y<t<r<b$ آنگاه $f(f)>p$

از این رو به ازای هر $x<t<y$ بنابر (III)، $f(f)>p$ و بنابر (IV) $f(f)<p$ و چـون ممکن نیست هم $f(f)<p$ و هم $f(f).p$ لذا به هر سه تایی حـداکثر یـک عـضو از E متناظر می‌شود.

می‌دانیم مجموعه تمام این سه‌تایی‌ها شمارش‌پذیر است.

بوضوح $E_3 = A_1 \cup A_2$ که در آن A

$$A_1 = \left\{ x \in (a,b) \mid \underset{t \to x}{Lim}\ f(t) \langle f(x) \right\}$$

$$, A_2 = \left\{ x \in (a,b) \mid \underset{t \to x}{Lim} f(t) \rangle f(x) \right\}$$

حال نشان می‌دهیم A_1, A_2 شمارش‌پذیر هستند پس E_3 شمارش‌پذیر است. به ازای هر q,r ی گویا $(p\langle q)$ تعریف می‌کنیم

$$A_{pq} = \left\{ x \in (a,b) \mid Lim\, f(t) < p < q \leq f(x) \right\}$$

نشان می‌دهیم A_{pq} شمارش پذیر است اگر $x \in A_{pq}$، x نمی‌تواند نقطه حدی A_{pq} باشد زیرا در غیر این صورت دنباله‌ای مانند $\{ x_n \}$ در A_{pq} هست بطوریکه $\underset{x \to \infty}{Lim}\, x_n = x$ بنابراین

$$\underset{n \to \infty}{Lim}\ f(x_n) = \underset{t \to x}{Lim} f(t)$$

ولی می‌دانیم به ازای هر $n = 1,2,\ldots$ $f(x_n) \geq q$ پس $\underset{n \to \infty}{Lim}(x_n) \geq q \rangle \underset{t \to x}{Lim} f(t)$. بنابراین x نقطه حدی A_{pq} نیست.

لذا هر نقطه A_{pq} نقطه تنهاست. از این رو با توجه به قضیه $A_1 = \cup A_{pq}$ نیز مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است. چون $p,q \in Q$ بنابراین A_2 نیز شمارش‌پذیر است.

مثال ۱۷- هر عدد گویای x را می‌توان به شکل $x = m/n$ نوشت که در آن $n > 0$, و n,m اعداد صحیحی بدون مقسوم‌علیه مشترک باشند. وقتی $n, x = 0$ را مساوی ۱ بگیرید. تابع f را که بر R^1 با روابط زیر تعریف شده، در نظر بگیرید:
گنگ

$$f(x)=\begin{cases}0 & (\text{گنگ } x)\\ \dfrac{1}{n} & (x=\dfrac{m}{n})\end{cases}$$

ثابت کنید f در هر نقطهٔ گنگ پیوسته است، و در هر نقطهٔ گویا ناپیوستگی ساده دارد.

اگر $x=\dfrac{M}{n}$ یا $x=\circ$ دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{x_n\}$ بطوریکه $\underset{n\to\infty}{Lim}\, x_n = x$ واضح است که $\underset{n\to\infty}{Lim}\, f(x_n)=\circ$ چون $f(x)=\dfrac{1}{n}$ یا $f(x)=1$، f در x پیوسته نیست.

بنابراین f در هر نقطه گویا ناپیوسته است. فرض می‌کنیم $x_\circ$ عددی گنگ است و $\varepsilon\rangle\circ$ عددی دلخواه قرار می‌دهیم.

$$A_\varepsilon=\{\, x\in R \mid f(x)\geq\varepsilon, |x-x_\circ|<۱ \,\}$$

بدیهی است که اگر $A_\varepsilon = Q\cap A_\varepsilon = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid m\in Z, (m,n)=1 \ , \ \dfrac{1}{n}\geq\varepsilon , \left|x_\circ-\dfrac{m}{n}\right| \leq 1 \right\}$

A_ε متناهی است پس بنابر خاصیت ارشمیدسی

$$\exists_{n_\circ}\in N \ni {}^{1}\!/\!_{n_\circ}<\varepsilon$$

بنابراین

$$\forall n>n_\circ \quad \frac{۱}{n}<\varepsilon \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)<\varepsilon \qquad \forall\, m\in Z$$

که $(m,n)=1$ درنتیجه $\dfrac{m}{n}\notin A_\varepsilon$ بنابراین

$$A_\varepsilon=\left\{ \frac{m}{n} \mid m,n\in Z, (m,n)=۱ \ , \quad \circ<n<n_\circ , \circ<n<n_\circ , \left|x-\frac{m}{n}\right|\leq ۱ \right\}$$

لذا A_ε متناهی است. فرض می‌کنیم $A_\varepsilon=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ و قرار می‌دهیم

$$\delta=\min\{\, |x_1-x_\circ|, |x_2-x_\circ|, \ldots, |x_m-x_\circ|, 1 \,\}$$

$x\notin A_\varepsilon$ پس $\delta>\circ$ اگر $|x-x_\circ|<\delta$ آنگاه $x\notin A_\varepsilon$ پس $f(x)<\varepsilon$ بنابراین

$$|f(x)-f(x_\circ)|=|f(x)-\circ|=|f(x)|<\varepsilon$$

در نتیجه f در $x_\circ$ پیوسته است.

مثال۱۸: فرض کنید f یک تابع حقیقی با قلمرو $R^{۱}$ باشد که خاصیت مقدار میانی دارد: هرگاه $f(a)<c<f(b)$ ، آنگاه به ازای هر x هایی که $f(x)=r$ بسته باشد ثابت کنید f پیوسته است. راهنمایی: هرگاه $x_n \to x_0$ اما به ازای rی و هر n ، $f(x_n)>r>f(x)$ ، آنگاه t_n های که بین x_n, x_0 هست $f(t_n)=r$. پس $t_n \to x_0$. حال تناقض به دست آورید.

برهان خلف: فرض می‌کنیم که f پیوسته نباشد پس $x_{\circ} \in R$, $\varepsilon>\circ$ وجود دارد که

$$\forall \varepsilon>\circ \ \ \exists x\in R \quad \left| x-x_{\circ} \right|<\delta \Rightarrow \left| f(x)-f(x_{\circ}) \right| \geq \varepsilon$$

$$\delta=\frac{۱}{n} \quad n=۱,۲,\ldots$$

$$\forall\, n\in N \qquad \exists\, x_n \in R \qquad \left| x_n-x_{\circ} \right|<\frac{۱}{n} \quad , \quad \left| f(x_n)-f(x_{\circ}) \right| \geq \varepsilon$$

پس همواره $-\frac{۱}{n}<x_n-x_{\circ}<\frac{۱}{n}$ یا $\varepsilon+f(x)\leq f(x_{\circ})$ یا $\varepsilon+f(x_{\circ})\leq f(x_n)$

بنابراین به ازای نامتناهی از n ها $\varepsilon+f(x_n)\leq f(x_{\circ})$ یا $\varepsilon+f(x_{\circ})\leq f(x_n)$

فرض می‌کنیم به ازای تعدادی نامتناهی از n های طبیعی $\varepsilon+f(x_n)\leq f(x_{\circ})$ پس زیردنباله‌ای مثل $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که

$$\forall \ k=1,2,\ldots$$

$$\varepsilon+f\left(x_{n_k}\right)\leq f(x_{\circ})$$

پس $r_{\circ}\in Q$ وجود دارد

$$f\left(x_{n_k}\right)<r_{\circ}<f(x_{\circ})$$

با توجه به خاصیت مقدار میانی تابع f دنباله‌ای مثل (t_k) هست که $x_{nk}<t_k<x_{\circ}$

$$\forall \ k=1,2,\ldots \qquad\qquad f(t_k)=r_{\circ}$$

از طرفی می‌دانیم

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_{\circ} \qquad , \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=x_{\circ}$$

$$\forall \quad k=1,2,\ldots \quad |t_k - x_\circ| < |x_{n_k} - x_\circ| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} t_k = x_\circ$$

پس $x_\circ$ یک نقطه حدی برای مجموعه $A=\{x\in R \mid f(x)=r_\circ\}$ و با توجه بـه فـرض A مجموعه‌ای بسته می‌باشد پس

$$x_\circ \in A \Rightarrow f(x_\circ)=r_\circ$$

که با $f(x_\circ)=r_\circ$ تناقض دارد پس f پیوسته است.

مسائل حل شده فصل چهارم

۱۹ – فرض کنید f یک تابع حقیقی تعریف شده بر R^1 باشد که در

$$\lim_{h\to 0} [f(x+h)-f(x-h)]=0$$

به ازای هر $x\in R^1$ صدق می‌کند. آیا این پیوسته بودن f را ایجاب خواهد کرد؟

خیر. بعنوان یک مثال تابع $f(x)=\begin{cases}\circ & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ در نقطه یک پیوسته نیست اما

$$\forall x\in R \quad \lim_{h\to\circ} [f(x+h)-f(x-h)]=\circ$$

عکس مسئله درست می‌باشد زیرا در $x_\circ\in R$ اگر f پیوسته باشد

$$x_\circ\in R \quad \lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h)=f(x_\circ) \to \lim_{h\to\circ} [f(x_\circ+h)-f(x_\circ-h)]=\circ$$

۲۰– هرگاه f نگاشت پیوسته‌ای از فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد، ثابـت کنیـد به ازای هر مجموعهٔ $E\subset X$،

$$f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$$

($\overline{E}$ بست E را نشان می‌دهد.) با یک مثال نشان دهید که $f(\overline{E})$ می‌تواند یک زیرمجموعهٔ حقیقی $\overline{f(E)}$ باشد.

فقط باید نشان دهیم $\overline{E}\subseteq f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ چون در این صورت $f\left(\overline{E}\right)\subseteq\overline{f(E)}$ ، $\overline{f(E)}$ در y بسته می‌باشد و $f:X\to Y$ یک تابع پیوسته می‌باشد در نتیجه $f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X می‌باشد همچنین $E\subseteq f^{-1}(f(E))\subseteq f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ بنابراین $f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X و شامل E می‌باشد درنتیجه $\overline{E}\subseteq f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ بنابراین $f\left(\overline{E}\right)\subseteq\overline{f(E)}$.

۲۱– فرض می‌کنیم $f:(\circ,+\infty)\to R$ اگر $E=N\Rightarrow\overline{E}=N$ پس $f(x)=\frac{1}{x}\ x\rangle\circ$

$f\left(\overline{E}\right)=f(E)=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}$ ، $\overline{f(E)}=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}\cup\{\circ\}$ بنابراین $f\left(\overline{E}\right)\subset\overline{f(E)}$

۲۲– فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر فضای متری X باشد.($(Z(f))$ (مجموعهٔ صفر f) را مجموعهٔ تمام p هایی در X بگیرید که در آنها $f(p)=0$. ثابت کنید $Z(f)$ بسته است.

با توجه به این که هر مجموعهٔ متناهی نقطهٔ حدی ندارد لذا مجموعه‌ای بسته می‌باشد مجموعهٔ $\{\circ\}$ در R بسته است از طرفی

$z(f)=\{p\in X\mid f(p)=\circ\}=f^{-1}(\{\circ\})$

پس با توجه به این که به ازای هر مجموعهٔ بستهٔ c در y $f^{-1}(c)$ در X بسته است.
$Z(f)$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X می‌باشد.

۲۳– فرض کنید f و g نگاشتهای پیوسته‌ای از فضای متری X بتوی فضای متری Y، و E یک زیرمجموعهٔ چگال X باشد. ثابت کنید $f(E)$ در $f(X)$ چگال است. هرگاه به ازای هر $p\in E$, $g(p)=f(p)$، ثابت کنید به ازای هر $p\in X$, $q(p)=f(p)$. (به عبارت دیگر، یک نگاشت پیوسته با مقادیرش بر زیرمجموعهٔ چگالی از قلمرو خود مشخص می‌شود.)

حل: برای چگال بودن $f(E)$ در $f(X)$ کافیست ثابت کنیم $f(X)\subseteq\overline{f(E)}$ چون E در X چگال است پس $X=\overline{E}$ با توجه به تمرین (2) $f(x)=f(\overline{E})\subseteq\overline{f(E)}$ فرض می‌کنیم $\forall\ p\in E\ g(p)=f(p)$ همچنین $x\in X$ نیز عنصر دلخواهی باشد.

$$\overline{E}=X\Rightarrow x\in\overline{E}$$

پس دنباله‌ای از اعضای E مانند $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=x$ و بنا به فرض مسئله

$$\forall\quad n=1,2,\ldots\qquad g(p_n)=f(p_n)$$

و چون f پیوسته می‌باشد.

$$f(x)=f\left(\lim p_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(p_n)=\lim_{n\to\infty}g(p_n)=g\left(\lim_{n\to\infty}p_n\right)=g(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=g(x)$$

-۲۴

$$x=0\qquad\forall y\in R\qquad f(x,y)=0$$

هرگاه $x\neq 0$, $x^2\neq 0$ بنابراین

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{\frac{xy^2}{x^2}}{\frac{x^2+y^4}{x^2}}=\frac{\frac{y^2}{x}}{1+\left(\frac{y^2}{x}\right)^2}$$

$$\forall z\in R\ ,\quad -1\le\frac{z}{1+z^2}\le 1$$

$$\forall(x,y)\in R^2\ ,\ |f(x,y)|\le 1$$

پس f بر R^2 کراندار است ثابت می‌کنیم g بر R^2 بی‌کران است.

$$\forall\ x\in R\ ,\ (x^3,x)\in R^2,\qquad g(x^3,x)=\frac{x^5}{2x^6}=\frac{1}{2x}$$

حال برای هر m طبیعی قرار می‌دهیم $x=\frac{1}{4m}$

$$g\left(x^{۳}, x\right)=\frac{۱}{\frac{۱}{۲m}}=۲m>m$$

پس g در همسایگی $(۰,۰)$ بی‌کران است نشان می‌دهیم f در $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

$\varepsilon=\frac{1}{4}$ قرار می‌دهیم

$$\forall \delta>۰ \qquad \exists(x, y) \in R^{۲} \qquad \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}<\delta \ , \ |f(x, y)-f(۰,۰)| \geq \frac{۱}{۴}$$

هرگاه $۰<\delta<1$ قرار می‌دهیم $y=\frac{\delta}{2}, x=\frac{\delta^{2}}{4}$ و هرگاه $\delta \geq 1$ قرار می‌دهیم

$y=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{4}$ و $\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}<\delta$ و

$$|f(x, y)-f(۰,۰)|=\left|\frac{\frac{x}{y^{۲}}}{۱+\frac{x}{y^{۲}}}\right|=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

پس

$$(|f(x, y)-f(۰,۰)|) \geq \frac{1}{4}$$

نشان می‌دهیم تحدیه‌های g,f بر هر خط مستقیم در $R^{۲}$ پیوسته است.

معادلهٔ خطوطی که از مبدأ می‌گذرند به صورت $y=mx$ و معادلهٔ خطوطی که از مبدأ نمی‌گذرند به صورت $y=mx+h$ می‌باشد که m,h حقیقی هستند و $h \neq ۰$

$$f(x, m x)=\frac{x(m x)^{۲}}{x^{۲}+(m x)^{۴}}=\frac{x^{۳} m^{۲}}{x^{۲}\left(۱+m^{۴} x^{۲}\right)}$$

$$f(x, m x+h)=\frac{x(m x+h)^{۲}}{x^{۲}+(m x+h)^{۴}} \qquad h \neq ۰$$

می‌توان برای اثبات عدم پیوستگی f در $(۰,۰)$ به روش زیر عمل کرد.

برهان خلف

فرض کنیم f در $(\circ,\circ)$ پیوسته باشد پس باید به ازای هر $(x,y)\in R^2$

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y)=f(\circ,\circ)=\circ$$

ولی اگر $x=y^2$ آنگاه :

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y)=\lim_{(y^{۲},y)\to(\circ,\circ)} f(y,y^{۲})=\lim_{y\to\circ}\frac{y^{۲}(y^{۲})}{(y^{۲})^{۲}+y^{۴}}=\lim_{y\to(\circ)}\frac{y^{۴}}{۲y^{۴}}=\frac{۱}{۲}\neq\circ$$

پس f در $(\circ,\circ)$ ناپیوسته است.

f بر تمامی خطوط مستقیم پیوسته است زیرا به صورت خارج قسمت دو تابع پیوسته است که مخرج کسر همواره مخالف صفر است به همین صورت

$$g(x,mx)=\frac{m^{۲}x^{۳}}{x^{۲}+m^{۶}x^{۶}}=\frac{m^{۲}x}{۱+m^{۶}x^{۴}}$$

$$g(x,mx+h)=\frac{x(mx+h)^{۲}}{x^{۲}+(mx+h)^{۶}}$$

پس g بر تمامی خطوط مستقیم در $R^{۲}$ پیوسته است.

۲۵- اگر E حداکثر یک عضو داشته باشد $f(E)$ نیز حداکثر یک عضو دارد و کراندار است. حال اگر E بیش از یک عضو داشته باشد با توجه به اینکه E کراندار است می‌توانیم قرار دهیم $b=supE$ و $a=infE$ که $a<b$.

f بر E بطور یکنواخت پیوسته است پس به ازای $\varepsilon=۱$،

$$\exists\delta>\circ \quad \ni\forall \quad x,y\in E \qquad |x-y|\le\delta \qquad |f(x)-f(y)|<۱$$

قرار می‌دهیم

$$\forall n=1,2,3,\ldots \qquad ,a_\circ=a$$

$a_n=a_\circ+n\delta$ بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی ، $m\in N$ وجود دارد که $b-a<m\delta$ پس $b<a_m$ درنتیجه $E\subseteq\bigcup_{i=\circ}^{m-1}[a_i,a_{i+1}]$ فرض می‌کنیم k تا $1\le k\le m$ از این بازه‌های بسته با E اشتراک ناتهی دارند پس

$$\forall i=1,2,\dots k \qquad x_i \in \left[a_{n_{i-1}}, a_{n_i}\right] \quad , \quad 1 \le n_i \le m$$

قرار می‌دهیم

$$m=\max\{|f(x_1)|,|f(x_2)|,\dots, \; ||f(x_k)|\}+1$$

به وضوح

$$\forall x \in E \quad , \quad 1 \le i \le k \quad x \in \left[a_{n_{i-1}}, a_n\right]$$

پس $|f(x)| \le |f(x_i)|+1$ بنابراین $|f(x)| \le m$ یعنی f بر E کراندار است.

۲۶- فرض می‌کنیم $f: X \to y$ بطور یکنواخت پیوسته باشد پس

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \ni \forall x,y \in X \quad d_X(x,y) < \delta \qquad d_y(f(x),f(y)) < \frac{\varepsilon}{۲}$$

پس $E \subseteq X \quad , \quad diam E < \delta$

$$\forall \quad x,y \in E \quad d_x(x,y) > \delta, \qquad d_y(f(x),f(y)) < \frac{\varepsilon}{۲} \;\to\; diam f(E) \le \frac{\varepsilon}{۲} < \varepsilon$$

به عکس فرض می‌کنیم

$$\forall \varepsilon > ۰ \qquad \exists \delta > ۰ \;\ni: \quad E \subseteq X \qquad diam E < \delta \qquad diam\, f(E) < \varepsilon$$

فرض می‌کنیم $x,y \in X$ باشند که $d_X(x,y)<\delta$ قرار می‌دهیم $E=\{x,y\}$ واضح است که

$$diam\, E = d_X(x,y) < \delta$$

پس

$$d_y(f(x),f(y)) = diam\, f(E) < \varepsilon$$

۲۷- اگر f پیوستهٔ یکنواخت نباشد ε مثبت و دنباله‌های $\{q_n\},\{p_n\}$ در X موجود هستند بطوریکه $d_X(p_n,q_n) \to ۰$ ولی

$$d_y(f(p_n),f(q_n)) > \varepsilon$$

پس $\{p_n\}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{p_{nk}\}$ است. فرض می‌کنیم

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = p$$

ثابت می‌کنیم

$$\lim_{k\to\infty} q_{n_k} = p$$

داریم

$$d_X\left(q_{n_k}, p\right) \le d_X\left(q_{n_k}, p_{n_k}\right) + d_X\left(p_{n_k}, p\right)$$

یعنی f در $(0,0)$ پیوسته نیست.

روش دوم و مثال نقض برای قسمت دوم: چون $E \subset \overline{E} \subset \overline{E}$ پس E در $\overline{E}$ چگال است و چون f تابعی حقیقی بر E است که بطور یکنواخت پیوسته است بنابراین f توسیع پیوسته‌ای مانند F بر $\overline{E}$ دارد. از طرفی $\overline{E}$ بسته و چون E کراندار است پس $\overline{E}$ هم کراندار است. لذا $\overline{E}$ فشرده است و چون $\overline{E}$ فشرده و F پیوسته است بنابراین $F\left(\overline{E}\right)$ هم فشرده است و چون $F\left(\overline{E}\right)$ حقیقی است پس باید کراندار باشد و چون F توسیع f است لذا $f(E) \subset F\left(\overline{E}\right)$ و بنابراین f بر E کراندار است.

پیشنهاد و مثال نقض:

اگر کراندار بودن E از مفروضات حذف شود نتیجه درست نخواهد بود. به عنوان مثال تابع $f(x) = x$ که بر R تعریف شد یکنواخت است ولی $f(R) = R$ بر R کراندار نیست.

پس

$$\lim d_\alpha\left(q_{n_k}, p\right) \le \lim d_X\left(q_{n_k}, p_{n_k}\right) + \lim d_X\left(q_{n_k}, p\right) = 0 + 0$$

پس

$$\lim_{k\to\infty} q_{n_k} = p$$

از طرفی f در $p \in X$ پیوسته است.

بنابراین

$$\lim_{k\to\infty} f\left(p_{n_k}\right) = f\left(\lim_{k\to\infty}\left(p_{n_k}\right)\right) = f(p)$$

$$\lim_{k\to\infty} f\left(q_{n_k}\right) = f\left(\lim_{k\to\infty}\left(q_{n_k}\right)\right) = f(p)$$

پس

$$\lim_{k\to\infty}(p_{n_k})=\lim_{k\to\infty} f(q_{n_k})$$

پس

$$\exists N>0 \quad \ni \forall\ k\geq N$$

$$d_y\left(f(p_{n_k}),f(q_n)\right)<\varepsilon$$

که تناقض دارد با

$$d_y\left(f(p_n),f(q_n)\right)>\varepsilon$$

بنابراین f بر X بطور یکنواخت پیوسته است.

۲۸- فرض می کنیم $\varepsilon\rangle 0$ باشد ثابت می‌کنیم

$$\exists N>0 \ \ni:\forall\ m,n\geq N, d_y\left(f(x_m),f(x_n)\right)<\varepsilon$$

چون f بر X بطور یکنواخت پیوسته است پس

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni:\forall\ x,y\in X$$

$$d_X(x,y)<\delta \Rightarrow d_y\left(f(x),f(y)\right)<\varepsilon$$

$\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است پس برای

$$\delta>0 \ \ \exists N>0 \ \ \ni:\forall\, m,n\geq N \quad d_X(x_m,y_m)<\delta$$

پس

$$d_y\left(f(x_m),f(x_n)\right)<\varepsilon$$

۲۹- فرض می‌کنیم $g:f(x)\to z, f:x\to y$ توابعی بطور یکنواخت پیوسته باشند. در این صورت

$$gof(x)=g(f(x)) \ \text{با ضابطهٔ}\ gof:X\to z$$

$$\forall x\in X$$

تابعی به طور یکنواخت پیوسته از فضای متری X به توی فضای متری z است.

فرض می‌کنیم $\varepsilon\rangle 0$ دلخواه باشد

$$\exists \delta_1 \rangle \circ \quad \ni: \forall y_1, y_2 \in f(x)$$

$$d_y(y_1, y_2) \langle \delta_1 \Rightarrow d_z(g(y_1), g(y_2)) \langle \varepsilon$$

اکنون برای $\delta_1 \rangle \circ$ مفروض

$$\exists \delta \rangle \circ \quad \ni: \forall\ x_1, x_2 \in X$$

$$d_X(x_1, x_2) \langle d \Rightarrow d_y(f(x_1), f(x_2)) \langle \delta_1$$

پس

$$d_z(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \langle \varepsilon$$

بنابراین

$$\forall\ \varepsilon \rangle \circ \quad \exists \delta \rangle \circ \quad \ni: \forall \quad x_1, x_2 \in X$$

$$d_X(x_1, x_2) \langle \delta \Rightarrow d_z(gof(x_1), gof(x_2)) \langle \varepsilon$$

تمرینات فصل چهارم

۱- فرض کنید f بر بازهٔ باز $]a\ ,\ b[$ تعریف شده باشد، و $x \in]a\ ,\ b[$. دو گزارهٔ زیرین را در نظر بگیرید:

آ) $\lim\limits_{h \to \circ} \ | f(x+h) - f(x) | = 0$

ب) $\lim\limits_{h \to \circ} | f(x+h) - f(x-h) | = 0$

ثابت کنید که همواره می‌توان (ب) را از (آ) نتیجه گرفت، و مثالی بیابید که به ازای آن (ب) برقرار باشد ولی (آ) نباشد.

۲- فرض کنید f در R، به R پیوسته باشد. نشان دهید که اگر به ازای هر x گویا، $f(x)=۰$، آنگاه به ازای هر x حقیقی، $f(x)=۰$.

۳- فرض کنید f بر $R^۲$ تعریف شده باشد. اگر

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

و حدهای یک بعدی $Lim_{y\to b}f(x,y), Lim_{x\to a}f(x,y)$ هر دو وجود داشته باشند، ثابت کنید که

$$\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)]=\lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x,y)]=L$$

حال تابعهای f تعریف شده بر $R^۲$ را به صورتهای زیر در نظر می‌گیریم:

آ) اگر

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(۰\ ,\ ۰)\\ 0 & (x,y)=(۰\ ,\ ۰)\end{cases}$$

ب) اگر

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(۰\ ,\ ۰)\\ 0 & (x,y)=(۰\ ,\ ۰)\end{cases}$$

ج) اگر $f(۰,y)=y, f(x,y)=\dfrac{۱}{x}Sin(xy), x\neq ۰$

د) $$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)Sin(۱/x)Sin(۱/y), y\neq ۰\ ,\ x\neq ۰ & \text{اگر}\\ ۰ & \text{اگر}\ x=۰\ \text{یا}\ y=۰\end{cases}$$

ه) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{Sin\ x-Sin\ y}{\tan x-\tan y} & \text{اگر}\ \tan x\neq\tan y\\ Cos^3 x & \text{اگر}\ \tan x=\tan y\end{cases}$$

در هر یک از مثالهای بالا، معین کنید کدام یک از حدهای زیرین وجود دارد، و مقدار هر یک از این حدها را که وجود دارد ارزیابی کنید.

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)]; \qquad \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

٤- فرض کنید f و g در R، به R پیوسته باشند. آیا درست است که $f(x)=g(x)$ به ازای هر $x\in R$، اگر و فقط اگر $f(y)=g(y)$ به ازای هر عدد گویای $y\in R$؟

٥- اگر $x\in[0,1]$، ثابت کنید که حد زیرین

$$\lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty} Cos^{2n}(m!\pi x)],$$

وجود دارد و مقدار آن، بر حسب آن که x گنگ یاگویا باشد، مساوی ۰ یا ۱ خواهد بود.

٦- با استفاده از نابرابری $|Sinx|\le|x|$ به ازای $x\in R$، نشان دهید که تابع سینوسی در $x=0$ پیوسته است. با استفاده از این مطلب و اتحاد

$$Sin\ x-Sin\ u=2Sin\frac{1}{2}(x-u)Cos\frac{1}{2}(x+u)$$

ثابت کنید که تابع سینوسی در هر نقطهٔ R پیوسته است.

۷- فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، و به ازای هر x گویا، $f(x)=0$، ثابت کنید به ازای هر x در $[a,b]$ ، $f(x)=0$.

۸- با استفاده از نتایج تمرین قبل، نشان دهید که تابع g که در R، به R به صورت

$$g(x)=x\ Sin(1/x), \qquad x\neq 0$$
$$=0, \qquad x=0$$

تعریف شده در هر نقطه پیوسته است. نمودار این تابع را رسم کنید.

۹- فرض کنید h,g,f بر $[0,1]$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

اگر x گنگ باشد، $f(x)=g(x)=h(x)=0$ ؛

اگر x گویا باشد، $g(x)=x, f(x)=۱$؛

اگر x گویا، و به صورت m/n $(n,m$ نسبت به هم اولند) باشد، $h(x)=۱/n$ و $h(۰)=۱$.

ثابت کنید که f در هیچ نقطهٔ $[۰,۱]$ پیوسته نیست، g فقط در $x=۰$ ،h فقط در نقطه‌های گنگ در $[۰,۱]$ پیوسته است.

۱۰- فرض کنید h به ازای $x\in R$ با شرط $x\neq ۰$ به صورت

$$h(x)=Sin(۱/x)$$

تعریف شده باشد. نشان دهید که h هر طور در $x=۰$ تعریف شود، در $x=۰$ ، ناپیوسته است.

۱۱- به ازای هر x در $[۰,۱]$، اگر x گویا باشد، قرار دهید $f(x)=x$، و اگر x گنگ باشد، قرار دهید $f(x)=۱-x$. ثابت کنید که:

آ) به ازای هر x در $[۰,۱]$, $f(f(x))=x$

ب) به ازای هر x در $[۰,۱]$, $f(x)+f(۱-x)=۱$

ج) f فقط در نقطهٔ $x=۱/۲$ پیوسته است.

د) f هر مقدار بین ۰،۱ را می‌گیرد.

ه) به ازای هر y,x در $[۰,۱]$, $f(x+y)-f(x)-f(y)$ گویا است.

۱۲- فرض کنید $F:R^۲\to R$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & x,y\in Q \quad \text{هرگاه} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نقاطی را که در آنها F پیوسته است تعیین کنید.

۱۳- فرض کنید f تابعی باشد که بر R تعریف شده باشد،و دست کم در یک نقطهٔ R مانند $x_۰$ پیوسته باشد. همچنین به ازای هر y,x در R، f در معادلهٔ زیرین صدق کند:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

ثابت کنید عدد پایائی مانند a هست بقسمی که به ازای هر x، $f(x)=ax$.

۱٤- فرض کنید f یک تابع جمعی پیوسته در R باشد. هرگاه $c=f(1)$، نشان دهید که به ازای هر x در R ، $f(x)=cx$. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که هرگاه r عددی گویا باشد، $f(r)=cr$.)

۱۵- فرض کنید که f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، و تابع g را به صورت زیرین تعریف کنند: $g(a)=f(a)$ و به ازای هر x که $a<x\le b$، $g(x)$ مساوی مقدار ماکزیمم f در زیر بازهٔ $[a,x]$ باشد. نشان دهید که g بر $[a,b]$ پیوسته است.

۱٦- فرض کنید $g:R\to R$ در رابطهٔ

$$g(x+y)=g(x)g(y)$$

به ازای $x,y\in R$ صدق کند، نشان دهید که هرگاه g در $x=0$ پیوسته باشد، g در هر نقطه پیوسته است. همچنین، اگر به ازای یک $a\in R$، $g(a)=0$، آنگاه به ازای هر $x\in R$ ، $g(x)=0$

۱۷- فرض کنید تابع f بر مجموعهٔ بستهٔ S در R تعریف شده و پیوسته باشد. قرار دهید

$$A=\{x\mid f(x)=0\ ,\ x\in S\}.$$

ثابت کنید که A یک زیرمجموعهٔ بستهٔ R می‌باشد.

۱۸- اگر $|f|$ در یک نقطه پیوسته باشد، آیا f نیز در این نقطه پیوسته است؟

۱۹- به ازای تابع مفروض $f:R\to R$، دو مجموعهٔ B,A را در R^2 به صورت زیر تعریف کنید:

$$A=\{(x,y)\mid y<f(x)\},\ \ B=\{(x,y)\mid y>f(x)\}.$$

ثابت کنید f بر R وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که B,A هر دو زیرمجموعه‌های باز R^2 باشند.

۲۰- فرض کنید $f,g:R^p \to R$ در نقطه‌ای مانند $a\in R^p$ پیوسته باشند و h و k در R^p به R به صورت

$$h(x)=\sup\{f(x)\ ,g(x)\}. \qquad k(x)=\inf\{f(x)\ ,g(x)\}$$

تعریف شده باشند. نشان دهید که k,h در a پیوسته هستند. (راهنمایی: توجه کنید که

$$(\inf\{b,c\}=\frac{۱}{۲}(b+c-|b-c|),\sup\{b,c\}=\frac{۱}{۲}(b+c+|b-c|)$$

۲۱- فرض کنید f بر بازهٔ فشردهٔ S در R تعریف شده و بر آن کراندار باشد. اگر $T\subseteq S$، عدد

$$\Omega_f(T)=\sup\{f(x)-f(y)\mid x\in T,y\in T\}$$

را نوسان (یا پیما)ی f بر T می‌نامند. اگر $x\in S$، بنابر تعریف، نوسان f در x مساوی عدد زیرین است:

$$\omega_f(x)=\underset{h\to\circ+}{Lim}\,\Omega_f(B(x;h)\cap S)$$

ثابت کنید این حد همواره وجود دارد، و $\omega_f(x)=\circ$ وقتی، و فقط وقتی، که f در x پیوسته باشد.

۲۲- هرگاه $x\in R$ ، اغلب $[x]$ را بزرگترین عدد صحیح $n\in Z$ به طوری که $n\le x$ تعریف می‌کنیم. نگاشت $x\to[x]$ را تابع بزرگترین مقدار صحیح می‌گوییم. نمودار تابعی که به ازای هر $x\in R$ با

(الف) $f(x)=[x]$ ، (ب) $g(x)=x-[x]$

(پ) $h(x)=[۲Sinx]$ ، (ت) $k(x)=Sin\frac{۱}{۲}[x]$

۲۳- فرض کنید f بر بازهٔ فشردهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد. همچنین f در $x_۲,x_۱$ ماکزیمم موضعی داشته باشد. نشان دهید که باید نقطهٔ سومی بین $x_۲,x_۱$ باشد که f در این نقطه دارای مینیمم موضعی باشد.

تبصره: منظور از این که f در x_1 ماکزیمم موضعی دارد این است که گویی یک بعدی مانند $B(x_1)$ هست بقسمی که به ازای هر x در $B(x_1)\cap[a,b]$، $f(x)\le f(x_1)$. مینیمم موضعی به نحو مشابه تعریف می‌شود.

۲۴- فرض کنید f در $I=[a,b]$ با تعریف تمرین قبل صعودی باشد. می‌نویسیم:

$$j_c=\inf\{f(x):x>c\}-\sup\{f(x):x<c\}$$

اگر $j_c>0$ ، می‌گوئیم f در نقطه c دارای جهش j_c است.

الف) هرگاه $n\in N$، نشان دهید که فقط تعداد با پایانی نقطه در I می‌توانند باشند که f در آنها جهشی بیش از n ۱ داشته باشد.

ب) نشان دهید که تابع صعودی می‌تواند حداکثر مجموعهٔ شمارش‌پذیری نقاط ناپیوسته داشته باشد.

۲۵- فرض کنید تابع حقیقی f بر بازهٔ $[0,1]$ پیوسته، و دارای خاصیت زیرین باشد: به ازای هر عدد حقیقی مانند y، یا این که نقطه‌ای مانند x در $[0,1]$ نباشد که به ازای آن $f(x)=y$، یا فقط یک x در $[0,1]$ با این خاصیت وجودداشته باشد. ثابت کنید که f بر $[0,1]$ یکنوای اکید است.

۲۶- قضیهٔ پیوستگی همه‌جایی را در مورد توابع حقیقی $f(x)=x^2$ و $g(x)=1/x$، به ازای $x\neq 0$، تعبیر نمایید. چند مجموعهٔ باز و بسته را اختیار کنید و تصویرهای وارون آنها را تحت g,f بیابید.

۲۷- فرض کنید تابع f بر $[0,1]$ تعریف شده، و دارای خاصیت زیرین باشد: به ازای هر عدد حقیقی مانند y، یا نقطه‌ای مانند x در $[0,1]$ نباشد که به ازای آن $f(x)=y$، یا فقط دو مقدار برای x در $[0,1]$ باشد که به ازای آنها $f(x)=y$.

آ) ثابت کنید که f نمی‌تواند بر $[0,1]$ پیوسته باشد.

ب) تابع f را بقسمی بسازید که دارای خاصیت یاد شده باشد.

ج) ثابت کنید هر تابع دارای خاصیت یاد شده تعدادی نامتناهی ناپیوستگی بر $[0,1]$ دارد.

۲۸- فرض کنید $h: R \to R$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$h(x) = 1 \qquad 0 \le x \le 1 \quad \text{هرگاه}$$

$$= 0 \qquad \text{در غیر این صورت}$$

مجموعهٔ باز G و مجموعهٔ بستهٔ F را طوری بیابید که نه $h^{-1}(G)$ در R باز باشد و نه $h^{-1}(F)$ در R بسته.

۲۹- در هر یک از حالتهای زیرین، تابعی مانند f ارائه دهید که بر S پیوسته باشد و $f(S) = T$، یا توضیح دهید چرا یک چنین تابعی نمی‌توان وجود داشته باشد:

آ) $S =]0\,,1[$ $\qquad$ $T =]0\,,1[$.

ب) $S =]0\,,1[$، $\qquad$ $T =]0\,,1[\cup]1\,,2[$

ج) $S = R^1$، $\qquad$ T مجموعهٔ عددهای گویا.

د) $S = [0\,,1] \cup [2\,,3]$ $\qquad$ $T = \{0\,,1\}$

ه) $S = [0\,,1] \times [0\,,1]$ $\qquad$ $T = R^2$

و) $S = [0\,,1] \times [0\,,1]$ $\qquad$ $T =]0\,,1[\times]0\,,1[$

ز) $S =]0\,,1[\times]0\,,1[$ $\qquad$ $T = R^2$

۳۰- زیرمجموعهٔ $D \subseteq R^p$ ناهمبند است اگر و فقط اگر تابع پیوسته‌ای مانند $f: D \to R$ باشد به قسمی که $f(D) = \{0,1\}$.

۳۱- ثابت کنید f بر S وقتی، وفقط وقتی، پیوسته است که به ازای هر زیرمجموعهٔ S مانند A، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۳۲- فرض کنید f در R^2، به R^q پیوسته باشد. توابع g_1, g_2 در R به R^q را با

$$g_1(t) = f(t,0) \quad , \quad g_2(t) = f(0,t)$$

تعریف کنید. نشان دهید که g_1, g_2 پیوسته‌اند.

۳۳- تابع $f:S\to T$ را یک نگاشت بسته بر S نامند در صورتی که به ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ S مانند A، نقش $f(A)$ در T بسته باشد. ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته و بسته است که به ازای هر زیرمجموعهٔ S مانند A،

$$f(\overline{A})=\overline{f(A)}$$

۳٤- فرض کنید f در I به R پیوسته باشد و $f(\circ)<\circ$, $f(\text{۱})>\circ$. اگر $n=\{x\in I: f(x)<\circ\}$, $c=\sup N$، نشان دهید که $f(c)=\circ$.

۳۵- تابعی پیوسته مانند f و دنباله‌ای کشی مانند $\{x_n\}$ در فضائی متری چون S بقسمی بیابید که $\{f(s_n)\}$ یک دنبالهٔ کشی در T نباشد.

۳٦- فرض کنید f یک تابع پیوسته در R به R باشد که اکیداً صعودی است (بدین معنی که هرگاه $x'<x''$, $f(x')<f(x'')$). ثابت کنید که f یک به یک است و تابع وارونش f^{-1} پیوسته و اکیداً صعودی است.

۳۷- ثابت کنید فضای متری S وقتی، و فقط وقتی، ناهمبند است که S زیرمجموعه‌ای ناتهی مانند A داشته باشد با این خاصیت که $A\neq S$، و A در S هم مجموعه‌های S که در S هم باز و هم بسته‌اند مجموعهٔ تهی و خود S باشند.

۳۸- فرض کنید f یک تابع پیوسته در R به R باشد به قسمی که هیچیک از مقادیر تابع دوبار به دست نیاید. آیا درست است که f باید اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد؟

٤۰- نشان دهید توابع $g(x)=Sinx$, $f(x)=\frac{\text{۱}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}}$ که روی $D=\{x\in R: x\geq\circ\}$ تعریف شده‌اند در R پیوستهٔ یکنواخت هستند.

٤۱- ثابت کنید تابعی که بر S پیوستهٔ یکنواخت باشد، بر این مجموعه پیوسته نیز هست.

٤۲- نشان دهیدکه توابع $k(x)=e^{-x}$, $h(x)=x$ تعریف شده در $D=\{x\in R: x\geq\circ\}$ روی D پیوستهٔ یکنواخت هستند.

۴۳- اگر به ازای هر x در R، $f(x)=x^{۲}$، ثابت کنید f بر R پیوستهٔیکنواخت نیست.

۴۴- نشان دهید که توابع زیر در دامنه‌هایشان پیوستهٔ یکنواخت نیستند.

الف) $f(x)=۱/x^{۲}$, $D(f)=\{x\in R: x>۰\}$

ب) $g(x)=\tan(x)$, $D(g)=\{x\in R: ۰\le x<\pi/۲\}$

پ) $h(x)=e^{x}$, $D(h)=R$

ت) $k(x)=Sin(۱/x)$, $D(k)=\{x\in R: x>۰\}$

۴۵- فرض کنید f بر مجموعهٔ کراندار S در R^{n} پیوستهٔ یکنواخت باشد. ثابت کنید که f بر S باید کراندار باشد.

در تمرینات ۴۶ الی ۴۸ تابعهای f بر $R^{۱}$ با یک معادله تعریف شده‌اند. در هر مورد ناپیوستگیها و نوع آنها رامشخص کنید.

۴۶- اگر $x\ne ۰$, $f(x)=(Sinx)/x$, $f(۰)=۰$

۴۷- اگر $x\ne ۰$, $f(x)=e^{۱/x}$, $f(۰)=۰$

۴۸- اگر $x\ne ۰$, $f(x)=e^{۱/x}+Sin(۱/x)$, $f(۰)=۰$

۴۹- اگر $x\ne ۰$, $f(x)=۱/(۱-e^{۱/x})$, $f(۰)=۰$

۵۰- تابع $g: R\to R^{q}$ را دوره‌ای گوییم هرگاه عددی مانند $p>۰$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $g(x+p)=g(x), x\in R$. نشان دهید که یک تابع دوره‌ای پیوسته، در R کراندار و پیوستهٔ یکنواخت است.

۵۱- فرض کنید f بر بازهٔ باز $]a,b[$ تعریف شده باشد، و به ازای هر نقطهٔ درونی $]a,b[$ مانند x، گویی یک بعدی مانند $B(x)$ باشد که در آن f صعودی باشد. ثابت کنید که f در سراسر $]a,b[$ صعودی است.

۵۲- فرض کنید f از $D \subseteq R^p$ به R^q تعریف شده، و f در D پیوستهٔ یکنواخت باشد.هرگاه (x_n) یک دنبالهٔ کوشی در D باشد، نشاندهید که $(f(x_n))$ یک دنبالهٔ کوشی در R^q است.

۵۳- فرض کنید f بر بازهٔ فشردهٔ $]a,b[$ پیوسته باشد، و همچنین f در هیچ یک از نقطه‌های درونی این بازه ماکزیمم یا مینیمم موضعی نداشته باشد.

۵٤- فرض کنید $f:(\circ\, ,\, ۱)\to R$ در $(\circ\, ,\, ۱)$ پیوستهٔیکنواخت باشد. نشان دهید که f را می‌توان در $x=\circ$, $x=۱$ چنان تعریف کرد که در $[\circ\, ,\, ۱]$ پیوسته باشد.

۵۵- تابع f را بقسمی بیابید که بر مجموعه‌ای مانند S در R تعریف شده و صعودی اکید باشد، ولی $f^{-۱}$ بر $f(S)$ پیوسته نباشد.

۵٦- هرگاه f , g در R به R پیوستهٔ یکنواخت باشند، نشان دهید که $f+g$ نیز در R پیوستهٔ یکنواخت است، اما ممکن است fg در R پیوستهٔ یکنواخت نباشد حتی وقتی f یا g کراندار است.

۵۷- فرض کنید بر یک مجموعهٔ R مانند S صعودی اکید باشد. همچنین نقش $f(S)$ یکی از خاصیتهای زیرین را داشته باشد: (آ) $f(S)$ باز باشد؛ (ب) $f(S)$ همبند باشد؛ (پ) $f(S)$ بسته باشد. در این صورت، ثابت کنید که f باید بر S پیوسته باشد.

۵۸- هرگاه $f:I\to I$ پیوسته باشد. نشان دهید که f در I یک نقطهٔ ثابت دارد. (راهنمایی: تابع $g(x)=f(x)-x$ را در نظر بگیرید.)

۵۹- فرض کنید g و f توابع پیوسته‌ای در $[a,b]$ باشند به قسمی که

$$R(f)\subseteq R(g)=[\circ\, ,\, ۱]$$

ثابت کنید نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ هست به قسمی که $f(c)=g(c)$.

٦۰- هرگاه f یک تابع حقیقی پیوسته باشد که بر مجموعهٔ بستهٔ $E\subset R^۱$

تعریف شده است، ثابت کنید تابعی حقیقی و پیوسته بر R^1 چون g هست بطوری که به ازای هر $x \in E$، $g(x)=f(x)$ ، (این gها را توسیعهای پیوستهٔ f از E به R^1 می‌نامند.) نشان دهید که نتیجهٔ فوق با حذف کلمهٔ بسته درست نیست. این نتیجه را به توابع برداری تعمیم دهید. راهنمایی : فرض کنید نمودار g بر هر یک از قطعه‌هایی که متمم E را می‌سازند بگذاریم، نتیجهٔ مورد نظر باز هم برقرار است، لکن اثباتش چندان ساده نخواهد بود.

فصل پنجم

مشتق

در این فصل مشتق توابع را از دیدگاه آنالیز مورد ارزیابی قرار می دهیم و با استفاده از دنباله ها بصورتی ظریف بر پایه دنبالها مشتق توابع را ارزیابی می نماییم.

۵-۱ مشتق تابع

تعریف: برای تابع $y=f(x)$ که در فاصله $[a,b]$تعریف شده ، به ازای $x\in(a,b)$ حاصل

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

درصورت وجود مشتق تابع در نقطه x نامیده می‌شود.

توجه کنید که اگر $x=a$ یا $x=b$ باشد به ترتیب $\lim_{t\to a^+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ و $\lim_{t\to b^-}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ مشتق راست و چپ به ترتیب در b,a می‌باشند. بعبارت معادل گوییم تابع f در x مشتق‌پذیر است اگر عددی حقیقی چون L موجود باشد بطوریکه

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\,\delta>0 \qquad \forall \quad t\in D_f \ \left(0<|t-x|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(t)-f(x)-L}{t-x}\right|<\varepsilon\right)$$

قبلاً دیدیم که اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L$ آنگاه برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که جملات آن متمایز باشند اگر $x_n\to a$ آنگاه $f(x_n)\to L$

اکنون با استفاده از مطلب اخیر می‌توان گفت که تابع f در x مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ با شرط $x_n \neq x$ داشته باشیم

$$x_n \to x \Rightarrow \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} \to f'(x)$$

مثال ۱ : اگر $f(x)=x^2$ مطلوبست محاسبهٔ $f'(1)$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

مثال ۲ : اگر $f(x)=[x]$ آیا $f'(1)$ موجود است؟

مشتق f در $x=۱$ وجود ندارد زیرا $\lim_{x\to ۱}\frac{[x]-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ موجود نیست.

مثال ۳ : اگر $f(x)=\begin{cases} x^2\left[\frac{1}{x}\right] & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰\end{cases}$ آیا $f'(۰)$ موجود است؟

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^2\left[1/x\right]}{x}=\lim_{x\to ۰}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[t]}{t}=1$$

با تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ خواهیم داشت

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[t]}{t}=1$$

توجه کنید که تابع f در صفر پیوسته است زیرا

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}x^2\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[t]}{t^2}=۰$$

حد تابع با مقدار تابع در صفر برابر است بنابراین ملاحظه می‌شود که تابع پیسته نیز می‌باشد. تابع در تمام $\frac{1}{n}$ها ناپیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} \circ & 1<x \\ x^2 & \frac{1}{2}<x\le 1 \\ 2x^2 & \frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2} \\ \vdots & \\ nx^2 & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n} \end{cases}$$

۵-۱-۱ قضیه : اگر تابع f در $x=\circ$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در x پیوسته است.

اثبات: برای آن‌که نشان دهیم f در x پیوسته است باید نشان دهیم

$$\lim_{t\to x} f(t)=f(x)$$

داریم

$$\lim_{t\to x} f(t)=\lim_{t\to x}\big(f(t)-f(x)+f(x)\big)$$
$$=\lim_{t\to x}\big(f(t)-f(x)\big)+\lim_{t\to x} f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right)(t-x)+f(x)=$$
$$f'(x)\times\circ+f(x)=f(x)$$

مثال٤ : مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 Sin\frac{1}{x} & x\neq\circ \\ \circ & x=\circ \end{cases}$ را در $x=\circ$ بررسی کنید.

$$f'(x)=\lim_{x\to\circ}\frac{x^2 Sin\,{}^{1}\!/_{x}-\circ}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ} x\,Sin\frac{1}{x}=\circ$$

بنابر آنچه ملاحظه می شود تابع مشتقپذیر است.

۵-۱-۲ قضیه : اگر توابع g,f به $[a,b]$ تعریف شده باشند و برای هر $x\in[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه مجموع و حاصل ضرب روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر است و خارج قسمت ${}^{f}\!/_{g}$ نیز در نقاطی که $g(x)\neq\circ$ مشتق‌پذیر است و داریم

الف: $\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$

ب: $\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$

پ:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

اثبات ب: داریم

$$\left(f(x)\,g(x)\right)' = \lim_{t\to x}\frac{f(t)g(t) - f(x)g(x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{f(t)g(t) + f(x)g(t) - f(x)g(x) - f(x)g(x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{g(t)(f(t) - f(x))}{t-x} + \frac{f(x)(g(t) - g(x))}{t-x}$$

چون f , g در x مشتق‌پذیرند داریم:

$$= \lim_{t\to x} g(t) \lim_{t\to x}\frac{f(t) - f(x)}{t-x} + f(x)\lim_{t\to x}\frac{g(t) - g(x)}{t-x}$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = \lim_{t\to x}\frac{f(t)g(t) - f(x)g(x)}{t-x} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

اثبات پ)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{t\to x}\frac{\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)g(x) - g(t)f(x)}{g(t)g(x)(t-x)}$$

$$= \lim_{t\to x}\frac{f(t)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - g(t)f(x)}{g(t)g(x)(t-x)} =$$

$$\lim_{t\to x}\left[\frac{\cancel{g(x)}(f(t) - f(x))}{g(t)\cancel{g(x)}(t-x)} + \frac{f(x)(g(x) - g(t))}{g(t)g(x)(t-x)}\right] =$$

$$\lim_{t\to x}\frac{1}{g(t)}\lim_{t\to x}\frac{f(t) - f(x)}{t-x} - \lim_{t\to x}\frac{f(x)}{g(t)g(x)}\lim_{t\to x}\frac{g(t) - g(x)}{t-x}$$

$$= \frac{1}{g(t)}f'(x) - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

مثال ٤ : مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 Sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 Sin\,{}^{1}\!/_{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\,Sin\frac{1}{x}=0$$

بنابر آنچه ملاحظه می شود تابع مشتقپذیر است.

تمرینات فصل پنجم

۱- گوئیم تابع f در شرط لیپ شیتس از مرتبهٔ α در نقطهٔ c صدق می‌کند وقتی که عددی مثبت مانند M (M ممکن است بستگی به c داشته باشد) و گویی یک بعدی چون $B(c)$ وجود داشته باشد بقسمی که هرگاه $x \neq c, x \in B(c)$، آنگاه

$$|f(x) - f(c)| < M|x - c|^{\alpha}$$

آ) فرض کنید f تابعی باشد که در شرط لیپ شیتس از مرتبهٔ α در نقطهٔ c صدق می‌کند. نشان دهید که اگر $f, \alpha > ۰$ در c پیوسته است، و اگر $f, \alpha > 1$ در c مشتق دارد.

ب) تابعی را مثال بزنید که در نقطه‌ای مانند c در شرط لیپ شیتس از مرتبهٔ یک صدق کند ولی $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

۲- اگر f , g توابعی حقیقی باشند که در یک فاصلهٔ J تعریف شده‌اند، و ایندو تابع در یک نقطهٔ c مشتق‌پذیر باشند، آنگاه نشان دهید که h حاصلضرب آنها که برای $x \in J$ با $h(x) = f(x)g(x)$ تعریف شده است، در نقطهٔ c دارای مشتق است و

$$h'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

۳- f را به صورت زیرین تعریف کنید: اگر

$$.f(۰) = ۰ \ , \ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq ۰$$

نشان دهید که

آ) f به ازای هر x پیوسته است.

ب) $f^{(n)}$ به ازای هر x پیوسته است، و $f^{(n)}(0)=0$, $(n=1,2,\ldots)$. h,g,f را به صورت زیرین تعریف کنید: $f(0)=g(0)=h(0)=0$ و اگر $f(x)=Sin(1/x), x\neq 0$ ، $g(x)=xSin(1/x)$, $h(x)=x^2Sin(1/x)$. نشان دهید که

آ) اگر $x\neq 0$, $f'(x)=-1/x^2Cos(1/x)$, $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) اگر $x\neq 0$, $g'(x)=Sin(1/x)-1/xCos(1/x)$, $g'(x)$ وجود ندارد.

ج) اگر $x\neq 0$, $h'(x)=2xSin(1/x)-Cos(1/x)$, $h'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}h'(x)$ وجود ندارد.

٤- نشان دهید تابعی که برای $x\neq 0$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=Sin(1/x)$$

در هر نقطهٔ مخالف با صفر، مشتق‌پذیر است. نشان دهید که مشتق آن در همسایگی $x=0$ کراندار نیست. (می‌توانید از اتحادهای مثلثاتی، پیوستگی توابع سینوس و کسینوس و رابطهٔ حدی $Sin\,u/u\to 1$ وقتی که $u\to 0$، استفاده کنید.)

۵- فرض کنید f در هر نقطهٔ بازهٔ باز $]a,b[$ مشتق متناهی داشته باشد. همچنین در یک نقطهٔ درونی مانند c, $Lim_{x\to c}f'(x)$ وجود داشته و متناهی باشد. ثابت کنید که مقدار این حد باید مساوی $f'(c)$ باشد.

٦- نشان دهید تابعی که به صورت

$$g(x)=\begin{cases}x^2Sin(1/x) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تعریف شده است. برای تمام مقادیر حقیقی مشتق‌پذیر است، اما g' در $x=0$ پیوسته نیست.

۷- فرض کنید f بر $[\circ, ۱]$ پیوسته باشد، و $f(\circ)=\circ$. همچنین به ازای هر x در $]\circ, ۱[$ ، $f'(x)$ متناهی باشد. تابع g را بر $]\circ, ۱[$ با معادلهٔ $g(x)=f(x)/x$ تعریف کنید. ثابت کنید هرگاه f' بر $]\circ, ۱[$ صعودی باشد، آنگاه g نیز بر این بازه صعودی خواهد بود.

۸- تابع $h: R \to R$ که برای $x \in Q$ با $h(x)=x^۲$ و برای $x \notin Q$ با $h(x)=\circ$ تعریف شده است، تنها در یک نقطه پیوسته است. آیا در این نقطه مشتق‌پذیر است؟

۹- فرض کنید f در $]a,b[$ مشتق نامتناهی داشته باشد، و بر $[a,b]$ پیوسته باشد، و به ازای هر x در $[a,b]$، $a \le f(x) \le b$، و به ازای هر x در $]a,b[$ ، $|f'(x)| \le \alpha < 1$. ثابت کنید که f در $[a,b]$ فقط یک نقطهٔ ثابت دارد.

۱۰- (داربو) هرگاه f، در $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد اگر

$f'(b)=B, f'(a)=A$ وعدد C

بین A , B باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در (a,b) وجود دارد به قسمی که $f'(c)=C$ (راهنمایی: کران پایین تابع $g(x)=f(x)-C(x-a)$ را در نظر بگیرید.)

۱۱- دو تابع مانند f , g مثال بزنید که در $]\circ, ۱[$ دارای مشتقهای متناهی باشند و $\lim_{x\to\circ} \frac{f(x)}{g(x)}=\circ$ و g چنان اختیار شده باشد که $g'(x)$ هرگز صفر نشود و $\lim_{x\to\circ} f'(x)/g'(x)$ وجود نداشته باشد.

۱۲- هرگاه برای $x<\circ$ ، $g(x)=\circ$ و برای $x \ge \circ$ ، $g(x)=۱$، ثابت کنید که تابع $f: R \to R$ به قسمی که برای هر $x \in R$، $f'(x)=g(x)$ وجود ندارد.

۱۳- تابع f را که بر $R^۲$ با دستور

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}.$$

تعریف شده در نظر بگیرید.ثابت کنید به ازای هر (x,y) در $R^۲$ ، مشتقهای جزئی $D_۱f(x,y), D_۲f(x,y)$ وجود دارند، و مقدارهای این مشتقها را به صورت رابطه‌هائی صریح از y,x ارزیابی کنید. همچنین، نشان دهید که f در نقطهٔ $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

۱٤- مثالی بزنید از تابعی پیوسته که تنها یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد ولی مشتق آن در $(۱ , ۰)$ کراندار نباشد.

۱۵- فرض کنید تابع f بر $R^۲$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

اگر

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول و دوم f را در مبدأ (در صورت وجود) محاسبه کنید.

۱٦- تابع $f:R\to R$ را زوج گوییم هرگاه $f(-x)=f(x)$ برای هر $x\in R$ و آن را فرد گوییم هرگاه $f(-x)=-f(x)$ برای هر $x\in R$. هرگاه f در R مشتق‌پذیر و زوج (فرد) باشد، نشان دهید که f' فرد (زوج) است.

مراجع

۱) اصول آنالیز حقیقی، ربرت جی.بارتل، ترجمه جعفر زعفرانی، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶.

۲) آشنایی با آنالیز ریاضی، ویلیام ر.چارزینسکی، فیلیپ و.ریپس، ترجمه سید محمود طالبیان، انتشارات آستان قدس رضوی، شماره ۱۲۳، ۱۳۶۹.

۳) آنالیز ریاضی، دیوید و.وایدر،ترجمه دکتر علیرضا مدقالچی - سید محمود طالبیان، دانشگاه تربیت معلم، سبزوار،۱۳۷۵.

٤) آنالیز ریاضی، تالیف غلامحسین مصاحب، انتشارات فرانکلین، ۱۳٤۸، ۱۳۵۰، ۱۳۵۲.

۵) روشهای آنالیز حقیقی، ریچارد گولدبرگ، ترجمه محمد علی پور عبدالله نژاد - باقر نشوادیان، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۱.

٦) تابع گاما، امیل آرتین، ترجمه سعید ذاکری، انتشارات مرکز نشردانشگاهی، ۱۳۶۹.

۱) Aspotol, Tom M. Mathematical Analysis, Addison Wesley Publishing Company, ۱۹٦۵.

۲) Boyer, Carl, B. A History of Mathematics, John Wiley & Sons, ۱۹۸۹.

۳) Burkill J. C. & Burkill H. The Second Course in Mathrmamical, Analysis, International Student Edition, ۱۹٦۳.

٤) Madox I. J. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, ۱۹۷٦.

۵) Rudin Walter, Principles of Mathemetical analysis, ۱۹۷٦.

٦) Simmons J. F, Introduction of Topology and Modern Analysis, International Student Edition, ۱۹٦۳.

Bu-Ali sina Univercity
Hamadan - Iran

شرح حال مؤلف: هرچند که دوره دبیرستان در رشته برق (الکتروتکنیک) تحصیل می‌نمود ولی استعداد و علاقه وی به ریاضیات باعث شد در رشته ریاضی وارد دانشگاه شود. تحصیل در رشته دبیری ریاضی و بهره گیری از اساتید برجسته دانشگاه شیراز در دوره لیسانس باعث شد قدرت تفهیم ، ساده گویی و ساده نویسی خوبی داشته باشد. بعد از اتمام دوره لیسانس با کسب رتبه یک رقمی کشور در دروس ریاضی و رتبه سیزده با احتساب درس زبان تخصصی در رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف پذیرفته شد به محض اتمام دوره کارشناسی ارشد در دانشگاه بوعلی سینا که محل تولد و سکونتش بود شروع به تدریس و تألیف کتابهای ریاضی کرد. طی یازده سال تلاش شبانه روزی شاهکار خود کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی را تألیف و سپس دوره دکترا را در دانشگاه علم و صنعت شروع و طی حدود سه سال نیم موفق به اخذ درجه دکترا شد .

Mathematical Analysis 1

By: G. R. Safakish

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۱۲۸-۰۲۹-۶