آنالیز ریاضی ۱

مجید اسحقی گرجی

به نام خدا

آنالیز ریاضی I

تألیف

دکتر مجید اسحقی گرجی

عضو هیئت علمی دانشگاه سمنان

شهریور ۱۳۸۴

اسحقی گرجی، مجید، ۱۳۵۱ -
آنالیز ریاضی I/ تألیف مجید اسحقی گرجی. -- تهران: حفیظ، ۱۳۸۴.
۱۳۸ ص.
ISBN:964-8623-20-1 : ۳۰۰۰۰ ریال
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱. آنالیز ریاضی. ۲. آنالیز ریاضی -- مسائل ، تمرینها و غیره (عالی).
۳. آنالیز ریاضی -- آزمونها و تمرینها (عالی) . الف. عنوان .
۸آ۴۶ الف / ۳۰۰ QA   ۵۱۵

نام کتاب: .... آنالیز ریاضی I
ناشر: .... انتشارات حفیظ ۰۹۱۲۱۸۹۰۸۲۴-۶۶۷۲۲۱۸۱
تألیف: .... دکتر مجید اسحقی گرجی
حروفچینی و صفحه‌آرائی: .... حمیدرضا شعوری ۰۹۱۲۲۹۳۶۶۵۴
طراحی جلد: .... داروگ
لیتوگرافی: .... سعید
چاپ: .... الهادی
نوبت چاپ: .... اول / ۱۳۸۴
تیراژ: .... ۱۵۰۰ نسخه
قیمت: .... ۳۰۰۰۰ ریال

شابک: ۱ - ۲۰ - ۸۶۲۳ - ۹۶۴   ISBN: 964 - 8623 - 20 - 1

تهران - خیابان انقلاب - بعد از پارک دانشجو - ساختمان ۱۱۳۴ - واحد ۱۱
انتشارات حفیظ

پیشگفتار مؤلف

کتاب حاضر حاصل تجربه چندین بار تدریس آنالیز ریاضی در دوره کارشناسی می‌باشد که تقدیم به علاقمندان می‌شود. در این کتاب از اثبات بعضی از قضایا صرفنظر شده است و علاقمندان می‌توانند اثبات آنها را در مراجع [۱] و [۲] بیابند. برخی از مسائل و مثالهایی که در این کتاب آورده شده‌اند، جدید بوده و جهت تفهیم و شهودی‌تر شدن درس آنایز ریاضی I، مفید می‌باشند. این کتاب می‌تواند برای شرکت در مسابقات ریاضی دانشجویی و آزمون کارشناسی ارشد بسیار مؤثر باشد.

با توجه به اینکه هدف ما در هر فصل جمع آوری اطلاعات کامل در یک زمینه بوده، در فصل سوم به اجبار از مفهوم مشتق که مربوط به فصل چهارم است، استفاده کرده‌ایم. بدیهی است که این اثر از عبارات نارسا و غیرمنطبق با متن بی‌بهره نیست. امید است خوانندگان گرامی، مؤلف را از نظرات اصلاحی خویش بهره‌مند سازند تا در چاپهای بعدی جهت رفع نقایص اقدام گردد.

مجید اسحاقی گرجی
شهریورماه
۱۳۸۴

فهرست مندرجات

۱	فضاهای متریک و توپولوژی پایه	۱
۲	حد و پیوستگی در فضاهای متریک	۳۳
۳	پیوستگی یکنواخت	۵۵
۴	مشتق	٦۷
۵	دنباله‌ها و سری‌ها در اعداد حقیقی	۸۱
A	تستهای چهار گزینه‌ای	۱۰۵

فصل ۱

فضاهای متریک و توپولوژی پایه

۱ ـ ۱ ـ تعریف: فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرخالی و $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع با شرایط زیر باشد:

۱) برای هر x و y از X داشته باشیم $d(x,y) \geq 0$.

۲) برای هر x و y از X داشته باشیم $d(x,y) = d(y,x)$.

۳) برای هر x و y از X داشته باشیم $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

۴) برای هر x و y و z از X داشته باشیم

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ ,$$

در این صورت d را یک متریک روی X می‌نامیم و (X, d) را یک فضای متریک می‌نامیم (یا می‌گوئیم X یک فضای متریک با متریک d است).

۱ ـ ۲ ـ **مثال:** فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $d(x, y) = |x - y|$ در این صورت (X, d) یک فضای متریک است که آن را با $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ نمایش می‌دهیم.

۱ ـ ۳ ـ **مثال:** فرض کنیم برای $X, Y \in \mathbb{R}^k$ داشته باشیم $d(X, Y) = \|X - Y\|$ (اگر $X = (x_۱, x_۲, \ldots, x_k)$ و $Y = (y_۱, y_۲, \ldots, y_k)$ داریم $\|X - Y\| = \left(\sum_{i=۱}^{k}(x_i - y_i)^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$). در این صورت $(\mathbb{R}^k, d)$ یک فضای متریک است که d را متریک اقلیدسی روی $\mathbb{R}^k$ می‌نامیم. اگر $d_۱$ و $d_۲$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$d_۱(X, Y) = \sum_{i=۱}^{k}|x_i - y_i| \quad , \qquad d_۲(X, Y) = \max_{i=۱}^{k}|x_i - y_i|$$

آنگاه $d_۱$ و $d_۲$ هم متریک‌هایی روی $\mathbb{R}^k$ هستند.

۱ ـ ۴ ـ **مثال:** فرض کنیم X مجموعه‌ای غیر خالی باشد و تابع $d_۰ : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $d_۰(x, y) = \begin{cases} ۱ & x \neq y \\ ۰ & x = y \end{cases}$ باشد در این صورت $d_۰$ یک متریک روی X است که آنرا متریک گسسته (یا مجزا یا بدیهی) می‌نامیم.

۱ ـ ۵ ـ **مثال:** فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $۱ \leq k \leq n$ و (X_k, d_k)ها

فضاهایی متریک باشند و $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ حاصلضرب کارتزین X_i ها باشد. دراین‌صورت توابع d_1 و d_2 که به صورت زیر تعریف می‌شوند متریکهایی روی X هستند، برای $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$، می‌گیریم $d_1(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, y_k)$ و $d_2(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k(x_k, y_k)$. همچنین اگر برای $p \geq 1$ بگیریم $d_p(x,y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (d_k(x_k, y_k))^p \right)^{\frac{1}{p}}$، آنگاه d_p یک متریک روی X است.

۱ ـ ۶ ـ مثال: فرض کنیم $\{(X_k, d_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک باشد و $X = \prod\limits_{k \in \mathbb{N}} X_k$. دراین‌صورت برای $x = (x_1, x_2, \ldots)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots)$ در X می‌گیریم $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)}$. لذا (X, d) یک فضای متریک است.

۱ ـ ۷ ـ مثال: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. دراین‌صورت برای $x, y \in X$ می‌گیریم

$$d_1(x,y) = Ln(1 + d(x,y))$$

d_1 هم یک متریک روی X است.

۱ ـ ۸ ـ مثال: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. دراین‌صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع زیر یک متریک روی X می‌باشد:

$$d_n(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + n\, d(x,y)} \qquad (x, y \in X) .$$

۱ ـ ۹ ـ مثال: فرض کنیم $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه

$$d(x,y)=\begin{cases} |\frac{1}{x}-\frac{1}{y}| & x\neq 0\ ,\ y\neq 0 \\ |\frac{1}{x}| & x\neq y\ ,\ y=0 \\ 0 & x=y \end{cases}$$

را داشته باشیم، دراین‌صورت d یک متریک روی $\mathbb{R}$ است.

۱ ـ ۱۰ ـ مثال: فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $\Phi:Y\longrightarrow X$ یک تناظریک‌به‌یک باشد. دراین‌صورت تابع $d_\Phi:Y\times Y\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $d_\Phi(y_1;y_2)=d(\Phi(y_1),\Phi(y_2))$ یک متریک روی Y است.

۱ ـ ۱۱ ـ تعریف: فرض کنیم d_1 و d_2 دو متریک روی $X\ (\neq\emptyset)$ باشند و $c_1,c_2\in\mathbb{R}^+$ چنان موجود باشند که $d_1\leq c_1d_2$ و $d_2\leq c_2d_1$. دراین‌صورت متریکهای d_1 و d_2 را دو متریک معادل (روی X) می‌نامیم. به عنوان مثال متریکهای d (اقلیدسی) و d_1 و d_2 تعریف شده در مثال (۱ ـ ۳)، دوبدو معادل هستند.

۱ ـ ۱۲ ـ مثال: فرض کنیم $c\in\mathbb{R}^+$ و $X\neq\emptyset$. دراین‌صورت متریک $d:X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$d(x,y)=\begin{cases} c & x\neq y \\ 0 & x=y \end{cases}$$

با متریک گسسته d_0 روی X با هم معادل هستند.

۱ ـ ۱۳ ـ مثال: اگر $X=\emptyset$ یک مجموعه متناهی باشد آنگاه هر دو متریک روی X معادل هستند.

۱ ـ ۱۴ ـ تذکر: از این به بعد منظور ما از X، فضای متریک X با

متریک d است مگر اینکه متریک آنرا معرفی کنیم به‌علاوه $\mathbb{R}^k$ را با متریک اقلیدسی در نظر می‌گیریم مگر اینکه متریک آن به طور صریح بیان شود.

۱ ـ ۱۵ ـ تعریف: فرض کنیم $x \in X$ و $r \in \mathbb{R}^+$ در این صورت گوی باز به مرکز x و به شعاع r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_r(x) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < r\}$$

به‌علاوه گوی بسته به مرکز x و به شعاع r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_r[x] = \{y \in X \ : \ d(x, y) \leq r\} \ .$$

۱ ـ ۱۶ ـ تذکر: گوی باز به مرکز x را یک همسایگی حول x هم می‌نامند.

۱ ـ ۱۷ ـ تعریف: فرض کنیم $A \subseteq X$ و $x \in X$ در این صورت x را یک نقطه درونی A می‌نامیم هرگاه $r > 0$ موجود باشد که $S_r(x) \subseteq A$ (یا A شامل همسایگی‌ای حول x باشد) و مجموعه نقاط درونی A را با $int\ A$ یا A° نمایش می‌دهیم (A° را درون A هم می‌نامند).

با توجه به تعریف ملاحظه می‌شود که $A^\circ \subseteq A$.

۱ ـ ۱۸ ـ تعریف: مجموعه A را باز گوئیم هرگاه $A^\circ = A$ (در واقع A را باز گوئیم هرگاه هر نقطه A یک نقطه درونی آن باشد).

۱ ـ ۱۹ ـ قضیه: هر گوی باز یک مجموعه باز است.

۱ ـ ۲۰ ـ تعریف: مجموعه A را بسته می‌نامیم هرگاه $X - A$ یک مجموعه باز باشد.

۱ ـ ۲۱ ـ تعریف: بستار A را مجموعه تمام x هایی از X می‌گیریم که برای هر $r > ۰$، $S_r(x) \cap A \neq \emptyset$ (به عبارتی هر همسایگی حول x، مجموعه A را قطع کند). بستار A را با $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم.

۱ ـ ۲۲ ـ قضیه: A بسته است اگر و فقط اگر $\bar{A} = A$.

۱ ـ ۲۳ ـ تعریف: نقطه $x \in X$ را یک نقطه حدی A می‌گوئیم هرگاه هر همسایگی حول x، A را حداقل در یک نقطه غیر از x قطع کند (یعنی برای هر $r > ۰$، $(S_r(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$) و مجموعه نقاط حدی A را با A' نمایش می‌دهیم. می‌توان ثابت کرد $x \in A'$ اگر و فقط اگر هر همسایگی x شامل بینهایت نقطه از A باشد.

۱ ـ ۲۴ ـ مثال: اگر $X = \mathbb{R}$، $A = \mathbb{Q}$ ، $B = \mathbb{Q}^c$ و $C = [۰, ۱)$ آنگاه داریم $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ (چون A و B شامل هیچ بازه بازی در $\mathbb{R}$ نیستند پس نقطه درونی هم ندارند) و داریم $C^\circ = (۰, ۱)$. همچنین داریم $B' = A' = \bar{A} = \bar{B} = \mathbb{R}$ و $C' = \bar{C} = [۰, ۱]$. (A، B و C نه بازند و نه بسته).

۱ ـ ۲۵ ـ تعریف: نقطهٔ x از X را یک نقطه مرزی A می‌نامیم هرگاه هر همساگی حول x، A و $X - A$ را قطع کند (یعنی برای

هر $r > 0$، $S_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq S_r(x) \cap (X - A)$) و مجموعه نقاط مرزی A را با ∂A نمایش می‌دهیم (این مجموعه را مرز A هم می‌نامند).

۱ ـ ۲۶ ـ قضیه: $\bar{A} = A \cup \partial A = A \cup A'$.

۱ ـ ۲۷ ـ قضیه:

(I) اجتماع هر تعداد مجموعه باز X یک مجموعه باز در X است.

(II) اجتماع تعداد متناهی مجموعه بسته مجموعه‌ای بسته است.

(III) اشتراک تعداد متناهی مجموعه باز مجموعه‌ای باز است.

(IV) اشتراک هر تعداد مجموعه بسته مجموعه‌ای بسته است.

با توجه به تعریف مجموعه بسته ملاحظه می‌شود که گزاره‌های (I) و (IV) هم‌ارزند به‌علاوه گزاره‌های (II) و (III) نیز هم‌ارزند.

۱ ـ ۲۸ ـ تذکر: اجتماع هر تعداد مجموعه بسته لزوماً بسته نیست و اشتراک هر تعداد مجموعه باز لزوماً باز نیست مثلاً اگر برای هر $x \in \mathbb{Q}$ بگیریم $A_x = \{x\}$ و $B_x = \mathbb{R} - \{x\}$ در این صورت می‌دانیم که A_x ها همگی بسته و B_x ها همگی باز هستند در حالی که $\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} A_x = \mathbb{Q}$ (بسته نیست) و $\bigcap_{x \in \mathbb{Q}} B_x = \mathbb{Q}^c$ (باز نیست).

۱ ـ ۲۹ ـ تعریف: نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطه تنهای A می‌نامیم هرگاه $r > 0$ موجود باشد که $S_r(x) \cap A = \{x\}$. بدیهی است که

مجموعه نقاط تنهای A زیرمجموعه‌ای از A است (نقاط تنها را نقاط ایزوله هم می‌نامند).

۱ ـ ۳۰ ـ مسئله: درون، بستار، مرز، مجموعه نقاط حدی و مجموعه نقاط تنهای مجموعه‌های زیر را بیابید:

$A = \mathbb{Q} \quad , \quad B = \mathbb{Q}^c \quad , \quad C = \{۰\} \cup (۱,۲]$

$D = \{\frac{۱}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad E = \{\frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} \;:\; m,n \in \mathbb{N}\}$

$F = \{\frac{m}{۲^n} \;:\; n \in \mathbb{N}\,,\, m \in \mathbb{N}\,,\; ۰ \leq m \leq ۲^n\}$

$G = \{\frac{۱}{m} + \frac{۱}{n^۲} \;:\; m,n \in \mathbb{N}\}$

حل: A و B: می‌دانیم $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ و $A' = B' = \bar{A} = \bar{B} = \mathbb{R}$ (مثالهای قبل) به‌علاوه می‌دانیم که هر همسایگی در $\mathbb{R}$ هم $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ هم را قطع می‌کند لذا $\partial A = \partial B = \mathbb{R}$ و مجموعه نقاط تنهای A و B هم تهی هستند.

C: داریم $C^\circ = (۱,۲)$ و $\bar{C} = \{۰\} \cup [۱,۲]$ و $\partial C = \{۰,۱,۲\}$ و $C' = [۱,۲]$ مجموعه نقاط تنهای C برابر مجموعه $\{۰\}$ است.

D: داریم $D^\circ = \emptyset$ (چون D شامل هیچ بازه‌ای در $\mathbb{R}$ نیست) و $\partial D = \bar{D} = D \cup \{۰\}$ و $D' = \{۰\}$ و هر نقطه D یک نقطه تنهای آن است (برای هر n از $\mathbb{N}$ می‌گیریم $r_n = \frac{\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}}{۲}$ در این صورت داریم $S_{r_n}(\frac{۱}{n}) \cap D = \{\frac{۱}{n}\}$).

E: $E^\circ = \emptyset$ (چون E شامل هیچ بازه‌ای نیست) و $\partial E = \bar{E} = E \cup \{۰\}$ و $E' = \{\frac{۱}{n} :\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}$ و مجموعه نقاط

تنهای E برابر $(=E-E')$ $E=\{\frac{1}{n} \ : \ n\in\mathbb{N}\}$ می‌باشد.

F : می‌دانیم $F\subseteq\mathbb{Q}$ لذا F شامل هیچ بازه‌ای نیست پس داریم $F^\circ=\emptyset$. حال ثابت می‌کنیم $\bar{F}=[0,1]$. اولاً می‌دانیم $F\subseteq[0,1]$ پس داریم $\bar{F}\subseteq[0,1]$ به علاوه داریم $0,1\in F\subseteq\bar{F}$ ثابت می‌کنیم $(0,1)\subseteq\bar{F}$. فرض کنیم $x\in(0,1)$ در این صورت می‌دانیم $r>0$ موجود است که $S_r(x)\subseteq(0,1)$. برای $n\in\mathbb{N}$ مجموعه A_n را برابر $\{\frac{m}{2^n} \ : \ 0\le m\le 2^n\}$ می‌گیریم (بازه $[0,1]$ را به 2^n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم) از طرفی $r>0$ پس $n\in\mathbb{N}$ موجود است که $\frac{1}{2^n}<r$ در نتیجه $A_n\cap S_r(x)\neq\emptyset$ (چرا؟) اما داریم $F=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_n$ لذا $F\cap S_r(x)\neq\emptyset$ پس داریم $x\in\bar{F}$ در نتیجه داریم $(0,1)\subseteq\bar{F}$.

به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت $\partial F=F'=[0,1]$ و مجموعه نقاط تنهای F برابر مجموعه تهی می‌باشد.

G : $G^\circ=\{0\}$ و $\partial G=\bar{G}=G\cup\{\frac{1}{n} \ : \ n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ و $G'=\{\frac{1}{n} \ : \ n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ و مجموعه نقاط تنهای G برابر $G-G'=G-\{\frac{1}{n} \ : \ n\in\mathbb{N}\,;\ n^2\notin\mathbb{N}\}$ می‌باشد.

۱ ـ ۳۱ ـ تذکر: اگر $k\in\mathbb{N}$ و $k\ge 2$ و $0\le \ell\le k$ و $F=\{\frac{m}{k^n} \ : \ n\in\mathbb{N}\,,\ m\in\mathbb{Z},\ \ell\le m\le k^n\}$ آنگاه داریم $F^\circ=\emptyset$ و $\bar{F}=\partial F=F'=[0,1]$ و مجموعه نقاط تنهای F هم مجموعه تهی می‌باشد.

۱ ـ ۳۲ ـ مثال: فرض کنیم $A=\{(x,\sin\frac{1}{x}) \ : \ x>0\}$

دراین‌صورت داریم

$$\bar{A} = \partial A = A' = A \cup (\{۰\} \times [-۱, ۱]) \ , \ A^\circ = \emptyset.$$

لذا مجموعه نقاط تنهای A مجموعه تهی می‌باشد.

حال به بیان نکات مهمی می‌پردازیم که به عنوان قضیه می‌توان از آنها استفاده کرد:

۱ ـ ۳۳ ـ نکته:

مجموعه نقاط تنهای $A = A - A' = \bar{A} - A' = \bar{A} - \bar{A}'$ = مجموعه نقاط تنهای $\bar{A}$.

۱ ـ ۳۴ ـ نکته: می‌دانیم $\bar{A} = A \cup \partial A = A \cup A'$ در نتیجه گزاره‌های زیر همواره درستند:

الف) اگر $A \cap A' = \emptyset$ آنگاه $A' \subseteq \partial A$.

ب) اگر $A \cap \partial A = \emptyset$ آنگاه $\partial A \subseteq A'$.

۱ ـ ۳۵ ـ نتیجه: اگر $A \cap A' = A \cap \partial A = \emptyset$ آنگاه داریم $\partial A = A'$.

۱ ـ ۳۶ ـ نکته: اگر $A \subseteq B$ آنگاه داریم $A^\circ \subseteq B^\circ$ و $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ و $A' \subseteq B'$.

۱ ـ ۳۷ ـ تذکر: اگر $A \subseteq B$ آنگاه لزومی ندارد که $\partial A \subseteq \partial B$ (مثلاً اگر $A = \{۰\}$ و $B = \mathbb{R}$ آنگاه داریم $\partial B = \emptyset \not\subseteq \{۰\} = \partial A$).

۱ ـ ۳۸ ـ نکته: برای هر A داریم $\bar{A} = {}^{-}(\bar{A})$ و $A^\circ = {}^\circ(A^\circ)$.

۱ ـ ۳۹ ـ تذکر: ممکن است $\partial(\partial A) \neq \partial A$ (با انتخاب $A = \mathbb{Q}$ داریم $\partial A = \mathbb{R}$ و $\partial(\partial A) = \emptyset$).

۱ ـ ۴۰ ـ تذکر: ممکن است $(A')' \neq A'$ (با انتخاب $A = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ داریم $A' = \{0\}$ و $(A')' = \emptyset$).

۱ ـ ۴۱ ـ نکته: اگر A متناهی باشد آنگاه داریم $A' = \emptyset$ و $\bar{A} = A$ (پس هر مجموعه متناهی بسته است).

۱ ـ ۴۲ ـ نکته: اگر فضای X با متریک گسسته باشد آنگاه برای هر زیرمجموعه A از X داریم $A^\circ = \bar{A} = A$ و $A' = \partial A = \emptyset$ و هر نقطه A یک نقطه تنهای آن است.

۱ ـ ۴۳ ـ نکته: داریم $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ در نتیجه ∂A بسته است همچنین $\partial A = \partial(A^c)$.

۱ ـ ۴۴ ـ نکته: A' همواره بسته است.

۱ ـ ۴۵ ـ نکته: $\bar{A}$ = اشتراک تمام مجموعه‌های بسته شامل A = کوچکترین مجموعه بسته شامل A.

۱ ـ ۴۶ ـ نکته: A° = اجتماع تمام مجموعه‌های باز داخل A = بزرگترین مجموعه باز مشمول در A.

۱ ـ ۴۷ ـ نکته: $\left(\bigcap_{n=1}^{k} A_n\right)^\circ = \bigcap_{n=1}^{k} A_n^\circ$.

۱ ـ ۴۸ ـ نکته: $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{F}}(A_\alpha^\circ) \subseteq \left(\bigcap_{\alpha\in\mathbb{F}} A_\alpha\right)^\circ$ [توجه داشته باشید که ممکن است $\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbb{F}} A_\alpha\right)^\circ \nsubseteq \bigcap_{\alpha\in\mathbb{F}}(A_\alpha^\circ)$. مثلاً اگر $A_n = (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$ آنگاه داریم $\emptyset = \{۰\}^\circ = \left(\bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n\right)^\circ$ اما $\bigcap_{n=۱}^{\infty}(A_n^\circ) = \bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n = \{۰\}$]

۱ ـ ۴۹ ـ نکته: $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$ و $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ در نتیجه داریم

$$(\partial A)^c = (\bar{A} \cap \overline{(A^c)})^c = (A^c)^\circ \cup A^\circ$$

۱ ـ ۵۰ ـ نکته: گزاره‌های زیر لزوماً در هر فضای متریک درست نیستند:

(a) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{(A \cap B)}$

(b) $\partial(A \cap B) = (\partial A) \cap (\partial B)$

(c) $\partial(A \cup B) = (\partial A) \cup (\partial B)$

(d) $(\partial A)^\circ = \partial(A^\circ)$

(e) $(\overline{\partial A}) = \partial(\bar{A})$

(f) $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$ و $A' \cap B' = (A \cap B)'$

(g) اگر A باز باشد آنگاه $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{(A \cap B)}$

(h) اگر A بسته باشد آنگاه $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(راهنمایی: برای قسمتهای (a)، (b)، (c) و (f) با انتخاب $A = \mathbb{Q}$ و $B = \mathbb{Q}^c$ می‌توان به مقصود رسید و برای (d) و (e) با انتخاب $A = \mathbb{Q}$ می‌توان به مقصود رسید. برای قسمت (g) بگیرید $B = (۱, ۲)$ و $A = (۰, ۱)$. برای قسمت (h) بگیرید $A = \mathbb{R} - (۰, ۱)$ و $B = \mathbb{R} - (۱, ۲)$).

۱ ـ ۵۱ ـ **تعریف:** می‌گوئیم A در B چگال است هرگاه $\bar{A} = B$ و A را هیچ‌جا چگال می‌نامیم هرگاه $(\bar{A})^\circ = \emptyset$.

۱ ـ ۵۲ ـ **نکته:** اگر A و B در X چگال باشند و حد اقل یکی از آنها باز باشد آنگاه $A \cap B$ هم در X چگال است. (در حالت کلی می‌دانیم که اگر A و B در X چگال باشند آنگاه لزومی ندارد که $A \cap B$ هم در X چگال باشد. مثلاً می‌توانید بگیرید $A = \mathbb{Q}$ ، $B = \mathbb{Q}^c$ و $X = \mathbb{R}$).

۱ ـ ۵۳ ـ **نکته:** اگر $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ و A بسته باشد آنگاه $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.

۱ ـ ۵۴ ـ **تذکر:** حالت خاص گزاره فوق به صورت زیر می‌باشد:

اگر A هیچ‌جا چگال باشد و $B^\circ = \emptyset$ آنگاه $(\bar{A} \cup B)^\circ = \emptyset$.

۱ ـ ۵۵ ـ **نتیجه:** اگر A هیچ‌جا چگال باشد و $B^\circ = \emptyset$ آنگاه $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.

۱ ـ ۵۶ ـ **نکته:** فرض کنیم $A_۱, A_۲, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}$ در این صورت

می‌دانیم $A = A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_k \subseteq \mathbb{R}^k$ داریم:

(I) اگر A_i ها غیرخالی باشند آنگاه $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_k در $\mathbb{R}$ بسته‌اند اگر وفقط اگر A در $\mathbb{R}^k$ بسته باشد.

(II) اگر A_i ها غیرخالی باشند آنگاه $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_k در $\mathbb{R}$ بازند اگر وفقط اگر A در $\mathbb{R}^k$ باز باشد.

(III) $A_۱^\circ \times A_۲^\circ \times \cdots \times A_k^\circ = A^\circ$.

(IV) $\bar{A}_۱ \times \bar{A}_۲ \times \cdots \times \bar{A}_k = \bar{A}$.

(V) $\partial A_۱ \times \partial A_۲ \times \cdots \times \partial A_k \subseteq \partial A$.

(VI) $A'_۱ \times A'_۲ \times \cdots \times A'_k \subseteq A'$.

۱ ــ ۵۷ ــ تذکر: در (V) و (VI) ممکن است تساوی نداشته باشیم مثلاً اگر $A_۱ = \mathbb{R}$ و $A_۲ = [۰, ۱]$ آنگاه داریم $\partial(A_۱ \times A_۲) = (\mathbb{R} \times \{۰\}) \cup (\mathbb{R} \times \{۱\})$ اما داریم $\partial A_۱ \times \partial A_۲ = \emptyset$ و اگر $B_۱ = \mathbb{R}$ و $B_۲ = \{۰\}$ آنگاه داریم $B'_۱ \times B'_۲ = \emptyset$ درحالی‌که $(B_۱ \times B_۲)' = \mathbb{R} \times \{۰\}$.

۱ ـ ۵۸ ـ نکته: در هر فضای متریک برای مجموعه‌های A و B داریم $(A \cup B)' = A' \cup B'$ و برای $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_n داریم $\left(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=۱}^{n} A'_i$ اما برای تعداد دلخواه داریم $\bigcup_{\alpha \in I} (A'_\alpha) \subseteq \left(\bigcup_{\alpha I} A_\alpha\right)'$ و ممکن است تساوی برقرار نباشد (برای

هر $x \in \mathbb{R}$ بگیرید $A_x = \{x\}$ در نتیجه داریم $A'_x = \emptyset$. در حالی‌که $\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} A_x\right)' = \mathbb{R}' = \mathbb{R}$).

۱ ـ ۵۹ ـ زیرفضاها: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $Y \subseteq X$ غیرخالی باشد. در این صورت (Y, d) هم یک فضای متریک است فضای Y را یک زیرفضای X می‌نامیم.

۱ ـ ۶۰ ـ قضیه: اگر Y زیرفضای X باشد آنگاه زیرمجموعه O از Y در Y باز است اگر و فقط اگر زیرمجموعه باز G در X موجود باشد که $O = G \cap Y$.

۱ ـ ۶۱ ـ نتیجه: اگر Y یک زیرمجموعه باز X باشد آنگاه زیرمجموعه O از Y در Y باز است اگر و فقط اگر O در X باز باشد.

۱ ـ ۶۲ ـ نتیجه: اگر Y یک زیرمجموعه بسته از X باشد آنگاه زیرمجموعه F از Y در Y بسته است اگر و فقط اگر F در X بسته باشد.

۱ ـ ۶۳ ـ تذکر: باز بودن Y در نتیجه ۱ ـ ۶۱ و بسته بودن آن در نتیجه ۱ ـ ۶۲، الزامی است مثلاً اگر $X = \mathbb{R}$ و $Y = (۰, ۲]$ آنگاه $(۱, ۲]$ در Y باز است و در X باز نیست و $(۰, ۱]$ در Y بسته است و در X بسته نیست.

دنباله‌ها در فضاهای متریک

۱ ـ ۶۴ ـ تعریف: دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به x می‌نامیم هرگاه هر همسایگی حول x، از مرتبه‌ای به بعد تمام x_n ها را در بر داشته باشد یعنی برای هر $\varepsilon > ۰$، $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که برای هر n طبیعی وقتی $n \geq K_\varepsilon$، داشته باشیم $d(x_n, x) < \varepsilon$ (در این صورت می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{(X,d)} x$ یا $x_n \xrightarrow{d} x$ یا $\lim\limits_n x_n = x$).

۱ ـ ۶۵ ـ تذکر: $x_n \xrightarrow{d} x$ اگر و فقط اگر $d(x_n, x) \longrightarrow ۰$ (در $\mathbb{R}$).

۱ ـ ۶۶ ـ قضیه: حد هر دنباله در هر فضای متریک، در صورت وجود منحصربفرد است.

۱ ـ ۶۷ ـ قضیه: $x_n \xrightarrow{d} x$ اگر و فقط اگر هر زیردنباله $\{x_n\}$ به x همگرا باشد.

۱ ـ ۶۸ ـ نتیجه: برای اینکه ثابت کنیم دنباله $\{x_n\}$ در فضای X واگرا است کافی است دو زیردنباله $\{x_{\varphi n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{x_{\psi n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ بیابیم به‌طوری‌که $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{d} y$ و $x_{\psi(n)} \xrightarrow{d} z$ و $y \neq z$.

۱ ـ ۶۹ ـ مثال: اگر $d_۰$ متریک گسسته روی فضای X باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد آنگاه $\{x_n\}$ به x همگرا است اگر و فقط اگر از مرتبه‌ای به بعد تمام x_n ها با x برابر باشند.

(داریم $S_{\frac{۱}{۲}}(x) = \{x\}$ لذا $x_n \xrightarrow{d_۰} x$ اگر و فقط اگر

$$\exists k \; ; \; (n \geq k \Rightarrow x_n \in S_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\})) \, .$$

۱ ـ ۷۰ ـ مثال: دنباله با جمله عمومی $x_n = sin \; n$ (n بر حسب درجه) واگرا است (زیردنباله $\{x_{360n}\}$ به ۰ و زیردنباله $\{x_{360n+1}\}$ به sin ۱ همگرا است در نتیجه $\{x_n\}$ واگرا است).

۱ ـ ۷۱ ـ قضیه: مجموعه حدود زیردنباله‌ای هر دنباله در هر فضای متریک، یک مجموعه بسته است.

۱ ـ ۷۲ ـ تعریف: دنباله $\{x_n\}$ را کوشی می‌گوئیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، k_ε طبیعی موجود باشد که

$$\forall m \; , \; \forall n \; ; \; (m, n \geq k_\varepsilon \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon) \, .$$

به کمک قضیه زیر ردهٔ بزرگی از دنباله‌های کوشی را می‌توان شناسایی کرد.

۱ ـ ۷۳ ـ قضیه: هر دنباله همگرا در هر فضای متریک یک دنباله کوشی است.

۱ ـ ۷۴ ـ تذکر: عکس قضیه فوق در حالت کلی برقرار نیست مثلاً اگر فضای متریک $X = (0, 1)$ (زیرفضای $\mathbb{R}$) را در نظر بگیریم دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ یک دنباله کوشی است و همگرا نیست.

بنابراین لزومی ندارد که هر هر دنباله کوشی در هر فضای متریک همگرا باشد قضیه‌ای می‌آوریم که بیان می‌کند تحت شرایط خاص یک دنباله کوشی هم همگرا است.

۱ ـ ۷۵ ـ قضیه: هر دنباله کوشی که زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد، همگرا است.

۱ ـ ۷۶ ـ قضیه: هر دنباله کوشی کراندار است.

۱ ـ ۷۷ ـ تعریف: فضای متریک (X, d) را یک فضای متریک کامل می‌نامیم هرگاه هر دنباله کوشی در X همگرا باشد.

۱ ـ ۷۸ ـ قضیه: فضای $\mathbb{R}^k$ با متریک اقلیدسی یک فضای متریک کامل است.

۱ ـ ۷۹ ـ قضیه: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل باشد و $Y \subseteq X$. در این صورت Y در X بسته است اگر و فقط اگر (Y, d) یک فضای متریک کامل باشد.

۱ ـ ۸۰ ـ مثال: زیرفضاهای $(0, 1]$ و $\mathbb{Q}$ (در $\mathbb{R}$) فضاهای متریک کامل نیستند درحالی‌که $[0, 1]$ و $\mathbb{Z}$ فضاهای متریک کامل می‌باشند.

نکات مهم در مورد دنباله‌ها و فضاهای متریک کامل:

۱ ـ ۸۱ ـ نکته: هر دنباله $\mathbb{R}$ زیردنباله‌ای یکنوا دارد.

۱ ـ ۸۲ ـ نکته:

الف) هر دنباله صعودی و از بالا کراندار $\mathbb{R}$ همگرا است.

ب) هر دنباله نزولی و از پایین کراندار $\mathbb{R}$ همگرا است.

ج) هر دنباله یکنوا و کراندار $\mathbb{R}$ همگرا است.

۱ ـ ۸۳ ـ نکته: هر دنباله کراندار $\mathbb{R}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد (در نتیجه هر دنباله کوشی $\mathbb{R}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد پس همگرا است لذا می‌توان بدین طریق ثابت کرد که $\mathbb{R}$ (و $\mathbb{R}^k$) فضای متریک کامل است).

۱ ـ ۸۴ ـ نکته: هر فضای متریک با متریک گسسته کامل است. در نتیجه اگر $\mathbb{R}$ را با متریک گسسته در نظر بگیریم آنگاه هر زیرفضای $\mathbb{R}$ (مثلاً $\mathbb{Q}$ یا $(\circ, ۱]$) فضاهای متریک کامل هستند.

۱ ـ ۸۵ ـ نکته: $x \in \bar{E}$ اگر و فقط اگر دنباله $\{x_n\}$ در E موجود باشد که $x_n \to x$.

۱ ـ ۸۶ ـ نکته (*): $x \in E'$ اگر و فقط اگر دنباله نامتناهی $\{x_n\}$ در E موجود باشد که $x_n \to x$.

۱ ـ ۸۷ ـ نکته: هر دنباله نامتناهی در فضای متریک گسسته واگرا است .

۱ ـ ۸۸ ـ نکته: فرض کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}^k$ باشد و $X_n = (x_n^۱, x_n^۲, \dots, x_n^k)$ و $c = (c_۱, c_۲, \dots, c_k)$ عضوی از $\mathbb{R}^k$ باشد. در این صورت $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|} c$ اگر و فقط اگر برای هر j در $\{۱, ۲, \dots, k\}$، دنباله $\{x_n^j\}$ به c_j همگرا باشد.

۱ ـ ۸۹ ـ نتیجه: هر دنباله کراندار $\mathbb{R}^k$ زیردنباله‌ای همگرا دارد و هر زیرمجموعه نامتناهی و کراندار در $\mathbb{R}^k$ نقطه حدی دارد.

۱ ـ ۹۰ ـ **نکته:** هر زیرمجموعه ناشمارا در $\mathbb{R}$ نقطه حدی دارد (فرض کنیم A ناشمارا باشد و $A_n = A \cap (-n, n)$ در این صورت داریم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. از طرفی $n \in \mathbb{N}$ موجود است که A_n نامتناهی باشد (چرا؟) و چون A_n کراندار است پس $A'_n \neq \emptyset$ اما $A'_n \subseteq A'$ در نتیجه $A' \neq \emptyset$).

۱ ـ ۹۱ ـ **نتیجه:** هر زیرمجموعه ناشمارا از $\mathbb{R}^k$، در $\mathbb{R}^k$ نقطه حدی دارد.

فشردگی

۱ ـ ۹۲ ـ **تعریف:** گردآیه $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از X را یک پوشش باز برای زیرمجموعه E از X می‌نامیم هرگاه G_α ها مجموعه‌های باز X باشند و $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

۱ ـ ۹۳ ـ **مثال:** اگر $A_۱ = A_۲ = \mathbb{R}$ آنگاه گردآیهٔ $\{A_i\}_{i=۱,۲}$ یک پوشش باز برای $\mathbb{R}$ است. اگر برای هر x از $\mathbb{R}$ بگیریم $A_x = (x - ۱, x)$ آنگاه $\{A_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ یک پوشش باز $\mathbb{R}$ است. اگر برای هر n از $\mathbb{Z}$ بگیریم $A_n = (n - ۱, n + ۱)$ آنگاه $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک پوشش باز برای $\mathbb{R}$ است.

۱ ـ ۹۴ ـ **تذکر:** در مثال فوق تمام گردآیه‌های فوق را می‌توان به‌عنوان پوشش باز هر زیرمجموعه $\mathbb{R}$ هم در نظر گرفت.

۱ ـ ۹۵ ـ **تعریف:** زیرمجموعه K از فضای X را فشرده می‌گوئیم

هرگاه هر پوشش باز K زیرپوشش متناهی داشته باشد (یعنی برای هر پوشش باز $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ برای K، $n \in \mathbb{N}$ و α_1، α_2، $\cdots$ و α_n در I موجود باشند که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$).

۱ ـ ۹۶ ـ مثال: هر زیرمجموعه متناهی در هر فضای متریک فشرده است.

۱ ـ ۹۷ ـ قضیه: هر مجموعه فشرده در هر فضای متریک بسته است.

۱ ـ ۹۸ ـ قضیه: هر مجموعهٔ فشرده در هر فضای متریک کراندار است.

۱ ـ ۹۹ ـ قضیه: زیرمجموعه‌های بسته یک مجموعه فشرده، فشرده‌اند.

۱ ـ ۱۰۰ ـ نتیجه: اگر F بسته و K فشرده باشد آنگاه $F \cap K$ فشرده است.

۱ ـ ۱۰۱ ـ نتیجه (*): اشتراک هر تعداد مجموعه بسته با یک مجموعه فشرده مجموعه ای فشرده است.

۱ ـ ۱۰۲ ـ قضیه هاینه ـ بورل: فرض کنیم $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی است) در این صورت سه گزاره زیر هم‌ارزند:

الف) K فشرده است.

ب) K بسته و کراندار است.

ج) هر زیرمجموعه نامتناهی K، در K نقطه حدی دارد.

۱ ـ ۱۰۳ ـ قضیه: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک دلخواه و $K \subseteq X$. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) K فشرده است.

ب) هر زیرمجموعه نامتناهی K، در K نقطه حدی دارد.

ج) هر دنباله K زیردنباله‌ای همگرا در K دارد.

۱ ـ ۱۰۴ ـ تذکر: در هر فضای متریک مجموعه‌های فشرده، بسته و کراندارند در حالی‌که ممکن است مجموعه بسته و کراندار فشرده نباشد. مثلاً اگر $X = (۰, ۱)$ آنگاه X در X بسته و کراندار است اما فشرده نیست. همچنین مجموعه $[۰, ۱] \cap \mathbb{Q}$ در $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ بسته و کراندار است اما فشرده نیست.

می‌دانیم که‌زیر مجموعه‌های باز یک زیرفضای X ممکن است در X باز نباشند وزیر مجموعه‌های بستهٔ یک زیرفضای X ممکن است در X بسته نباشند. قضیه زیر نشان می‌دهد که وضعیت فوق را برای مجموعه‌های فشرده نداریم یعنی

۱ ـ ۱۰۵ ـ قضیه: اگر Y زیرفضای X باشد آنگاه زیرمجموعه K از Y، در Y فشرده است اگر و فقط اگر K در X فشرده باشد.

۱ ـ ۱۰۶ ـ قضیه: اگر $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های فشرده باشد که هر تعداد متناهی K_α ها اشتراک غیرخالی

داشته باشند آنگاه $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha \neq \emptyset$ (خاصیت اشتراک متناهی برای مجموعه‌های فشرده).

۱ ـ ۱۰۷ ـ تذکر: اگر در قضیه فوق شرط فشرده بودن را برداریم (یا حتی شرط بسته بودن یا باز بودن را به‌جای آن بگذاریم) آنگاه ممکن است اشتراک کلی تهی شود مثلاً اگر $A_n = (n, +\infty)$ (یا $[n, +\infty)$) آنگاه اشتراک هر تعداد متناهی از A_n ها غیرخالی است درحالی‌که اشتراک کل A_n ها مجموعه تهی می‌باشد.

نکات مهم فشردگی:

۱ ـ ۱۰۸ ـ نکته: اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به x باشد آنگاه $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ یک مجموعه فشرده است.

۱ ـ ۱۰۹ ـ نکته: اگر A فشرده باشد آنگاه ∂A و A' هم فشرده‌اند (چون زیرمجموعه‌هایی بسته از یک مجموعه فشرده‌اند).

۱ ـ ۱۱۰ ـ نکته: اگر متریک فضای X گسسته باشد آنگاه زیرمجموعه K از X فشرده است اگر و فقط اگر K متناهی باشد (مجموعه‌های فشرده در هر فضای گسسته تنها مجموعه‌های متناهی هستند). (در نتیجه مجموعه‌های $[۰, ۱]$ و $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}$ که در $\mathbb{R}$ با متریک اقلیدسی فشرده‌اند در $\mathbb{R}$ با متریک گسسته دیگر فشرده نیستند).

۱ ـ ۱۱۱ ـ نکته: اشتراک هر تعداد مجموعه فشرده، فشرده است.

۱ ـ ۱۱۲ ـ نکته ۵: اگر A_1، A_2، ... و A_k غیرخالی باشند آنگاه A_1، A_2، ... و A_k در $\mathbb{R}$ فشرده‌اند اگر و فقط اگر $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ در $\mathbb{R}^k$ فشرده باشد.

۱ ـ ۱۱۳ ـ نکته: اجتماع تعداد متناهی مجموعه فشرده، مجموعه‌ای فشرده است.

۱ ـ ۱۱۴ ـ نکته: اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردآیه‌ای از مجموعه‌های باز و $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردآیه‌ای از مجموعه‌های فشرده باشد آنگاه $\bigcap\limits_{\alpha \in I} (K_\alpha - G_\alpha)$ فشرده است (بنا به نکته ۱ ـ ۱۱۱).

مجموعه‌های کراندار کلی:

۱ ـ ۱۱۵ ـ تعریف: فرض کنیم $A \subseteq X$ در این صورت قطر A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(A) = sup\{d(x,y) \ : \ x,y \in A\}$$

می‌دانیم A کراندار است اگر و فقط اگر $d(A) < \infty$ (مجموعه A کراندار است هرگاه گوی باز شامل A موجود باشد).

۱ ـ ۱۱۶ ـ تعریف: مجموعه A را کراندار کلی می‌گوئیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ چنان موجود باشند که $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_\varepsilon(a_i)$.

۱ ـ ۱۱۷ ـ قضیه: هر مجموعه کراندار کلی، کراندار است.

۱ ـ ۱۱۸ ـ تذکر: عکس قضیه فوق را در حالت کلی نداریم مثلاً اگر $\mathbb{R}$ را با متریک گسسته در نظر بگیریم آنگاه $\mathbb{R}$ کراندار است اما کراندار کلی نیست.

۱ ـ ۱۱۹ ـ قضیه: مجموعه A کراندار کلی است اگر و فقط اگر هر دنباله در A شامل زیردنباله‌ای کوشی باشد.

۱ ـ ۱۲۰ ـ قضیه: هر فضای فشرده یک فضای متریک کامل و کراندار کلی است .

۱ ـ ۱۲۱ ـ قضیه رسته‌ای بئر: فضای متریک کاملی وجود ندارد که بتوان آنرا به صورت اجتماعی از تعداد شمارا زیرمجموعه هیچ‌جا چگال نوشت.

همبندی:

۱ ـ ۱۲۲ ـ تعریف: دو مجموعه A و B را از هم جدا شده می‌گوئیم هرگاه $\bar{A} \cap B = \bar{B} \cap A = \emptyset$.

این تعریف با تعریف مجموعه‌های جدا از هم فرق دارد. دو مجموعه A و B را جدا از هم گویند هرگاه $A \cap B = \emptyset$. در نتیجه هر دو مجموعه از هم جدا شده، جدا از هم هستند اما عکس این مطلب درست نیست.

۱ ـ ۱۲۳ ـ تعریف: مجموعه E را همبند می‌گوئیم هرگاه نتوان E را به صورت اجتماع دو مجموعه از هم جدا شدهٔ غیرخالی نوشت

(در غیر این صورت E را ناهمبند می‌نامیم و می‌گوئیم دو مجموعه فوق تشکیل یک ناهمبندی برای E می‌دهند) .

۱ ـ ۱۲۴ ـ قضیه: مجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ بازه‌های $\mathbb{R}$ و مجموعه تهی هستند.

۱ ـ ۱۲۵ ـ قضیه: فضای متریک X ناهمبند است اگر و فقط اگر X زیرمجموعه‌ای داشته باشد که هم بسته و هم باز باشد و مخالف X و $\emptyset$ باشد.

۱ ـ ۱۲۶ ـ قضیه: اگر A همبند باشد و $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ آنگاه B هم همبند است.

۱ ـ ۱۲۷ ـ مثال: فرض کنیم D_n خط $y = nx$ باشد و $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ دراین صورت می‌دانیم E همبند است و داریم $\bar{E} = E \cup (\{\circ\} \times \mathbb{R})$. درنتیجه مجموعه $E \cup (\{\circ\} \times [\circ, ۱))$ همبند است.

نکات مهم همبندی:

۱ ـ ۱۲۸ ـ نکته: اجتماع دو مجموعه همبند لزوماً همبند نیست (مثلاً اگر $A = (\circ, ۱)$ و $B = [۴, ۵]$ آنگاه A و B همبند هستند اما $A \cup B$ همبند نیست).

۱ ـ ۱۲۹ ـ نکته: اشتراک دو مجموعه همبند لزوماً همبند نیست

(مثلاً اگر A دایره واحد در $\mathbb{R}^2$ باشد و B محور x ها باشد آنگاه $A \cap B$ یک مجموعه دوعضوی است که ناهمبند می‌باشد).

۱ ـ ۱۳۰ ـ نکته: اشتراک دو مجموعه همبند $\mathbb{R}$ همبند است.

۱ ـ ۱۳۱ ـ نکته: فرض کنیم $A, B \subseteq \mathbb{R}$ غیرخالی باشند دراین‌صورت $A, B \subseteq \mathbb{R}$ همبند هستند اگر و فقط اگر $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ همبند باشد.

نکته فوق را می‌توان برای حالتی‌که $A \subseteq \mathbb{R}^m$ و $B \subseteq \mathbb{R}^n$ هم تعمیم داد.

۱ ـ ۱۳۲ ـ نکته: می‌دانیم که همبندی A، همبندی $\bar{A}$ را نتیجه می‌دهد. عکس این مطلب را در حالت کلی نداریم. مثلاً اگر $A = \mathbb{Q}$ آنگاه $\bar{A} = \bar{R}$ همبند است و A همبند نیست.

۱ ـ ۱۳۳ ـ نکته: فرض کنیم $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های همبند باشد و برای هر α و β داشته باشیم $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$. در این صورت $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ همبند است.

۱ ـ ۱۳۴ ـ نکته: اگر $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ گردآیه‌ای از مجموعه‌های همبند باشد که $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$) آنگاه $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ همبند است.

۱ ـ ۱۳۵ ـ نکته: مجموعه‌های همبند فضای گسسته تنها مجموعه‌های تک‌عضوی و مجموعه تهی هستند.

۱ ـ ۱۳۶ ـ نکته: اگر A همبند باشد لزومی ندارد که A° همبند باشد (A را به صورت اجتماع دو دیسک بسته در $\mathbb{R}^۲$ در نظر بگیرید که همدیگر را در یک نقطه قطع کنند).

۱ ـ ۱۳۷ ـ نکته: اگر A همبند باشد لزومی ندارد که ∂A همبند باشد (بگیرید $A = (\circ, ۱)$).

۱ ـ ۱۳۸ ـ نکته: اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ همبند باشد آنگاه A' هم همبند است.

حال به بیان یک مثال جامع می‌پردازیم که در آن اکثر مطالب فصل اول مرور می‌شوند.

۱ ـ ۱۳۹ ـ مثال: فرض کنیم $d_۱$ و $d_۲$ دو متریک روی X باشند و $c > \circ$ و $d_۱ \leq cd_۲$ و $A \subseteq X$، دراین‌صورت گزاره‌های زیر همگی درست هستند:

(۱) هر گوی باز به مرکز x در $(X, d_۱)$ شامل یک گوی باز به مرکز x در $(X, d_۲)$ است.

(۲) $(A^\circ)^{d_۱} \subseteq (A^\circ)^{d_۲}$ (منظور از $(A^\circ)^{d_i}$ همان درون A در (X, d_i) که $۱ \leq i \leq ۲$، است).

(۳) هر مجموعه باز در $(X, d_۱)$ یک مجموعه باز در $(X, d_۲)$ است.

(۴) هر مجموعه بسته در (X, d_1) یک مجموعه بسته در (X, d_2) است.

(۵) هر مجموعه فشرده در (X, d_2) یک مجموعه فشرده در (X, d_1) است.

(۶) $(\bar{A})^{d_2} \subseteq (\bar{A})^{d_1}$.

(۷) $(A')^{d_2} \subseteq (A')^{d_1}$.

(۸) $(\partial A)^{d_2} \subseteq (\partial A)^{d_1}$.

(۹) هر نقطه تنهای A در (X, d_1) یک نقطه تنهای A در (X, d_2) است.

(۱۰) هر مجموعه همبنددر (X, d_2) یک مجموعه همبند در (X, d_1) است.

به‌علاوه اگر با تعویض d_1 و d_2 در گزاره‌های (۱)، (۲)، ... و (۱۰)، گزاره‌های $'$(۱)، $'$(۲)، ... و $'$(۱۰) را به‌دست آوریم، آنگاه مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد گزاره‌های $'$(۱)، $'$(۲)، ... و $'$(۱۰) الزاماً درست نمی‌باشند.

حال به اثبات گزاره‌های (۱)، (۲)، ... و (۱۰) می‌پردازیم. برای اثبات (۱)، فرض کنیم $r > 0$ و $y \in X$ و $d_2(x, y) < \frac{r}{c}$ در نتیجه داریم $d_1(x, y) < r$ لذا $S^{d_2}_{\frac{r}{c}}(x) \subseteq S^{d_1}_{r}(x)$ یعنی گوی باز به

مرکز x و به شعاع r در $(X, d_۱)$ شامل گوی باز به مرکز x و به شعاع $\frac{r}{c}$ در $(X, d_۲)$ می‌باشد.

(۲) با استفاده از (۱) و تعریف نقطه درونی به سادگی نتیجه می‌شود.

برای (۳)، فرض کنیم G یک مجموعه باز در $(X, d_۱)$ باشد دراین‌صورت با استفاده از (۲) داریم $G \subseteq (G^\circ)^{d_۱} \subseteq (G^\circ)^{d_۲} \subseteq G$ درنتیجه $(G^\circ)^{d_۲} = G$ یعنی G در $(X, d_۲)$ هم یک مجموعه باز است.

برای (۴)، فرض کنیم F یک مجموعه بسته در $(X, d_۱)$ باشد دراین صورت F^c یک مجموعه باز در $(X, d_۱)$ است. با استفاده از قسمت (۳)، F^c در $(X, d_۲)$ باز است لذا F در $(X, d_۲)$ بسته است.

برای (۵)، فرض کنیم K در $(X, d_۲)$ فشرده باشد. ثابت می‌کنیم K در $(X, d_۱)$ هم فشرده است. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوشش باز K در $(X, d_۱)$ باشد دراین‌صورت بنا به (۳)، $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوشش باز K در $(X, d_۲)$ می‌باشد. در نتیجه $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n \in I$ موجودند که $K \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} G_{\alpha_i}$. لذا $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ دارای زیرپوشش متناهی برای K است و K در $(X, d_۱)$ فشرده است.

برای (۶)، فرض کنیم $x \in (\bar{A})^{d_۲}$، در نتیجه دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود است که $x_n \xrightarrow{(X,d_۲)} x$ در نتیجه داریم $d_۲(x_n, x) \longrightarrow ۰$. لذا $d_۱(x_n, x) \longrightarrow ۰$ یعنی داریم $x_n \xrightarrow{(X,d_۱)} x$ پس $x \in (\bar{A})^{d_۱}$.

اثبات (۷) مشابه (٦) می‌باشد (با این تفاوت که دنباله $\{x_n\}$ را نامتناهی در نظر می‌گیریم).

(۸) را با استفاده از (٦) به‌سادگی می‌توان ثابت کرد.

برای اثبات (۹)، فرض کنیم x یک نقطه تنهای A در $(X, d_۱)$ باشد. دراین‌صورت $r > ۰$ موجود است که $\Big(S_r(x)\Big)^{d_۱} = \{x\}$. لذا با استفاده از (۱) داریم $\Big(S_{\frac{r}{c}}(x)\Big)^{d_۲} = \{x\}$. پس x یک نقطه تنهای A در $(X, d_۲)$ است.

برای اثبات (۱۰)، فرض کنیم E در $(X, d_۱)$ ناهمبند باشد و $E_۱$ و $E_۲$ تشکیل ناهمبندی برای E در $(X, d_۱)$ بدهند. ثابت می‌کنیم $E_۱$ و $E_۲$ تشکیل یک ناهمبندی برای E در $(X, d_۲)$ هم می‌دهند. بدین منظور تنها کافی است ثابت کنیم $\overline{E}_۱^{d_۲} \cap E_۲ = \emptyset$ و $\overline{E}_۲^{d_۲} \cap E_۱ = \emptyset$ که این مطلب با استفاده از (٦)، به‌سادگی نتیجه می‌شود.

برای ردکردن گزاره‌های $'$(۱)، $'$(۲)، $\cdots$ و $'$(۱۰) که با تعویض $d_۱$ و $d_۲$ (به‌ترتیب) در گزاره‌های (۱)، (۲)، $\cdots$ و (۱۰) به‌دست می‌آیند، بگیرید $X = (۰, ۱)$ و $c = ۱$. $d_۱$ را متریک اقلیدسی و $d_۲$ را متریک گسسته در نظر بگیرید و سپس با انتخاب مثالهای نقض ساده تک‌تک گزاره‌های $'$(۱)، $'$(۲)، $\cdots$ و $'$(۱۰) را رد کنید.

۱ ـ ۱۴۰ ـ تذکر: گزاره (۴) را مستقیماً با استفاده از (٦) هم می‌توان ثابت کرد و سپس گزاره (۳) را هم می‌توان از (۴) نتیجه

فصل ۲

حد و پیوستگی در فضاهای متریک

یکی از مهمترین اهداف ما از تعریف فضاهای متریک در فصل قبل، تعمیم مفهوم حد و پیوستگی برای توابع از یک مجموعه دلخواه به یک مجموعه دیگر می‌باشد. در تعاریف حد و پیوستگی توابع حقیقی، مفهوم همسایگی مهمترین نقش را بازی می‌کند. لذا با تعریف همسایگی و در واقع فاصله نقاط، می‌توان مفهوم حد و پیوستگی را برای توابع در حالت عمومی‌تر از قبل تعمیم داد. ابتدا تعریف حد در فضاهای متریک را بیان می‌کنیم و سپس تعریف پیوستگی را می آوریم.

۲ ـ ۱ ـ تعریف: فرض کنیم (X, d_1) یک فضای متریک، $E \subseteq X$، $x_0 \in E'$ و $f : E \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و (Y, d_2) هم یک فضای متریک باشد. در این صورت می‌گوئیم $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y \ (\in Y)$ هرگاه داشته باشیم

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E; \ (0 < d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), y) < \varepsilon)$$

به‌عبارتی برای هر همسایگی $S_\varepsilon(y)$ در Y، همسایگی محذوف $S_\delta(x_0) - \{x_0\}$ برای x_0 در (E, d_1) (زیرفضای X) موجود باشد به‌طوری‌که $f(S_\delta(x_0) - \{x_0\}) \subseteq S_\varepsilon(y)$.

۲ ـ ۲ ـ قضیه: فرض کنیم (X, d_1) و $E \subseteq X$ داده شده باشند و $x_0 \in E'$ و $f : E \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. در این صورت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$ اگر و فقط اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در E که x_n ها مخالف x_0 باشند و $x_n \overset{(X,d_1)}{\longrightarrow} x_0$ داشته باشیم $f(x_n) \overset{(X,d_2)}{\longrightarrow} y$.

۲ ـ ۳ ـ تعریف: می‌گوئیم تابع $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ در نقطه $x_0 \in X$ پیوسته است هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \ ;$$

$$(d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

و می‌گوئیم f بر X پیوسته است هرگاه در هر نقطه X پیوسته باشد.

۲ ـ ۴ ـ قضیه: $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ در $x_0 \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ که به x_0 همگرا باشد، $\{f(x_n)\}$ به $f(x_0)$ میل کند.

۲ ـ ۵ ـ قضیه:

گزاره‌های زیر در مورد تابع $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ معادلند:

(۱) f بر X پیوسته است.

(۲) برای هر زیرمجموعه باز V از Y، $f^{-1}(V)$ در X باز است.

(۳) برای هر زیرمجموعه بسته F از Y، $f^{-1}(F)$ در X بسته است.

(۴) f بر هر زیرفضای فشرده X، پیوسته است.

(۵) برای هر زیرمجموعه B از Y، $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

(۶) برای هر زیرمجموعه A از X، $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

به‌علاوه اگر X و Y فشرده و f وارون‌پذیر (یک‌به‌یک و پوشا) باشد آنگاه گزاره‌های فوق با گزاره‌های زیر معادلند:

(۷) f^{-1} پیوسته است.

(۸) f بسته است (برای هر زیرمجموعه بسته F از X، $f(F)$ در Y بسته است)

(۹) f باز است

(۱۰) برای هر زیرمجموعه A از X، $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

۲ ـ ۶ ـ قضیه: فرض کنیم $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته و X فشرده باشد و f یک‌به‌یک و پوشا باشد در این صورت f^{-1} پیوسته است.

۲ ـ ۷ ـ قضیه: اگر $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته باشد و $E \subseteq X$ در X چگال باشد آنگاه $f(E)$ در $f(X)$ چگال است.

۲ ـ ۸ ـ قضیه: فرض کنیم f بر زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$ صعودی اکید باشد در این صورت هر یک از خواص زیر پیوستگی f را نتیجه می‌دهد:

(۱) $f(S)$ باز باشد.

(۲) $f(S)$ همبند باشد.

(۳) $f(S)$ بسته باشد.

۲ ـ ۹ ـ قضیه: اگر $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته باشد و $K \subseteq X$ فشرده باشد آنگاه $f(K)$ در Y فشرده است.

۲ ـ ۱۰ ـ قضیه: اگر $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته باشد و $E \subseteq X$ همبند باشد آنگاه $f(E)$ در Y همبند است (تعمیم قضیه مقدار میانی).

۲ ـ ۱۱ ـ قضیه: فضای متریک (X, d) ناهمبند است اگر و فقط اگر تابع پیوسته $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد که $f(X)$ یک مجموعه متناهی با بیش از یک عضو باشد.

۲ ـ ۱۲ ـ قضیه: فضای متریک (X, d) ناهمبند است اگر و فقط اگر تابعی پیوسته از X به $\{0, 1\}$ (گسسته) وجود داشته باشد.

۲ ـ ۱۳ ـ قضیه: اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یکنوا باشد آنگاه حد چپ و حد راست f در هر نقطه از $\mathbb{R}$ حتماً وجود دارند همچنین نقاط ناپیوستگی f در $\mathbb{R}$، رفع‌نشدنی هستند.

۲ ـ ۱۴ ـ قضیه: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ در $x_\circ$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنباله یکنوای $\{x_n\}$ که $x_n\longrightarrow x_\circ$ داشته باشیم $f(x_n)\longrightarrow f(x_\circ)$. (قضایای مشابه برای پیوستگی از چپ و پیوستگی از راست هم برقرار می‌باشند).

۲ ـ ۱۵ ـ قضیه: مجموعه نقاط ناپیوستگی هر تابع یکنوا از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$، حداکثر شماراست.

۲ ـ ۱۶ ـ تذکر: تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ وجود دارد که نقاط ناپیوستگی آن فقط اعداد گویا هستند. (راهنمایی بگیرید

$$\left(f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{n} & x=\frac{m}{n}\quad (m,n)=۱\ ,\ \ m\in\mathbb{Z}^+,\ \ n\in\mathbb{Z}-\{\circ\}\\ \circ & x\notin Q\\ ۱ & x=\circ\end{cases}\right.$$

۲ ـ ۱۷ ـ قضیه: تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ وجود ندارد که فقط اعداد گویا پیوسته باشد.

حال به بیان چند مسئله از پیوستگی می‌پردازیم که حل بعضی از آنها را لازم می‌دانیم.

۲ ـ ۱۸ ـ مسئله: فرض کنیم $f:[\circ\,,۱)\longrightarrow\mathbb{R}$ در صفر از راست پیوسته باشد و برای هر x از $[\circ\,,۱)$ داشته باشیم $f(x)=f(x^۲)$ در

این صورت ثابت می‌کنیم f تابعی ثابت است.

حل: فرض کنیم $x \in [0, 1)$، ثابت می‌کنیم $f(x) = f(0)$. دنباله $x_n = x^{(2^n)}$ را در نظر می‌گیریم. x_n با جملات مثبت، نزولی و همگرا به صفر است. در نتیجه داریم $f(x_n) \longrightarrow f(0)$. از طرفی داریم

$$f(x) = f(x^2) = f(x^4) = \cdots = f(x^{2^n}) = f(x_n)$$

در نتیجه داریم $f(x) = f(0)$.

به‌طور مشابه، می‌توان مسئله زیر را نیز ثابت کرد.

۲ ـ ۱۹ ـ مسئله: فرض کنیم $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ در صفر از راست پیوسته باشد و $\alpha > 1$. اگر برای هر x از $[0, 1)$ داشته باشیم $f(x) = f(x^\alpha)$ در این صورت f تابعی ثابت بر $[0, 1)$ است.

۲ ـ ۲۰ ـ مسئله: اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ در صفر پیوسته باشد و برای هر x از $\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) = f(2x)$ آنگاه f تابعی ثابت است.

(راهنمایی: مشابه مثال قبل عمل کنید و برای $x \in \mathbb{R}$ بگیرید $x_n = \frac{x}{2^n}$).

۲ ـ ۲۱ ـ مسئله: اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و یک‌به‌یک باشد آنگاه f بر $\mathbb{R}$ یکنوای اکید است.

(راهنمایی: تابع $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $g(x, y) = f(x) - f(y)$ در نظر بگیرید. g پیوسته است. مجموعه E را به صورت زیر در نظر

بگیرید $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x < y\}$. E همبند است در نتیجه $g(E)$ در $\mathbb{R}$ همبند است. حال از یک‌به‌یک بودن f نتیجه بگیید که $g(E) \subseteq \mathbb{R}^+$ یا $g(E) \subseteq \mathbb{R}^-$ و سپس حکم را نتیجه بگیرید).

۲ ـ ۲۲ ـ **مسئله:** هر تابع پیوسته از یک فضای همبند به یک فضای متریک شمارا تابعی ثابت است. (نتیجه تعمیم قضیه مقدار میانی).

۲ ـ ۲۳ ـ **مسئله:** هر تابع پیوسته از یک فضای همبند به یک فضای متریک گسسته تابعی ثابت است.

۲ ـ ۲۴ ـ **مسئله:** فرض کنیم

$C \subseteq \mathbb{R}$ و $B = \{x^2 + x\ sin(\pi x) \ : \ x \in C\}$. در این صورت

(۱) اگر C همبند باشد آنگاه B همبند است.

(۲) اگر C فشرده باشد آنگاه B فشرده است.

۲ ـ ۲۵ ـ **مسئله:** فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $A \subseteq \mathbb{R}$. اگر $f(A)$ در $\mathbb{R}$ چگال باشد آنگاه ثابت می کنیم f پوشاست. (فرض کنیم f پوشا نباشد، در این صورت $x_0 \in \mathbb{R}$ موجود است که در برد f نباشد اما برد f یک بازه $\mathbb{R}$ است پس بازه‌ای از $\mathbb{R}$ مانند I شامل x_0 موجود است که I با برد f هیچ اشتراکی نداشته باشد که این یک تناقض است چون داریم $I \cap f(A) \neq \emptyset$).

۲ ـ ۲۶ ـ مسئله: اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $\overline{f(\mathbb{N})} = \mathbb{R}$ آنگاه f پوشاست.

۲ ـ ۲۷ ـ مسئله: اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی جمعی باشد و در یک نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه f بر کل $\mathbb{R}$ پیوسته است و $c \in \mathbb{R}$ موجود است که $f(x) = cx$. (تابع f را جمعی می‌گوئیم هرگاه $f(x+y) = f(x) + f(y)$ برای هر x و y در $\mathbb{R}$).

(راهنمایی: ابتدا ثابت کنید f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. سپس با انتخاب $c = f(۱)$ ثابت کنید برای $n \in \mathbb{Z}$، $f(x) = cx$ و سپس نتیجه بگیرید برای $x \in \mathbb{Q}$، $f(x) = cx$ و سپس از پیوستگی f استفاده کنید و نتیجه بگیرید برای $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = cx$).

۲ ـ ۲۸ ـ مسئله: اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(x+y) = f(x)f(y)$ آنگاه f تابعی نمایی است.

(راهنمایی: با انتخاب $c = f(۱)$ ثابت کنید $f(x) = c^x$).

۲ ـ ۲۹ ـ تذکر: تابعی جمعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ موجود است که پیوسته نباشد. این تابع در هیچ نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته نیست.

۲ ـ ۳۰ ـ مسئله: اگر (X, d) یک فضای متریک باشد و $x_\circ \in X$ و $d_{x_\circ} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $d_{x_\circ}(x) = d(x, x_\circ)$ تعریف شود آنگاه $d_{x_\circ}$ بر X پیوسته است. (داریم $|d(x,x_\circ) - d(y,y_\circ)| \leq d(x,y)$ در نتیجه $d_{x_\circ}$ پیوسته است).

۲ ـ ۳۱ ـ مسئله: فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{R}$ نافشرده باشد. در این صورت

(۱) تابع پیوسته‌ای بر A وجود دارد که کراندار نیست.

(۲) تابعی پیوسته و کراندار بر A وجود دارد که تصویر A تحت آن تابع ماکسیمم ندارد.

اثبات: (۱) فرض کنیم A کراندار باشد. در این صورت A بسته نیست و در نتیجه $A' - A \neq \emptyset$. فرض کنیم $a \in A' - A$ می‌گیریم $f(x) = \frac{۱}{x-a}$. f بر A پیوسته و بی‌کران است. همچنین تابع $g(x) = \sin(\frac{\pi}{۲+(x-a)^۲})$ بر A کراندار است و $\sup\limits_{x\in A} g(x) = ۱$ و برای هر x از A داریم $g(x) \neq ۱$.

(۲) فرض کنیم A بی‌کران باشد. در این صورت تابع $f(x) = x$ بر A پیوسته است و بر A بی‌کران است. همچنین تابع $f(x) = \frac{x^۲}{۱+x^۲}$ بر A پیوسته است و $\sup\limits_{x\in A} f(x) = ۱$ ولی $f(A)$ ماکزیمم ندارد.

۲ ـ ۳۲ ـ مسئله: فرض کنیم $d_\circ$ متریک گسسته روی X باشد و $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \longrightarrow (X, d_\circ)$ پیوسته باشد. در این صورت f تابعی ثابت است. (چون $\mathbb{R}$ با متریک حاصل از قدرمطلق همبند است پس $f(\mathbb{R})$ در $(X, d_\circ)$ همبند است اما مجموعه‌های همبند در فضای گسسته تنها مجموعه‌های تک‌عضوی و مجموعه تهی می‌باشند. در نتیجه $f(\mathbb{R})$ تک‌عضوی است لذا f تابعی ثابت است).

۲ ـ ۳۳ ـ مسئله: اگر $d_\circ$ متریک گسسته روی X باشد آنگاه تنها تابع پیوسته از $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ به $(X, d_\circ)$ تابع ثابت است.

۲ـ ۳۴ـ مسئله: اگر $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته باشد و $E \subseteq \mathbb{R}^m$ کراندار باشد آنگاه $f(\partial E)$، $f(\bar{E})$ و $f(E')$ فشرده‌اند (چون $\bar{E}$ ، ∂E و E' بسته و کراندار هستند پس بنا به قضیه هاینه ـ بورل فشرده‌اند).

۲ـ ۳۵ـ مسئله: اگر $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $A = \{f(x) \ : \ \|x\| = 1\}$ آنگاه A فشرده است.

۲ـ ۳۶ـ مسئله: اگر $f : K \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ بر مجموعه فشرده K پیوسته باشد آنگاه مجموعه $M = \{x \in K \ : \ f(x) = \max\limits_{y \in K}(f(y))\}$ نیز فشرده است. (فرض کنیم $\max\limits_{x \in K} f(x) = m$ در این صورت داریم $M = f^{-1}(\{m\})$ چون $\{m\}$ بسته است و f پیوسته پس $M = f^{-1}(\{m\})$ بسته است و چون K فشرده است پس M هم فشرده است).

۲ـ ۳۷ـ مسئله: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد به‌طوری که هر تابع حقیقی پیوسته بر X دارای ماکزیمم باشد در اینصورت (X, d) یک فضای متریک فشرده است.

۲ـ ۳۸ـ قضیه: اگر $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته باشد و X فشرده باشد آنگاه f بسته است.

۲ـ ۳۹ـ تعریف: می‌گوئیم تابع f بر (a, b) دارای خاصیت مقدار میانی است هرگاه برای هر $x, y \in (a, b)$ اگر $x \neq y$ آنگاه c ای بین x و y موجود باشد که $f(c)$ بین $f(x)$ و $f(y)$ باشد.

۲ ـ ۴۰ ـ نتیجه: $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ خاصیت مقدار میانی دارد اگر و فقط اگر f هر زیربازهٔ (a,b) را به یک بازه در $\mathbb{R}$ تبدیل کند. (یا f هر مجموعه همبند را به یک مجموعه همبند تبدیل کند).

۲ ـ ۴۱ ـ قضیه: اگر f بر (a,b) دارای خاصیت مقدار میانی باشد و در نقطه $x_{\circ}$ از (a,b) ناپیوسته باشد آنگاه حداقل یکی از حدود چپ یا راست f در $x_{\circ}$ موجود نمی‌باشند.

۲ ـ ۴۲ ـ نتیجه: اگر f بر (a,b) یکنوابوده و خاصیت مقدار میانی هم داشته باشد آنگاه f بر (a,b) پیوسته است.

۲ ـ ۴۳ ـ قضیه (مقدار میانی): اگر f بر (a,b) پیوسته باشد آنگاه f بر (a,b) دارای خاصیت مقدار میانی است.

۲ ـ ۴۴ ـ تذکر: ممکن است f بر (a,b) خاصیت مقدار میانی داشته باشد ولی بر (a,b) پیوسته نباشد. مثلاً تابع $f(x)=\begin{cases} sin\,\frac{۱}{x} & x\neq\circ \\ \circ & x=\circ\end{cases}$ بر $(-۱,۱)$ خاصیت مقدار میانی دارد اما بر $(-۱,۱)$ پیوسته نیست.

۲ ـ ۴۵ ـ مسئله: اگر $f:[\circ,۱]\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(\circ)=f(۱)$ آنگاه برای $n\geq ۲$، $a_n\in[\circ,۱-\frac{۱}{n}]$ موجود است که $f(a_n)=f(a_n+\frac{۱}{n})$.

۲ ـ ۴۶ ـ مسئله: اگر (X,d) فشرده باشد و $f:X\longrightarrow X$ پیوسته باشد و برای $x\neq y$ داشته باشیم $d(f(x),f(y))<d(x,y)$ آنگاه f

بر X نقطه ثابت منحصربفرد دارد (یعنی x یکتایی در X موجود است که $f(x) = x$).

۲ ـ ۴۷ ـ قضیه: اگر (X, d) فضای متریک کامل باشد و $f : X \longrightarrow X$ تابعی باشد که $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y)$ که $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای حقیقی و همگرا به صفر باشد آنگاه f بر X نقطه ثابت منحصربفرد دارد.

۲ ـ ۴۸ ـ قضیه: فرض کنیم (X, d) فشرده باشد و $f : X \longrightarrow X$ پیوسته باشد. در این صورت زیرمجموعه A از X موجود است که $f(A) = A$.

۲ ـ ۴۹ ـ قضیه‌نقطهٔ ثابت باناخ: فرض کنیم (X, d) فضای متریک کامل و $\alpha < ۱$ و $f : X \longrightarrow X$ تابعی باشد که برای $x, y \in X$ داشته باشیم $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ در اینصورت f بر X نقطه ثابت منحصربفرد دارد.

۲ ـ ۵۰ ـ قضیه: اگر $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یکنوا باشد و تمام مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ در برد f قرار داشته باشند آنگاه f بر $[a, b]$ پیوسته است.

۲ ـ ۵۱ ـ تذکر: تابع پیوسته $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود ندارد که $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}^c$ و $f(\mathbb{Q}^c) \subseteq \mathbb{Q}$ (نتیجه قضیه مقدار میانی).

۲ ـ ۵۲ ـ تذکر: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک بوده و $E \subseteq X$ همبند باشد و $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر $x \in X$،

$f(x) \neq \circ$. در این صورت اگر $x_\circ \in E$ موجود باشد که $f(x_\circ) > \circ$ آنگاه داریم $f > \circ$.

(راهنمایی: از تعمیم قضیه مقدار میانی استفاده کنید).

۲ ـ ۵۳ ـ مسئله: اگر $f : [\circ, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای λ ای در $[\circ, +\infty)$ داشته باشیم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(\lambda)$ آنگاه برد f یک بازه بسته است.

۲ ـ ۵۴ ـ تذکر: اگر (X, d) فشرده و $f : X \longrightarrow X$ پیوسته باشد و برای هر x از X، $f(x) \neq x$ آنگاه $\varepsilon > \circ$ موجود است که برای هر x از X، $d(f(x), x) \geq \varepsilon$.

۲ ـ ۵۵ ـ قضیه: اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲}$ پیوسته و یک‌به‌یک باشد آنگاه $f^{-۱}$ نمی‌تواند پیوسته باشد.

(راهنمایی: از تعمیم قضیه مقدار میانی استفاده کنید).

۲ ـ ۵۶ ـ قضیه: فرض کنیم $f : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱] \times [\circ, ۱]$ یک تابع باشد. در این صورت f نمی‌تواند پیوسته و یک‌به‌یک و پوشا باشد. (فرض کنیم (فرض خلف) چنین تابعی وجود داشته باشد در این صورت $f^{-۱}$ پیوسته است. فرض کنیم $E = [\circ, ۱] \times [\circ, ۱] - \{f(\frac{۱}{۲})\}$ دراین‌صورت E همبند است درحالی‌که $f^{-۱}(E) = [\circ, \frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۱}{۲}, ۱]$ ناهمبند است و این یک تناقض است).

۲ ـ ۵۷ ـ تذکر: تابعی مانند $f : [\circ, \text{۱}] \longrightarrow [\circ, \text{۱}] \times [\circ, \text{۱}]$ موجود است که پیوسته و یک‌به‌یک باشد و تابعی هم موجود است که پیوسته و پوشا باشد و تابع دیگری هم موجود است که یک‌به‌یک و پوشا باشد.

۲ ـ ۵۸ ـ قضیه: فرض کنیم $(X, d_\text{۱})$ یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$ در X چگال باشد $(\bar{A} = X)$ و $f_\text{۱} : (X, d_\text{۱}) \longrightarrow (Y, d_\text{۲})$ و $f_\text{۲}$ پیوسته باشند و $f_\text{۲}|_A = f_\text{۱}|_A$. در این صورت داریم $f_\text{۱} \equiv f_\text{۲}$ بر X.

۲ ـ ۵۹ ـ قضیه: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و F و G دو زیرمجموعه بسته در X باشند و $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشند و $f|_{F\cap G} = g|_{F\cap G}$. در این صورت تابعی مانند $h : F \cup G \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود است که پیوسته باشد و توسیع f و g باشد.

۲ ـ ۶۰ ـ قضیه: فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) = f(b) = \circ$ و بین هر دو صفر f، صفر دیگری برای f وجود داشته باشد. در این صورت داریم $f \equiv \circ$.

(راهنمایی: فرض کنید (فرض خلف) $x_\circ \in (a, b)$ موجود باشد که $f(x_\circ) \neq \circ$. بگیرید $A = [a, x_\circ] \cap f^{-\text{۱}}(\{\circ\})$ و $B = [x_\circ, b] \cap f^{-\text{۱}}(\{\circ\})$. در این صورت $A, B \neq \emptyset$. فرض کنید $\alpha = sup\ A$ و $\beta = inf\ B$ در این صورت خواهیم داشت $f(\alpha) = f(\beta) = \circ$. به‌علاوه برای هر x در (α, β)، $f(x) \neq \circ$ که

این یک تناقض است).

۲ ـ ۶۱ ـ قضیه: اگر $d_\circ$ متریک گسسته روی X باشد آنگاه برای هر فضای متریک (Y,d)، هر تابع $f:(X,d_\circ)\longrightarrow(Y,d)$ پیوسته است.

۲ ـ ۶۲ ـ قضیه: اگر $id_X:X\longrightarrow X$ تابع همانی باشد و $d_\circ$ متریک گسسته روی X باشد و d یک متریک دلخواه، آنگاه لزومی ندارد که تابع $id_X:(X,d)\longrightarrow(X,d_\circ)$ پیوسته باشد و تنها در حالتی پیوسته است که هر زیرمجموعه (X,d) باز باشد (مثلاً اگر d متریک گسسته باشد، چنین است).

۲ ـ ۶۳ ـ قضیه: اگر (X,d) همبند باشد و $d_\circ$ متریک گسسته روی Y باشد و $f:(X,d)\longrightarrow(Y,d_\circ)$ پیوسته باشد آنگاه f تابعی ثابت است. (چون X همبند است پس $f(X)\subseteq Y$ همبند است اما مجموعه‌های همبند در فضای گسسته تنها مجموعه‌های تک‌عضوی و تهی هستند. در نتیجه $f(X)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی است و f تابع ثابت است).

۲ ـ ۶۴ ـ تذکر: فرض کنیم $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $g(x)=max\ f([a,x])$. در این صورت g بر $[a,\infty)$ صعودی و پیوسته است.

۲ ـ ٦۵ ـ قضیه: فرض کنیم (S,d) یک فضای همبند و بی‌کران باشد. در این صورت برای هر $a \in S$ و هر $r > \circ$، $x \in X$ موجود است که $d(x,a) = r$.

برهان: فرض کنیم $r \in S$، در این صورت تابع $d_a : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $d_a(y) = d(a,y)$ پیوسته است. فرض کنیم $r_\text{۱} > \circ$ چون S بی‌کران است پس $a_\text{۱} \in S$ موجود است که $d_a(a_\text{۱}) > r_\text{۱}$ در نتیجه $\{d_a(x) \;:\; x \in X\}$ زیرمجموعه بی‌کران از $\mathbb{R}$ است. از طرفی $d_a(a) = \circ$ و $d_a(X) \subseteq \mathbb{R}$ همبند است پس $d_a(X)$ یک بازه بی‌کران $\mathbb{R}$ شامل $\circ$ است. لذا داریم $d_a(X) \supseteq [\circ, \infty)$ و حکم نتیجه می‌شود.

۲ ـ ٦٦ ـ تذکر: فرض کنیم $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ فشرده باشند دراین‌صورت می‌دانیم $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{\text{۲}k}$ فشرده است و چون تابع $g : \mathbb{R}^{\text{۲}k} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ با ضابطهٔ

$$g(x_\text{۱}, x_\text{۲}, \ldots, x_{\text{۲}k}) = (x_\text{۱}, x_\text{۲}, \ldots, x_k) + (x_{k+\text{۱}}, \ldots, x_{\text{۲}k})$$

پیوسته است و داریم

$$g(A \times B) = A + B = \{x + y \;:\; x \in A \,,\, y \in B\}\,.$$

پس مجموعه $A + B$ هم فشرده است. به‌طور مشابه مجموعه $A - B = \{x - y \;:\; x \in A \,,\, y \in B\}$ هم فشرده است. به‌علاوه با تکنیکی مشابه، می‌توان ثابت کرد اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ همبند باشند آنگاه مجموعه‌های $A + B$ و $A - B$ همبند هستند.

۲ ـ ٦٧ ـ تذکر: اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ همبند باشند و $A - B = A \cap B^c$ آنگاه لزومی ندارد که $A - B$ همبند باشد (A را دایره واحد به مرکز $(\circ, \circ)$ در $\mathbb{R}^{۲}$ و B را مجموعه $\mathbb{R}^{۲} - \{(x, \circ) \ : \ -۲ \leq x \leq ۲\}$ در نظر بگیرید).

۲ ـ ٦٨ ـ تذکر: اگر $A \subseteq \mathbb{R}^k$ دلخواه و $B \subseteq \mathbb{R}^k$ باز باشد آنگاه $A + B$ هم باز است.

(راهنمایی: چون برای $x \in \mathbb{R}^k$ تابع $T_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ با ضابطهٔ $T_x(y) = x + y$ پیوسته و وارون‌پذیر و با وارون پیوسته است پس T باز است در نتیجه برای هر x در A مجموعه $T_x(B)$ باز است. از طرفی داریم $A + B = \bigcup\limits_{x \in A} T_x(B)$ و چون اجتماع هر تعداد مجموعه باز، یک مجموعه باز می‌باشد پس $A + B$ باز است).

۲ ـ ٦٩ ـ مسئله: فرض کنیم $d_۱$ و $d_۲$ دو متریک روی X باشد و $c > \circ$ چنان باشد که $d_۱ \leq cd_۲$. دراین‌صورت

(۱) اگر (Y, d) یک فضای متریک دلخواه و $f : (Y, d) \longrightarrow (X, d_۲)$ پیوسته باشد آنگاه f تابعی پیوسته از (Y, d) به $(X, d_۱)$ است.

(۲) اگر (Y, d) یک فضای متریک دلخواه و $g : (X, d_۱) \longrightarrow (Y, d)$ پیوسته باشد آنگاه g تابعی پیوسته از $(X, d_۲)$ به (Y, d) است.

(۳) تابع همانی از $(X, d_۲)$ به $(X, d_۱)$ پیوسته است.

(۴) در گزاره‌های فوق، اگر جای d_1 و d_2 را تعویض کنیم آنگاه گزاره‌های نادرست به‌دست می آیند.

حل: (۱). فرض کنیم $y \in Y$ و $y_n \xrightarrow{(Y,d)} y$ دراین‌صورت بنا به فرض داریم $f(y_n) \xrightarrow{(X,d_2)} f(y)$ لذا $f(y_n) \xrightarrow{(X,d_1)} f(y)$ در نتیجه f در y پیوسته است (از (Y,d) به (X,d_1)). (۲) و (۳) مشابه (۱) حل می‌شوند. برای (۴) بگیرید $X = Y = [0,1]$ و d_1 را متریک اقلیدسی و d_2 را متریک گسسته در نظر بگیرید. دراین‌صورت با انتخاب $c = 1$، داریم $d_1 \leq cd_2$. توابع f و g را هم تابع همانی در نظر بگیرید.

۲ ـ ۷۰ ـ قضیه: فرض کنیم $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ یک تابع پیوسته بوده و برای $E \subseteq \mathbb{R}^k$ می‌گیریم $G(E) = \{(x, f(x)) \ : \ x \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{2k}$ دراین‌صورت

(۱) E فشرده است اگر و فقط اگر $G(E)$ فشرده باشد.

(۲ E همبند است اگر و فقط اگر $G(E)$ همبند باشد.

(۳) E بسته است اگر و فقط اگر $G(E)$ بسته باشد.

(۴) اگر $G(E)$ باز باشد آنگاه E باز است.

(۵) بازبودن E، بازبودن $G(E)$ را نتیجه نمی‌دهد.

(۶) $G(\bar{E}) = \overline{G(E)}$ و $G(E') = (G(E))'$.

(۷) $G(E^\circ)$ الزاماً با $(G(E))^\circ$ برابر نیست.

برهان: (۱). فرض کنیم E فشرده باشد و تابع $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{2k}$ را با ضابطهٔ $g(x) = (x, f(x))$ در نظر می‌گیریم. چون f پیوسته است پس g هم پیوسته است به‌علاوه داریم $G(E) = g(E)$. درنتیجه $G(E)$ فشرده است.

برعکس، فرض کنیم $G(E)$ فشرده باشد. تابع $\pi_1 : \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ را با ضابطهٔ $\pi_1((x_1, x_2, \ldots, x_{2k})) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ در نظر می‌گیریم. چون π_1 پیوسته است و داریم $E = \pi_1(G(E))$ پس E هم فشرده است.

(۲)، در (۱) با جایگزین کردن همبندی بجای فشرده بودن، می‌توان (۲) را ثابت کرد.

(۳)، فرض کنیم E بسته باشد و $(x, y) \in \overline{G(E)}$ ثابت می‌کنیم $(x, y) \in G(E)$. بدین منظور، اولاً باید نشان دهیم $x \in E$، ثانیاً باید ثابت کنیم $y = f(x)$. فرض کنیم $\{(x_n, f(x_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای در $G(E)$ باشد که به (x, y) میل کند. دراین‌صورت داریم $x_n \longrightarrow x$ و $f(x_n) \longrightarrow y$ (در $\mathbb{R}^k$). چون x_n ها همگی در E هستند و E بسته است پس داریم $x \in E$. از طرفی چون f در E پیوسته است پس داریم $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ و چون حد هر دنباله در $\mathbb{R}^k$ منحصربفرد است پس داریم $y = f(x)$.

برعکس، فرض کنیم $G(E)$ بسته باشد، ثابت می‌کنیم E هم بسته است. فرض کنیم $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای در E باشد که به x میل کند، ثابت می‌کنیم $x \in E$. چون f پیوسته است پس

داریم $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ در نتیجه $(x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x, f(x))$. لذا $(x, f(x)) \in \overline{G(E)} = G(E)$ و بنا به تعریف $G(E)$، نتیجه می‌گیریم که $x \in E$.

(۴) اگر تابع $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{2k}$ را همان تابع تعریف شده در (۱) در نظر بگیریم، آنگاه داریم $E = g^{-1}(G(E))$. چون g پیوسته است پس باز بودن $G(E)$، باز بودن E را نتیجه می‌دهد.

(۵)، تابع $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $g(x) = 0$ در نظر بگیرید به‌علاوه بگیرید $E = \mathbb{R}$.

(٦)، تمرین (با تکنیکی مشابه قسمت (۳) به‌سادگی می‌توان هر دو قسمت (٦) را حل کرد).

(۷)، مثال قسمت (۵) را در نظر بگیرید.

۲ ـ ۷۱ ـ تذکر: اگر $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته، یک‌به‌یک و پوشا باشد آنگاه آنگاه الزاماً f^{-1} پیوسته نیست. (روی $X = \mathbb{R}$، d_1 را متریک گسسته و d_2 را متریک اقلیدسی و f را تابع همانی در نظر بگیرید).

۲ ـ ۷۲ ـ تذکر: اگر (X, d) یک فضای متریک کامل و $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ پیوسته، یک‌به‌یک و پوشا باشد آنگاه آنگاه لزومی ندارد f^{-1} هم پیوسته باشد. (فضای $X = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ را با متریک اقلیدسی در نظر گرفته و تابع $f : X \longrightarrow X$ را با ضابطهٔ

$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2n} & x = \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2n-1} & x = 2n-1 \\ n & x = 2n \end{cases}$ در نظر بگیرید. f بر X پیوسته است درحالی‌که f^{-1} در صفر ناپیوسته است).

۲ ـ ۷۳ ـ تذکر: فرض کنیم I و J دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند و $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. دراین‌صورت تابع $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\varphi(x) = max\{f(x,j) \ : \ j \in J\}$ بر I پیوسته است.

۲ ـ ۷۴ ـ قضیه: تابع $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته است اگروفقط‌اگر تابع f هر دنباله همگرا را به یک دنباله همگرا تبدیل کند.

برهان: اگر f پیوسته باشد آنگاه طبق قضیه ۲ ـ ۱۴، تابع f هر دنباله همگرا را به یک دنباله همگرا تبدیل می‌کند. برای عکس، فرض کنیم $x_n \overset{(X,d_1)}{\longrightarrow} x$ دراین‌صورت $y \in Y$ موجود است که $f(x_n) \overset{(Y,d_2)}{\longrightarrow} y$. بنا به قضیه ۲ ـ ۱۴، کافی است که نشان دهیم $y = f(x)$. بدین منظور دنباله $\{z_n\}$ با جمله عمومی $z_n = \begin{cases} x_n & \text{زوج } n \\ x & \text{فرد } n \end{cases}$ را در نظر می گیریم. داریم $z_n \overset{(X,d_1)}{\longrightarrow} x$ درنتیجه $\{f(z_n)\}$ در (Y,d) همگرا است. اما داریم $f(z_{2n}) \longrightarrow y$ و $f(z_{2n+1}) \longrightarrow f(x)$ درنتیجه داریم $y = f(x)$.

با استفاده از قضیه فوق، می‌توان گزاره زیر را ثابت کرد:

۲ ـ ۷۵ ـ نتیجه: فرض کنیم (X, d_1) و (Y, d_2) دو فضای متریک کامل باشند. دراین‌صورت $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته است اگروفقط‌اگر تابع f هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی تبدیل کند.

فصل ۳

پیوستگی یکنواخت

۳ ـ ۱ ـ تعریف: تابع $f:(X,d_1)\longrightarrow(Y,d_2)$ بر زیر مجموعه E از X پیوسته یکنواخت نامیده می‌شود هر گاه:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in E;\ \Big(d_1(x,y)<\delta\Rightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon\Big)$$

به طور یکنواخت پیوسته بودن، پیوستگی را نتیجه می‌دهد اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. ابتدا قضیه‌ای می‌آوریم که ارتباط پیوستگی یکنواخت با دنباله‌ها را بیان می‌کند و سپس به بیان چند مثال از توابع پیوسته می‌پردازیم که پیوسته یکنواخت نیستند.

۳ ـ ۲ ـ قضیه: $f:(X,d_1)\longrightarrow(Y,d_2)$ بر زیر مجموعه E از X پیوسته یکنواخت است اگر و فقط اگر برای هر دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در E اگر داشته باشیم $d_1(x_n,y_n)\longrightarrow 0$ آنگاه $d_2(f(x_n),f(y_n))\longrightarrow 0$.

برای آنکه ثابت کنیم f بر E پیوسته یکنواخت نیست کافی است که دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در E را چنان بیابیم که $d_۱(x_n; y_n) \longrightarrow ۰$ اما $d_۲\Big(f(x_n), f(y_n)\Big) \not\longrightarrow ۰$.

۳ ـ ۳ ـ مثال: تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ بر $(۰, ۱]$ پیوسته یکنواخت نیست.

زیرا با انتخاب $x_n = \frac{۱}{n}$ و $y_n = \frac{۱}{n+۱}$ داریم $|x_n - y_n| \longrightarrow ۰$.

۳ ـ ۴ ـ مثال: تابع $f(x) = x^۲$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نمی‌باشد.

زیرا با انتخاب $x_n = n$ و $y_n = n + \frac{۱}{n}$ داریم $|x_n - y_n| \longrightarrow ۰$

اما:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n^۲ + \frac{۱}{n^۲} + ۲ - n^۲| \longrightarrow ۲ \neq ۰ .$$

۳ ـ ۵ ـ مثال: توابع زیر بر مجموعه‌های داده شده پیوسته یکنواخت نمی‌باشند:

الف ـ $f(x) = e^x$ بر $\mathbb{R}$.

ب ـ $g(x) = x^n$ وقتی $(n > ۱)$ بر $\mathbb{R}$.

ج ـ $h(x) = x \sin x$ بر $\mathbb{R}$.

۳ ـ ٦ ـ مثال: توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت هستند.

(زیرا داریم $\max\{|\cos x - \cos y|$ و $|\sin x - \sin y|\} \leq |x - y|$ برای $(x; y \in \mathbb{R}$).

۳ـ ۷ ـ **تذکر:** اگر f بر E پیوسته یکنواخت باشد و $A \subseteq E$. آنگاه f بر A هم پیوسته یکنواخت است.

۳ـ ۸ ـ **قضیه:** مجموع و تفاضل دو تابع حقیقی پیوسته یکنواخت بر E، پیوسته یکنواخت است.

۳ـ ۹ ـ **تذکر:** حاصلضرب توابع حقیقی پیوسته یکنواخت لزوماً پیوسته یکنواخت نمی‌باشد (مثلاً بگیرید $f(x) = g(x) = x$ بر $E = \mathbb{R}$).

۳ـ ۱۰ ـ **قضیه:** ترکیب دو تابع پیوسته یکنواخت در فضاهای متریک دلخواه، پیوسته یکنواخت است.

۳ـ ۱۱ ـ **قضیه:** فرض کنیم $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ پیوسته باشد اگر $E \subseteq X$ فشرده باشد آنگاه f بر E پیوسته یکنواخت است.

۳ـ ۱۲ ـ **نتیجه:** اگر $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow (Y, d)$ پیوسته باشد آنگاه f بر هر زیر مجموعه کراندار $\mathbb{R}^m$ پیوسته یکنواخت است.

(راهنمایی: از قضیه قبل و قضیه هاینه بورل استفاده کنید.)

۳ـ ۱۳ ـ **قضیه:** اگر هر تابع حقیقی پیوسته بر فضای متریک X، پیوسته یکنواخت باشد آنگاه X یک فضای متریک کامل است.

۳ـ ۱۴ ـ **قضیه:** فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد و $f : X \longrightarrow X$ پوشا باشد و برای هر $y \in X$ و x داشته باشیم $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ در این صورت f بر X پیوسته یکنواخت

است.

۳ـ ۱۵ ـ **قضیه:** اگر f بر (a,b) (یا$\mathbb{R}$) مشتق کراندار داشته باشد آنگاه f بر (a,b) (یا$\mathbb{R}$) پیوسته یکنواخت است.

۳ـ ۱۶ ـ **تذکر:** عکس قضیه فوق الزاماً برقرار نیست یعنی ممکن است f بر (a,b) پیوسته یکنواخت و مشتق پذیر باشد اما f' بر (a,b) کراندار نباشد. (مثلاً بگیرید $f(x)=\sqrt{x}$ بر $(۰,۱)$).

حال به بیان چند نکته مهم در مورد پیوستگی یکنواخت می‌پردازیم:

۳ـ ۱۷ ـ **نکته:** اگر f بر (a,b) یکنوا و پیوسته باشد آنگاه لزومی ندارد که f بر (a,b) پیوسته یکنواخت باشد. (بگیرید $f(x)=\frac{۱}{x}$ بر $(۰,۱)$).

۳ـ ۱۸ ـ **نکته:** اگر f بر (a,b) پیوسته و کراندار باشد آنگاه لزومی ندارد که f بر (a,b) پیوسته یکنواخت باشد. (بگیرید $f(x)=\sin\frac{۱}{x}$ بر $(۰,۱)$).

۳ـ ۱۹ ـ **تذکر:** اگر f بر $E_۱$ و $E_۲$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f بر $E_۱\cup E_۲$ الزاماً پیوسته نیست.

۳ـ ۲۰ ـ **نکته:** اگر f بر $\mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد آنگاه الزاماً f بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نمی‌باشد.(بگیرید $f(x)=\sin(x^۲)$ بر $\mathbb{R}$).

۳ ـ ۲۱ ـ نکته: اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی تبدیل می‌کند. ممکن است f پیوسته یکنواخت نباشد. (بگیرید $f(x)=x^{۲}$).

۳ ـ ۲۲ ـ نکته: اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه $|f|$ و $\sqrt[۲k+۱]{f}$ هم پیوسته یکنواخت بر $\mathbb{R}$ هستند.

۳ ـ ۲۳ ـ نکته: اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{+}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه $\sqrt[۲k]{f}$ هم بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

۳ ـ ۲۴ ـ نکته: اگر f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $g(x)=xf(x)$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد، آنگاه f بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

۳ ـ ۲۵ ـ نکته: اگر f بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه چندجمله‌ای مانند $P(x)$ موجود است که روی $\mathbb{R}$، داشته باشیم $f\leq P$.

۳ ـ ۲۶ ـ نکته: تابع $f(x)=x\sin x$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نیست. (بگیرید $x_n=۲n\pi$ و $y_n=۲n\pi+\frac{\pi}{n}$)

۳ ـ ۲۷ ـ نکته: فرض کنیم $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l<\infty$ در این صورت f بر $[a,\infty)$ پیوسته یکنواخت است.

(راهنمایی: فرض کنید $\varepsilon>۰$ داده شده باشد. چون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ پس $N>a$ موجود است که برای هر $x\in\mathbb{R}$ اگر

$x \geq N$ آنگاه $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. از طرفی f بر $[a, N]$ پیوسته است و چون $[a, N]$ فشرده است پس f بر $[a, N]$ پیوسته یکنواخت است پس برای $\varepsilon > 0$ داده شده، $\delta_1 > 0$ موجود است که

$$\forall\, x, y \in [a, N]\ ;\ \ (|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2})\ .$$

با انتخاب $\delta = \delta_1$، ثابت کنید

$$\forall\, x, y \in [a, +\infty]\ ;\ \ (|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

و حکم را نتیجه بگیرید).

۳ ـ ۲۸ ـ نکته: اگر f بر $(-\infty, a]$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell < \infty$ آنگاه f بر $(-\infty, a]$ پیوسته یکنواخت است.
(راهنمایی: مشابه نکته قبل عمل کنید).

۳ ـ ۲۹ ـ نکته: اگر f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و حدود $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ موجود و متناهی باشند، آنگاه f بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است. (راهنمایی: با استفاده از دو نکته قبل، این گزاره را ثابت کنید).

۳ ـ ۳۰ ـ نکته: اگر $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$، اعداد حقیقی a_n و b_n یافت شوند که

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + a_n & 2n \leq x \leq 2n + 1 \\ x + b_n & 2n + 1 \leq x \leq 2n + 2 \end{cases}$$

آنگاه f بر $[0, \infty)$ پیوسته یکنواخت است.

۳ ـ ۳۱ ـ نکته: توابع $y=\dfrac{e^x}{۱+e^x}$ و $y=\dfrac{x^۲}{۱+x^۲}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت هستند و تابع $y=\dfrac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$ بر $[۰,\infty)$ پیوسته یکنواخت است.

۳ ـ ۳۲ ـ نکته: اگر $d_۰$ متریک گسسته باشد و d متریک دلخواه روی X، آنگاه هر تابع $f:(Y,d_۰)\longrightarrow(X,d)$ پیوسته یکنواخت است (بر Y).

۳ ـ ۳۳ ـ نکته: اگر (X,d) یک فضای متریک باشد و $x_۰\in X$ آنگاه تابع $d_{x_۰}:X\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $d_{x_۰}(x)=d(x_۰,x)$ بر X پیوسته یکنواخت است.

(راهنمایی: برای هر x و y در X داریم $|d_{x_۰}(x)-d_{x_۰}(y)|\leq d(x,y)$).

۳ ـ ۳۴ ـ نکته: اگر (X,d) یک فضای متریک و $\emptyset\neq E\subseteq X$ و e تابع فاصله از E باشد یعنی $e(x)=d(x,E)=\inf\limits_{a\in E}d(x,a)$، آنگاه e بر X پیوسته یکنواخت است.

(راهنمایی: داریم $|e(x)-e(y)|\leq d(x,y)$).

۳ ـ ۳۵ ـ نکته: اگر f بر $\mathbb{R}^k$ پیوسته باشد و $A\subseteq\mathbb{R}^k$ کراندار باشد آنگاه f بر A پیوسته یکنواخت است.

(راهنمایی: فرض کنید $M>۰$ چنان باشد که برای هر a در A، $\|a\|<M$. در این صورت داریم

و چون $A \subseteq \underbrace{[-M,M]\times[-M,M]\times\cdots\times[-M,M]}_{k\text{ ـ مرتبه}} = I$ و چون I فشرده است و f بر I پیوسته پس f بر I پیوسته یکنواخت است لذا بر A هم پیوسته یکنواخت است).

۳ ـ ۳۶ ـ نکته: اگر $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ بر X پیوسته یکنواخت و $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X کوشی باشد آنگاه $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ در Y کوشی است.

۳ ـ ۳۷ ـ نکته: فرض کنیم (Y, d_2) یک فضای متریک کامل و $A \subseteq (X, d_1)$ و $f : A \longrightarrow Y$ بر A پیوسته یکنواخت باشد، در این صورت توسیع منحصر بفردی از f مانند $\bar{f} : \bar{A} \longrightarrow Y$ موجود است که بر $\bar{A}$ پیوسته یکنواخت باشد.

(راهنمایی: فرض کنیم $x \in \bar{A}$ دراین‌صورت دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود است که $x_n \longrightarrow x$. دنباله $\{x_n\}$ همگرا است پس کوشی است. چون f بر A پیوسته یکنواخت است پس بنا به نکته قبل، $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای کوشی در (Y, d) است. چون (Y, d) یک فضای متریک کامل است پس $\{f(x_n)\}$ همگرا است. می‌گیریم $\bar{f}(x) = \lim\limits_{n} f(x_n)$ دراین‌صورت اولاً $\bar{f}$ بر $\bar{A}$ خوشتعریف است (چرا؟) ثانیاً $\bar{f}$ توسیع f است ثالثاً $\bar{f}$ بر $\bar{A}$ پیوسته یکنواخت است رابعاً اگر g توسیع پیوسته f بر $\bar{A}$ باشد آنگاه داریم $g = \bar{f}$ (چرا؟)).

۳ ـ ۳۸ ـ نکته: اگر $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه f بر $[a, b)$ پیوسته یکنواخت است اگر و فقط اگر $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ موجود و متناهی

باشد.

(راهنمایی: اگر $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه بنا به نکته قبل، f توسیعی مانند $\bar{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دارد که $\bar{f}$ بر $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است. در نتیجه داریم $\bar{f}(b) = \bar{f}(b^-) = f(b^-)$.

برعکس، اگر $f(b^-)$ موجود و متناهی باشد آنگاه تابع

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & a \leq x < b \\ f(b^-) & a \leq x = b \end{cases}$$

بر $[a,b]$ پیوسته است و چون $[a,b]$ فشرده است پس g بر $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است، درنتیجه g بر $[a,b)$ هم پیوسته یکنواخت است، از طرفی بر $[a,b)$ داریم $f = g$).

۳ ـ ۳۹ ـ نکته: اگر $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه f بر $(a,b]$ پیوسته یکنواخت است اگر و فقط اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ موجود و متناهی باشد.

(راهنمایی: مشابه نکته قبل حل شود).

۳ ـ ۴۰ ـ نکته: تابع پیوسته f بر (a,b)، پیوسته یکنواخت است اگر و فقط اگر حدود $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ موجود و متناهی باشند.

(راهنمایی: با استفاده از دو نکته قبل حل شود).

۳ ـ ۴۱ ـ نکته: توابع زیر بر مجموعه‌های داده شده پیوسته یکنواخت هستند.

$y = \dfrac{x}{\sin x}$ بر بازه $(۰, ۱)$ و $y = \dfrac{\sin x}{x}$ بر بازه $(۰, \infty)$.

$y = \sin \dfrac{۱}{x^۲ + ۱}$ بر $(-\infty, \infty)$.

$y = \dfrac{۱ - ۲^{\frac{۱}{x}}}{۱ + ۳^{\frac{۱}{x}}}$ بر $(۰\,, ۱)$ و بر $(-۱\,, ۰)$.

دقت کنید که توابع زیر بر مجموعه‌های داده شده پیوسته یکنواخت نیستند:

$y = \sin \dfrac{۱}{x}$ بر $(۰\,, ۱)$ و بر $(۰, \infty)$.

$y = \dfrac{e^x}{x}$ بر $(۰\,, ۱)$ و $y = \dfrac{(-۱)^{[x]}}{x^۲ - ۱}$ بر $(۱, ۲]$.

۳ ـ ۴۲ ـ تذکر: اگر f بر بازه کراندار (a, b) پیوسته و بی‌کران باشد آنگاه f بر (a, b) پیوسته یکنواخت نمی‌باشد.

۳ ـ ۴۳ ـ نتیجه: اگر f بر (a, b) مشتق پذیر و بی‌کران باشد آنگاه f' هم بی‌کران است.

(راهنمایی: اگر f' کراندار باشد آنگاه f پیوسته یکنواخت می‌باشد لذا بنا بر تذکر قبل f بر (a, b) کراندار است که این یک تناقض می‌باشد).

۳ ـ ۴۴ ـ تذکر: اگر f بر $[۰\,, \infty)$ کراندار و پیوسته باشد و $g(x) = \int_۰^x f(t)dt$ آنگاه g بر $[۰\,, \infty)$ پیوسته یکنواخت است.

۳ ـ ۴۵ ـ نکته: اگر f بر $\mathbb{R}$ پیوسته و $|f|$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f هم بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

۳ ـ ۴۶ ـ نکته: اگر $a > ۰$ و $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد و $g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و همواره غیر صفر باشد و $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ آنگاه تابع $h = \dfrac{f}{g}$ بر $[a, \infty)$ پیوسته یکنواخت

است.

۳ ـ ۴۷ ـ تذکر: پیوستگی یکنواخت $|f|$ یا $f^{۲}$ یا $f^{۴}$ یا $f \circ f$، بر $\mathbb{R}$، پیوستگی یکنواخت f بر $\mathbb{R}$ را نتیجه نمی‌دهد (بگیرید $f = \chi_{\mathbb{Q}} - \chi_{\mathbb{Q}^c}$).

۳ ـ ۴۸ ـ نکته: حاصلضرب یک تابع پیوسته یکنواخت حقیقی بر $\mathbb{R}$ در یک تابع پیوسته یکنواخت کراندار بر $\mathbb{R}$، الزاماً پیوسته یکنواخت بر $\mathbb{R}$ نمی‌باشد. (بگیرید $f(x) = x$ و $g(x) = \sin x$).

۳ ـ ۴۹ ـ نکته: اگر (Y, d) یک فضای متریک کامل و $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$ بر E پیوسته یکنواخت باشد و E نیز کراندار باشد آنگاه $f(E)$ کراندار است.

۳ ـ ۵۰ ـ نکته: لزومی ندارد که هر تابع پیوسته یکنواخت بر مجموعه کراندار E در (X, d)، تابعی کراندار باشد.

(راهنمایی: تابع همانی $id : (\mathbb{R}, d_{\circ}) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است. $\mathbb{R}$ در $(\mathbb{R}, d_{\circ})$ کراندار است اما $id(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ در $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ کراندار نیست).

فصل ۴

مشتق

۴ ـ ۱ ـ تعریف: فرض کنیم f در همسایگی $(x_\circ, x_\circ + \alpha)$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{h \to \circ+} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ موجود باشد، در این صورت می‌گوییم f در $x_\circ$ از راست مشتق‌پذیر است و حد فوق را مشتق راست f در $x_\circ$ می‌نامیم و با $f'(x_\circ^+)$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه اگر $\lim\limits_{h \to \circ-} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ موجود باشد می‌گوییم f در $x_\circ$ از چپ مشتق‌پذیر است و حد فوق را برابر مشتق چپ f در $x_\circ$ می‌گوییم و آنرا با $f'(x_\circ^-)$ نمایش می‌دهیم.

می‌گوییم f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است هرگاه $\lim\limits_{h \to \circ} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ موجود و متناهی باشد و مشتق f در $x_\circ$ را برابر حد فوق می‌گیریم و آنرا با $f'(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم.

۴ ـ ۲ ـ تذکر: اگر یکی از حدود فوق ∞ شوند، آنگاه f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر (یا مشتق‌پذیر چپ یا راست) به حساب نمی‌آید اما می‌گوییم f در $x_\circ$ مشتق (چپ یا راست یا دو طرفه) بینهایت دارد.

۴ ـ ۳ ـ قضیه: f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر f از چپ و راست در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_\circ^+) = f'(x_\circ^-)$.

۴ ـ ۴ ـ تذکر: اگر f در هر نقطه از بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه می گوییم f بر (a,b) مشتق‌پذیر است به علاوه می گوییم f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و f در a از راست و در b از چپ مشتق‌پذیر باشد.

۴ ـ ۵ ـ قضیه: اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در $x_\circ$ پیوسته است.

۴ ـ ٦ ـ تذکر: عکس قضیه فوق الزاماً درست نمی‌باشد. به سه مثال زیر توجه کنید.

۴ ـ ۷ ـ مثال: تابع $f(x) = |x|$ در $x_\circ = \circ$ مشتق پذیر نیست زیرا داریم $f'(\circ^+) = ۱$ و $f'(\circ^-) = -۱$ در حالی که f در $\circ$ پیوسته است.

۴ ـ ۸ ـ مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{۱}{x} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$ در $x_\circ = \circ$ مشتق‌پذیر نیست زیرا $\lim\limits_{h\to\circ} \frac{f(h)-f(\circ)}{h} = \lim\limits_{h\to\circ} \sin\frac{۱}{h}$ موجود نیست اما f در $\circ$ پیوسته است.

۴ ـ ۹ ـ مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x_0 = 0$ مشتق بینهایت دارد (مشتق‌پذیر نیست) در حالی که این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است.

۴ ـ ۱۰ ـ مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر است و در بقیه نقاط حتی پیوسته هم نیست.

۴ ـ ۱۱ ـ مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ وقتی β و α نامنفی هستند به صورت زیر است:

الف ـ $f'(0)$ موجود است اگر و فقط اگر $\alpha > 1$،

ب ـ f' کراندار است اگر و فقط اگر $\alpha \geq 1 + \beta$،

ج ـ f' پیوسته است اگر و فقط اگر $\alpha > 1 + \beta$،

د ـ $f''(0)$ موجود است اگر و فقط اگر $\alpha > 2 + \beta$،

ه ـ f'' کراندار است اگر و فقط اگر $\alpha \geq 2 + 2\beta$؛

و ـ f'' پیوسته است اگر و فقط اگر $\alpha > 2 + 2\beta$.

۴ ـ ۱۲ ـ مثال: تابع $f(x) = |x^3|$ در $x_0 = 0$ مشتقات مرتبه اول و دومی برابر صفر دارد اما مشتق مرتبه سوم در صفر ندارد به علاوه تابع f''' در $x_0 = 0$ ناپیوسته است.

قضایای مشتق

۴ ـ ۱۳ ـ قضیه رل: فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) = f(b)$ و f بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت

$c \in (a,b)$ موجودست که $f'(c) = 0$.

۴ ـ ۱۴ ـ **قضیه مقدار میانگین:** فرض کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $c \in (a,b)$ موجود است که $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

۴ ـ ۱۵ ـ **نتیجه:** اگر f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f' > 0$ بر (a,b) آنگاه f بر (a,b) صعودی اکید است.

اگر f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد با مشتق منفی، آنگاه f بر (a,b) نزولی اکید است.

۴ ـ ۱۶ ـ **نتیجه:** فرض کنیم f در همسایگی‌ای از x_0 دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_0) = 0$ در این صورت:

الف ـ اگر f در x_0 مشتق دوم منفی داشته باشد آنگاه f در x_0 ماکزیمم نسبی دارد.

ب ـ اگر f در x_0 مشتق دوم مثبت داشته باشد آنگاه f در x_0 می‌نیمم نسبی دارد.

۴ ـ ۱۷ ـ **قضیه مقدار میانی مشتق:** فرض کنیم f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر و α بین $f'(a^+)$ و $f'(b^-)$ باشد، در این صورت c بین a و b موجود است که $f'(c) = \alpha$.

۴ ـ ۱۸ ـ **نتیجه:** اگر f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه f' بر (a,b) خاصیت مقدار میانی دارد. می‌دانیم که اگر تابعی بر بازه (a,b)

دارای خاصیت مقدار میانی باشد و در $x_0 \in (a,b)$ پیوسته نباشد آنگاه حداقل یکی از حدود چپ یا راست f در x_0 موجود نمی‌باشند در نتیجه قضیه مهم زیر را داریم:

۴ ـ ۱۹ ـ قضیه: اگر f بر (a,b) مشتق یکنوا داشته باشد آنگاه f' بر (a,b) پیوسته است.

حال به بیان چند مثال از کاربردهای قضایای فوق می‌پردازیم.

۴ ـ ۲۰ ـ گزاره: اگر $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ مشتق‌پذیر با مشتق مخالف ۱ باشد آنگاه f بر $[a,b]$ نقطه ثابت منحصر بفرد دارد.

برهان: اولاً با انتخاب $g(x) = x - f(x)$ داریم $g(a) \leq 0$ و $g(b) \geq 0$ در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانی پیوستگی، $x_0 \in [a,b]$ موجود است که $g(x_0) = 0$ لذا داریم $f(x_0) = x_0$.
حال فرض کنیم (فرض خلف) $x_1 \in [a,b]$ و $x_0 \neq x_1$ و $f(x_1) = x_1$ در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانگین $c \in [a,b]$ موجود است که $f'(c) = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = 1$ که این یک تناقض است.

۴ ـ ۲۱ ـ گزاره: فرض کنیم $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x\to\infty} f'(x) = b \neq 0$ در این صورت

الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{bx} = 1$.

۴ ـ ۲۲ ـ نتیجه: اگر f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \circ$ آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \circ$.

۴ ـ ۲۳ ـ قضیه: فرض کنیم f بر (a,b) مشتق‌پذیر و بی‌کران باشد، در این صورت f' هم بر (a,b) بی‌کران است.

۴ ـ ۲۴ ـ گزاره: اگر f بر $(\circ,\infty)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ هر دو موجود و متناهی باشند آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \circ$.

۴ ـ ۲۵ ـ قضیه (تعمیمی از قضیه رُل): فرض کنیم $f : [\circ,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $\lambda \in [\circ,\infty)$ موجود باشد که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(\lambda)$ در این صورت:

الف ـ بُرد f یک بازه بسته و کراندار است.

ب ـ اگر f بر $(\circ,\infty)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $\alpha \in (\lambda,\infty)$ موجود است که $f'(\alpha) = \circ$.

(راهنمایی: الف) اولاً چون $[\circ,\infty)$ همبند است پس برد f یک بازه است. ثانیاً فرض کنیم $z \in \overline{R(f)}$ در این صورت دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $[\circ,\infty)$ موجود است که $z = \lim\limits_n f(x_n)$. اگر $\{x_n\}$ کراندار باشد آنگاه $\{x_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرا مانند $\{x_{\varphi(n)}\}$ دارد لذا $x \in [\circ,\infty)$ موجود است که $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$ لذا داریم $z = \lim\limits_n f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$ یعنی $z \in R(f)$. اگر $\{x_n\}$

بی‌کران باشد آنگاه بنا به فرض زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ مانند $\{x_{\varphi(n)}\}$ موجود است که $x_{\varphi(n)} \longrightarrow +\infty$ لذا داریم $z = \lim_n f(x_{\varphi(n)}) = f(\lambda) \in R(f)$. کراندار بودن $R(f)$ با تکنیکی مشابه‌بسته بودن آن با گرفتن دنباله، قابل اثبات می‌باشد.

ب) فرض کنید (فرض خلف) که برای هر α از (λ, ∞)، $f'(\alpha) \neq \circ$ سپس نتیجه بگیرید $\circ \notin f'(M, \infty)$ و بنا به قضیه مقدار میانی مشتق، نتیجه بگیرید که f یکنوا است و سپس به تناقض برسید).

۴ ـ ۲۶ ـ گزاره: فرض کنیم f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد و مشتق آن بجز در تعداد متناهی نقطه صفر باشد در این صورت $f' \equiv \circ$. (در نتیجه f تابعی است ثابت).

۴ ـ ۲۷ ـ گزاره: فرض کنیم f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $f(-۱) = -۱$ و $f(۲) = ۲$، اگر $f' \leq ۱$ آنگاه داریم $f(\circ) = \circ$ (f بر $[-۱, ۲]$ تابع همانی است).

(راهنمایی: بگیرید $g(x) = f(x) - x$ در این صورت $g' \leq \circ$ لذا g نزولی است اما داریم $g(-۱) = g(۲) = \circ$ در نتیجه داریم g بر $[-۱, ۲]$ تابع ثابت صفر است).

۴ ـ ۲۸ ـ گزاره: فرض کنیم f بر $[a,b]$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$ و برای هر c از (a,b) داشته باشیم $f(c)>0$، در این صورت $d\in(a,b)$ موجود است که $f''(d)<0$.

(راهنمایی: چون f بر $[a,b]$ پیوسته است پس $d\in[a,b]$ موجود است که $f(d)=\max\limits_{a\leq x\leq b}f(x)$ مشابه اثبات قضیه رُل عمل کرده و ثابت کنید $f''(d)<0$).

۴ ـ ۲۹ ـ گزاره: فرض کنیم f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد در این صورت بین هر دو صفر متوالی f' ، تابع f حداکثر در یک نقطه صفر می‌شود.

(راهنمایی: از قضیه رُل استفاده کنید).

۴ ـ ۳۰ ـ تمرین : فرض کنید $f:[0,1]\longrightarrow[0,1)$ پیوسته باشد. نشان دهید معادله $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ یک و تنها یک ریشه در بازه $(0,1)$ دارد.

۴ ـ ۳۱ ـ گزاره: فرض کنیم f بر $[0,1]$ پیوسته و $f(0)=0$ و f' بر $(0,1)$ موجود و متناهی باشد. اگر f' بر $(0,1)$ صعودی باشد آنگاه تابع $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز بر $(0,1)$ صعودی است.

(راهنمایی: ثابت کنید $g'\geq 0$ بر $(0,1)$).

۴ ـ ۳۲ ـ گزاره: معادله $(n+1)x^n-4x+1=0$ حداقل یک جواب در $(0,1)$ دارد.

اثبات: می‌گیریم $g(x) = x^{n+1} - 2x^2 + x$ در این صورت داریم $0 = g(0) = g(1)$ لذا بنا به قضیه رل g' در $(0, 1)$ حداقل یک ریشه دارد.

۴ ـ ۳۳ ـ قضیه: فرض کنیم f بر $[a,b]$ دارای مشتق پیوسته باشد. در این صورت f به صورت تفاضل دو تابع صعودی است که هر کدام از آنها بر $[a,b]$ دارای مشتق پیوسته‌اند.

۴ ـ ۳۴ ـ گزاره: فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت:

الف) اگر $ff' \equiv 0$ آنگاه f تابعی ثابت است.

ب) اگر $f^3 f' \equiv 0$ آنگاه f تابعی ثابت است.

(راهنمایی: داریم $(f^2)' = 2ff'$ و $(f^4)' = 4f^3f'$ لذا به سادگی حکم نتیجه می‌شود).

۴ ـ ۳۵ ـ قضیه: فرض کنیم f بر $(0,\infty)$ مشتق پیوسته داشته و $h > 0$ و $\lim_{x\to\infty}(f(x) + hf'(x)) = 0$ در این صورت داریم

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0 \,.$$

۴ ـ ۳۶ ـ گزاره: اگر $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و f و f' صفر مشترک نداشته باشند، در این صورت مجموعه صفرهای f در $[0, 1]$ متناهی است.

(راهنمایی: فرض کنید (فرض خلف) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای اکیداً یکنوا در $[۰,۱]$ باشد و برای هر n داشته باشیم $f(x_n) = ۰$ و $x_n \longrightarrow x_۰$ در این صورت c_n بین x_n و $x_{n+۱}$ موجود است که $f'(c_n) = ۰$ و داریم $c_n \longrightarrow x_۰$ در نتیجه داریم $f(x_۰) = f'(x_۰) = ۰$ و $x_۰ \in [۰,۱]$ که این تناقض است).

۴ ـ ۳۷ ـ گزاره: فرض کنیم برای $x \neq x_۰$، f در x دوبار مشتق‌پذیر باشد و وقتی $x < x_۰$ داشته باشیم $f''(x) > ۰ > f'(x)$ و برای $x > x_۰$ داشته باشیم $f''(x) < ۰ < f'(x)$ در این صورت f در $x_۰$ مشتق متناهی ندارد.

۴ ـ ۳۸ ـ گزاره: فرض کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b) = ۰$ و برای هر x از (a,b) داشته باشیم $f(x) \neq ۰$. اگر $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ تعریف شود، آنگاه برد g برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

(راهنمایی: برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت کنید $c \in (a,b)$ موجود است که $f'(c) = \lambda f(c)$. بدین منظور از تابع کمکی $h(x) = e^{\lambda x} f(x)$ و قضیه رُل بر $[a,b]$ استفاده کنید).

۴ ـ ۳۹ ـ قضیه: فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر باشد. اگر f و f'' کراندار باشند آنگاه f' نیز چنین است.

۴ ـ ۴۰ ـ قضیه: فرض کنیم $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان باشد که برای هر $a > 0$، $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+a)-f(x)] = 0$. در این صورت توابع g و h موجودند که $f = g + h$ و $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x) = 0$.

۴ ـ ۴۱ ـ قضیه: فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \neq f'(x)$، در این صورت معادله $f(x) = 0$ حداکثر یک ریشه در $\mathbb{R}$ دارد که در صورت وجود چنین ریشه‌ای داریم $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)| = +\infty$.

۴ ـ ۴۲ ـ تعریف: فرض کنیم $\alpha > 0$ می‌گوییم f در نقطه x_0 در شرط لیپ‌شیتس در مرتبه α صدق می‌کند هرگاه $M_{x_0} > 0$ و همسایگی $N(x_0)$ موجود باشند که:

$$\forall x;\ \left(x \in (N(x_0)-\{x_0\}) \Rightarrow (|f(x)-f(x_0)| < M_{x_0}|x-x_0|^{\alpha})\right).$$

۴ ـ ۴۳ ـ گزاره: اگر f در شرط لیپ‌شیتس در x_0 از مرتبه α صدق کند که $0 < \alpha \leq 1$، آنگاه f در x_0 پیوسته است.

۴ ـ ۴۴ ـ گزاره: اگر f در شرط لیپ‌شیتس در x_0 از مرتبه α صدق کند که $\alpha > 1$، آنگاه f در x_0 مشتق‌پذیر است.

۴ ـ ۴۵ ـ گزاره: اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در شرط لیپ‌شیتس از مرتبه $\alpha = 1$ در x_0 صدق می‌کند اما عکس این مطلب الزاماً درست نمی‌باشد. (بگیرید $f(x) = |x|$ در $x_0 = 0$).

۴ ـ ۴۶ ـ گزاره: اگر f بر (a,∞) مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = ۰$ آنگاه: $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(f(x+۱) - f(x)\Big) = ۰$.

(راهنمایی: از قضیه مقدار میانگین استفاده کنید).

۴ ـ ۴۷ ـ گزاره: فرض کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) دو بار مشتق‌پذیر باشد و D خط واصل $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ باشد. اگر D نمودار f را در نقطه‌ای غیر از A و B مانند $P(c,f(c))$ قطع کند، آنگاه f'' حداقل یک ریشه در (a,b) دارد.

(راهنمایی: فرض کنید $d(x) = mx + n$ معادله خط D باشد. بگیرید $g(x) = f(x) - d(x)$ در این صورت داریم $g(a) = g(b) = g(c) = ۰$. حال دو بار از قضیه رُل استفاده کنید و حکم را نتیجه بگیرید).

۴ ـ ۴۸ ـ گزاره: اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر x و y از $\mathbb{R}$، $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\alpha} M$ که $M > ۰$ و $\alpha > ۱$ ثابت هستند، آنگاه f تابع ثابت است.

(راهنمایی: با تعریف مشتق ثابت کنید در هر x داریم $f'(x) = ۰$).

۴ ـ ۴۹ ـ قضیه: فرض کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد. برای هر y حقیقی مجموعهٔ زیر بسته باشد، $\{z \in \mathbb{R} \ : \ f'(z) = y\}$، در این صورت f' بر (a,b) پیوسته است.

(راهنمایی: فرض کنید $x_n \longrightarrow x$ در (a,b) و $f'(x_n) \not\longrightarrow f'(x)$ (فرض خلف)، در این صورت زیر دنباله‌ای یکنوا از $\{f'(x_n)\}$ موجود است که به $f'(x)$ همگرا نباشد (مثل $\{f'(x_{\varphi(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$). لذا $\varepsilon_\circ > \circ$ موجود است که برای هر n، $|f'(x_{\varphi(n)}) - f'(x)| \geq \varepsilon_\circ$ لذا $y \in \mathbb{R}$ موجود است که برای هر n، $y \in \left(f'(x_{\varphi(n)}), f'(x)\right)$ یا $y \in \left(f'(x), f'(x_{\varphi(n)})\right)$، بنا به قضیه مقدار میانی مشتق برای هر n، c_n بین $x_{\varphi(n)}$ و x موجود است که $f'(c_n) = y$ در نتیجه داریم $\{c_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{z \ : \ f'(z) = y\}$. همچنین $c_n \longrightarrow x$ پس بنا به فرض $f'(x) = y$ که این یک تناقض است).

۴ ـ ۵۰ ـ قضیه: فرض کنیم f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(a) > \circ$ و $f'(b) > \circ$ و $f(a) = f(b) = \circ$ در این صورت f' حداقل دو ریشه در (a,b) دارد.

(راهنمایی: فرض کنید x و y متعلق به $[a,b]$ چنان باشند که $f(y) = \max\limits_{a\leq t\leq b} f(t)$ و $f(x) = \min\limits_{a\leq t\leq b} f(t)$.
چون $\lim\limits_{t\to a^+} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a) > \circ$ و $\lim\limits_{t\to b^-} \frac{f(t)-f(b)}{t-b} > \circ$ پس داریم $x, y \in (a,b)$ اما داریم $f'(x) = f'(y) = \circ$).

فصل ۵

دنباله‌ها و سری‌ها در اعداد حقیقی

ابتدا چند قضیه مهم در مورد دنباله‌های $\mathbb{R}$ را که در فصل‌های پیشین آوردیم یادآوری می کنیم.

۵ ـ ۱ ـ قضیه: هر دنباله $\mathbb{R}$ زیر دنباله‌ای یکنوا دارد.

۵ ـ ۲ ـ قضیه: هر دنباله یکنوا و کراندار در $\mathbb{R}$ همگرا است.

۵ ـ ۳ ـ نتیجه: هر دنباله کراندار $\mathbb{R}$ زیر دنباله‌ای همگرا دارد.

۵ ـ ۴ ـ قضیه: اگر (X, d) یک فضای متریک باشد آنگاه مجموعه حدود زیر دنباله‌ای هر دنباله در X، یک مجموعه بسته است.

۵ ـ ۵ ـ نتیجه: اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ باشد آنگاه مجموعه حدود زیر دنباله‌ای $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ فشرده است.

۵ ـ ٦ ـ تعریف: فرض کنیم $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ در این صورت رابطه ترتیبی $\leq$ روی $\mathbb{R}$ را می‌توانیم روی $\mathbb{R}^*$ هم گسترش دهیم به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}^*$، $-\infty \leq x \leq +\infty$. $\mathbb{R}^*$ با رابطه $\leq$ را مجموعه اعداد حقیقی تعمیم یافته می‌گوییم.

۵ ـ ۷ ـ تذکر: اگر $A \subseteq \mathbb{R}^*$ بی کران باشد آنگاه داریم $\sup A = +\infty$ یا $\inf A = -\infty$.

۵ ـ ۸ ـ تذکر: از لحاظ توپولوژیک به کمک توپولوژی حاصل از متریک اقلیدسی روی $\mathbb{R}$، می‌توان یک توپولوژی روی $\mathbb{R}^*$ تعریف کرد که $\mathbb{R}^*$ یک فضای توپولوژیک فشرده باشد که در این صورت خواص $\mathbb{R}^*$ مشابه بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ می‌شود. مثلاً یکی از مهمترین خواص آن این است که هر دنباله در $\mathbb{R}^*$ زیر دنباله‌ای همگرا دارد.

۵ ـ ۹ ـ تذکر: فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت با تعاریف $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ که در ریاضی عمومی با آن آشنا هستیم، می‌توانیم $+\infty$ و $-\infty$ را به عنوان اعضای $\mathbb{R}^*$ در نظر بگیریم.

۵ ـ ۱۰ ـ تعریف: فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}$ باشد و E مجموعه حدود زیر دنباله‌ای $\{a_n\}$ در $\mathbb{R}^*$ باشد در این صورت $\sup E$

را حد اعلی یا حد بالای $\{a_n\}$ می‌نامیم و $\inf E$ را حد اسفل یا حد پایین $\{a_n\}$ می‌نامیم . حد بالای $\{a_n\}$ را با $\lim_n \sup a_n$ یا $\overline{\lim}\, a_n$ و حد پایین $\{a_n\}$ را با $\lim_n \inf a_n$ یا $\underline{\lim}\, a_n$ نمایش می‌دهیم .

۵ ـ ۱۱ ـ تذکر: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ باشد و H مجموعه حدود زیر دنباله‌ای $\{a_n\}$ در $\mathbb{R}$ باشد در این صورت H زیر مجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}$ است و داریم:

$$\overline{\lim}\, a_n = \max H \qquad \text{و} \qquad \underline{\lim}\, a_n = \min H\ .$$

۵ ـ ۱۲ ـ قضیه: فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}$ باشد و برای n طبیعی $M_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$ و $m_n = \inf\limits_{k\geq n} a_k$ در این صورت $\{M_n\}$ دنباله‌ای نزولی در $\mathbb{R}^*$ است. و $\{m_n\}$ دنباله‌ای صعودی در $\mathbb{R}^*$ است. در نتیجه هر دو دنباله فوق در $\mathbb{R}^*$ همگرا هستند. داریم

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim_n M_n \qquad \text{و} \qquad \underline{\lim}\, a_n = \lim_n m_n .$$

۵ ـ ۱۳ ـ قضیه: برای دنباله $\{a_n\}$ در $\mathbb{R}$ ، $\lim_n a_n = l$ اگر و فقط اگر $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = l$ ($l = \pm\infty$ هم مجازاست).

۵ ـ ۱۴ ـ تذکر: اگر از مرتبه‌ای به بعد داشته باشیم $a_n \leq b_n$ آنگاه داریم

$$\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n \qquad \text{و} \qquad \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

۵ ـ ۱۵ ـ قضیه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله در $\mathbb{R}$ باشند آنگاه داریم:

$$\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \, ,$$

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}(a_n + b_n) \, .$$

۵ ـ ۱۶ ـ تذکر: در رابطه های قضیه‌فوق، الزاماً تساوی نداریم (بگیرید $a_n = (-۱)^n = -b_n$) اما اگر یکی از $\lim\limits_n a_n$ یا $\lim\limits_n b_n$ موجود باشند، آنگاه رابطه‌های فوق به تساوی تبدیل می شوند.

۵ ـ ۱۷ ـ قضیه: $\underline{\lim}\, a_n = a$ اگر و فقط اگر دو شرط زیر را به طور همزمان داشته باشیم:

الف ـ $\forall \varepsilon > ۰ \;\; \exists k_\varepsilon \;\; ; \;\; \left(n \geq k_\varepsilon \implies a_n + \varepsilon > a\right)$

ب ـ $\forall \varepsilon > ۰ \;\; \forall N \;\; ; \;\; \left(\exists n \geq N \;,\; a_n < a + \varepsilon\right)$

به طور مشابه برای حد بالا هم داریم:

$\overline{\lim}(a_n) = a$ اگر و فقط اگر داشته باشیم:

الف ـ $\forall \varepsilon > ۰ \;\; \exists k_\varepsilon \;\; ; \;\; \left(n \geq k_\varepsilon \implies a_n < a + \varepsilon\right)$

ب ـ $\forall \varepsilon > ۰ \;\; \forall N \;\; ; \;\; \left(\exists n \geq N \;,\; a_n > a - \varepsilon\right)$

۵ ـ ۱۸ ـ قضیه: $\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim}\, a_n$.

۵ ـ ۱۹ ـ قضیه: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت باشد در این صورت

$$\underline{\lim}\, \frac{a_{n+۱}}{a_n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{a_{n+۱}}{a_n}$$

۵ ـ ۲۰ ـ نتیجه: اگر $l = |\frac{a_{n+1}}{a_n}|\lim_n$ آنگاه $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = l$.

۵ ـ ۲۱ ـ مثال:

الف ـ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ زیرا $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

ب ـ $e = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ زیرا با انتخاب $a_n = \frac{n^n}{n!}$ داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$.

ج ـ $\lim_n \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = 4$.

۵ ـ ۲۲ ـ قضیه: اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد آنگاه

$$\underline{\lim}(a_n - a_{n+1}) \leq 0 \leq \overline{\lim}(a_n - a_{n+1}).$$

۵ ـ ۲۳ ـ قضیه: اگر $\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ آنگاه

$$\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, \sigma_n \quad ; \quad \underline{\lim}\, \sigma_n \leq \underline{\lim}\, a_n.$$

۵ ـ ۲۴ ـ نتیجه: اگر در قضیه قبل داشته باشیم $a_n \to l$ آنگاه داریم $\sigma_n \to l$. مثلاً داریم $\lim_n \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$.

۵ ـ ۲۵ ـ تذکر: اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $(0,1)$ باشد آنگاه $\underline{\lim}\, a_n(1-a_{n+1}) \leq \frac{1}{4}$.

(راهنمایی: اگر $0 < x \leq y < 1$ آنگاه داریم $x(1-y) \leq \frac{1}{4}$).

۵ ـ ۲۶ ـ قضیه: اگر $\{b_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ باشد و برای هر دنباله کراندار $\{a_n\}$ در $\mathbb{R}$ داشته باشیم: $\overline{\lim}(a_n+b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$ آنگاه $\{b_n\}$ همگرا است.

۵ ـ ۲۷ ـ قضیه: اگر $\{b_n\}$ در $\mathbb{R}$ کراندار باشد و برای هر دنباله کراندار $\mathbb{R}$ مانند در $\{a_n\}$ داشته باشیم: $\overline{\lim}\, a_n b_n = \overline{\lim}\, a_n \ \overline{\lim}\, b_n$ آنگاه $\{b_n\}$ همگرا است.

۵ ـ ۲۸ ـ قضیه: اگر $a_n > ۰$, $r > ۰$ آنگاه

$$\overline{\lim}(a_n^r) = (\overline{\lim}\, a_n)^r ,$$

$$\underline{\lim}(a_n^r) = (\underline{\lim}\, a_n)^r .$$

۵ ـ ۲۹ ـ مثال: اگر $a_n > ۰$ آنگاه $\overline{\lim}(a_n^۲) = (\overline{\lim}\, a_n)^۲$ و $\underline{\lim}(a_n^۲) = (\underline{\lim}\, a_n)^۲$.

۵ ـ ۳۰ ـ تعریف: دنباله $\{a_n\}$ را نوسانی می‌گوییم هرگاه $\underline{\lim}\, a_n \neq \overline{\lim}\, a_n$.

۵ ـ ۳۱ ـ قضیه: اگر برای هر n طبیعی، a_n و b_n مثبت باشند و $\overline{\lim}\, a_n$, $\overline{\lim}\, b_n$ هردو متناهی یا هر دو نامتناهی باشند آنگاه $\overline{\lim}(a_n b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n \ \overline{\lim}\, b_n$.

۵ ـ ۳۲ ـ قضیه: اگر $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ و از مرتبه‌ای به‌بعد $a_n < \alpha$ و $\underline{\lim}\, a_n = \alpha$ آنگاه $\lim\limits_n a_n = \alpha$. اگر $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ و از مرتبه ای به‌بعد $\alpha < a_n$ و $\overline{\lim}\, a_n = \alpha$ آنگاه: $\lim\limits_n a_n = \alpha$.

۵ ـ ۳۳ ـ مثال:

الف) اگر $a_n = n(۲ + (-۱)^n)$ آنگاه $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = +\infty$.

ب) اگر $a_n = \sin(\frac{n\pi}{۲})$ آنگاه $\overline{\lim}\, a_n = ۱$ و $\underline{\lim}\, a_n = -۱$.

ج) اگر $a_n = (۱+\frac{۱}{n})^n \cos n\pi$ آنگاه $\overline{\lim}\, a_n = e$ و $\underline{\lim}\, a_n = -e$.

د) اگر $\{r_n\}$ دنباله اعداد گویای $(۰, ۱)$ باشد آنگاه $\overline{\lim}\, a_n = ۱$ و $\underline{\lim}\, a_n = ۰$.

ه) اگر $a_n = n^۲ \sin^۲(\frac{n\pi}{۲})$ آنگاه $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$ و $\underline{\lim}\, a_n = ۰$.

و) اگر $a_n = \frac{n}{۳} - [\frac{n}{۳}]$ آنگاه $\overline{\lim}\, a_n = \frac{۲}{۳}$ و $\underline{\lim}\, a_n = ۰$.

ز) اگر $a_n = \sin(\frac{n\pi}{۴}) + \frac{(-۱)^n}{n}$ آنگاه $\overline{\lim}\, a_n = ۱$ و $\underline{\lim}\, a_n = -۱$.

ک) اگر $a_n = \sin(\frac{n\pi}{۲}) \cos(\frac{n\pi}{۲})$ آنگاه $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = ۰$.

۵ ـ ۳۴ ـ مثال: فرض کنیم $a_n = \sin(\frac{n\pi}{۲}) \cos(\frac{n\pi}{۳})$ در این صورت برای محاسبه $\overline{\lim}\, a_n$ و $\underline{\lim}\, a_n$، زیر دنباله‌های $\{a_{۶n}\}$، $\{a_{۶n+۱}\}$، $\{a_{۶n+۲}\}$، $\{a_{۶n+۳}\}$، $\{a_{۶n+۴}\}$ و $\{a_{۶n+۵}\}$ را نظر می‌گیریم. داریم:

$$\lim_n a_{۶n} = \lim_n a_{۶n+۲} = \lim_n a_{۶n+۴} = ۰ \text{ و } a_{۶n+۵} = \frac{-۱}{۲} \text{ و}$$

$$a_{۶n+۳} = \begin{cases} ۱ & n = ۲k \\ \frac{۱}{۲} & n = ۲k+۱ \end{cases}$$

برای هر n، $a_{۶n+۱} = \frac{-۱}{۲}$ در نتیجه داریم $\underline{\lim}\, a_n = \frac{-۱}{۲}$ و $\overline{\lim}\, a_n = ۱$.

۵ ـ ۳۵ ـ مثال: اگر

$$a_n = \begin{cases} (-۱)^n \sin \frac{۱}{n} & n = ۳k \\ \frac{n}{n-۱} & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

آنگاه $\overline{\lim}\, a_n = ۱$ و $\underline{\lim}\, a_n = ۰$.

۵ ـ ۳۶ ـ مثال: $\overline{\lim}\, n \log(\cot^{-۱} n) = -\infty$.

۵ ـ ۳۷ ـ مثال: فرض کنیم $a_{۲n} = a_{۲n+۱} = ۲^{-n}$ در این صورت حدود بالا و پایین دنباله‌های $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ و $\sqrt[n]{a_n}$ را می‌یابیم. داریم:

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \begin{cases} ۱ & \text{زوج } n \\ \frac{۱}{۲} & \text{فرد } n \end{cases}$$

در نتیجه داریم: $\overline{\lim}\, \frac{a_{n+۱}}{a_n} = ۱$ و $\underline{\lim}\, \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{۱}{۲}$. از طرفی داریم:

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[۲k]{۲^{-k}} = ۲^{\frac{-۱}{۲}} & n = ۲k \\ \sqrt[۲k+۱]{۲^{-k}} = ۲^{\frac{-k}{۲k+۱}} & n = ۲k+۱ \end{cases}$$

زیر دنباله‌های زوج و فرد $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ به $۲^{\frac{-۱}{۲}}$ همگرا هستند لذا داریم $\sqrt[n]{a_n} \to ۲^{\frac{-۱}{۲}}$. در نتیجه داریم:

$$\underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} .$$

۵ ـ ۳۸ ـ تذکر: برای هر دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ الزاماً نمی‌توان گفت که از مرتبه‌ای به بعد $\underline{\lim}\, a_n \le a_n \le \overline{\lim}\, a_n$. (بگیرید $a_n = \frac{(-۱)^n}{n}$).

۵ ـ ۳۹ ـ قضیه: اگر a_n ها غیرصفر باشند آنگاه

$$\overline{\lim}(\frac{۱}{a_n}) = \frac{۱}{\underline{\lim}\, a_n} \,.$$

۵ ـ ۴۰ ـ قضیه:

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\ a_n &= \sup\left\{\underline{\lim}\ a_{\varphi(n)} : \text{است } \{a_n\} \text{ زیردنباله‌ای از } \{a_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}\\ &= \sup\left\{\overline{\lim}\ a_{\varphi(n)} : \text{است } \{a_n\} \text{ زیردنباله‌ای از } \{a_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}\\ \underline{\lim}\ a_n &= \inf\left\{\underline{\lim}\ a_{\varphi(n)} : \text{است } \{a_n\} \text{ زیردنباله‌ای از } \{a_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}\\ &= \inf\left\{\overline{\lim}\ a_{\varphi(n)} : \text{است } \{a_n\} \text{ زیردنباله‌ای از } \{a_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}\end{aligned}$$

۵ ـ ۴۱ ـ تذکر: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد و $E = \{a_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$، آنگاه $\overline{\lim}\, a_n$ (یا $\underline{\lim}\, a_n$) الزاماً با $\sup E'$ یا $\sup \bar{E}$ (یا $\inf E'$ یا $\inf \bar{E}$) برابر نیستند.

(راهنمایی: بگیرید

$$.(a_n = \begin{cases} ۱۰ & ۱ \le n \le ۱۰ \\ \frac{۱}{n} & n > ۱۰,\ \text{زوج } n \\ ۱ & n > ۱۰,\ \text{فرد } n \end{cases}$$

سریها

۵ ـ ۴۲ ـ تعریف: می گوییم سری $\sum a_n$ همگرا است هرگاه دنباله مجموعهای جزئی آن یعنی $\{s_n\}$ باجمله عمومی $s_n = \sum\limits_{i=۱}^{n} a_i$ همگرا باشد و مقدار سری را برابر $\lim\limits_n s_n$ می‌گیریم. اگر $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ واگرا باشد می‌گوییم سری $\sum a_n$ واگرا است .

۵ ـ ۴۳ ـ قضیه (شرط لازم همگرایی سریها): اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim\limits_{n} a_n = ۰$.

۵ ـ ۴۴ ـ تذکر: عکس قضیه فوق در حالت کلی درست نمی‌باشد. (بگیرید $a_n = \frac{۱}{n}$).

۵ ـ ۴۵ ـ قضیه (قاعده تلسکوپی یا ادغام): فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}$ باشد و $b_n = a_{n+۱} - a_n$ در این صورت دنباله $\{a_n\}$ همگرا است (به ℓ) اگر و فقط اگر سری $\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n$ همگرا باشد به $(\ell - a_k)$.

۵ ـ ۴۶ ـ تذکر: قضیه فوق برای بدست آوردن مقدار یک سری به کار می‌آید.

۵ ـ ۴۷ ـ مثال: مقدار سری‌های $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \frac{\sin \frac{۱}{k(k+۱)}}{\cos \frac{۱}{k} \cos \frac{۱}{k+۱}}$ و $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \log \frac{(k+۱)(k+۳)}{(k+۲)^{۲}}$ را به‌دست می آوریم. داریم:

$$\begin{aligned}\sin \frac{۱}{k(k+۱)} &= \sin\left(\frac{۱}{k} - \frac{۱}{k+۱}\right)\\ &= \sin \frac{۱}{k}\ \cos \frac{۱}{k+۱} - \cos \frac{۱}{k}\ \sin \frac{۱}{k+۱}.\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\sin \frac{۱}{k(k+۱)}}{\cos \frac{۱}{k} \cos \frac{۱}{k+۱}} &= \sum_{k=۱}^{\infty} \left(\tan \frac{۱}{k} - \tan \frac{۱}{k+۱}\right)\\ &= \tan ۱ - ۰ = \tan ۱\end{aligned}$$

به‌علاوه داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \frac{k+3}{k+2} - \log \frac{k+2}{k+1} \right) \\ &= -\log \frac{3}{2} = \log \frac{2}{3} .\end{aligned}$$

۵ ـ ۴۸ ـ مثال:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+11k+30} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+5)(k+6)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6} \right) = \frac{1}{6} .\end{aligned}$$

۵ ـ ۴۹ ـ مثال:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+12k+35} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+5)(k+7)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+7} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+6} - \frac{1}{k+7} \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42} .\end{aligned}$$

۵ ـ ۵۰ ـ آزمون مقایسه: فرض کنیم از مرتبه‌ای به بعد داشته باشیم $0 \le a_n \le b_n$ در این صورت اگر $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ هم همگرا است و اگر $\sum a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum b_n$ هم واگرا است.

۵ ـ ۵۱ ـ مثال: اگر $\{a_n\}$ با جملات مثبت باشد و $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n^2$ همگرا است.

حل: چون $\sum a_n$ همگرا است پس بنا به شرط لازم همگرایی، داریم $a_n \longrightarrow 0$ در نتیجه از مرتبه‌ای به بعد داریم $0 \leq a_n < 1$ لذا $a_n^2 \leq a_n$ و بنا به آزمون مقایسه $\sum a_n^2$ هم همگرا است.

۵ ـ ۵۲ ـ آزمون کوشی: فرض کنیم $\{a_n\}$ با جملات نامنفی و نزولی و همگرا به صفر باشد. در این صورت دو سری $\sum a_n$ و $\sum 2^n a_{2^n}$ همرفتارند.

۵ ـ ۵۳ ـ مثال: سریهای $\sum \frac{1}{nLn\ n}$ و $\sum \frac{1}{(Ln\ n)^2}$ واگرا هستند.

برای $\sum \frac{1}{nLn\ n}$ داریم $\frac{1}{nLn2} = \frac{2^n}{2^n Ln(2^n)} = 2^n a_{2^n}$ در نتیجه $\sum 2^n a_{2^n}$ واگرا است لذا $\sum \frac{1}{nLn\ n}$ هم واگرا است. از طرفی داریم $\frac{1}{(Ln\ n)^2} \geq \frac{1}{nLn\ n} \geq 0$ در نتیجه بنا به آزمون مقایسه $\sum \frac{1}{(Ln\ n)^2}$ هم واگرا است.

۵ ـ ۵۴ ـ سری هندسی: فرض کنیم $r > 0$ در این صورت اگر $r < 1$ آنگاه سری $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^n$ همگرا است و مقدار آن برابر $\frac{1}{1-r}$ است و اگر $r \geq 1$ آنگاه $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ واگرا است.

۵ ـ ۵۵ ـ مثال: مقدار سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ چند است؟

جواب: $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{1-\frac{1}{5}}$.

۵ ـ ۵۶ ـ تذکر: اگر جملات یک سری در عدد ثابت $c \neq 0$ ضرب شوند آنگاه رفتار سری تغییر نمی‌کند و مقدار سری در صورتی که سری همگرا باشد، c برابر می‌شود.

۵ ـ ۵۷ ـ تذکر: تغییر تعداد متناهی جمله یک سری، تغییری در رفتار سری بوجود نمی‌آورد.

۵ ـ ۵۸ ـ تذکر ۳: اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ همگرا باشند و c ثابت باشد آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty}(ca_n + b_n)$ هم همگرا است و مقدار آن برابر $c\sum_{n=k}^{\infty} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} b_n$ می‌باشد.

۵ ـ ۵۹ ـ قضیه: فرض کنیم $a_n \geq 0$ و $\{a_n\}$ نزولی و همگرا به صفر باشد و $\sum a_n$ همگرا باشد، در این صورت $na_n \longrightarrow 0$.

۵ ـ ۶۰ ـ تذکر: اگر $a_n \geq 0$ و $\{a_n\}$ نزولی و همگرا به صفر باشد و $na_n \longrightarrow 0$ آنگاه لزومی ندارد که $\sum a_n$ همگرا باشد. (مثلاً می‌توانیم بگیریم $a_n = \frac{1}{nLn\, n}$، $\sum a_n$ واگرا است).

۵ ـ ۶۱ ـ قضیه: فرض کنیم $\{a_n\}$ با جملات مثبت و نزولی و همگرا به صفر باشد در این صورت $\sum a_n$ همگرا است اگر و فقط اگر $\sum n(a_n - a_{n+1})$ همگرا باشد.

(راهنمایی: برای $n > m$ داریم

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} a_k = -ma_m + (n-1)a_n + \sum_{k=m}^{n-1} k(a_k - a_{k+1})$$

از قضیه قبل استفاده کنید و یک طرف قضیه را ثابت کنید. برای طرف دیگر از رابطه

$$na_n = n\sum_{k=n}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$$

و شرط کوشی برای همگرایی سری‌ها استفاده کنید).

۵ ـ ۶۲ ـ قضیه: فرض کنیم برای هر n، $a_n \neq 0$ $(a_n + b_n)$ و $\sum \frac{a_n}{b_n}$ همگرا باشد در این صورت دو سری $\sum \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$ و $\sum \frac{a_n}{a_n + b_n}$ همرفتارند.

(راهنمایی: از رابطهٔ

$$\frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)}$$

هر دو طرف نتیجه می‌شود).

۵ ـ ۶۳ ـ قضیه: اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای نامتناهی و همگرا به صفر باشد آنگاه دنباله $\{c_n\}$ در $\{0, 1\}$ موجود است که $\sum |c_n a_n|$ همگرا و $\{c_n a_n\}$ نامتناهی باشد. [$\{a_n\} \equiv$ زیردنباله‌ای مانند $\{a_{\varphi(n)}\}$ دارد که $\sum |a_{\varphi(n)}|$ همگرا است].

(راهنمایی: برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\varphi(k)$ را چنان اختیار کنید که $|a_{\varphi(k)}| < \frac{1}{k^2}$ و φ هم صعودی اکید است).

۵ ـ ۶۴ ـ قضیه: فرض کنیم برای هر دنباله $\{x_n\}$ ای که $\sum x_n$ همگرا باشد، سری $\sum a_n x_n$ هم همگرا باشد، در این صورت داریم $\sup\limits_{n\in N} |a_n| < \infty$.

(فرض کنید $\sup\limits_{n\in N} |a_n| = \infty$ در این صورت زیردنباله‌ای از $\{a_n\}$ مانند $\{a_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ موجود است که $|a_{\varphi(n)}| \geq n^۲$. در این صرت می‌گیریم

$$x_n = \begin{cases} ۰ & n \notin \varphi(\mathbb{N}) \\ \frac{۱}{n^۲} & n \in \varphi(\mathbb{N}) \end{cases}$$

در این صورت $\sum x_n$ همگرا است در حالی که $\sum a_n x_n$ واگرا است ، چون شرط لازم همگرایی را ندارد).

۵ ـ ۶۵ ـ قضیه: اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ هم همگرا است.

۵ ـ ۶۶ ـ تعریف: سری $\sum a_n$ را همگرای مطلق می‌گوئیم هرگاه $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

۵ ـ ۶۷ ـ قضیه (آزمون نسبت): فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ با جملات غیرصفر باشد، در این صورت:

الف) اگر $\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| < ۱$ آنگاه سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) اگر از مرتبه‌ای به بعد $\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| > ۱$ آنگاه $\sum a_n$ واگرا است .

۵ ـ ۶۸ ـ مثال: سری $\sum \frac{n!}{n^n}$ همگرا است. زیرا داریم
$\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$.

۵ ـ ۶۹ ـ قضیه (آزمون ریشه): فرض کنیم $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ در
این صورت:

الف) اگر $\ell < 1$ آنگاه سری $\sum a_n$ همگرای مطلق
است.

ب) اگر $\ell > 1$ آنگاه سری $\sum a_n$ واگرا است .

۵ ـ ۷۰ ـ نتیجه: اگر $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ یا $\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ آنگاه

الف) اگر $\ell < 1$ آنگاه سری $\sum a_n$ همگرای مطلق
است.

ب) اگر $\ell > 1$ آنگاه سری $\sum a_n$ واگرا است .

ج) اگر $\ell = 1$ ممکن است سری $\sum a_n$ واگرا یا همگرا
باشد.

بنا به قضایای قبل می‌دانیم که اگر $\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ آنگاه
$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ در نتیجه آزمون ریشه از آزمون نسبت قوی‌تر است.
مثالی می‌آوریم که این مطلب را تأیید می‌کند.

۵ ـ ۷۱ ـ مثال: فرض کنیم $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n^2)}} & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{3^{(n^2)}} & n \text{ فرد} \end{cases}$ در این
صورت داریم

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{۲^{(n^۲)}}{۳^{(n+۱)^۲}} & n \text{ زوج} \\ \dfrac{۳^{(n^۲)}}{۲^{(n+۱)^۲}} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

در نتیجه $\left\{\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right\}$ واگرا است (داریم $\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = +\infty$) در حالی که داریم $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{۱}{۲^n} & n \text{ زوج} \\ \frac{۱}{۳^n} & n \text{ فرد} \end{cases}$ در نتیجه $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow ۰$.

بنا به آزمون ریشه $\sum a_n$ همگرا است و آزمون نسبت در مورد رفتار $\sum a_n$ نتیجه‌ای نمی‌دهد.

۵ ـ ۷۲ ـ قضیه: فرض کنیم دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دارای خواص زیر باشند:

(۱) $\lim\limits_n a_n = ۰$.

(۲) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} |a_{n+۱} - a_n|$ همگرا باشد.

(۳) حاصل جمعهای جزئی $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ کراندار باشد یعنی $M > ۰$ موجود باشد که

$$\forall\, k \;\; , \;\; \left|\sum_{n=۱}^{k} b_n\right| = |B_k| \leq M$$

در این صورت سری $\sum a_n b_n$ همگرا است.

برهان: داریم

$$\begin{aligned} \sum_{k=۱}^{n} a_k b_k &= a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + \cdots + a_n b_n \\ &= a_۱ B_۱ + a_۲(B_۲ - B_۱) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-۱}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_۱ - a_۲)B_۱ + (a_۲ - a_۳)B_۲ + \cdots \\
&\quad +(a_{n-۱} - a_n)B_{n-۱} + a_n B_n \\
&= a_n B_n - \sum_{k=۱}^{n-۱}(a_{k+۱} - a_k)B_k
\end{aligned}
$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود که $\lim_n a_n B_n = ۰$ از طرفی

$$\left||a_{k+۱} - a_k|B_k\right| \le M|a_{k+۱} - a_k| \,.$$

لذا بنا به آزمون مقایسه و (۲) سری $\sum(a_{k+۱} - a_k)B_k$ همگرا است. در نتیجه $\sum a_n b_n$ هم همگرا است.

۵ ـ ۷۳ ـ نتیجه: اگر $\{a_n\}$ با جملات مثبت، نزولی و همگرا به صفر بوده و حاصل‌جمعهای جزئی $\sum b_n$ کراندار باشد آنگاه $\sum a_n b_n$ همگرا است.

۵ ـ ۷۴ ـ نتیجه (قضیه لایب‌نیتز): اگر $\{a_n\}$ نزولی و همگرا به صفر باشد آنگاه $\sum(-۱)^n a_n$ همگرا است.

۵ ـ ۷۵ ـ مثال: سریهای $\sum\frac{(-۱)^n}{n}$ و $\sum\frac{\sin n}{n}$ همگرا هستند.

حل: برای $\sum\frac{(-۱)^n}{n}$ بگیرید $a_n = \frac{۱}{n}$ و $b_n = (-۱)^n$ و برای $\sum\frac{\sin n}{n}$ بگیرید $a_n = \frac{۱}{n}$ و $b_n = \sin n$ داریم:

$$\left|\sum_{k=۱}^{n} \sin k\right| = \left|\frac{\sin\frac{n}{۲}\ \sin\frac{(n+۱)}{۲}}{\sin\frac{۱}{۲}}\right| \le \frac{۱}{\sin\frac{۱}{۲}} \qquad (n = ۱, ۲, \ldots) \,.$$

۵ ـ ۷۶ ـ قضیه: فرض کنیم:

الف) سری $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد،

ب) $\sum_n b_n = B$ ،

ج) $c_n = \sum_{k=0} a_k b_{n-k}$.

در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$. به عبارت دیگر حاصل‌ضرب دو سری همگرا که حداقل یکی از آنها همگرای مطلق باشد، همگرا بوده و مجموع آنها برابر حاصل‌ضرب مجموع دو سری مزبور است.

۵ ـ ۷۷ ـ **قضیه:** اگر $p > 1$ و از مرتبه‌ای به بعد $a_n > 0$ و $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{p}{n}$ آنگاه $\sum a_n$ همگرا است.

۵ ـ ۷۸ ـ **تعریف:** اگر $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ یک تابع یک‌به‌یک و پوشا باشد و $\sum a_n$ یک سری عددی باشد و برای هر n، $b_n = \varphi(a_n)$، آنگاه سری $\sum b_n$ را یک تغییر نظم برای $\sum a_n$ می‌نامیم.

۵ ـ ۷۹ ـ **قضیه:** اگر $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد آنگاه هر تغییر نظم آن هم همگرا به مجموع $\sum a_n$ است.

۵ ـ ۸۰ ـ **تعریف:** سری همگرای $\sum a_n$ را همگرای مشروط می‌گوئیم هرگاه $\sum |a_n|$ واگرا باشد. به‌عنوان نمونه سریهای $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ و $\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ همگرای مشروط هستند.

۵ ـ ۸۱ ـ **قضیه:** فرض کنیم سری $\sum a_n$ همگرای مشروط و $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ دلخواه باشد، در این صورت تغییر نظمی از $\sum a_n$ موجود است که مجموع آن برابر α شود.

چند مثال:

۵ ـ ۸۲ ـ مثال: فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله در $\mathbb{R}^+$ باشند به‌قسمی‌که: $(n \in \mathbb{N})\quad b_{n+1} = b_n + \frac{a_n}{b_n}$، در این صورت دنباله $\{b_n\}$ همگرا است اگر و فقط اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد.

حل: بنا به فرض $\{b_n\}$ صعودی اکید است و داریم $a_n = (b_{n+1} - b_n)b_n$. فرض کنیم $b_n \longrightarrow \ell$ پس برای هر n داریم $b_n < \ell$ و بنا به قاعده تلسکوپی $\sum(b_{n+1} - b_n)$ همگرا است. از طرفی داریم $0 \leq a_n \leq (b_{n+1} - b_n)\ell$ در نتیجه بنا به آزمون مقایسه $\sum a_n$ هم همگرا است.

بالعکس: فرض کنیم $\sum a_n$ همگرا باشد، چون $\{b_n\}$ صعودی است و $\sum a_n = \sum(b_{n+1} - b_n)b_n$ همگرا است، پس $\sum(b_{n+1} - b_n)b_1$ هم همگرا است لذا $\sum(b_{n+1} - b_n)$ همگرا است پس بنا به قاعده تلسکوپی $\{b_n\}$ همگرا است.

۵ ـ ۸۳ ـ مثال: فرض کنیم $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ و $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند، در این صورت $\sum a_n b_n$ همگرا است.

حل: چون $\sum a_n$ همگرا است پس $\lim\limits_{n} a_n = 0$ در نتیجه از مرتبه‌ای به بعد داریم $0 \leq a_n < 1$ در نتیجه داریم $0 \leq a_n b_n \leq b_n$ لذا بنا به آزمون مقایسه $\sum a_n b_n$ هم همگرا است.

۵ ـ ۸۴ ـ مثال: فرض کنیم $a_n \geq ۰$ در این صورت $\sum a_n$ و $\sum \frac{a_n}{۱+a_n}$ هم‌رفتارند.

حل: اولاً داریم $a_n \geq \dfrac{a_n}{۱+a_n} \geq ۰$ پس بنا به آزمون مقایسه اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum \frac{a_n}{۱+a_n}$ هم همگرا است.

بالعکس: فرض کنیم $\sum \frac{a_n}{۱+a_n}$ همگرا باشد در این صورت داریم $\dfrac{a_n}{۱+a_n} \longrightarrow ۰$ در نتیجه $a_n \longrightarrow ۰$ لذا از مرتبه‌ای به بعد داریم $a_n < ۱$ در نتیجه $\dfrac{۱}{۱+a_n} > \dfrac{۱}{۲}$ لذا $\dfrac{a_n}{۱+a_n} > \dfrac{a_n}{۲} \geq ۰$ و بنا به آزمون مقایسه $\sum a_n$ هم همگرا است.

۵ ـ ۸۵ ـ مثال: فرض کنیم $a_n > ۰$ و $b_n > ۰$، $\sum b_n$ همگرا باشد و از مرتبه‌ای به بعد داشته باشیم $\dfrac{a_{n+۱}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+۱}}{b_n}$ در این صورت $\sum a_n$ هم همگرا است.

حل: داریم: $\dfrac{a_{n+۱}}{b_{n+۱}} \leq \dfrac{a_n}{b_n}$ در نتیجه دنباله $\{\dfrac{a_n}{b_n}\}$ نزولی است در نتیجه $M > ۰$ موجود است که $\dfrac{a_n}{b_n} < M$. در نتیجه $a_n < Mb_n$ لذا $\sum a_n$ هم همگرا است.

۵ ـ ۸٦ ـ مثال: فرض کنیم $p > ۱$ و $\lim\limits_{k\to\infty} k^p a_k < \infty$ در این صورت $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} a_k$ همگرای مطلق است.

حل: فرض کنیم $\lim\limits_{k\to\infty} k^p a_k = \ell$ در این صورت از مرتبه‌ای به بعد داریم $a_k < (\ell+۱)k^{-p}$ در نتیجه بنا به آزمون مقایسه چون $\sum (\ell+۱)k^{-p}$ همگرا است، پس $\sum a_k$ هم همگرا می‌شود.

۵ ـ ۸۷ ـ (آزمون حد برای واگرایی): اگر $\lim\limits_{k\to\infty} ka_k = \ell \neq ۰$ آنگاه سری $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} a_k$ واگرا است.

حل: ابتدا فرض کنیم $۰ < \ell$ در این صورت از مرتبه‌ای به بعد داریم $a_k > \frac{\ell}{۲}$ چون $\sum \frac{\ell}{۲}$ واگرا است پس $\sum a_k$ هم واگرا است. اگر $۰ > \ell$ آنگاه با استفاده از قسمت قبل ثابت می‌شود که $\sum(-a_k)$ واگرا است در نتیجه $\sum a_k$ هم واگرا است.

۵ ـ ۸۸ ـ مثال: سری $\sum \frac{k\log k}{۷+۱۱k-k^۲}$ واگرا است چون

$$\lim_{k\to\infty} ka_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k^۲\log k}{۷+۱۱k-k^۲} = \infty\ .$$

۵ ـ ۸۹ ـ مثال: اگر $p > ۱$ و $\lim\limits_{k\to\infty} k(\log k)^p a_k = A < \infty$ آنگاه $\sum a_k$ همگرای مطلق است.

۵ ـ ۹۰ ـ مثال: اگر $\lim\limits_{k\to\infty} k\log k a_k = A \neq ۰$ آنگاه $\sum a_k$ واگرا است.

۵ ـ ۹۱ ـ قضیه (نامساوی هُلدر): اگر $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q} = ۱$ و $p > ۰$ آنگاه:

$$\sum_{k=۱}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=۱}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\sum_{k=۱}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{۱}{q}}$$

۵ ـ ۹۲ ـ قضیه: اگر $p \geq ۱$ آنگاه

$$\left(\sum_{k=۱}^{n} |a_k+b_k|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \leq \left(\sum_{k=۱}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{۱}{p}} + \left(\sum_{k=۱}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{۱}{p}}$$

۵ ـ ۹۳ ـ مثال: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\frac{3}{2}} < \infty$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\frac{2}{5}}$ همگرا است. (بگیرید $p = \frac{3}{2}$ و $q = 3$ و $b_k = k^{-\frac{2}{5}}$ و از نامساوی هلدر استفاده کنید).

۵ ـ ۹۴ ـ مثال: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 < \infty$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^3 n^{-\frac{1}{2}} < \infty$.

۵ ـ ۹۵ ـ قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ همگرا باشند و $2 \leq p$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p$ نیز همگرا است.

۵ ـ ۹۶ ـ قضیه: اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum \frac{a_n}{n}$ نیز همگرا است.

۵ ـ ۹۷ ـ قضیه: اگر $\sum a_n$ همگرا و $\{b_n\}$ با جملات مثبت و نزولی باشد آنگاه $\sum a_n b_n$ همگرا است.

۵ ـ ۹۸ ـ مثال: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(\pi - \tan^{-1} k)$ همگرا است.

۵ ـ ۹۹ ـ تمرین: با یک مثال نشان دهید همگرایی $\sum a_n^3$ همگرایی $\sum a_n$ را نتیجه نمی‌دهد.

۵ ـ ۱۰۰ ـ مثال: فرض کنیم $\sum a_n^2$ همگرا باشد و $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} a_k$. در این صورت S_n کراندار است زیرا داریم

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k} a_k}{n} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 .$$

پیوست A

تستهای چهار گزینه‌ای

۱) کدامیک از توابع زیر یک متریک روی $\mathbb{R}$ نمی‌باشد؟

۱. $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{۱+|x-y|}$

۲. $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{۱+۳|x-y|}$

۳. $d(x,y)=|x^۲-y^۲|$

۴. $d(x,y)=\begin{cases} x-y & x\leq y \\ y-x & x<y \end{cases}$.

۲) کدام یک از نقاط یک نقطه انباشتگی (تجمع یا حدی) مجموعه $A=\{\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}\ :\ m,n\in\mathbb{N}\}$ است؟

۱. ۳/۲ ۲. ۱ ۳. ۲/۳ ۴. ۲

۳) فرض کنید $Y=[۰,۱]\cup(۲,۴)$ زیرفضایی از $(\mathbb{R},|\cdot|)$ باشد
در این صورت

۱. $(۲,۴)$ در Y فشرده است
۲. $[۰,۱]$ در Y باز و بسته است
۳. $(۲,۴)$ در Y فضای متریک کامل است
۴. هر زیرمجموعه بسته و کراندار در Y فشرده است.

۴) دنبالهٔ $a_n = cos\ n\ cos\ n^۲$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

۱. $\{a_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد
۲. هر زیردنباله $\{a_n\}$ همگرا است
۳. حد دنباله ∞ است.
۴. $\{a_n\}$ هیچ زیردنباله همگرا ندارد.

۵) در یک فضای متریک اگر مجموعه همبندی بیش از یک عضو داشته باشد آنگاه آن مجموعه

۱. شامل گوی باز است ۲. شامل گوی بسته‌ای است
۳. نا شمارا است ۴. شمارا است.

٦) دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک X همگرا است اگر و فقط اگر

۱. کراندار باشد
۲. کوشی باشد
۳. زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد
۴. هر زیردنباله‌اش، زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد.

۷) اگر $Y = \{۱\} \cup [۲,۳]$ زیرفضایی از $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ باشد آنگاه کدام مجموعه در Y باز است؟

۱. $\{۰\}$ ۲. $\{۱\}$ ۳. $\{۲\}$ ۴. $\{۳\}$

۸) اگر $d_۰$ متریک گسسته روی $\mathbb{R}$ باشد آنگاه کدام گزاره درست است؟

۱. $\mathbb{Q}$ در $(\mathbb{R}, d_\circ)$ باز نیست
۲. $\mathbb{Q}$ در $(\mathbb{R}, d_\circ)$ چگال است
۳. $\mathbb{Q}$ در $(\mathbb{R}, d_\circ)$ بسته و کراندار است
۴. $\mathbb{Q}$ در $(\mathbb{R}, d_\circ)$ فشرده است.

۹) فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ ناتهی و سره بوده و $\mathbb{R} - A$ همبند باشد.

در این صورت

۱. A فشرده است
۲. A بی‌کران است
۳. A با درون تهی است
۴. A حداکثر شماراست.

۱۰) فرض کنید $E \subseteq X$ کدام گزاره درست است؟

۱. $(E')' = E'$
۲. $E' \subseteq (E')'$
۳. $(E')' \subseteq E'$
۴. E' بسته و کراندار است.

۱۱) فرض کنید

$$A = \Big\{(\tfrac{m}{۲^p}, \tfrac{n}{۲^q}) \ : \ \circ \leq n \leq ۲^q \ , \ ۴ \leq m \leq ۲^p \ , \ p > ۱\circ\circ \ , \ m, n, p, q \in \mathbb{N}\Big\}$$

در این صورت، کدام گزاره نادرست است؟

۱. $A^\circ = \emptyset$
۲. $A' = [\circ, ۱] \times [\circ, ۱]$
۳. $\partial A = [\circ, ۱] \times [\circ, ۱]$
۴. هر عضو A یک نقطه تنهای A است.

۱۲) فرض کنید $A, B \subseteq \mathbb{R}$. کدام گزاره نادرست است؟

۱. $A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$
۲. $\bar{A} \times \bar{B} = \overline{(A \times B)}$
۳. $\partial A \times \partial B \subseteq \partial(A \times B)$
۴. $A' \times B' = (A \times B)'$.

۱۳) کدام گزاره درست است؟

۱. اشتراک تعداد متناهی مجموعه همبند، همبند است
۲. اجتماع هر تعداد مجموعه فشرده، فشرده است
۳. اشتراک هر تعداد مجموعه فشرده فشرده است
۴. اجتماع تعداد شمارا مجموعه فشرده، فشرده است.

۱۴) کدام گزاره با بقیه هم‌ارز نیست؟ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$ در این صورت:

۱. E فشرده است
۲. E بسته و کراندار است
۳. هر زیرمجموعه نامتناهی E در E نقطه حدی دارد
۴. هر دنباله E دارای زیردنباله‌ای همگرا در E می‌باشد.

۱۵) فرض کنید $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [2,3)$. در این صورت ∂A و A' از راست به چپ کدامند؟

۱. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2,3\}$ و $\{0,2,3\}$
۲. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0,2,3\}$ و $\{0\} \cup [2,3]$
۳. $\{0,2,3\}$ و $\{0,2,3\}$
۴. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0,2,3\}$ و $\{0,2,3\}$.

۱۶) فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}^k$ کراندار باشد. در این صورت کدام گزاره نادرست است؟

۱. $\bar{E}$ فشرده است
۲. E' و ∂E فشرده‌اند
۳. $\bar{E} = \overline{(E^\circ)}$
۴. $\mathbb{R}^k - E$ نافشرده است.

۱۷) کدام گزاره درست است؟

۱. اگر $A \subseteq X$ همبند باشد آنگاه ∂A همبند است
۲. اگر $A \subseteq X$ همبند باشد آنگاه $\bar{A}$ همبند است
۳. اگر $A \subseteq X$ همبند با بیش از یک عضو باشد آنگاه A می‌تواند شمارا باشد
۴. اگر $A \subseteq X$ و $\bar{A}$ همبند باشد آنگاه A نیز همبند است.

۱۸) فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در (X, d) باشند و $d(x_n, y_n) \to 0$ در این صورت

۱. $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا هستند
۲. $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کوشی هستند
۳. اگر $\{x_n\}$ همگرا به x باشد آنگاه $\{y_n\}$ همگرا به x است
۴. اگر یکی از $\{x_n\}$ یا $\{y_n\}$ همگرا باشد دیگری نیز همگرا است، ولی حدود آنها الزاماً یکسان نمی‌باشد.

۱۹) فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}^n$. در این صورت کدام گزاره درست است؟

۱. $A^\circ \subseteq A'$
۲. $A' - A^\circ$ حداکثر شماراست
۳. اگر $A \subseteq A'$ آنگاه $A' \subseteq \partial A$
۴. $\bar{A} - A^\circ \neq \emptyset$.

۲۰) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل باشد و $A \subseteq X$. کدام گزاره درست است؟

۱. اگر A ناشمارا باشد آنگاه $A' \neq \emptyset$
۲. اگر A متناهی و غیرخالی باشد آنگاه $\partial A \neq \emptyset$
۳. اگر $A \cap A' = \emptyset$ آنگاه $A' \subseteq \partial A$
۴. اگر $A \cap A' = \emptyset$ آنگاه $\partial A \subseteq A'$.

۲۱) فرض کنید $S = (0, \infty)$ و $(x, y \in S)$ $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n = n$ در این صورت:

۱. الف) d یک متریک روی S نیست
۲. d متریک روی S است و دنباله $\{x_n\}$ در (S,d) همگرا است
۳. d متریک روی S است و (S,d) فضای متریک کامل است
۴. d متریک روی S است و $\{x_n\}$ در (S,d) کوشی است و همگرا نیست.

۲۲) کدامیک از توابع زیر یک متریک روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنند؟

۱. $d(lx,y) = |x-y|^{۲}$
۲. $d(x,y) = ۲|x-y| + ۱$
۳. $d(x,y) = |\frac{۱}{e^{۲x}} - \frac{۱}{e^{۲y}}|$
۴. $d(x,y) = \Big||x| - |y|\Big|$.

۲۳) کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱. $(A')' = A'$
۲. $\partial(\partial A) = \partial A$
۳. $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$
۴. $\bar{A} \cap B^\circ \subseteq \overline{A \cap B}$.

۲۴) کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱. $A^\circ = (\overline{A^c})^c$
۲. $(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$
۳. $(\partial A)^c = A^\circ \cup (A^c)^\circ$
۴. $(\partial A)^c = \bar{A} \cup (\overline{A^c})$.

۲۵) کدامیک از گزاره‌های زیر در زیرفضاهای $\mathbb{R}^k$ با بقیه هم‌ارز نیست؟

۱. K فشرده است
۲. هر زیرمجموعه نامتناهی K در K نقطه حدی دارد
۳. هر دنبالهٔ K زیردنباله‌ای دارد که به نقطه‌ای از K همگرا است
۴. K بسته و کراندار است.

۲۶) کدام گزاره همواره درست است؟

۱. $A' \cap (A^c)' = \emptyset$
۲. $(\partial A) \cap (\partial(A^c)) = \emptyset$
۳. $(\partial A) \cap (\partial(A^c)) \neq \emptyset$
۴. $\partial A = \partial(A^c)$.

۲۷) کدام گزاره همواره درست است؟

۱. اگر A باز باشد، آنگاه $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$
۲. اگر A بسته باشد آنگاه $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
۳. اگر A هیچ‌جا چگال باشد و $B^\circ = \emptyset$ آنگاه $(A \cup B)^\circ = \emptyset$
۴. اگر $\bar{A} = X$ آنگاه $\overline{X - A} \neq X$.

۲۸) کدام گزاره همواره درست است؟

۱. اجتماع دو مجموعه همبند و فشرده، همبند و فشرده است
۲. اشتراک هر دو مجموعه همبند و فشرده، همبند و فشرده است
۳. هر گوی بسته در هر فضای متریک،همبند و فشرده است
۴. هر گوی بسته در هر فضای متریک، لزوماً همبند نیست و ممکن است فشرده نباشد.

۲۹) فرض کنید $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ همبند باشد. کدامیک از مجموعه‌های زیر ممکن است همبند نباشد؟

۱. $A - B = \{x - y : \ x \in A \ , \ y \in B\}$ در $\mathbb{R}^k$
۲. $A \times B$ در $\mathbb{R}^{2k}$
۳. $A - B = A \cap B^c$ در $\mathbb{R}^k$
۴. $\{\|x - y\| : \ x \in A \ , \ y \in B\}$ در $\mathbb{R}$.

۳۰) کدامیک از گزاره‌های زیر شرط کافی برای $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$ می‌باشند؟

۱. $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$
۲. $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$
۳. $\partial A = \partial B$
۴. هیچکدام.

۳۱) کدامیک از گزاره‌های زیر در فضاهای متریک نادرست است؟

۱. $B \subseteq \bar{A} \Rightarrow B' \subseteq A'$ ۲. $(\partial(A^c))' \subseteq A'$
۳. $(\partial A)' \subseteq A'$ ۴. $A^\circ \subseteq A'$.

۳۲) کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱. $(\overline{A'}) = (\bar{A})'$
۲. $A' \cap A = \emptyset \Rightarrow A' \subseteq \partial A$
۳. $\partial A \cap A = \emptyset \Rightarrow \partial A \subseteq A'$
۴. $\overline{S_r(x)} = S_r([x])$ (بستار گوی باز به مرکز x و شعاع r، گوی بسته به مرکز x و شعاع r است).

۳۳) فرض کنید $A = \left\{(\frac{i}{m}, \frac{n}{۲^p}) : \circ \leq n \leq ۲^p\ ,\ i, m, p \in \mathbb{N}\right\}$
در این صورت $\bar{A}$ کدامیک است؟

۱. $\mathbb{Q} \times [\circ, ۱]$ ۲. $\mathbb{R} \times [\circ, ۱]$
۳. $\mathbb{R}^+ \times [\circ, ۱]$ ۴. $[\circ, \infty) \times [\circ, ۱]$.

۳۴) کدامیک از مجموعه‌های زیر با بقیه یکسان نیست؟

۱. $A - A'$ ۲. $\bar{A} - A'$
۳. $\bar{A} - \overline{A'}$ ۴. $\bar{A} - (A')'$.

۳۵) کدام گزاره نادرست است؟

۱. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ ۲. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
۳. $(A \cup B)' = A' \cup B'$ ۴. $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

۳۶) فرض کنید (X, d) فضای متریک فشرده باشد. کدام گزاره نادرست می‌باشد؟

۱. (X,d) فضای متریک کامل است

۲. زیرفضای (E,d) از (X,d) کامل است اگر و فقط اگر هر دنباله کوشی E در E نقطه حدی داشته باشد

۳. زیرفضای (E,d) از (X,d) کامل است اگر و فقط اگر هر دنباله E زیردنباله‌ای همگرا در E داشته باشد

۴. زیرفضای (E,d) از (X,d) کامل است اگر و فقط اگر هر دنباله کوشی در E، زیردنباله‌ای همگرا در E داشته باشد.

۳۷) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل باشد و $E \subseteq X$.

در این صورت کدام گزاره درست می‌باشد؟

۱. هر زیرمجموعه بسته در (E,d) در (X,d) هم بسته است

۲. هر زیرمجموعه باز در (E,d) در (X,d) هم باز است

۳. هر زیرمجموعه فشرده در (E,d) در (X,d) هم فشرده است

۴. هیچکدام.

۳۸) فرض کنید $E = \{۱\} \cup (۲,۳]$. در این صورت کدام گزاره نادرست است؟

۱. $\{۱\} \cup (۲, \frac{۵}{۲}]$ در فضای E بسته است.

۲. $E' = [۲,۳]$ (در فضای $\mathbb{R}$)

۳. مجموعه نقاط تنهای $E = \{۱\}$

۴. $E' = E - \{۱\}$ (در فضای $\mathbb{R}$).

۳۹) فرض کنید $d_۰$ متریک گسسته روی $\mathbb{R}$ باشد. کدام دنباله در $(\mathbb{R}, d_۰)$ همگرا است؟

۱. $\{\frac{۱}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

۲. $\{sin\ n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (n بر حسب درجه)

۳. $\{sin\ (n!)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (n بر حسب درجه)

۴. هیچکدام.

۴۰) فرض کنید $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbb{R}^k$ باشد و E مجموعه حدود زیردنباله‌ای $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ باشد. در این صورت

۱. E همبند است ۲. E ناهمبند است
۳. E فشرده است ۴. E ممکن است فشرده نباشد.

۴۱) فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a)=f(b)=\alpha$. برای هر x و y ای که $f(x)=f(y)=\alpha$ و $x<y$ ، z موجود باشد که $f(z)=\alpha$ در این صورت:

۱. f بر $[a,b]$ تابعی ثابت است
۲. f بر $[a,b]$ بینهایت بار مقدار α را اختیار می‌کند و ممکن است f تابعی ثابت نباشد
۳. اگر f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه f' می‌تواند در بعضی نقاط غیرصفر باشد
۴. ممکن است f بر $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نباشد.

۴۲) کدامیک از توابع زیر بر $\mathbb{R}^+$ پیوسته یکنواخت می‌باشند؟

۱. $y=x\sin x$ ۲. $y=\frac{\sin x}{x}$
۳. $y=\frac{x^۲}{۱+x^۲}$ ۴. $y=\sin(\frac{۱}{e^x})$.

۴۳) فرض کنید $c>۰$ و $d_۱$ و $d_۲$ دو متریک روی X باشند به‌طوری‌که $d_۱\le cd_۲$ در این صورت

۱. هر تابع پیوسته $f:(X,d_۱)\longrightarrow(X,d_۲)$ یک تابع پیوسته از $(X,d_۱)$ به $(X,d_۱)$ است
۲. هر زیرمجموعه همبند $(X,d_۲)$ در $(X,d_۱)$ هم همبند است
۳. هر زیرمجموعه فشرده در $(X,d_۱)$ در $(X,d_۲)$ هم فشرده است
۴. هیچکدام.

۴۴) فرض کنید $c > \circ$ و $d_{\text{۱}}$ و $d_{\text{۲}}$ دو متریک روی X باشند به‌طوری‌که $d_{\text{۱}} \leq cd_{\text{۲}}$ در این صورت

۱. هر زیرمجموعه کراندار در $(X, d_{\text{۱}})$، یک مجموعهٔ کراندار در $(X, d_{\text{۲}})$ است
۲. هر زیرمجموعه همبند $(X, d_{\text{۱}})$، یک مجموعهٔ همبند در $(X, d_{\text{۲}})$ است
۳. هر زیرمجموعه فشرده در $(X, d_{\text{۱}})$ یک مجموعهٔ فشرده در $(X, d_{\text{۲}})$ است
۴. هیچکدام.

۴۵) فرض کنید $c > \circ$ و $d_{\text{۱}}$ و $d_{\text{۲}}$ دو متریک روی X باشند به‌طوری‌که $d_{\text{۱}} \leq cd_{\text{۲}}$ در این صورت

۱. هر تابع پیوسته از فضای متریک دلخواه (Y, d) به $(X, d_{\text{۲}})$، پیوسته از (Y, d) به $(X, d_{\text{۱}})$ است
۲. هر زیرمجموعه باز $(X, d_{\text{۲}})$ در $(X, d_{\text{۱}})$ هم باز است
۳. هر زیرمجموعه بسته $(X, d_{\text{۲}})$ در $(X, d_{\text{۱}})$ هم بسته است
۴. هر سه گزاره صحیح هستند.

۴۶) کدام گزینه در مورد تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ درست است؟

۱. اگر برای هر $c \in (a, b)$، f دارای صفری در (a, c) باشد آنگاه f بینهایت اکسترمم موضعی در هر همسایگی با نقطه ابتدای a دارد
۲. اگر برای هر $c \in (a, b)$، f دارای بینهایت صفر در (a, c) باشد آنگاه f در هر همسایگی‌ای مانند (a, c) متحد به صفر است
۳. اگر روی نقاط گویا، f با تابع g برابر باشد آنگاه g هم بر $[a, b]$ پیوسته است
۴. اگر f یک‌به‌یک باشد و $f(a) < f(b)$، ممکن است f بر $[a, b]$ صعودی اکید نباشد.

۴۷) فرض کنید f بر بازه I دارای خاصیت مقدار میانی باشد در این صورت:

۱. اگر f یکنوا هم باشد، آنگاه f بر I پیوسته است
۲. اگر f در $x_\circ \in I$ ناپیوسته باشد آنگاه حدود چپ و راست f در $x_\circ$ موجود نیستند
۳. f بر I پیوسته است
۴. ممکن است در بعضی نقاط I، حدود چپ و راست موجود باشند ولی با هم متفاوت باشند.

۴۸) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد، در این صورت:

۱. تابع $f : X \longrightarrow X$ یک‌به‌یک است اگر و فقط اگر تابع $d_f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $d_f(x, y) = d(f(x), f(y))$ یک متریک باشد
۲. برای هر زیرمجموعه E از X، تابع $d_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $d_E(x) = \inf\limits_{e\in E} d(e, x)$ بر E پیوسته یکنواخت است
۳. اگر X همبند و ناشمارا باشد آنگاه داریم
$\forall\, x \in X \;,\; \forall\, r > \circ \;,\; \exists\, a \in X : \; d(x, a) = r$
۴. هر سه گزینه صحیح هستند.

۴۹) کدام گزینه درست است؟

۱. هر تابع پیوسته بر یک مجموعه باز، تابعی باز است (تابع باز تابعی است که هر مجموعه باز را به یک مجموعه باز تبدیل می‌کند)
۲. هر تابع پیوسته بر یک مجموعه بسته، بسته است (تابعی بسته است که هر مجموعه بسته را به یک مجموعه بسته تبدیل کند)
۳. هر تابع پیوسته بر یک مجموعه فشرده، بسته است
۴. هر تابع پیوسته که باز نیست، حتماً بسته است.

۵۰) کدام گزینه درست است؟

۱. هر تابعی از فضای گسسته به هر فضای متریکی بر کل فضای گسسته، پیوسته یکنواخت است
۲. تابعی پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ وجود دارد که $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}^c$ و $f(\mathbb{Q}^c) \subseteq \mathbb{Q}$
۳. هر تابع بین دو فضای متریکی که مجموعه‌های همبند را به مجموعه‌های همبند تبدیل کند، پیوسته نیست
۴. اگر تابع همانی از فضای (X,d) به فضای گسسته روی X پیوسته باشد آنگاه d نیز متریک گسسته است (یعنی $c > 0$ موجود است که $d(x,y) = \begin{cases} c & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$).

۵۱) اگر هر تابعی از فضای نامتناهی (X,d) به هر فضای متریکی پیوسته باشد آنگاه:

۱. (X,d) کراندار است
۲. متریک (X,d) گسسته است
۳. (X,d) شمارا است
۴. هیچکدام.

۵۲) کدام گزینه درست است؟

۱. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و فقط اگر f هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی تبدیل کند
۲. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است اگر و فقط اگر f هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی تبدیل کند
۳. تابعی پیوسته و یک‌به‌یک از $\mathbb{R}$ بروی $\mathbb{R}^2$ وجود دارد که وارون آن نیز پیوسته است
۴. هر تابع پیوسته و یکنوا از (a,b) به $\mathbb{R}$، بر (a,b) پیوسته یکنواخت است.

۵۳) فرض کنید $f:(X,d)\longrightarrow\mathbb{R}^k$ پیوسته باشد و

$$A=\{x\in X:\ \|f(x)\|=1\}\ ,\ B=\{x\in X:\ \|f(x)\|>0\}$$

در این صورت:

۱. $A\cap B$ باز است ولی بسته نیست
۲. $A-B$ بسته است
۳. $A\cup B$ باز است
۴. $B-A$ بسته است.

۵۴) کدام گزینه درست است؟

۱. اگر $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه آنگاه f' بر (a,b) پیوسته یکنواخت است اگر و فقط اگر f' بر (a,b) کراندار باشد
۲. اگر $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f بر (a,b) کراندار است
۳. اگر $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ با مشتق کراندار باشد آنگاه ممکن است f بر (a,b) بی‌کران باشد
۴. هر تابع مشتق‌پذیر و کراندار مانند $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ دارای مشتق کراندار است و پیوسته یکنواخت بر (a,b) است.

۵۵) کدام گزینه درست است؟

۱. هر تابع پیوسته بین دو فضای متریک، هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی تبدیل می‌کند
۲. اگر تابع پیوسته‌ای دنباله‌های کوشی را به دنباله‌های کوشی تبدیل کند، بر فضای دامنه خود پیوسته یکنواخت است
۳. اگر (Y,d_2) یک فضای متریک کامل باشد و (X,d_1) یک فضای متریک بازیرفضای A باشد آنگاه هر تابع پیوسته یکنواخت مانند $f:A\longrightarrow Y$، دارای توسیع منحصربفردی مانند $\bar{f}:\bar{A}\longrightarrow Y$ است که $\bar{f}$ بر $\bar{A}$ پیوسته یکنواخت است
۴. هر سه گزاره صحیحند.

۵۶) کدام گزاره نادرست است؟

۱. هر تابع پیوسته بر یک زیرمجموعه بسته از یک فضای متریک فشرده، بر این مجموعه پیوسته یکنواخت است
۲. اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $|f|$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است
۳. اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $g(x)=xf(x)$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است
۴. حاصل‌ضرب و مجموع و تفاضل هر دو تابع پیوسته یکنواخت از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$، پیوسته یکنواخت است.

۵۷) فرض کنید $f:[0,\infty)\longrightarrow(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ پیوسته باشد و $g(x)=\int_0^x|f(t)|dt$ در این صورت:

۱. g بر $[0,\infty)$ نقطهٔ ثابت منحصربفردی دارد
۲. g بر $[0,\infty)$ دارای نقطهٔ ثابتی نیست
۳. $|g|$ بر $[0,\infty)$ نقطهٔ ثابت منحصربفردی ندارد
۴. $|g|$ بر $[0,\infty)$ نقطهٔ ثابت ندارد.

۵۸) کدام گزینه درست است؟

۱. اگر f بر E_1 و E_2 پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f بر $E_1\cup E_2$ هم پیوسته یکنواخت است
۲. اگر f بر E_1 و E_2 پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f بر $E_1\cup E_2$ پیوسته است
۳. تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ وجود دارد که فقط در نقاط گویا پیوسته باشد
۴. تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ وجود دارد که فقط در نقاط گویا ناپیوسته باشد.

۵۹) فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ خاصیت مقدار میانی داشته باشد، در این صورت:

۱. اگر f هر مقدار را متناهی بار اختیار کند، آنگاه f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است
۲. اگر حدود چپ و راست f در هر نقطه موجود باشند آنگاه f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است
۳. اگر f پیوسته نباشد آنگاه f صعودی نیست
۴. هر سه گزاره صحیحند.

۶۰) فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که $f(\mathbb{N})$ در $\mathbb{R}$ چگال باشد، در این صورت:

۱. f پوشا است
۲. f می‌تواند بر $\mathbb{R}$ کراندار باشد
۳. $f(\mathbb{N})$ می‌تواند همبند باشد
۴. هیچکدام.

۶۱) فرض کنید $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{گویا } x \\ 1 - x & \text{گنگ } x \end{cases}$$ باشد، در این صورت:

۱. $f^2 = id$ (تابع همانی $= f \circ f$)
۲. اگر $g(x) = 1 - x$ آنگاه $f + f \circ g \equiv 1$
۳. f در $x = \frac{1}{2}$ پیوسته است و در بقیه نقاط $[0, 1]$ ناپیوسته است
۴. هر سه گزاره صحیح هستند.

۶۲) کدام گزینه نادرست است؟

۱. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر x و هر دنباله یکنوای $\{x_n\}$ که $x_n \longrightarrow x$ داشته باشیم $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

۲. اگر I یک بازه در $\mathbb{R}$ و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و یکنوا و کراندار باشد آنگاه f بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است

۳. اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ آنگاه f تابعی ثابت است

۴. اگر $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان باشند که f و $g \circ f$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشند آنگاه g نیز بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

٦٣) کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت و یکنوا باشند آنگاه fg (ضرب نقطه‌ای f و g) بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است

۲. اگر $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشند آنگاه $g \circ f$ نیز بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است

۳. اگر $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان باشند که f و fg بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشند آنگاه g نیز چنین است

۴. هر سه گزاره صحیحند.

٦۴) فرض کنید $f : [\circ, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $\lambda > \circ$ چنان موجود باشد که $\lim_{x \to \infty} f(x) = f(\lambda)$، در این صورت:

۱. $f[\circ, \infty)$ یک مجموعه همبند است که ممکن است بی‌کران باشد

۲. $f[\circ, \infty)$ یک بازه بسته است که می‌تواند بی‌کران هم باشد

۳. $f[\circ, \infty)$ کراندار است

۴. $f[\circ, \infty)$ همبند و کراندار است و ممکن است بسته نباشد.

٦۵) فرض کنید $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ تابعی پیوسته باشد و برای هر x در X، $f(x) \neq x$ در این صورت:

۱. اگر $\alpha < 1$ موجود باشد که $d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$ آنگاه (X, d) فضای متریک کامل نیست
۲. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in X$ موجود باشد که $d(f(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$ آنگاه X فشرده نیست
۳. اگر d_1، d_2 و d_3 در $\mathbb{R}^+$ و x_1 و x_2 در X چنان موجود باشند که $d_i = d(f(x_i), x_i)$ برای $i = 1, 2$ و $d_1 < d_3 < d_2$ اما برای هر x از X، $d(f(x), x) \neq d_3$ آنگاه X ناهمبند است
۴. هر سه گزاره صحیح هستند.

٦٦) فرض کنید (X, d) فشرده باشد و $A \subseteq X$ و $f : X \longrightarrow X$ یک تابع باشد، در این صورت:

۱. اگر $f|_{\partial A} : \partial A \longrightarrow X$ پیوسته باشد آنگاه $f|_{\partial A}$ بر ∂A پیوسته یکنواخت است
۲. اگر $f|_{A'} : A' \longrightarrow X$ پیوسته باشد آنگاه $f|_{A'}$ بر A' پیوسته یکنواخت است
۳. اگر $f|_{\bar{A}} : \bar{A} \longrightarrow X$ پیوسته باشد آنگاه $f|_{\bar{A}}$ بر $\bar{A}$ پیوسته یکنواخت است
۴. هر سه گزاره درستند.

٦٧) کدام گزاره نادرست است؟

۱. اگر A در X چگال و O در X باز باشد آنگاه $O \subseteq \overline{A \cap O}$
۲. مجموعه نقاط تنهای یک فضای متریک کامل شمارا یک زیرمجموعه چگال از فضا است
۳. $A \subseteq X$ همبند است اگر و فقط اگر برای هر دو مجموعه باز غیرخالی B و C اگر $A \subseteq B \cup C$ آنگاه $A \subseteq B$ یا $A \subseteq C$
۴. اگر $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله ای از مجموعه های همبند تودرتوی غیرخالی (صعودی یا نزولی) باشد در این صورت $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} c_n$ و $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} c_n$ همبند هستند.

۶۸) اگر $f : [\circ, \text{۱}] \longrightarrow \mathbb{R}$ در تمام نقاط $[\circ, \text{۱}]$ حد صفر داشته باشد، آنگاه:

۱. f بر $[\circ, \text{۱}]$ پیوسته است
۲. مجموعه $\{x : f(x) \neq \circ\}$ حداکثر شمارا است
۳. مجموعه $\{x : f(x) \neq \circ\}$ می‌تواند حداکثر شمارا نباشد
۴. مجموعه $\{x : f(x) \neq \circ\}$ شمارا (همعدد $\mathbb{N}$) نمی‌تواند باشد
۵. غیر از تعداد متناهی نقطه، f همه‌جا صفر است.

۶۹) کدام گزاره درست است؟

۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x_\text{۱}, x_\text{۲}, \ldots, x_n) = x_\text{۱} x_\text{۲} \cdots x_n$ بر $\mathbb{R}^n$ پیوسته یکنواخت است
۲. بین هر دو صفر متوالی f'، تابع f حداکثر در یک نقطه صفر می‌شود
۳. تابع مشتق پذیری مانند f بر $(-\text{۱}, \text{۱})$ وجود دارد که برای x های منفی $f'(x) = \text{۱}$ و برای x های مثبت $f'(x) = -\text{۱}$
۴. تابعی مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ موجود است که $f'(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}^c$ و $f'(\mathbb{Q}^c) \subseteq \mathbb{Q}$.

۷۰) فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ پیوسته باشد و $E \subseteq \mathbb{R}^n$ در این صورت کدام نادرست است؟

۱. اگر E فشرده باشد آنگاه $\|f\|$ ماکزیمم بر E است:$\{\|f(x)\| : x \in E\}$ یک مجموعه فشرده است
۲. اگر E همبند باشد آنگاه $\{\|f(x)\| : x \in E\}$ یک بازه است
۳. اگر E همبند و فشرده باشد آنگاه $\{\|f(x)\| : x \in E\}$ یک بازه بسته و کراندار است
۴. اگر $\{\|f(x)\| : x \in E\}$ یک بازه بسته باشد آنگاه E همبند و فشرده است.

۷۱) تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است، در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. f یک به‌یک نیست
۲. مجموعه‌های $\{f(x):\|x\|\leq ۱\}$ و $\{|f(x)|:\|x\|=۱\}$ بازه هایی بسته‌اند
۳. f پوشا نیست
۴. مجموعه $\{x:f(x)=\circ\}$ می‌تواند فشرده نباشد.

۷۲) کدام نادرست است؟

۱. اگر $x^{۳}-x+a$ دارای سه ریشه صحیح باشد آنگاه $a=\circ$
۲. اگر $f:[\circ,۱]\longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر x داشته باشیم $|f(x)|\leq \int_{\circ}^{x} f(t)dt$ آنگاه $f\equiv\circ$
۳. اگر f بر $\mathbb{R}-\{\circ\}$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to\circ} f'(x)$ موجود باشد آنگاه f در صفر نیز مشتق‌پذیر است
۴. اگر $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر با مشتق مخالف ۱ باشد آنگاه f بر $[a,b]$ حداقل دو نقطه ثابت دارد.

۷۳) فرض کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر باشد و $f(a)=f(b)=\circ$ در این صورت:

۱. اگر $f\neq\circ$ بر (a,b) آنگاه تابع $g=\frac{f'}{f}:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ پوشا است
۲. اگر f دو بار بر (a,b) مشتق‌پذیر و f صفری در (a,b) داشته باشد، آنگاه f'' صفری در (a,b) دارد
۳. اگر بین هر دو صفر f'، صفری دیگر برای f' موجود باشد، آنگاه $f\equiv\circ$
۴. هر سه گزاره صحیح هستند.

۷۴) اگر $f:(\circ,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد و

پاسخ تستهای چهارگزینه‌ای

۱ ـ (۳). داریم $d(-۱, ۱) = ۰$.

۲ ـ (۲). داریم $A' = \{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}$.

۳ ـ (۲).

۴ ـ (۱). چون هر دنباله کراندار $\mathbb{R}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد.

۵ ـ (۳).

۶ ـ (۴).

۷ ـ (۲).

۸ ـ (۳). هر زیرمجموعه یک فضای متریک با متریک گسسته هم بسته و هم باز می‌باشد.

۹ ـ (۲). $\mathbb{R} - A$ یک بازه است که برابر $\mathbb{R}$ نیست. درنتیجه A بی‌کران است.

۱۰ ـ (۳). چون E' بسته است پس $(E')' \subseteq E'$. گزاره‌های (۱) و (۲) با انتخاب $E = \{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ رد می‌شوند. گزاره (۴) با انتخاب $E = \mathbb{R}$ به‌سادگی رد می‌شود.

۱۱ ـ (۴). زیرا داریم $A - A' = \emptyset$ = مجموعه نقاط تنهای A.

۱۲ ـ (۴). با انتخاب $A = \{۰\}$ و $B = \mathbb{R}$ داریم $A' \times B' = \emptyset$. از طرفی داریم $(A \times B)' = \{۰\} \times \mathbb{R} \neq \emptyset$.

۱۳ ـ (۳). (قضیه درس است). برای رد کردن گزاره‌های (۲) و (۴) مجموعه‌های $A_x = \{x\}$ را در نظر بگیرید که $x \in \mathbb{Q}$ و برای

۷۸) فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f'(b) \in \mathbb{R}^+$ و $f'(a)$ و $f(a) = f(b) = 0$ آنگاه f'' بر (a, b)

۱. حداکثر یک ریشه دارد
۲. حداقل دو ریشه دارد
۳. حداقل یک ریشه دارد
۴. حداکثر دو ریشه دارد.

۷۹). فرض کنید $a_n = \dfrac{\cos(n!)}{1+\sin(n!)}$ در این صورت (n بر حسب درجه است)

۱. $\underline{\lim} a_n < \overline{\lim} a_n = 1$
۲. $\underline{\lim} a_n = -1$
۳. $\underline{\lim} a_n = 1$
۴. هیچکدام.

۸۰) فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ بزرگتر از ۲ باشد و $a_n = \frac{n}{k} - [\frac{n}{k}]$ ([ ] براکت است) در این صورت:

۱. $\overline{\lim} a_n = 1$ و $\underline{\lim} a_n = 0$
۲. $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = 0$
۳. $\overline{\lim} a_n = \frac{k-1}{k}$ و $\underline{\lim} a_n = 0$
۴. $\overline{\lim} a_n = 1$ و $\underline{\lim} a_n = -1$.

۲۰ ـ (۳). برای رد کردن (۱) و (۲) متریک روی X را متریک گسسته در نظر بگیرید و برای رد کردن (۴) بگیرید $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (در $\mathbb{R}$ با متریک اقلیدسی).

۲۱ ـ (۴).

۲۲ ـ (۳). برای رد کردن (۱) داریم

$$d(0, \frac{1}{2}) + d(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2} < 1 = d(0, 1) .$$

تابع d تعریف شده در (۲)، متریک نیست زیرا هیچ وقت صفر نمی‌شود ($d(x,x) \neq 0$) و برای رد کردن (۴) داریم $d(-1, 1) = 0$.

۲۳ ـ (۴).

۲۴ ـ (۴). بگیرید $A = \mathbb{Q}$.

۲۵ ـ (۴).

۲۶ ـ (۴).

۲۷ ـ (۱). برای رد کردن (۲) بگیرید $A = [0, 1]$ و $B = [1, 2]$. برای رد کردن (۳) بگیرید $A = \mathbb{Q}$ و $B = \mathbb{Q}^c$. برای رد کردن (۴) بگیرید $A = \mathbb{Q}$.

۲۸ ـ (۴). برای رد کردن (۳) و تأیید (۴)، بگیرید $X = \mathbb{R}$ و متریک آن‌را متریک گسسته و گوی بسته به شعاع $r \geq 1$ در نظر بگیرید. برای رد کردن (۱) بگیرید $A = [0, 1]$ و $B = [2, 3]$. برای رد کردن (۲) مجموعه A را نیم‌خطی در $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید که ابتدا و انتهای آن نقاط A و B باشند و B را نیم‌دایره‌ای در $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید که A و B روی محیط آن باشند.

رد کردن گزاره (۱) دو منحنی پیوسته در $\mathbb{R}^۲$ را در نظر بگیرید که همدیگر را در دو نقطه قطع کنند. این دو منحنی در $\mathbb{R}^۲$ همبند هستند اما اشتراک آنها یک مجموعه دوعضوی است که همبند نمی‌باشد.

۱۴ ـ (۲). اگر $\mathbb{R}$ را با متریک گسسته در نظر بگیریم آنگاه $\mathbb{R}$ بسته و کراندار است اما فشرده نیست. گزاره‌های (۱) و (۳) و (۴) طبق قضیه‌هایی از درس با هم معادلند.

تذکر: چهار گزاره داده شده در $\mathbb{R}^k$ (با متریک اقلیدسی) با هم معادلند و برای زیرفضاهای $\mathbb{R}^k$ با متریک اقلیدسی هم ممکن است درست نباشد. مثلاً اگر در فضای $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ مجموعه $[۰, ۱] \cap \mathbb{Q}$ را در نظر بگیریم، این مجموعه بسته و کراندار است اما فشرده نیست.

۱۵ ـ (۲).

۱۶ ـ (۳). (E را زیرمجموعه تک‌عضوی در نظر بگیرید). برای (۱)، (۲) و (۴) از قضیه هاینه ـ بورل استفاده کنید.

۱۷ ـ (۲). برای رد کردن (۱)، بگیرید $A = (۰, ۱)$ و برای رد کردن (۳)، از قضیه (هر مجموعه همبند با بیش از یک عضو در هر فضای متریک ناشمارا است) استفاده کنید و برای رد کردن گزاره (۴)، بگیرید $A = \mathbb{Q}$.

۱۸ ـ (۳). برای رد کردن (۱) و (۲) بگیرید $x_n = n$ و $y_n = n + \frac{۱}{n}$ و برای رد کردن (۴) از (۳) استفاده کنید.

۱۹ ـ (۱). برای رد کردن (۲) و (۴) بگیرید $A = \mathbb{Q}$ و برای رد کردن (۳) بگیرید $A = (۰, ۱)$.

(۴) با استفاده از (۳)، رد می‌شود.

۴۱ ـ (۱). با استفاده از قضیه «اگر $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $g(a) = g(b) = 0$ و بین هر دو صفر g، صفر دیگری برای آن موجود باشد آنگاه g بر $[a,b]$ تابع ثابت صفر است» با انتخاب $g(x) = \alpha - f(x)$ به سادگی حکم نتیجه می‌شود.

۴۲ ـ (۳). زیرا با انتخاب $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$، این تابع بر $\mathbb{R}$ پیوسته است و داریم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ در نتیجه بنا به قضیه درس، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است (نادرست بودن بقیه گزینه‌ها در متن درس اثبات شده است).

۴۳ ـ (۱). متن درس را ببینید.

۴۴ ـ (۲). با توجه به فرض، زیرمجموعه‌های باز (X, d_1) در (X, d_2) هم بازند و زیرمجموعه‌های بسته (X, d_1) در (X, d_2) هم بسته‌اند در نتیجه زیرمجموعه‌های همبند (X, d_1) در (X, d_2) همبند و زیرمجموعه‌های فشرده (X, d_2) در (X, d_1) فشرده‌اند.

۴۵ ـ (۱). فرض کنیم $y_n \longrightarrow y$ در (Y,d) چون

$f : (Y,d) \longrightarrow (X, d_2)$ پیوسته است لذا $d_2(f(y_n), f(y)) \longrightarrow 0$. در نتیجه بنا به فرض، داریم $d_1(f(y_n), f(y)) \longrightarrow 0$. پس پیوستگی $f : (Y,d) \longrightarrow (X, d_2)$، پیوستگی $f : (Y,d) \longrightarrow (X, d_1)$ را نتیجه می‌دهد.

۴۶ ـ (۱).

۴۷ ـ (۱). بنا به قضیه درس.

۲۹ ـ (۳). (از قسمت (۲) پاسخ تست قبل استفاده کنید).

۳۰ ـ (۲).

۳۱ ـ (۴). (در فضای متریک با متریک گسسته داریم $A^\circ = A$ و $A' = \emptyset$).

۳۲ ـ (۴). فرض کنید X یک فضای متریک با بیش از یک عضو و با متریک گسسته باشد و بگیرید $r = ۱$.

۳۳ ـ (۴).

۳۴ ـ (۴). مجموعه‌های معرفی شده در (۱) و (۲) و (۳)، برابر مجموعه نقاط تنهای A هستند و برای رد کردن (۴) بگیرید $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

۳۵ ـ (۴). بگیرید $A = \mathbb{Q}$ و $B = \mathbb{Q}^c$.

۳۶ ـ (۲). دنباله ثابت در E، کوشی است اما نقطه حدی در E ندارد.

۳۷ ـ (۳).

۳۸ ـ (۴).

۳۹ ـ (۳). جملات این دنباله از جملهٔ ۳۶۰ به بعد همگی صفر هستند.

۴۰ ـ (۳). E مجموعه‌ای بسته است چون $\{a_n\}$ کراندار است پس E بسته و کراندار است در نتیجه بنا به قضیه هاینه ـ بورل، E فشرده است. برای رد کردن (۱) بگیرید $a_n = (-1)^n$ و برای رد کردن (۲)، $\{a_n\}$ را دنباله اعداد گویا در $[0, 1]$ در نظر بگیرید. گزاره

در $\mathbb{R}$ همبند باشد و چنین نیست. برای رد کردن گزینه (۴) بگیرید $f(x) = \frac{1}{x}$ بر $(0, 1)$.

۵۳ ـ (۲). داریم $A = g^{-1}\{1\}$ و $B = g^{-1}\{(0, \infty)\}$ که $g : (X, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = \|f(x)\|$ تابعی پیوسته است در نتیجه A بسته و B باز است.

۵۴ ـ (۲). زیرا می‌دانیم که اگر تابع پیوسته f بر (a, b) پیوسته یکنواخت باشد آنگاه $f(a^+)$ و $f(b^-)$ موجود و متناهی هستند (شرط لازم و کافی برای پیوستگی یکنواخت توابع پیوسته بر (a, b)) در نتیجه تابع
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & a < x < b \\ f(a^+) & x = a \\ f(b^-) & x = b \end{cases}$$
بر $[a, b]$ پیوسته (لذا پیوسته یکنواخت) است. در نتیجه g (و لذا تحدید g بر (a, b) یعنی f) کراندار است. برای رد گزینه های (۱) و (۴) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را بر $(0, 1)$ در نظر بگیرید. گزینه (۳) نیز نادرست است چون اگر f' بر (a, b) کراندار باشد آنگاه f بر (a, b) پیوسته یکنواخت است.

۵۵ ـ (۳). متن درس را ببینید. برای رد کردن گزینه (۱) تابع $f : (0, 1) \longrightarrow (0, \infty)$ با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. برای رد کردن گزینه (۲) تابع $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

۵۶ ـ (۴). حاصلضرب دو تابع پیوسته یکنواخت الزاماً پیوسته یکنواخت نمی‌باشد. تابع $y = x$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است درحالی‌که $y = x^2$ چنین نمی‌باشد.

۴۸ ـ (۴). متن درس را ببینید.

۴۹ ـ (۳). فرض کنیم (X,d) فشرده و $f:(X,d)\longrightarrow(Y,d')$ پیوسته باشد و $F\subseteq X$ بسته باشد در این صورت F در X فشرده است لذا $f(F)$ در X فشرده است لذا $f(F)$ بسته است. برای رد کردن قسمتهای (۱) و (۲) و (۴)، f را تابع همانی از $(\mathbb{R},|\cdot|)$ به $(\mathbb{R},d_{\circ})$ بگیرید ($d_{\circ}$ متریک گسسته است).

۵۰ ـ (۱). برای هر $\varepsilon>\circ$ بگیرید $\delta=\frac{\varepsilon}{۲}$، تعریف پیوستگی یکنواخت برقرار می‌شود. قسمت (۲) نادرست است زیرا اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ چنان باشد که $f(\mathbb{Q}^c)\subseteq\mathbb{Q}$، آنگاه $f(\mathbb{R})$ حداکثر شماراست. حال اگر f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه باید $f(\mathbb{R})$ همبند باشد لذا باید $f(\mathbb{R})$ تک‌عضوی باشد و این با اینکه $f(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}^c$ و $f(\mathbb{Q}^c)\subseteq\mathbb{Q}$ متناقض است. قسمت (۳) نادرست است. تابع $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{۱}{x} & x\neq\circ\\ \circ & x=\circ\end{cases}$ را بر $(-۱,۱)$ در نظر بگیرید. قسمت (۴) نادرست است. فضای متریک را $\mathbb{N}$ با متریک اقلیدسی بگیرید.

۵۱ ـ (۴). گزینه (۱) نادرست است. بگیرید $X=\mathbb{N}$ با متریک اقلیدسی. گزینه (۲) نادرست است. بگیرید $X=\mathbb{N}$ با متریک اقلیدسی. گزینه (۳) نادرست است. $X=\mathbb{R}$ را با متریک گسسته در نظر بگیرید.

۵۲ ـ (۱). متن درس را ببینید. برای رد کردن قسمت (۲)، تابع $f(x)=x^{۲}$ بر $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. گزینه (۳) نادرست است زیرا با فرض موجود بودن چنین تابعی، $f^{-۱}(\mathbb{R}^{۲}-\{(\circ,\circ)\})$ باید

۵۷ ـ (۱). از قضیه اساسی حساب و قضیه نقطه ثابت باناخ، حکم به سادگی نتیجه می‌شود (بگیرید $X = [0, \infty)$ و $\alpha = \frac{1}{2}$).

۵۸ ـ (۴). متن درس را ببینید.

۵۹ ـ (۴). قضیه‌های متن درس را ببینید.

۶۰ ـ (۱). بنا به قضیه مقدار میانی، $f(\mathbb{R})$ همبند است، از طرفی $f(\mathbb{N})$ در $\mathbb{R}$ چگال است پس $f(\mathbb{R})$ هم در $\mathbb{R}$ چگال است در نتیجه داریم $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

۶۱ ـ (۴).

۶۲ ـ (۴). f را تابع ثابت و g را با ضابطهٔ $g(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ در نظر بگیرید.

۶۳ ـ (۳). f را تابع ثابت صفر و g را با ضابطهٔ $g(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ در نظر بگیرید.

۶۴ ـ (۳).

۶۵ ـ (۴). گزینه (۱) را از قضیه نقطه ثابت باناخ نتیجه بگیرید. برای اثبات (۲) فرض کنیم دنباله $\{x_n\}$ موجود باشد که $d(f(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$ و X فشرده باشد (فرض خلف) در این صورت $\{x_n\}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا است. فرض کنیم $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$ در این صورت چون f پیوسته است پس داریم $f(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(x)$ لذا داریم $f(x) = x$. در گزینه (۳) چون تابع $g(x) = d(f(x), x)$ از (X, d) به $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس مجموعه‌های همبند را به مجموعه‌های همبند در $\mathbb{R}$ تبدیل می‌کند و از این مطلب به سادگی

می‌توان حکم را نتیجه گرفت.

۶۶ ـ (۴). مجموعه‌های ∂A و A' و $\bar{A}$ در X بسته‌اند و چون X فشرده است پس این مجموعه‌ها فشرده‌اند. چون هر تابع پیوسته بر یک مجموعه فشرده، پیوسته یکنواخت است، نتیجه می گیریم که هر سه گزاره از گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) درستند.

۶۷ ـ (۳). مجموعه

$$E = \left\{(\circ, y) : y \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : x > \circ\right\}$$

را در نظر بگیرید. این مجموعه همبند نیست (در $\mathbb{R}^2$) درحالی‌که اگر A و B باز باشند و $E \subseteq A \cup B$ آنگاه داریم $E \subseteq A$ یا $E \subseteq B$.

۶۸ ـ (۴). فرض کنیم $A = \{x : f(x) \neq \circ\}$ و برای $n \in \mathbb{N}$، $A_n = \{x : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$ در این صورت داریم $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. از طرفی بنا به فرض می‌توان نتیجه گرفت که برای هر n طبیعی، $A_n = \emptyset$ و حکم نتیجه می‌شود.

۶۹ ـ (۲). این گزاره، نتیجه‌ای از قضیه رُل می‌باشد. گزینه (۱) نادرست است زیرا می‌دانیم تابع $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_1, \ldots, x_1)$ یک تابع پیوسته یکنواخت بر $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. حال اگر بخواهد تابع معرفی شده در گزینه (۱) بر $\mathbb{R}^n$ پیوسته یکنواخت باشد، آنگاه $f \circ \Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است در نتیجه تابع $g(x) = x^n$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است که این نادرست است. گزینه (۳) بنا به قضیه مقدار میانی مشتق نادرست

است (همچنین کزینه (۴)).

۷۰ ـ (۴). بگیرید $E = \{۱, ۲\}$ و f را تابع ثابت ۱ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. برای اثبات گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳)، بگیرید $g(x) = \|f(x)\|$ در این صورت g از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ پیوسته است. حال اگر E فشرده باشد آنگاه $\left\{x \ : \ \|f\| \text{ بر } E \text{ است } \|f(x)\| \text{ برابر ماکزیمم}\right\}$ یک زیرمجموعه از E است (اگر $\|f(x_۰)\| = \max\limits_{x \in E} \|f(x)\|$ آنگاه مجموعه مورد نظر برابر $g^{-۱}\{f(x_۰)\}$ است). همچنین اگر E همبند باشد $g(E) = \{\|f(x)\| \ : \ x \in E\}$ همبند است لذا یک بازه در $\mathbb{R}$ است. اگر E همبند و فشرده باشد، آنگاه $g(E) = \{\|f(x)\| \ : \ x \in E\}$ همبند و فشرده است، یعنی یک بازه بسته و کراندار می‌باشد.

۷۱ ـ (۳). تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = x$ پیوسته و پوشا است.

۷۲ ـ (۴). فرض کنیم $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $x \neq y$ و $f(y) = y$ و $f(x) = x$، در این صورت $c \in (a, b)$ موجود است که $f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = ۱$ در نتیجه گزارهٔ مورد نظر نادرست می‌باشد.

۷۳ ـ (۱). برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ بگیرید $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$ در این صورت داریم $g(a) = g(b) = ۰$ همچنین g بر (a, b) مشتق‌پذیر است پس بنا به قضیه رُل $c \in (a, b)$ موجود است که $g'(c) = ۰$. لذا $-\lambda e^{-\lambda c} f(c) + e^{-\lambda c} f'(c) = ۰$ و داریم $\lambda = \frac{f'(c)}{f(c)}$.

۷۴ ـ (۱). متن درس را ببینید.

۷۵ ـ (۴). متن درس را ببینید.

۷۶ ـ (۴). f^{-1} یک تناظر یک‌به‌یک از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است. f^{-1} خاصیت مقدار میانی دارد در نتیجه پیوسته است لذا f^{-1} یکنوای اکید هم می‌باشد. در نتیجه f هم پیوسته و یکنوای اکید است.

۷۷ ـ (۴). برای رد کردن گزینه‌های (۱) و (۲) تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \ \ (n,m) = 1 \ \ n \in \mathbb{N}\,,\ m \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید (f در نقاط $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ پیوسته است و در نقاط $\mathbb{Q} - \{0\}$ ناپیوسته است). برای رد کردن (۳) هم تابع $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۷۸ ـ (۳). بنا به قضیه درس، با فرضیات موجود، f' حداقل دو ریشه در (a,b) دارد در نتیجه بنا به قضیه رُل، f'' حداقل یک ریشه در (a,b) دارد.

۷۹ ـ (۳). چون n بر حسب درجه است پس از جمله ۳۶۰ به بعد داریم $\cos(n!) = 1$ و $\sin(n!) = 0$ در نتیجه از جمله ۳۶۰ به بعد داریم $a_n = 1$.

۸۰ ـ (۳). زیردنباله‌های $\{a_{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{a_{kn+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{a_{kn+2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ و ... و $\{a_{kn+(k-1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ر در نظر می‌گیریم. مجموعه حدود زیر دنباله‌ای $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ برابر $\left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}\right\}$ است. در نتیجه داریم $\overline{\lim}a_n = \frac{k-1}{k}$ و $\underline{\lim}a_n = 0$.

کتاب‌نامه

[۱] تام م. اپوستل ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده. آنالیز ریاضی. مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

[۲] والتر رودین ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده. اصول آنالیز ریاضی. انتشارات علمی فنی.