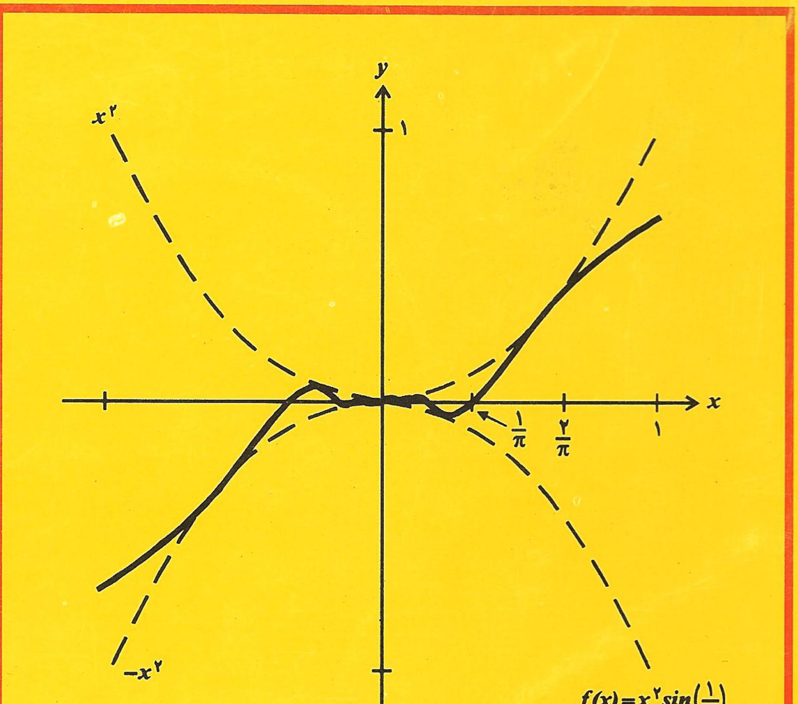
کنت راس

آنالیز مقدماتی: نظریهٔ حسابان



ترجمهٔ

دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

دکتر جواد لآلی

آنالیز مقدماتی: نظریهٔ حسابان

تألیف: کنتَ راس

ترجمه:

دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

دکتر جواد لاَلی

فهرست

پیشگفتار مترجمان

درسی در آنالیز ریاضی، نخستین گام در تدقیق مفاهیم و مطالبی است که در حسابان عرضه می‌شوند و خود پایه و مبدأ بسیاری از دروس دیگر ریاضیات از جمله آنالیز حقیقی، متغیرهای مختلط، معادلات دیفرانسیل، آنالیز فوریه، آمار، احتمال، آنالیز عددی، و ... است. بنابراین، مطالبی که در این درس عرضه می‌شود و شیوهٔ پرداختن به آنها، کتابهایی درسی با محتواها و سطوح متفاوت پدید آورده است که تعددّ قابل ملاحظهٔ آنها، نشان از تنوع سلیقه‌ها و گرایشهای مؤلفان کتابهای آنالیز ریاضی در وصول به هدف دارند. فهرست نسبتاً جامعی از این کتابها در ترجمهٔ حاضر گنجانیده شده است. فهرست مطالب تحت پوشش آنها کم و بیش یکسان است و تفاوت عمده صرفاً در سطح و پیچیدگی مطالب و میزان ورود به جزئیات است.

کتابی که ترجمهٔ آن را پیش رو دارید، ضمن اینکه قریب به اتفاق موادی را که در برنامه‌های مصوب دروس آنالیز ۱ و ۲ی دانشگاهی در نظر گرفته شده است، پوشش می‌دهد، مطالب را در سطحی عرضه می‌کند که برای دانشجویانی که بلافاصله پس از گذراندن درس حسابان – با تأکیدی که در آن بر تکنیک می‌شود – درسی در آنالیز می‌گیرند، مشکلی ایجاد نشود. به ویژه انتخاب تمرینهای مناسب و راهنمایی برای حل آنها، دانشجو را با ظرافتهای براهین ریاضی بهتر آشنا می‌کند. این کتاب به ویژه می‌تواند بهتر در رشته‌هایی – مانند آمار – مورد استفاده قرار گیرد که در عین نیاز به اغلب مطالبی که در دروس آنالیز ۱ و ۲ عرضه می‌شوند، فرصت کمی – تنها یک نیمسال – برای فراگرفتن آنها دارند.

در انتخاب واژه‌ها عمدتاً از «واژه نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران» بهره برگرفته شده است، با این حال واژه نامه‌ای مختصر در آخر کتاب درج شده است تا در موارد ضروری حتی‌الامکان نیاز به مراجعه به واژه نامهٔ دیگری نباشد.

امید است خوانندگان عزیز هرگونه لغزش و خطا را که از چشم مترجمان پنهان مانده است، به مترجمان تذکر دهند تا در چاپهای احتمالی بعدی به تصحیح آنها اقدام شود.

دکتر محمد قاسم وحیدی اصل – دکتر جواد لآلی

پیشگفتار

مطالعهٔ این کتاب، و به ویژه تمرینهای آن ، درک کاملی از برخی مفاهیم اساسی آنالیز نظیر پیوستگی، همگرایی دنباله‌ها و سریهای اعداد، و همگرایی دنباله‌ها و سریهای توابع را به خواننده می‌دهد. بر توانایی خواندن و نوشتن برهانها تأکید می‌شود. اطلاع دقیقی از تعریفها، جنبهٔ اساسی دارد. خوانندهٔ مبتدی باید آنها را از بر کند؛ این از بر کردن به درک مطلب رهنمون خواهد شد.

فصل ۱ برای زمینه چینی است و ، بجز در مورد اصل موضوع کمال، خواننده کم و بیش با مطالب آن آشناست. از این رو، از خوانندگان و مدرسان مصرانه خواسته می‌شود که سریعاً از این فصل رد شوند و در موقع لزوم به آن مراجعه کنند. حساسترین بخشهای این کتاب، بخشهای ۷ تا ۱۲ فصل ۲ هستند. اگر این بخشها کاملاً هضم و درک شوند، از بقیهٔ کتاب می‌توان به آسانی گذشت.

چهار فصل نخستین، مجموعه‌ای را برای درسی کوتاه در آنالیز تشکیل می‌دهند. من این چهار فصل را (بجز بخشهای اختیاری و بخش ۲۰) در حدود ۳۸ ساعت درس می‌دهم؛ این مدت شامل امتحانهای کوتاه [کوئیز] و امتحانها نیز می‌شود. اعتقادم بر آن است که در چنین درسی کوتاهی، دانشجویان مشکلی با مشتق و انتگرال ندارند اما دنباله‌ها و سریها را خوب نمی‌فهمند، دنباله‌ها و سریهای توابع که جای خود دارند، بنابراین فصلهای ۱-۴ بر این مباحث تأکید دارند. در دو یا سه مورد، من نظر دانشجویان را به قضیهٔ اساسی حسابان یا قضیهٔ مقدار میانگین جلب می‌کنم که بعداً در کتاب به آن پرداخته می‌شود، اما البته این قضیه‌های مهم دست کم در یک درس حسابان استاندارد مورد بحث قرار گرفته‌اند.

در بخشهای اولیه، به ویژه در فصل ۲ ، برهانها بسیار مفصل‌اند و اشارات دقیقی حتی برای نتیجه‌های بسیار مقدماتی به عمل آمده است. اغلب خوانندگان پیشرفته‌تر، جزئیات اضافی و اشاره به نتایج را یک مانع می‌دانند (زیرا مسیر عادی برهان را تغییر می‌دهند و بر ایده‌های اصلی سایه ابهام می‌افکنند) و ترجیح می‌دهند که این موارد را ضمن خواندن برهان به طور

ذهنی بررسی کنند. بنابراین، در فصلهای آخر، جزئیات برهانها کمتر خواهد بود و اشارات به نتایج ساده، اغلب حذف خواهند شد. این امر، خواننده را برای کتابهای پیشرفته‌تر که اغلب استدلالهای بسیار کوتاهی ارائه می‌دهند، آماده خواهد کرد.

تسلط بر مفاهیم اساسی کتاب، مطالب مربوط به آنالیز در زمینه‌هایی مانند متغیرهای مختلط، معادلات دیفرانسیل، آنالیز عددی، و آمار را با معناتر خواهد کرد. این کتاب می‌تواند به عنوان پایه‌ای برای مطالعهٔ ژرفتر آنالیز حقیقی که در کتابهایی مانند [2]، [11]، [13]، [14]، [17]، [19]، و [20] که در کتابشناسی آخر کتاب فهرست شده‌اند، به کار آید.

خوانندگانی نیز که در نظر دارند حسابان تدریس کنند، می‌توانند از مطالعهٔ دقیق آنالیز سود ببرند. حتی پس از مطالعهٔ این کتاب (یا نوشتن آن) چندان به راحتی نمی‌توان از عهدهٔ سؤالهایی نظیر اینکه «عدد چیست؟» برآمد، اما حداقل این کتاب می‌تواند در دادن تصویر روشنتری از نکات ظریفی که این سؤالها بدانها منجر می‌شوند، یاری رساند.

بخشهای اختیاری کتاب، بحثهایی از مباحثی را شامل می‌شود که فکر می‌کنم مهم یا جالب‌اند. گاهی به مبحثی به اختصار پرداخته شده و پیشنهادهایی برای مطالعهٔ بیشتر به عمل آمده است. گرچه این بخشها برای استفاده به ویژه در کلاس درس طراحی نشده‌اند، امیدوارم که برخی خوانندگان از آنها برای گسترش افقهای دید خود استفاده و ملاحظه کنند که چگونه این مطالب در قالبهایی کلیتر می‌گنجند.

فصل ۱

مقدمه

فضای زمینه‌ای همه قسمتهای آنالیز، در این کتاب، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. در این فصل برخی از ویژگیهای اصلی این مجموعه را درج می‌کنیم. این ویژگیها به عنوان اصول موضوع ما به کار خواهند رفت؛ به این معنی که می‌توان همهٔ ویژگیهای اعداد حقیقی را تنها با استفاده از این اصول موضوع استخراج کرد. با این حال، از فرورفتن در جزئیات امر احتراز خواهیم کرد. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به پیوست مربوط به نمادهای مجموعه‌ها رجوع کنند.

بخش ۱. مجموعهٔ اعداد طبیعی N

مجموعهٔ {... , ۳ , ۲ , ۱}، از همهٔ اعداد طبیعی را با N نشان می‌دهیم. اعضای N اعداد صحیح مثبت نیز نامیده می‌شوند. هر عدد طبیعی n دارای یک تالی، مانند $n + 1$، است. مثلاً، ۳ تالی ۲، و ۳۷ تالیْ ۳۶ است. احتمالاً تصدیق می‌کنید که ویژگیهای زیر از مجموعه N بدیهی‌اند؛ دست کم چهار تای اوّل چنین‌اند.

N۱. ۱ به N تعلق دارد.

N۲. اگر n به N تعلق داشته باشد، آنگاه تالی آن، $n + 1$، به N تعلق دارد.

۳N. ۱ تالی هیچ عدد طبیعی در N نیست.

۴N. اگر n و m در N تالی یکسانی داشته باشند، آنگاه $n = m$.

۵N. زیر مجموعه‌ای از N که شامل ۱ بوده و شامل $n + ۱$ است هرگاه شامل n باشد، باید برابر N باشد.

خواص ۱N تا ۵N به اصول موضوع پئانو[۱] یا اصول متعارفی پئانو مشهورند. چنین نتیجه می‌شود که کلیه ویژگیهای N را می‌توان براساس این پنج اصل موضوع ثابت کرد؛ نگاه کنید به [۳] یا [۱۵].

اینک توجه خود را به اصل موضوع ۵N، تنها نتیجه‌ای که شاید بدیهی نباشد، معطوف می‌کنیم. مضمون این اصل موضوع چنین است: زیر مجموعه‌ای مانند S از N را که در ۵N شرح داده شده‌است در نظر بگیرید. در این صورت، ۱ به S تعلق دارد. چون هر وقت که S شامل n باشد شامل $n + ۱$ نیز هست؛ نتیجه می‌شود که S باید شامل $۱ + ۱ = ۲$ باشد. مجدداً، چون هر وقت که S شامل n باشد، شامل $n + ۱$ نیز هست، نتیجه می‌شود که S باید شامل $۲ + ۱ = ۳$ باشد. باز هم، چون هر وقت S شامل n باشد، شامل $n + ۱$ نیز هست، نتیجه می‌شود که S باید شامل $۳ + ۱ = ۴$ باشد. می‌توان این نحوهٔ استدلال یکنوا را ادامه داد، و نتیجه گرفت که S شامل هر عدد طبیعی در N است. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که نتیجه بگیریم که $S = N$. این نتیجهٔ منطقی است که با اصل موضوع ۵N بیان شده است.

راهی دیگر برای نگریستن به اصل موضوع ۵N چنین است. فرض کنید اصل موضوع ۵N نادرست باشد. در این صورت، N شامل مجموعه‌ای مانند S است به طوری که

(i) $۱ \in S$،

(ii) اگر $n \in S$، آنگاه $n + ۱ \in S$،

اما، $S \neq N$. کوچکترین عضو مجموعهٔ $\{n \in N : n \notin S\}$ را در نظر بگیرید و آن را $n_۰$ بنامید. چون (i) برقرار است، بدیهی است که $n_۰ \neq ۱$. بنابراین، $n_۰$ باید تالی عددی در N؛ یعنی، $n_۰ - ۱$ باشد. باید داشته باشیم $n_۰ - ۱ \in S$. زیرا، $n_۰$ کوچکترین عضو $\{n \in N : n \notin S\}$ است. بنابر (ii)، تالی $n_۰ - ۱$؛ یعنی، $n_۰$ نیز باید در S باشد، که یک تناقض است. این بحث ممکن است موجه به نظر برسد، امّا تأکید می‌کنیم که ما اصل موضوع ۵N را با استفاده از مفهوم تالی و اصل موضوعهای ۱N تا ۴N ثابت نکرده‌ایم؛ زیرا، تلویحاً از دو حقیقت ثابت نشده استفاده کرده‌ایم. در واقع فرض کرده‌ایم که هر زیر مجموعهٔ ناتهی از N شامل

---

(۱) Peano

کوچکترین عضوی است و فرض کرده‌ایم که اگر $۱ \neq n_\circ$، آنگاه $n_\circ$ تالی عددی در N است.

اصل موضوع ΔN پایهٔ استقرای ریاضی است. فرض کنید $P_۱$ ، $P_۲$ ، $P_۳$ ، ... فهرستی از گزاره‌ها یا احکامی باشد که ممکن است درست باشند یا نباشند. اصل استقرای ریاضی حکم می‌کند که همه گزاره‌های $P_۱$ ، $P_۲$ ، $P_۳$ ، ... درست‌اند مشروط بر آنکه

$(I_۱)$ $P_۱$ درست باشد،

$(I_۲)$ $P_{n+۱}$ درست است در صورتی که P_n درست باشد.

$(I_۱)$ ، یعنی این حقیقت را که $P_۱$ درست است، پایه استقرا ، و $(I_۲)$ را مرحله استقرا می‌نامیم. برای اینکه برهان بی‌نقصی بر مبنای استقرای ریاضی ارائه دهیم، باید ویژگیهای $(I_۱)$ و $(I_۲)$ هر دو تحقیق شوند. در عمل تحقیق صحت و سقم $(I_۱)$ آسانتر است.

مثال ۱. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n، $۱ + ۲ + ... + n = \frac{۱}{۲} n (n + ۱)$.

حل. n امین گزارهٔ ما عبارت است از

$$P_n: "۱ + ۲ + ... + n = \frac{۱}{۲} n(n + ۱)."$$

بنابراین، $P_۱$ حکم می‌کند که $۱ = \frac{۱}{۲} \times ۱(۱ + ۱)$ ، $P_۲$ حکم می‌کند که $۱ + ۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲(۲ + ۱)$ ، $P_{۳۷}$ حکم می‌کند که $۱ + ۲ + ... + ۳۷ = \frac{۱}{۲} \times ۳۷(۳۷ + ۱)$ ، و غیره، به ویژه، $P_۱$ حکم درستی است که آن را به عنوان پایهٔ استقرا به کار می‌بریم.

برای برقراری مرحله استقرا، فرض کنید که P_n درست باشد؛ به این معنی که فرض می‌کنیم

$$۱ + ۲ + ... + n = \frac{۱}{۲} n(n + ۱)$$

درست باشد. چون می‌خواهیم $P_{n+۱}$ را به کمک آن ثابت کنیم، $n + ۱$ را به طرفین آن اضافه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} ۱ + ۲ + ... + n + (n + ۱) &= \frac{۱}{۲} n(n + ۱) + (n + ۱) \\ &= \frac{۱}{۲} [n(n + ۱) + ۲(n + ۱)] = \frac{۱}{۲} (n + ۱)(n + ۲) \\ &= \frac{۱}{۲} (n + ۱)\big((n + ۱) + ۱\big). \end{aligned}$$

بنابراین، $P_{n+۱}$ برقرار است، هرگاه P_n برقرار باشد. بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم

که P_n، به ازای هر عدد طبیعی n، درست است. □

تأکید می‌کنیم که پیش از آخرین جملهٔ راه حل خود، ثابت نکرده‌ایم که «P_{n+1} درست است». ما صرفاً استلزامی را ثابت کرده‌ایم: «اگر P_n درست باشد، آنگاه P_{n+1} درست است». در واقع به معنایی، تعدادی نامتناهی از احکام را ثابت کرده‌ایم؛ یعنی، P_1 درست است؛ اگر P_1 درست باشد، آنگاه P_2 درست است؛ اگر P_2 درست باشد، آنگاه P_3 درست است؛ اگر P_3 درست باشد، آنگاه P_4 درست است؛ به همین قیاس الیٰ آخر. بنابراین، استقرای ریاضی را به کار برده‌ایم و نتیجه گرفته‌ایم که P_1 درست است، P_2 درست است، P_3 درست است، P_4 درست است، و الی آخر. ضمناً اقرار می‌کنیم که اثبات فرمولهایی نظیر آنچه هم اکنون ثابت کردیم، ساده‌تر از استخراج آنهاست. حدس زدن چنین نتیجه‌ای ممکن است کاری شگرد آمیز باشد. گاهی نتایجی از این نوع به کمک آزمون و خطا کشف می‌شوند.

مثال ۲. همهٔ اعداد به صورت $7^n - 2^n$ بر ۵ قابل قسمت‌اند.

حل. به صورت دقیقتر، نشان می‌دهیم که به ازای هر $n \in N$، $7^n - 2^n$ بر ۵ قابل قسمت است. n امین گزارهٔ ما چنین است:

P_n: "$7^n - 2^n$ بر ۵ قابل قسمت است."

پایه استقرا، یعنی P_1، آشکارا درست است. زیرا، $5 = 7^1 - 2^1$. برای مرحله استقرا، فرض کنید که P_n درست باشد. برای تعیین صحت و سقم P_{n+1} می‌نویسیم،

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7^{n+1} - 7 \times 2^n + 7 \times 2^n - 2 \times 2^n \\ &= 7[7^n - 2^n] + 5 \times 2^n . \end{aligned}$$

چون، بنابر فرض استقرا، $7^n - 2^n$ مضربی از ۵ است، نتیجه می‌شود که $7^{n+1} - 2^{n+1}$ نیز مضربی از ۵ است. در واقع، اگر $5m = 7^n - 2^n$، آنگاه $7^{n+1} - 2^{n+1} = 5[7m + 2^n]$. نشان داده‌ایم که P_n مستلزم P_{n+1} است. بنابراین، مرحله استقرا برقرار است. با استفاده از استقرا، برهان کامل می‌شود. □

مثال ۳. نشان دهید که به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی x، $|\sin nx| \le n|\sin x|$.

حل. n امین گزاره ما چنین است:

P_n: "به ازای هر عدد حقیقی x، $|\sin nx| \leq n|\sin x|$".

باز هم، پایه استقرا روشن است. فرض کنید P_n درست باشد. فرمول جمع سینوسها را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$|\sin(n + ۱)\, x| = |\sin(nx + x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x|.$$

اینک، نامساوی مثلث و خواص قدر مطلق را به کار می‌بریم [نگاه کنید به ۷.۳ و ۵.۳] و به دست می‌آوریم

$$|\sin(n + ۱)\, x| \leq |\sin nx| \,.\, |\cos x| + |\cos nx| \,.\, |\sin x|.$$

چون به ازای هر y، $|\cos y| \leq ۱$. ملاحظه می‌کنیم که

$$|\sin(n + ۱)x| \leq |\sin nx| + |\sin x|.$$

حال، فرض استقرای P_n را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$|\sin(n + ۱)x| \leq n|\sin x| + |\sin x| = (n + ۱)|\sin x|.$$

بنابراین، $P_{n+۱}$ برقرار است. سرانجام، بنابر استقرای ریاضی، نتیجه به ازای هر n برقرار است. □

تمرینها

۱.۱. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n، $۱^۲ + ۲^۲ + ... + n^۲ = n(n+۱)(۲n+۱)/۶$.

۲.۱. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n، $۳ + ۱۱ + ... + (۸n - ۵) = ۴n^۲ - n$.

۳.۱. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n، $۱^۳ + ۲^۳ + ... + n^۳ = (۱ + ۲ + ... + n)^۲$.

۴.۱. (الف) فرمولی برای $(۲n - ۱) + ... + ۳ + ۱$ را با محاسبه مقدار مجموع آن، به ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ حدس بزنید [به ازای $n = ۱$، مجموع صرفاً ۱ است.]

(ب) با استفاده از استقرای ریاضی فرمول حاصل را ثابت کنید.

۵.۱. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $۱ + ۱/۲ + ۱/۴ + ... + ۱/۲^n = ۲ - ۱/۲^n$.

۶.۱. ثابت کنید وقتی که n عددی طبیعی باشد، $(۱۱)^n - ۴^n$ بر ۷ تقسیمپذیر است.

۷.۱. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $۷^n - ۶n - ۱$ بر ۳۶ تقسیمپذیر است.

۸.۱. اصل استقرای ریاضی را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد. فهرستی از گزاره‌های P_m، P_{m+1}، ... درست‌اند به شرط آنکه (i) P_m درست باشد، (ii) P_{n+1} درست باشد در صورتی که P_n درست باشد و $n \geq m$.

(الف) ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح $n \geq 2$، $n^2 > n + 1$.

(ب) ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح $n \geq 4$، $n! > n^2$. [به خاطر بیاورید که $n! = n(n-1) \ldots 3.2.1$؛ به عنوان مثال $5! = 5.4.3.2.1 = 120$.]

۹.۱. (الف) تحقیق کنید که به ازای کدام اعداد صحیح، نامساوی $2^n > n^2$ برقرار است.

(ب) ادعای خود را در (الف)، به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید.

۱۰.۱. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + \ldots + (4n - 1) = 3n^2 .$$

۱۱.۱. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید P_n معرف این حکم باشد که «$n^2 + 5n + 1$ عدد صحیح فردی است.»

(الف) ثابت کنید که P_{n+1} درست است در صورتی که P_n درست باشد.

(ب) به ازای کدام مقادیر n، P_n درست است؟ این تمرین چه نکته‌ای را در بر دارد؟

۱۲.۱. به ازای $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $n!$ [بخوانید «n فاکتوریل»] معرف حاصلضرب $1.2.3. \ldots .n$ باشد. همچنین، فرض کنید $0! = 1$ و تعریف کنید

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad , \qquad k = 0, 1, \ldots, n .$$

قضیه دو جمله‌ای بیان می‌کند که

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{1}{2} n(n-1) a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

(الف) قضیه دو جمله‌ای را برای $n = 1, 2, 3$ تحقیق کنید.

(ب) نشان دهید که به ازای $k = 1, 2, \ldots, n$، $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

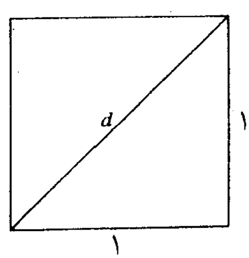
(پ) قضیه دو جمله‌ای را، با استفاده از استقرای ریاضی و قسمت (ب)، ثابت کنید.

بخش ۲. مجموعهٔ اعداد گویای Q

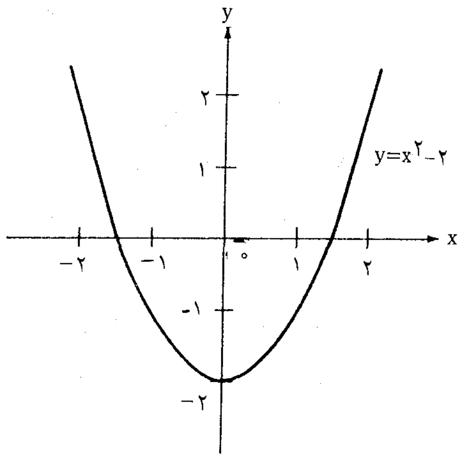
کودکان ابتدا جمع و ضرب اعداد طبیعی را می‌آموزند. پس از معرفی عمل تفریق نیاز به توسیع دستگاه اعداد برای اینکه ۰ و اعداد منفی را در بر گیرد، آشکار می‌شود. در این مرحله، دنیای اعداد وسعت می‌یابد تا مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ از همه اعداد صحیح را در برگیرد. بنابراین، داریم $\mathbf{Z} = \{۰ , ۱ , -۱ , ۲ , -۲ , ...\}$.

به زودی فضای $\mathbf{Z}$ نیز با معرفی عمل تقسیم نامناسب می‌شود. راه حل آن است که دنیای اعداد را وسیعتر کنیم که شامل همهٔ کسرها بشود. از این رو، مافضای $\mathbf{Q}$ از همهٔ اعداد گویا؛ یعنی، اعداد به صورت $\frac{m}{n}$ را، که در آن $m , n \in \mathbf{Z}$، و $n \neq ۰$، مطالعه می‌کنیم. توجه کنید که $\mathbf{Q}$ شامل همه اعداد اعشاری مختوم، مانند $۱٫۴۹۲ = ۱۴۹۲/۱۰۰۰$، است. رابطه بین اعداد اعشاری حقیقی در بخشهای ۱۰.۳ و ۱۶ مورد بحث قرار می‌گیرد. فضای $\mathbf{Q}$ دستگاه جبری بسیار مناسبی است که در آن می‌توان اعمال بنیادی جمع، ضرب، تفریق، و تقسیم را به طور کامل مورد مطالعه قرار داد. ولی هیچ دستگاهی بی‌عیب نیست و $\mathbf{Q}$ از جهاتی نامناسب است. در این بخش نواقص $\mathbf{Q}$ را بررسی می‌کنیم. در بخش آتی، بر جنبه‌های خوب $\mathbf{Q}$ تأکید خواهیم کرد و سپس به دستگاه اعداد حقیقی وارد خواهیم شد.

تا زمانی که تلاشی برای حل معادلاتی از قبیل $x^۲ = ۲$ نکرده‌ایم، مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ی اعداد گویا دستگاه جبری بسیار نیکویی است. چنین نتیجه می‌شود که هیچ عدد گویایی در این معادله صدق نمی‌کند و با این حال، به دلایل موجهی می‌توان باور کرد که نوعی عدد در این معادله صدق می‌کند. برای مثال مربعی با اضلاعی به طول یک را در نظر بگیرید؛ نگاه کنید به شکل ۱.۲. اگر d نشانگر طول قطر آن باشد آنگاه از هندسه نتیجه می‌گیریم که $d^۲ = ۱^۲ + ۱^۲$؛ یعنی، $d^۲ = ۲$.



شکل ۱.۲



شکل ۲.۲

آشکار است که طول مثبتی موجود است که مربع آن ۲ است، که آن را به صورت $\sqrt{۲}$ می‌نویسیم. امّا، به طوری که در مثال ۲ نشان خواهیم داد، $\sqrt{۲}$ نمی‌تواند عددی گویا باشد. البته، $\sqrt{۲}$ را می‌توان به وسیلهٔ اعداد گویا تقریب زد. اعداد گویایی موجودند که مربع آنها نزدیک به $\sqrt{۲}$ است؛ برای مثال، $(۱ر۴۱۴۲)^۲ = ۱ر۹۹۹۹۶۱۶۴$ و $(۱ر۴۱۴۳)^۲ = ۲ر۰۰۰۲۴۴۴۹$.

بدیهی است که انبوهی از اعداد گویا موجود است و هنوز «رخنه‌هایی» در $\mathbf{Q}$ وجود دارد. در اینجا به طریق دیگری به نگرش در این وضعیت می‌پردازیم. نمودار چند جمله‌ای $x^۲ - ۲$ را، در شکل ۲.۲، در نظر بگیرید. آیا نمودار $x^۲ - ۲$ محور xها را قطع می‌کند؟ میل داریم که بگوییم چنین است. زیرا، وقتی که محور xها را رسم می‌کنیم، «همه» نقاط را در نظر می‌گیریم. ما هیچ «رخنه» ای را مجاز نمی‌دانیم. امّا، توجه کنید که نمودار $x^۲ - ۲$ از کنار همهٔ اعداد گویا روی محور xها می‌گذرد. محور xها تصویر خط اعداد است و به نظر می‌رسد که مجموعهٔ اعداد گویا باز هم دارای رخنه‌های جدی است.

اعداد حتی غریبتری، مانند π و e، موجودند که گویا نیستند، ولی به طور طبیعی در ریاضیات مطرح می‌شوند. عدد π در مطالعهٔ دایره‌ها و کره‌ها جنبهٔ بنیادی دارد و عدد e در مسائل رشد نمایی ظاهر می‌شود.

به $\sqrt{۲}$ باز می‌گردیم. این مثالی از آن چیزی است که عدد جبری نامیده می‌شود، زیرا در معادلهٔ $x^۲ - ۲ = ۰$ صدق می‌کند.

۱.۲ تعریف. عددی را عدد جبری می‌نامیم در صورتی که در معادله‌ای چند جمله‌ای، مانند

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

صدق کند، که در آن، ضرایب a_0 ، a_1 ، ... ، a_n اعداد صحیح‌اند، $a_n \neq 0$ و $n \geq 1$.

اعداد گویا همواره اعداد جبری‌اند. در واقع اگر $r = m/n$ عددی گویا باشد [$m, n \in Z$، و $n \neq 0$] آنگاه در معادلهٔ $nx - m = 0$ صدق می‌کند. اعدادی که به صورت $\sqrt{7}$، $\sqrt[3]{\ }$ وغیره [یا اگر ترجیح می‌دهید، اعداد نمایی کسری] و اعمال جبری معمولی بر روی اعداد گویا تعریف می‌شوند، همواره اعداد جبری‌اند.

مثال ۱. $4/17$ ، $3^{1/2}$ ، $(17)^{1/3}$ ، $(5^{1/3} + 2)^{1/2}$ و $((4 - 2 . 3^{1/2})/7)^{1/2}$، همه نمونه‌های اعداد جبری‌اند. در حقیقت، $4/17$ جوابی برای $17x - 4 = 0$ است، $3^{1/2}$ معرف جوابی برای $x^2 - 3 = 0$ و $(17)^{1/3}$ نمایانگر جوابی برای $x^3 - 17 = 0$ است. عبارت $a = (2+5^{1/3})^{1/2}$؛ به معنی $a^2 = 2 + 5^{1/3}$ یا $5^{1/3} = a^2 - 2$ است، بنابراین، $(a^2 - 2)^3 = 5$. در نتیجه، داریم $a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 13 = 0$، که نشان می‌دهد که $a = (5^{1/3} + 2)^{1/2}$ در معادلهٔ چند جمله‌ای $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 13 = 0$ صدق می‌کند. به همین نحو، عبارت $b = ((4 - 2 \times 3^{1/2})/7)^{1/2}$ به عبارت $7b^2 = 4 - 2 \times 3^{1/2}$ منجر می‌شود. در نتیجه، $4 - 7b^2 = 2 \times 3^{1/2}$. بنابراین، $(4 - 7b^2)^2 = 12$، و یا $49b^4 - 56b^2 + 4 = 0$. بنابراین، b در معادله چند جمله‌ای $49x^4 - 56x^2 + 4 = 0$ صدق می‌کند.

ممکن است با قضیهٔ زیر از جبر مقدماتی آشنایی داشته باشید. این قضیه‌ای است که تذکرهای زیر را توجیه می‌کند: تنها جوابهای ممکن $x^3 - 7x^2 + 2x - 12 = 0$ عبارت‌اند از ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ، ± 4 ، ± 6 ، ± 12 ، و بنابراین، تنها عاملهای تک جمله‌ای (گویای) ممکن $x^3 - 7x^2 + 2x - 12$ عبارت‌اند از $x - 1$، $x + 1$، $x - 2$، $x + 2$، $x - 3$ ، $x + 3$، $x - 4$، $x + 4$، $x - 6$، $x + 6$، $x - 12$، $x + 12$. ما بحث این مسائل جبری را ادامه نخواهیم داد. این چند نکته را صرفاً به این امید که خواننده با آنها آشنا باشد، متذکر شدیم.

قضیهٔ بعدی این امکان را نیز برای اثبات این موضوع فراهم می‌کند که اعداد جبری که ظاهر اعداد گویا را ندارند اعداد گویا نیستند. مثلاً، بدیهی است که $\sqrt{4}$ عددی گویا است، در حالی که

$\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ وغیره چنین نیستند. به اعداد ناگویا بر می‌گردیم. مثالهای بعد از قضیه را ملاحظه کنید. به خاطر بیاورید که عدد صحیحی مانند k یک عامل عدد صحیح m است یا m را عاد می‌کند در صورتی که m/k نیز عددی صحیح باشد. عدد صحیحی مانند $p \geq ۲$ یک عدد اول است مشروط بر اینکه p و ۱ تنها عاملهای p باشند. می‌توان ثابت کرد که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به صورت حاصل ضرب اعداد اوّل نوشت و این کار، بجز از نظر ترتیب عاملها، تنها به یک صورت انجام می‌شود.

۲.۲ قضیه *صفرهای گویا*. فرض کنید $a_۰$ ، $a_۱$ ، ... ، a_n اعداد صحیح باشند و r عدد گویایی باشد که در معادله چند جمله‌ای

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰ = ۰ , \qquad (۱)$$

صدق می‌کند، که در آن، $n \geq ۱$ و $a_۰ \neq ۰$ و $a_n \neq ۰$. قرار دهید $r = p/q$، که در آن، p و q اعداد صحیح بدون عاملهای مشترک‌اند و $q \neq ۰$. در این صورت، q عدد a_n و p عدد $a_۰$ را عاد می‌کند.

به عبارت دیگر، تنها جوابهای گویای (۱) به شکل $\frac{p}{q}$ هستند، که در آن، p عدد $a_۰$ و q عدد a_n را عاد می‌کند.

برهان. داریم

$$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-۱}(\frac{p}{q})^{n-۱} + \ldots + a_۱(\frac{p}{q}) + a_۰ = ۰.$$

با ضرب طرفین در q^n، خواهیم داشت

$$a_n p^n + a_{n-۱} p^{n-۱} q + a_{n-۲} p^{n-۲} q^۲ + \ldots + a_۲ p^۲ q^{n-۲} + a_۱ p q^{n-۱} + a_۰ q^n = ۰ . \qquad (۲)$$

اگر معادلهٔ را برحسب $a_n p^n$ حل کنیم، عبارت

$$a_n p^n = -q[a_{n-۱} p^{n-۱} + a_{n-۲} p^{n-۲} q + \ldots + a_۲ p^۲ q^{n-۳} + a_۱ p q^{n-۲} + a_۰ q^{n-۱}]$$

را به دست می‌آوریم. از اینجا نتیجه می‌شود که q جملهٔ $a_n p^n$ را عاد می‌کند. امّا، p و q عامل مشترک ندارند و بنابراین q باید a_n را عاد کند. [به صورت مشروح: p را می‌توان به صورت حاصلضرب اعداد اول $p_۱ p_۲ \ldots p_k$ نوشت، که در آن، لزومی ندارد. p_i ها متمایز باشند. به همین

ترتیب، q را می‌توان به صورت حاصلضرب اعداد اول $q_1 q_2 \ldots q_l$ نوشت. چون q جمله $a_n p^n$ را عاد می‌کند، کمّیت $a_n p^n/q = a_n p_1^n \ldots p_k^n/(q_1 \ldots q_l)$ باید عددی صحیح باشد. چون هیچ p_iای نمی‌تواند با هیچ یک از q_j ها برابر باشد، تجزیه یکتای a_n به صورت حاصلضربی از اعداد اوّل، باید شاملِ حاصلضرب $q_1 q_2 \ldots q_l$ باشد. در نتیجه، q عدد a_n را عاد می‌کند.]

اینک (۲) را برحسب $a_0 q^n$ حل می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$a_0 q^n = -p[a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_2 p q^{n-2} + a_1 q^{n-1}].$$

در نتیجه، p مقسوم علیه $a_0 q^n$ است. چون p و q عامل مشترکی ندارند p باید a_0 را عاد کند. □

مثال ۲. $\sqrt{2}$ نمی‌تواند نمایش هیچ عدد گویایی باشد.

برهان. بنابر قضیهٔ ۲.۲ تنها اعداد گویای ممکنی که جواب معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ باشند، عبارت‌اند از ۱± ، ۲± [در اینجا، $n = 2$ ، $a_2 = 1$ ، $a_1 = 0$ ، $a_0 = -2$. بنابراین، جوابهای گویای آن باید به شکل p/q باشند که در آن p مقسوم علیه $a_0 = -2$ و q مقسوم علیه $a_2 = 1$ است.] می‌توان هر یک از چهار عدد ۱± ، ۲± را در معادله $x^2 - 2 = 0$ قرار داد و بی‌درنگ آنها را به عنوان جوابهای ممکن این معادله زد کرد. چون $\sqrt{2}$ نمایش یک جواب معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ است، لذا، نمی‌تواند نمایش یک عدد گویا باشد. □

مثال ۳. $\sqrt{17}$ نمی‌تواند نمایش عدد گویایی باشد.

برهان. تنها جوابهای گویای ممکن $x^2 - 17 = 0$ عبارت‌اند از ۱± ، ۱۷± و هیچ یک از این اعداد جوابهای این معادله نیستند. □

مثال ۴. $6^{1/3}$ نمی‌تواند نمایش عدد گویایی باشد.

برهان. تنها جوابهای گویای ممکن $x^3 - 6 = 0$ عبارت‌اند از ۱± ، ۲± ، ۳± ، ۶±. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که هیچ یک از این هشت عدد در معادلهٔ $x^3 - 6 = 0$ صدق نمی‌کنند. □

مثال ۵. $a = (۲ + ۵^{۱/۳})^{۱/۳}$ نمایش عددی گویا نیست.

برهان. در مثال ۱ نشان دادیم که a نمایش جوابی از معادلهٔ $x^۶ - ۶x^۴ + ۱۲x^۲ - ۱۳ = ۰$ است. بنابر قضیهٔ ۲.۲، تنها جوابهای گویای ممکن عبارت‌اند از $±۱$ ، $±۱۳$. وقتی که $x = ۱$ یا $x = -۱$، سمت چپ معادله برابر با ۶- است و هنگامی که $x = ۱۳$ یا $x = -۱۳$ سمت چپ معادله برابر با ۴۶۵۷۴۵۸ می‌شود. با استفاده از کمی عقل سلیم، می‌توان از محاسبهٔ اخیر احتراز کرد. توجه کنید که یا a «آشکارا» بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۱۳ است، یا توجه کنید که

$$۱۳^۶ - ۶ \times ۱۳^۴ + ۱۲ \times ۱۳^۲ - ۱۳ = ۱۳(۱۳^۵ - ۶ \times ۱۳^۳ + ۱۲ \times ۱۳ - ۱) \neq ۰$$

زیرا، جملهٔ داخل پرانتز نمی‌تواند صفر باشد: مقدار آن یک واحد کمتر از مضربی از ۱۳ است. □

مثال ۶. $b = ((۴ - ۲\sqrt{۳})/۷)^{۱/۲}$ نمایش عددی گویا نیست.

برهان. در مثال ۱ نشان دادیم که b جوابی برای معادلهٔ $۴۹x^۴ - ۵۶x^۲ + ۴ = ۰$ است. جوابهای گویای ممکن این معادله عبارت‌اند از $±۱$ ، $±۱/۷$ ، $±۱/۴۹$ ، $±۲$ ، $±۲/۷$ ، $±۲/۴۹$ ، $±۴$ ، $±۴/۷$ ، $±۴/۴۹$. برای تکمیل برهان تنها لازم است که این هیجده جواب ممکن را در معادله $۴۹x^۴ - ۵۶x^۲ + ۴ = ۰$ قرار دهیم. با این حال دور نمای این کار به قدری نومید کننده است که ما درصدد آنیم که روشی هوشمندانه برای آن پیدا کنیم. در مثال ۱، ضمناً نشان دادیم که $(۷b^۲ - ۴)^۲ = ۱۲$. حال اگر b گویا می‌بود، آنگاه $۷b^۲ - ۴$ نیز گویا می‌شد [تمرین ۶.۲] و بنابراین معادلهٔ $x^۲ = ۱۲$ جوابی گویا می‌داشت. امّا، تنها جوابهای گویای ممکن $x^۲ - ۱۲ = ۰$ عبارت‌اند از $±۱$ ، $±۲$ ، $±۳$ ، $±۴$ ، $±۶$ ، $±۱۲$ و همهٔ اینها را می‌توان با قرار دادن ذهنی آنها در معادله رد کرد. نتیجه می‌گیریم که $۷b^۲ - ۴$ نمی‌تواند گویا باشد. بنابراین، b نمی‌تواند گویا باشد. □

به عنوان یک موضوع عملی، اغلب اعداد گویا یا همهٔ آنها را که از «قضیهٔ صفرهای گویا» به دست می‌آیند، می‌توان با تقریب کمیت مورد بحث [شاید به کمک یک ماشین حساب] رد کرد. تقریباً بدیهی است که مقادیر مورد بحث در مثالهای ۲ تا ۵ اعداد صحیح نیستند در حالی

که همهٔ جوابهای گویا ممکن است اعداد صحیح باشند. محاسبه با ماشین حساب نشان می‌دهد که عدد b در مثال ۶ تقریباً ۲۷۶۷ر۰ است. نزدیکترین عدد گویا به آن ۲/۷ است که تقریباً برابر ۲۸۵۷ر۰ است.

تمرینها

۱.۲. نشان دهید که $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۲۴}$، و $\sqrt{۳۱}$ اعداد گویا نیستند.

۲.۲. نشان دهید که $۲^{۱/۳}$، $۵^{۱/۷}$، و $(۱۳)^{۱/۴}$ نمایشگر اعداد گویا نیستند.

۳.۲. نشان دهید که $(۲ + \sqrt{۲})^{۱/۲}$ نمایش یک عدد گویا نیست.

۴.۲. نشان دهید که $(۵ - \sqrt{۳})^{۱/۳}$ نمایش یک عدد گویا نیست.

۵.۲. نشان دهید که $[۳ + \sqrt{۲}]^{۲/۳}$ نمایش عدد گویایی نیست.

۶.۲. در رابطه با مثال ۶، بحث کنید که چرا هر وقت b گویا باشد، $۴ - ۷b^۲$ باید گویا باشد.

بخش ۳. مجموعهٔ اعداد حقیقی R

مجموعهٔ Q، احتمالاً، وسیعترین دستگاه اعداد است که واقعاً به راحتی می‌توانید با آن کار کنید. البته هنوز به نکته سنجیهایی نیاز است، ولی یاد گرفته‌اید که از عهدهٔ این کار برآیید. مثلاً، Q صرفاً مجموعهٔ $\{m/n: m , n \in Z , n \neq ۰\}$ نیست. زیرا، ما برخی از زوج کسرهای ظاهراً متفاوت را مساوی تلقی می‌کنیم. برای مثال ۲/۴ و ۳/۶ یک عنصر Q تلقی می‌شوند. ساختن Q به طور دقیق بر مبنای Z که به نوبهٔ خود مبتنی بر N است، مستلزم آن است که مفهوم رده‌های هم ارزی را تعریف کنیم؛ نگاه کنید به [۱۹]. در این کتاب فرض بر آن است که خواننده با Q به عنوان یک دستگاه جبری آشناست و آن را درک می‌کند. با این حال، برای روشن کردن این مطلب، که دقیقاً چه چیزی را باید در مورد Q بدانیم، برخی از ویژگیها و اصل موضوعهای بنیادی آن را ذکر می‌کنیم.

اعمال جبری بنیادی در Q، جمع و ضرب‌اند. با مفروض بودن زوجی از اعداد گویا، مانند a و b، مجموع $a + b$ و حاصل ضرب ab نیز اعداد گویایی را نشان می‌دهند. به علاوه ویژگیهای زیر برقرارند.

۱A. به ازای هر a، b، c، $a + (b + c) = (a + b) + c$.
۲A. به ازای هر a , b، $a + b = b + a$.
۳A. به ازای هر a، $a + 0 = a$.
۴A. به ازای هر a، عضوی مانند $-a$ موجود است به طوری که $a + (-a) = 0$.
۱M. به ازای هر a، b، c، $a(bc) = (ab)c$
۲M. به ازای هر a، b، $ab = ba$.
۳M. به ازای هر a، $a.1 = a$.
۴M. به ازای هر $a \neq 0$، عضوی مانند a^{-1} موجود است به طوری که $aa^{-1} = 1$.
DL. به ازای هر a، b، c، $a(b + c) = ab + ac$.

ویژگیهای ۱A و ۱M قانونهای شرکتپذیری و ویژگیهای ۲A و ۲M قانونهای تعویضپذیری نامیده می‌شوند. ویژگی DL قانون توزیعپذیری است؛ این، نابدیهی‌ترین قانون و قانونی است که «تجزیه به عاملها» و «ضرب جمله به جمله» در جبر را معین می‌کند. دستگاهی که بیش از یک عضو داشته باشد و در این نُه ویژگی صدق کند یک هیأت نامیده می‌شود. ویژگیهای جبری بنیادی Q را می‌توان منحصراً بر پایهٔ این ویژگیهای هیأت ثابت کرد. ما نمی‌خواهیم این مبحث را عمیقاً مطالعه کنیم، امّا ادّعای خود را با اثبات بعضی از ویژگیهای مأنوس در قضیهٔ ۱.۳ زیر تشریح می‌کنیم.

مجموعهٔ Q، همچنین دارای ساختار ترتیبی $\leq$ است که در ویژگیهای زیر صدق می‌کند:

۱O. به ازای a و bی مفروض یا $a \leq b$ یا $b \leq a$.
۲O. اگر $a \leq b$ و $b \leq a$، آنگاه $a = b$.
۳O. اگر $a \leq b$ و $b \leq c$، آنگاه، $a \leq c$.
۴O. اگر $a \leq b$، آنگاه $a + c \leq b + c$.
۵O. اگر $a \leq b$ و $0 \leq c$ ، آنگاه $ac \leq bc$.

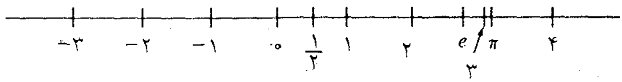
ویژگی ۳O قانون ترایایی نامیده می‌شود. این، ویژگی مشخِّص یک رابطهٔ ترتیبی است. یک هیأت به انضمام یک رابطهٔ ترتیبی که در ویژگیهای ۱O تا ۵O صدق کند یک هیأت مرتب نامیده می‌شود. بسیاری از ویژگیهای جبری و ترتیبی Q را می‌توان برای هر هیأت مرتب ثابت کرد. ما برخی از آنها را در قضیهٔ ۲.۳ی زیر ثابت خواهیم کرد.

دستگاه ریاضی که آنالیز مورد بحث ما در این کتاب بر آن استوار است، مجموعهٔ R از همه اعداد حقیقی خواهد بود. مجموعهٔ R شامل همهٔ اعداد گویا، همه اعداد جبری، π، e و مواردی غیر از آنها خواهد بود. این مجموعه عبارت از مجموعه‌ای خواهد بود که می‌توان آن را به عنوان خط اعداد حقیقی ترسیم کرد؛ به شکل ۱.۳ نگاه کنید. این بدان معنی است که هر عدد حقیقی متناظر با نقطه‌ای بر روی خط اعداد است و هر نقطه بر روی خط اعداد، متناظر با یک عدد حقیقی خواهد بود. به ویژه، برخلاف Q ، R هیچ «رخنه» ای ندارد. همچنین، خواهیم دید که اعداد حقیقی دارای بسط اعشاری‌اند؛ بخشهای ۳.۱۰ و ۱۶ را ببینید. این نکات، کمکی برای توصیف R است. ولی، ما قطعاً R را به‌عنوان یک شیء ریاضی مختصر و مفید تعریف نکرده‌ایم. از نتایج معلوم آنکه می‌توان R را به طور کامل برحسب مجموعهٔ Q از اعداد گویا تعریف کرد؛ در بخش اختیاری ۶، راهی را برای انجام این کار متذکر می‌شویم. امّا، اثبات اینکه چگونه باید اشیایی را که به این طریق تعریف شده‌اند جمع و ضرب کرد و اثبات اینکه مجموعهٔ R، با این عملها در همه ویژگیهای جبری و ترتیبی آشنا که انتظار داریم برای R صادق باشد، صدق می‌کند، کاری طولانی و خسته کننده است. ساختن R به طور مناسب از Q به این طریق و ساختن Q به طور مناسب از N چندین فصل کتاب را اشغال خواهد کرد. این کار با هدف کتاب مغایرت خواهد داشت، که در آن، R را به عنوان یک دستگاه ریاضی می‌پذیریم و برخی از ویژگیهای مهم R و توابع بر R را مطالعه کنیم. با این حال، پسندیده آن است که دقیقاً آن ویژگیهای R را که جزو مفروضات می‌گیریم، معین کنیم.

اعداد حقیقی، یعنی اعضای R را می‌توان با یکدیگر جمع و در یکدیگر ضرب کرد. یعنی، با مفروض بودن دو عدد حقیقی a و b ، مجموع $a + b$ و حاصل ضرب ab نیز اعداد حقیقی‌اند. به علاوه، این اعمال در ویژگیهای هیأت ۱A تا ۴A و ۱M تا ۴M و DL صدق می‌کنند. مجموعهٔ R ساختاری ترتیبی نیز، مانند $\leq$ ، دارد که در ویژگیهای ۱D تا ۵D صدق می‌کند. بنابراین، R، نظیر Q ، یک هیأت مرتب است.

در پایان این بخش، برخی نتایج مربوط به R را که در هر هیأت مرتب معتبر است، به دست

خواهیم آورد. به ویژه این نتایج به همین میزان معتبر خواهد بود در صورتی که توجه خود را به **Q** معطوف کنیم. این تذکرات بر شباهتهای بین **R** و **Q** تأکید می‌کنند. برای **Q** هنوز خاطر نشان نکرده‌ایم که چگونه می‌توان **R** را به عنوان یک شیء ریاضی از **Q** تمیز داد، اگر چه بیان کرده‌ایم که **R** هیچ «رخنه‌ای» ندارد. ما این نکته را در بخش آتی دقیقتر بیان می‌کنیم و سپس، یک اصل موضوع «رخنه پر کن» که سرانجام **R** را از **Q** متمایز خواهد کرد، ارائه می‌کنیم.



شکل ۳.۱

۳.۱ قضیه. احکام زیر پیامدهایی از ویژگیهای هیأت‌اند:

(i) $a + c = b + c$ مستلزم آن است که $a = b$؛

(ii) به ازای هر a، $a \,.\, ۰ = ۰$؛

(iii) به ازای هر a و b، $(-a)b = -ab = a(-b)$؛

(iv) به ازای هر a و b، $(-a)(-b) = ab$؛

(v) $ac = bc$ و $c \neq ۰$ مستلزم آن است که $a = b$؛

(vi) $ab = ۰$ مستلزم آن است که $a = ۰$ یا $b = ۰$؛

که در آن، a، b، c عضو **R** اند.

برهان.

(i) از $a + c = b + c$ لازم می‌آید که $a + c + (-c) = (b + c) + (-c)$، و بنابراین طبق ۱A داریم $a + [c + (-c)] = b + [c + (-c)]$. بنابر ۴A، نتیجه می‌شود که $a + ۰ = b + ۰$، و بنابراین طبق ۳A، نتیجه می‌شود که $a = b$.

(ii) با استفاده از ۳A و DL به دست می‌آوریم $a \,.\, ۰ = a \,.\, (۰ + ۰) = a \,.\, ۰ + a \,.\, ۰$ و بنابراین $۰ + a \,.\, ۰ = a \,.\, ۰ + a \,.\, ۰$. از (i) نتیجه می‌گیریم که $a \,.\, ۰ = ۰$.

(iii) چون $a + (-a) = ۰$، داریم $ab + (-ab) = ۰ = ۰.b = [a+(-a)].b = ab + (-a)b$ از (i) به دست می‌آوریم $(-a)b = -(ab)$.

(iv) و (v) به عنوان تمرین ۳.۳ واگذار می‌شوند.

(vi) اگر $ab = \circ$ و $b \neq \circ$، آنگاه $a = a.\text{۱} = a(bb^{-\text{۱}}) = (ab).b^{-\text{۱}} = \circ.b^{-\text{۱}} = b^{-\text{۱}}.\circ = \circ$.

□

۲.۳ قضیه. احکام زیر پیامدهای ویژگیهای یک هیأت مرتب‌اند.

(i) اگر $a \leq b$، آنگاه $-b \leq -a$؛

(ii) اگر $a \leq b$ و $\circ \leq c$، آنگاه $ac \leq bc$؛

(iii) اگر $a \leq \circ$ و $b \leq \circ$ آنگاه $\circ \leq ab$؛

(iv) به ازای هر a، $\circ \leq a^{\text{۲}}$

(v) $\circ < \text{۱}$؛

(vi) اگر $\circ < a$، آنگاه $\circ < a^{-\text{۱}}$؛

(vii) اگر $\circ < a < b$، آنگاه $\circ < b^{-\text{۱}} < a^{-\text{۱}}$؛

$a, b, c \in \mathbf{R}$.

توجه کنید که $a < b$ به معنی آن است که $a \leq b$ و $a \neq b$.

برهان.

(i) فرض کنید که $a \leq b$. بنابر ۴O که در مورد $c = (-a) + (-b)$ به کار رفت، داریم $a + [(-a) + (-b)] \leq b + [(-a) + (-b)]$. از اینجا نتیجه می‌شود که $-b \leq -a$.

(ii) اگر $a \leq b$ و $\circ \leq c$ آنگاه بنابر (i)، $-c \leq \circ$. اینک، بنابر ۵O، داریم $b(-c) \leq a(-c)$؛ یعنی، $-bc \leq -ac$. مجدداً بنابر (i) مشاهده می‌شود که $ac \leq bc$.

(iii) اگر در ویژگی ۵O قرار دهیم $a = \circ$، به دست می‌آوریم: $b \leq \circ$ و $c \leq \circ$ که مستلزم آن است که $\circ \leq bc$. بجز از نظر نمادها، این دقیقاً همان حکم (iii) است.

(iv) به ازای هر a، بنابر ۱O، یا $a \leq \circ$ یا $\circ \leq a$. اگر $a \leq \circ$، آنگاه بنابر (iii)، $\circ \leq a^{\text{۲}}$. اگر $\circ \leq a$، آنگاه، بنابر (i)، داریم $-a \leq \circ$. بنابراین، $\circ \leq (-a)^{\text{۲}}$؛ یعنی، $\circ \leq a^{\text{۲}}$.

(v) را به عنوان تمرین ۴.۳ واگذار می‌کنیم.

(vi) فرض کنید که $\circ < a$ ولی $\circ < a^{-\text{۱}}$ برقرار نباشد. در این صورت، باید داشته باشیم $a^{-\text{۱}} < \circ$ و $\circ \leq -a^{-\text{۱}}$. اینک، بنابر (iii)، $\circ \leq a(-a^{-\text{۱}}) = -\text{۱}$ و لذا $\text{۱} \leq \circ$، و این

برخلاف (v) است.

(vii) این حالت را به عنوان تمرین ۴.۳ واگذار می‌کنیم. □

مفهوم مهم دیگری که باید با آن آشنا باشیم مفهوم قدر مطلق است.

۳.۳ تعریف. تعریف می‌کنیم

$|a| = a$ در صورتی که $a \geq 0$، $|a| = -a$ در صورتی که $a < 0$.

$|a|$، قدر مطلق a نامیده می‌شود.

از نظر شهودی، قدر مطلق a معرف فاصله بین 0 و a است. ولی در واقع، مفهوم «فاصله» را برحسب قدر مطلق تعریف خواهیم کرد که به نوبهٔ خود برحسب رابطهٔ ترتیبی تعریف شده‌است.

۴.۳ تعریف. برای اعداد a و b عبارت $\operatorname{dist}(a, b) = |a - b|$ را تعریف می‌کنیم. $\operatorname{dist}(a, b)$ فاصله بین a و b را نمایش می‌دهد.

خواص بنیادی قدر مطلق در قضیهٔ زیر ارائه شده است.

۵.۳ قضیه.

(i) برای هر $a \in \mathbf{R}$، $|a| \geq 0$.

(ii) برای هر a و b در $\mathbf{R}$، $|ab| = |a| . |b|$.

(iii) برای هر a و b در $\mathbf{R}$، $|a + b| \leq |a| + |b|$.

برهان. با توجه به تعریف، (i) بدیهی است. [کلمه «بدیهی» به صورتی که در اینجا به کار رفته دلالت بر آن دارد که خواننده باید قادر باشد که به سرعت درستی نتیجه را تشخیص دهد. مطمئناً، اگر $a \geq 0$ آنگاه $|a| = a \geq 0$، در حالی که $a < 0$ مستلزم آن است که $|a| = -a > 0$. ما از عبارتهایی مانند «بدیهی است»، «آشکار است» به جای استدلالهای بسیار ساده استفاده خواهیم کرد. اما، از این اصطلاحات برای مبهم ساختن نکات ظریف استفاده نخواهیم کرد.]

(ii) در اینجا چهار حالت ساده وجود دارد. اگر $a \geq 0$ و $b \geq 0$، آنگاه $ab \geq 0$، و بنابراین، $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$. اگر $a \leq 0$ و $b \leq 0$، آنگاه $-a \geq 0$ و $-b \geq 0$ و $(-a)(-b) \geq 0$. در این صورت، $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a| \cdot |b|$. اگر $a \geq 0$ و $b \leq 0$، آنگاه $-b \geq 0$ و $a(-b) \geq 0$. بنابراین $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a| \cdot |b|$. اگر $a \leq 0$ و $b \geq 0$، آنگاه $-a \geq 0$ و $(-a)b \geq 0$. بنابراین، $|ab| = -ab = (-a)b = |a| \cdot |b|$.

(iii) نابرابریهای $-|a| \leq a \leq |a|$ بدیهی هستند. زیرا، یا $a = |a|$ یا $a = -|a|$. به طریق مشابه $-|b| \leq b \leq |b|$. اینک، با چهار بار استفاده از ۴O، خواهیم داشت

$$-|a| + (-|b|) \leq -|a| + b \leq a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

به طوری که

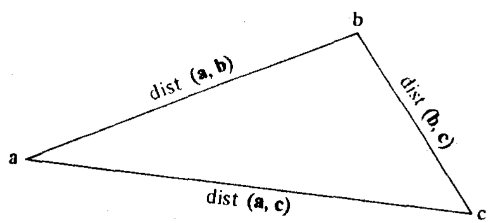
$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

این بدان معنی است که $a + b \leq |a| + |b|$ و همچنین اینکه $-(a + b) \leq |a| + |b|$. چون $|a + b|$ یا برابر $a + b$ است و یا برابر $-(a + b)$ است، نتیجه می‌گیریم که $|a + b| \leq |a| + |b|$. □

۶.۳ نتیجه. به ازای هر a، b، c در $\mathbf{R}$، $\operatorname{dist}(a, c) \leq \operatorname{dist}(a, b) + \operatorname{dist}(b, c)$.

برهان. می‌توانیم نابرابری (iii) از قضیهٔ ۵.۳ را در مورد $a - b$ و $b - c$ به کار ببریم، نتیجه می‌شود که $|(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|$ یا

$$\operatorname{dist}(a, c) = |a - c| \leq |a - b| + |b - c| = \operatorname{dist}(a, b) + \operatorname{dist}(b, c). \qquad \square$$



شکل ۲.۳

نابرابری نتیجهٔ ۶.۳، رابطهٔ نزدیکی با نابرابری‌یی دربارهٔ نقاط a ، b ، c در صفحه دارد و نابرابری اخیر را می‌توان به عنوان حکمی دربارهٔ مثلثها تعبیر نمود. طول هر ضلع مثلث کوچکتر از مجموع طولهای دو ضلع دیگر یا مساوی آن است. نگاه کنید به شکل ۲.۳. به این دلیل، نابرابری نتیجه ۶.۳ و خویشاوند نزدیک آن (iii) در ۵.۳ را اغلب نابرابری مثلث می‌نامند.

۷.۳ نابرابری مثلث. به ازای هر a و b، $|a + b| \leq |a| + |b|$.

صورت دیگری از نابرابری مثلث، در تمرین ۵.۳ (ب)، ارائه شده است.

تمرینها

۱.۳. (الف) کدام یک از ویژگیهای $1A - 4A$ ، $1M - 4M$ ، DL ، $1O - 4O$ در مورد N صادق نیست؟

(ب) کدام یک از این ویژگیها در مورد Z صادق نیست؟

۲.۳. (الف) قانون تعویضپذیری $2A$ در برهان (ii) در قضیهٔ ۱.۳ به کار رفته است. در کجا؟

(ب) قانون تعویضپذیری $2A$ نیز در برهان (iii) در قضیهٔ ۱.۳ به کار رفته است. در کجا؟

۳.۳. احکام (iv) و (v) قضیهٔ ۱.۳ را ثابت کنید.

۴.۳. احکام (v) و (vii) قضیهٔ ۲.۳ را ثابت کنید.

۵.۳. (الف) ثابت کنید که $|b| \leq a$ اگر و فقط اگر $-a \leq b \leq a$.

(ب) ثابت کنید که به ازای هر a و b در $\mathbf{R}$ ، $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

۶.۳. (الف) به ازای هر a ، b ، c در $\mathbf{R}$، ثابت کنید که $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.

راهنمایی: نابرابری مثلث را دوبار به کار ببرید. هشت حالت را بررسی نکنید.

(ب) با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای n عدد a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ،

$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

۷.۳. (الف) نشان دهید که $|b| < a$ اگر و تنها اگر $-a < b < a$.

(ب) نشان دهید که $|a - b| < c$ اگر و تنها اگر $b - c < a < b + c$.

(پ) نشان دهید که $|a - b| \le c$ اگر و تنها اگر $b - c \le a \le b + c$.

۸.۳. فرض کنید a و b عضو $\mathbf{R}$ باشند. نشان دهید که به ازای هر $b_1 > b$ اگر $a \le b_1$، آنگاه $a \le b$.

بخش ٤. اصل موضوع کمال

در این بخش، اصل موضوع کمال را برای $\mathbf{R}$ ارائه می‌دهیم. این همان اصل موضوعی است که ما را از بدون «رخنه» بودن $\mathbf{R}$ مطمئن می‌کند. این اصل پیامدهای ژرفی دارد و تقریباً هر نتیجهٔ مهم این کتاب بر آن متکی است. اگر عالم سخن اعداد را به مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ از اعداد گویا محدود کرده‌بودیم، بسیاری از قضایای این کتاب نادرست می‌بودند.

۱.۴ تعریف. فرض کنید S یک زیر مجموعهٔ ناتهی $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) اگر S شامل بزرگترین عضوی مانند s_0 باشد [یعنی، s_0 عضو S باشد و به ازای هر $s \in S$ $s \le s_0$] آنگاه s_0 را ماکسیمم S می‌نامیم و می‌نویسیم $s_0 = \max S$.

(ب) اگر S شامل کوچکترین عضوی باشد، آنگاه کوچکترین عضو را مینیمم S می‌نامیم و آن را به صورت $\min S$ می‌نویسیم.

مثال ۱.

(الف) هر زیر مجموعهٔ متناهی ناتهی $\mathbf{R}$ دارای یک ماکسیمم و یک مینیمم است. مثلاً،

$$\max\{1, 2, 3, 4, 5\} = 5, \quad \min\{1, 2, 3, 4, 5\} = 1,$$

$$\max\{0, \pi, -7, e, 3, 4/3\} = \pi, \quad \min\{0, \pi, -7, e, 3, 4/3\} = -7,$$

$$\max\{n \in \mathbf{Z} : -4 < n \le 100\} = 100$$

$$\min\{n \in \mathbf{Z} : -4 < n \le 100\} = -3.$$

(ب) اعداد حقیقی a و b را با $a < b$ در نظر بگیرید. نماد زیر در سرتاسر کتاب به کار خواهد رفت:

$$[a\ ,\ b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}\ ,\ (a\ ,\ b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$$
$$[a\ ,\ b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}\ ,\ (a\ ,b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$$

$[a\ ,\ b]$ یک بازهٔ بسته نامیده می‌شود، $(a\ ,\ b)$ یک بازهٔ باز نام دارد، در حالی که $[a\ ,\ b)$ و $(a\ ,\ b]$ بازهای نیم باز یا شبه باز نامیده می‌شوند. مشاهده می‌کنید که $\max[a\ ,\ b] = b$ و $\min[a\ ,\ b]=a$. مجموعهٔ $(a\ ,\ b)$ ماکسیمم و مینیمم ندارد. زیرا نقاط انتهایی آن؛ a و b، به مجموعه تعلق ندارند. مجموعهٔ $[a\ ,\ b)$ ماکسیمم ندارد. امّا، a مینیمم آن است.

(پ) مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ ماکسیمم یا مینیمم ندارند. مجموعهٔ $\mathbf{N}$ ماکسیم ندارد، امّا، $\min\mathbf{N} = ۱$.

(ت) مجموعهٔ $\{r \in \mathbf{Q} : ۰ \leq r \leq \sqrt{۲}\}$ مینیممی دارد که همان ۰ است، امّا ماکسیمم ندارد. به این دلیل که $\sqrt{۲}$ به مجموعهٔ تعلق ندارد، ولی اعداد گویایی در مجموعه موجودند که به قدر دلخواه به $\sqrt{۲}$ نزدیک‌اند.

(ث) مجموعهٔ $\{n^{(-۱)^n} : n \in \mathbf{N}\}$ را در نظر بگیرید. این، کوتاه نوشته‌ای برای مجموعهٔ زیر است:

$$\{۱^{-۱}\ ,\ ۲\ ,\ ۳^{-۱}\ ,\ ۴\ ,\ ۵^{-۱}\ ,\ ۶\ ,\ ۷^{-۱}\ ,\ ...\} = \{۱\ ,\ ۲\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ ۴\ ,\ \frac{۱}{۵}\ ,\ ۶\ ,\ \frac{۱}{۷}\ ,\ ...\}\ .$$

این مجموعه ماکسیمم و مینیمم ندارد.

۲.۴ تعریف. فرض کنید که S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) اگر عددی حقیقی مانند M، به ازای هر $s \in S$، در $s \leq M$ صدق کند، آنگاه M یک کران بالای S نامیده می‌شود و گفته می‌شود که مجموعه S از بالا کراندار است.

(ب) اگر عددی حقیقی مانند m، به ازای هر $s \in S$، در $m \leq s$ صدق کند، آنگاه m یک کران پایین S نامیده می‌شود و گوییم که مجموعه S از پایین کراندار است.

(پ) مجموعهٔ S کراندار نامیده می‌شود هرگاه از بالا و پایین کراندار باشد. بنابراین، S کراندار است اگر و تنها اگر اعدادی حقیقی مانند m و M موجود باشند به طوری که $S \subseteq [m\ ,\ M]$.

مثال ۲.

(الف) ماکسیمم یک مجموعه همواره یک کران بالایی برای آن مجموعه است. همچنین، مینیمم یک مجموعه همواره یک کران پایین برای آن مجموعه است.

(ب) a و b را در $\mathbf{R}$، $a < b$، در نظر بگیرید. عدد b کران بالایی برای هر یک از مجموعه‌های $[a, b]$، (a, b)، $[a, b)$، $(a, b]$ است. هر عدد بزرگتر از b نیز کران بالا برای هر یک از این مجموعه‌هاست. ولی، b کمترین یا کوچکترین کران بالاست.

(پ) هیچیک از مجموعه‌های $\mathbf{Z}$، $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{N}$ از بالا کراندار نیستند. مجموعهٔ $\mathbf{N}$ از پایین کراندار است. ۱ یک کران پایین $\mathbf{N}$ است، و همچنین، هر عدد کوچکتر از ۱ یک کران پایین است. در حقیقت، ۱ بیشترین یا بزرگترین کران پایین است.

(ت) هر عدد حقیقی نامثبت یک کران پایین برای $\{r \in \mathbf{Q} : 0 \le r \le \sqrt{2}\}$ است و ۰ بزرگترین کران پایین این مجموعه است. کوچکترین کران بالای آن $\sqrt{2}$ است.

(ث) مجموعهٔ $\{n^{(-1)^n} : n \in \mathbf{N}\}$ از بالا کراندار نیست. در بین کرانهای پایین متعدد آن، ۰ بزرگترین کران پایین است.

اینک، دو مفهومی را که قبلاً در مثال ۲ مطرح شده‌اند رسمیت می‌دهیم.

۳.۴ تعریف. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) اگر S از بالا کراندار باشد، و دارای کوچکترین کران بالایی باشد، آنگاه آن را سوپرمم S خواهیم نامید و آن را با $\sup S$ نشان خواهیم داد.

(ب) اگر S از پایین کراندار باشد و S دارای یک بزرگترین کران پایین باشد، آنگاه آن را اینفیمم S خواهیم نامید و با $\inf S$ نشان خواهیم داد.

توجه کنید که، برخلاف $\max S$ و $\min S$، لازم نیست که $\sup S$ و $\inf S$ به S تعلق داشته باشند. همچنین، توجه کنید که یک مجموعه حداکثر می‌تواند دارای یک ماکسیمم، مینیمم، سوپرمم، و اینفیمم باشد. گاهی عبارتهای «کوچکترین کران بالا» و «بزرگترین کران پایین» به جای کلمه‌های لاتین «سوپرمم» و «اینفیمم» به کار برده می‌شوند، و گاهی $\sup S$ به صورت $\text{lub}S$ نوشته می‌شود و $\inf S$ به صورت $\text{glb}S$ نوشته می‌شود. ما به دلیل زیر، اصطلاحات لاتین را برگزیده‌ایم. ما مفاهیم «lim sup» و «lim inf» را مورد مطالعه قرار خواهیم داد و این نمادها کاملاً استانده‌اند؛ به عنوان مثال، کسی نمی‌نویسد «lim lub».

مشاهده کنید که اگر S از بالا کراندار باشد، آنگاه $M = \sup S$ اگر و تنها اگر (i) به ازای هر

$s \in S$، $s \le M$؛ و (ii) هرگاه $M_1 < M$، عضوی مانند $s_1 \in S$ موجود است که $s_1 > M_1$.

مثال ۳.

(الف) اگر مجموعه‌ای مانند S دارای یک ماکسیمم باشد، آنگاه $\max S = \sup S$. تذکر مشابهی در مورد مجموعه‌هایی که مینیمم دارند صادق است.

(ب) اگر $a , b \in \mathbf{R}$ و $a < b$، آنگاه

$$\sup[a , b] = \sup(a , b) = \sup[a , b) = \sup(a , b] = b.$$

(پ) همچنان که در مثال ۲ متذکر شدیم، داریم $\inf \mathbf{N} = ۱$.

(ت) اگر $A = \{r \in \mathbf{Q} : ۰ \le r \le \sqrt{۲}\}$، آنگاه $\sup A = \sqrt{۲}$ و $\inf A = ۰$.

(ص) داریم $\inf\{n^{(-۱)^n} : n \in \mathbf{N}\} = ۰$.

توجه کنید که در مثالهای ۲ و ۳، هر مجموعه S که از بالا کراندار باشد، دارای کوچکترین کران بالایی است؛ یعنی، supS موجود است. این امر تصادفی نیست. در غیر این صورت، رخنه‌ای بین مجموعه S و مجموعهٔ کرانهای بالای آن موجود می‌بود.

۴.۴ ***اصل موضوع کمال.*** هر زیر مجموعهٔ ناتهی مانند S از **R** که از بالا کراندار باشد دارای یک کوچکترین کران بالا است. به عبارت دیگر، supS موجود و عددی حقیقی است.

اصل موضوع کمال برای **Q** حاکی از آن است که هر زیر مجموعهٔ ناتهی از **Q**، که به وسیله عددی گویا از بالا کراندار است، دارای یک کوچکترین کران بالاست که عددی گویاست. مجموعه $A = \{r \in \mathbf{Q} : ۰ \le r \le \sqrt{۲}\}$ مجموعه‌ای از اعداد گویاست، و به وسیله عددی گویا [مثلاً، ۳/۲] کراندار است، امّا A هیچ گاه دارای کوچکترین کران بالایی که عدد گویایی باشد، نیست. بنابراین، اصل موضوع کمال برای**Q**، برقرار نیست! ضمناً مجموعهٔ A را می‌توان به طور کامل برحسب اعداد گویا بیان کرد: $A = \{r \in \mathbf{Q} : r^۲ \le ۲ , ۰ \le r\}$. اصل موضوع کمال برای مجموعه‌های از پایین کراندار محصول مستقیم اصل فوق است.

۵.۴ ***نتیجه.*** هر زیر مجموعهٔ ناتهی مانند S از **R** که از پایین کراندار باشد دارای یک بزرگترین کران پایین ،

$\inf S$، است.

برهان. فرض کنید $-S$ مجموعهٔ $\{-s : s \in S\}$ باشد. $-S$ مرکب از عناصر S با علامت منفی است. چون S از پایین کراندار است، mای در $\mathbf{R}$ موجود است به طوری که به ازای هر $s \in S$، $m \le s$. این مستلزم آن است که به ازای هر $s \in S$، $-s \le -m$. بنابراین، به ازای همه uها در مجموعه $-S$، $u \le -m$. در نتیجه، $-S$ از بالا، به وسیله $-m$، کراندار است. اصل موضوع کمال ۴.۴، برای $-S$، صادق است. بنابراین، $\sup(-S)$ موجود است. شکل ۱.۴، این فکر را القا می‌کند که ثابت کنیم $\inf S = -\sup(-S)$.

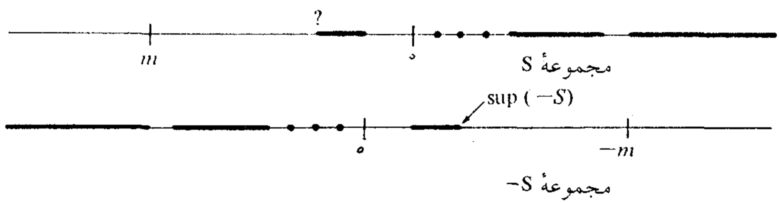
فرض کنید $s_\circ = \sup(-S)$؛ باید ثابت کنیم

(۱) به ازای هر $s \in S$، $-s_\circ \le s$،

و

(۲) به ازای هر $s \in S$ اگر $t \le s$، آنگاه $t \le -s_\circ$

نابرابری (۱) نشان می‌دهد که $-s_\circ$ یک کران پایین S است. در صورتی که (۲) نشان می‌دهد که $-s_\circ$ بزرگترین کران پایین آن است؛ یعنی، $-s_\circ = \inf S$. ما برهانهای (۱) و (۲) را، به عنوان تمرین ۹.۴ واگذار می‌کنیم. □



شکل ۱.۴

مفید است بدانیم که:

(*) اگر $a > \circ$، آنگاه به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، $\frac{1}{n} < a$،

و

(**) اگر $b > \circ$، آنگاه به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، $n > b$.

این احکام، آن طور که از ظاهر آنها بر می‌آید، بدیهی هستند. در حقیقت، میدانهای مرتبی موجودند که این ویژگیها را ندارند. به عبارت دیگر، یک دستگاه ریاضی موجود است که همه

ویژگیهای ۱A – ۴A، ۱M – ۴M، DL و ۱O – ۵O در بخش ۳ در مورد آنها صادق‌اند و با این حال، اعضایی مانند $a > 0$، $b > 0$ در آنها موجودند، که به ازای هر n، $a < 1/n$ و $n < b$. از سوی دیگر، چنین اعضای عجیب و غریبی نمی‌توانند در **R** یا **Q** موجود باشند. این موضوع را در زیر ثابت می‌کنیم؛ با توجه به تذکرات پیشین، باید انتظار داشته باشیم که از اصل موضوع کمال استفاده کنیم.

۷.۴ *خاصیت ارشمیدسی.* اگر $a > 0$ و $b > 0$، آنگاه به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، داریم $na > b$.

این حکم به ما می‌گوید که حتی اگر a عددی بسیار کوچک و b عددی بسیار بزرگ باشد، آنگاه مضرب صحیحی از a از b بیشتر خواهد شد، یا با نقل قول از [۲]، اگر وقت کافی داشته باشیم، می‌توانیم استخری را با یک قاشق کوچک خالی کنیم. [توجه کنید که اگر قرار دهیم $b = 1$، حکم (*) به دست می‌آید و اگر قرار دهیم $a = 1$ حکم (**) را به دست می‌آوریم.]

برهان. فرض کنید خاصیت ارشمیدسی درست نباشد. در این صورت، اعدادی مانند $a > 0$ و $b > 0$ موجودند به طوری که به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $na \leq b$. به ویژه، b یک کران بالا برای مجموعهٔ $S = \{na : n \in \mathbf{N}\}$ است. فرض کنید $s_0 = \sup S$؛ اینجاست که از اصل موضوع کمال استفاده می‌کنیم. چون $a > 0$، داریم $s_0 < s_0 + a$، بنابراین، $s_0 - a < s_0$. [به طور دقیق نابرابریهای $s_0 \leq s_0 + a$ و $s_0 - a \leq s_0$ را از ویژگی ۴O، و این حقیقت که $a + (-a) = 0$، به دست می‌آوریم. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که $s_0 - a < s_0$. زیرا، بنابر قضیه ۱.۳ (i)، $s_0 - a = s_0$ مستلزم آن است که $a = 0$.] چون s_0 کوچکترین کران بالای S است، $s_0 - a$ نمی‌تواند یک کران بالا برای S باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که به ازای عددی مانند n_0، $n_0 \in \mathbf{N}$، $s_0 - a < n_0 a$. این مستلزم آن است که $s_0 < (n_0 + 1)a$. چون $(n_0 + 1)a$ در S است، s_0 یک کران بالا برای S نیست و ما به تناقض رسیده‌ایم. فرض ما که خاصیت ارشمیدسی نادرست است، بایستی خطا باشد. □

اینک نتیجهٔ دیگری را ارائه می‌دهیم که با توجه به تجربه‌ای که از خط اعداد حقیقی داریم، بدیهی به نظر می‌آید. امّا، نمی‌توان آن را برای هر میدان مرتب دلخواهی ثابت کرد.

۷.۴ چگال بودن Q. ۱ اگر $a , b \in \mathbf{R}$ و $a < b$ آنگاه عددی گویا مانند $r \in \mathbf{R}$ موجود است به طوری که $a < r < b$.

برهان. لازم است نشان دهیم که به ازای اعداد صحیحی مانند m و n با $n > 0$، داریم $a < \frac{m}{n} < b$. بنابراین، لازم است که

$$an < m < bn. \tag{۱}$$

چون $b - a > 0$، خاصیت ارشمیدسی نشان می‌دهد که عددی مانند n، $n \in \mathbf{N}$ موجود است به طوری که $n(b - a) > 1$. چون $bn - an > 1$، آشکار است که عدد صحیحی مانند m بین an و bn موجود است به طوری که (۱) برقرار است. با این حال، برهان اینکه چنان mای موجود است کمی ظرافت می‌خواهد. به صورت زیر استدلال می‌کنیم. مجدداً، بنابر خاصیت ارشمیدسی، عددی مانند k، $k > \max\{|an| , |bn|\}$ موجود است به طوری که

$$-k < an < bn < k .$$

در این صورت، مجموعهٔ $\{j \in \mathbf{Z} : -k < j \leq k , an < j\}$ متناهی و ناتهی است و می‌توانیم قرار دهیم

$$m = \min \{j \in \mathbf{Z} : -k < j \in k , an < j\}.$$

در این صورت، $an < m$. امّا، $m - 1 \leq an$. همچنین، داریم

$$m = (m - 1) + 1 \leq an + 1 < an + (bn - an) = bn ,$$

و لذا، (۱) برقرار است.

تمرینها

۱.۴. برای هر یک از مجموعه‌های زیر که از بالا کراندارند، سه کران بالا را فهرست کنید. در غیر این صورت، بنویسید «از بالا کراندار نیست».

(الف) $[0 , 1]$ (ب) $(0 , 1)$

(پ) $\{2 , 7\}$ (ت) $\{\pi , e\}$

(ث) $\{۱/n : n \in \mathbf{N}\}$

(ج) $\{۰\}$

(چ) $[۰ , ۱] \cup [۲ , ۳]$

(ح) $\cup_{n=۱}^{\infty} [۲n , ۲n + ۱]$

(خ) $\cap_{n=۱}^{\infty}[-۱/n , ۱ + ۱/n]$

(د) $\{۱ - ۱/۳^n : n \in \mathbf{N}\}$

(ذ) $\{n + (-۱)^n/n : n \in \mathbf{N}\}$

(ر) $\{r \in \mathbf{Q} : r < ۲\}$

(ز) $\{r \in \mathbf{Q} : r^۲ < ۴\}$

(س) $\{r \in \mathbf{Q} : r^۲ < ۲\}$

(ش) $\{x \in \mathbf{R} : x < ۰\}$

(ص) $\{۱ , \pi/۳ , \pi^۲ , ۱۰\}$

(ض) $\{۰ , ۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱۶\}$

(ط) $\cap_{n=۱}^{\infty}(۱ - ۱/n , ۱ + ۱/n)$

(ظ) $\{\frac{۱}{n}$: n اول است و $n \in \mathbf{N}\}$

(ع) $\{x \in \mathbf{R} : x^۳ < ۸\}$

(غ) $\{\cos(n\pi/۳) : n \in \mathbf{N}\}$

(ف) $\{x^۲ : x \in \mathbf{R}\}$

(ق) $\{\sin (n\pi/۳) : n \in \mathbf{N}\}$

۲.۴. تمرین ۱.۴ را برای کرانهای پایین تکرار کنید.

۳.۴. در هر یک از مجموعه‌های تمرین ۱.۴ ، سوپرمم آن را در صورت وجود، ارائه دهید. در غیر این صورت، بنویسید «بدون sup».

۴.۴. تمرین ۳.۴ را برای اینفیمم تکرار کنید.

۵.۴. فرض کنید که S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{R}$ باشد که از بالا کراندار است. ثابت کنید که اگر supS به S تعلق داشته باشد، آنگاه $\sup S = \operatorname{Max} S$. راهنمایی: برهان شما باید خیلی کوتاه باشد.

۶.۴. فرض کنید S یک زیر مجموعهٔ کراندار ناتهی از $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) ثابت کنید که $\inf S \le \sup S$. راهنمایی: این نتیجه تقریباً بدیهی است؛ برهان شما باید کوتاه باشد.

(ب) اگر $\inf S = \sup S$ ، دربارهٔ S چه می‌توان گفت؟

۷.۴. فرض کنید S و T زیر مجموعه‌های کراندار ناتهی $\mathbf{R}$ باشند.

(الف) ثابت کنید اگر $S \subseteq T$ ، آنگاه $\inf T \le \inf S \le \sup S \le \sup T$.

(ب) ثابت کنید که $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S , \sup T\}$. توجه: در قسمت (ب) فرض نکنید که $S \subseteq T$.

۸.۴. فرض کنید S و T زیر مجموعه‌های ناتهی از $\mathbf{R}$ با خاصیتهای زیر باشند:

به ازای هر $s \in S$ و $t \in T$ ، $s \le t$.

(الف) بررسی کنید که S از بالا و T از پایین کراندار است.

(ب) ثابت کنید که $\sup S \le \inf T$.

(پ) مثالی از مجموعه‌هایی مانند S و T ارائه دهید به طوری که $S \cap T$ ناتهی باشد.

(ت) مثالی از مجموعه‌هایی مانند S و T ارائه دهید که در آن، $\sup S = \inf T$ و $S \cap T$ مجموعهٔ تهی باشد.

۹.۴. در نتیجه ۵.۴، با اثبات (۱) و (۲)، برهان این نتیجه را که $\inf S = -\sup(-S)$، کامل کنید.

۱۰.۴. ثابت کنید که اگر $a > ۰$، آنگاه عددی مانند n، $n \in \mathbf{N}$، موجود است به طوری که $\frac{۱}{n} < a < n$.

۱۱.۴. اعداد a و b در $\mathbf{R}$ را که $a < b$ در نظر بگیرید. از چگال بودن $\mathbf{Q}$ استفاده کرده ثابت کنید که به تعداد نامتناهی عدد گویا بین a و b موجودند.

۱۲.۴. فرض کنید $\mathbf{I}$ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی باشد که گویا نیستند؛ اعضای $\mathbf{I}$ را اعداد گنگ می‌نامند. ثابت کنید که اگر $a < b$، آنگاه عددی مانند $x \in \mathbf{I}$ موجود است به طوری که $a < x < b$. راهنمایی: ابتدا نشان دهید که $\{r + \sqrt{۲} : r \in \mathbf{Q}\} \subseteq \mathbf{I}$.

۱۳.۴. ثابت کنید که به ازای اعداد حقیقی a، b، و c احکام زیر هم ارزند [هم ارزی به این معنی است که یا همه خاصیتها برقرارند یا هیچیک از خاصیتها برقرار نیستند.]

(i) $|a - b| < c$،

(ii) $b - c < a < b + c$،

(iii) $a \in (b - c, b + c)$.

راهنمایی: تمرین ۷.۳ (ب) را به کار ببرید.

۱۴.۴. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های کراندار ناتهی $\mathbf{R}$ باشند و فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ مجموعهایی به صورت $a + b$ باشد که در آن $a \in A$ و $b \in B$.

(الف) ثابت کنید $\sup S = \sup A + \sup B$.

(ب) ثابت کنید $\inf S = \inf A + \inf B$.

۱۵.۴. فرض کنید $a, b \in \mathbf{R}$. ثابت کنید که اگر به ازای هر n، $n \in \mathbf{N}$، $a < b + ۱/n$، آنگاه $a \le b$. با تمرین ۸.۳ مقایسه کنید.

۱۶.۴. نشان دهید که به ازای هر a، $a \in \mathbf{R}$، $\sup\{r \in \mathbf{Q} : r < a\} = a$.

بخش ۵. نمادهای $+\infty$ و $-\infty$

نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ بی‌اندازه مفیدند گرچه اعداد حقیقی نیستند. ما اغلب به جای $+\infty$ صرفاً خواهیم نوشت ∞. ما $+\infty$ و $-\infty$ را به مجموعهٔ $\mathbf{R}$ الحاق خواهیم کرد و رابطهٔ ترتیبی در آن را به مجموعهٔ $\mathbf{R} \cup \{-\infty , +\infty\}$ گسترش خواهیم داد. به طور صریح می‌پذیریم که به ازای هر $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty , +\infty\}$، داریم $-\infty \le a \le +\infty$. این کار مجموعهٔ $\mathbf{R} \cup \{-\infty , +\infty\}$ را با رابطه‌ای ترتیبی مجهز می‌کند که در خاصیتهای ۱O ، ۲O و ۳O بخش ۳ صدق می‌کند. تأکید می‌کنیم که مجموعهٔ $\mathbf{R} \cup \{-\infty , +\infty\}$ را با هیچ ساختار جبری تجهیز نخواهیم کرد. ممکن است از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ استفاده کنیم، امّا همواره باید به خاطر داشته باشیم که این نمادها نمایش اعداد حقیقی نیستند. قضیه یا تمرینی را که برای اعداد حقیقی بیان می‌شود، در مورد نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ به کار نبرید.

بهتر است از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ استفاده کنیم و نمادگذاری بنا نهاده شده در مثال ۱ (پ) بخش ۴ را برای بازه‌های بیکران گسترش دهیم. به ازای اعداد حقیقی a و b از $\mathbf{R}$ نمادگذاری زیر را می‌پذیریم.

$$[a , \infty) = \{x \in \mathbf{R} : a \le x\} , (a , \infty) = \{x \in \mathbf{R} : a < x\}$$

$$(-\infty , b] = \{x \in \mathbf{R} : x \le b\} , (-\infty , b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\} .$$

همچنین گاهی به جای $\mathbf{R}$ می‌نویسیم $(-\infty , +\infty)$. $[a , \infty)$ و $(-\infty , b]$ بازه‌های بسته یا بازه‌های بستهٔ بیکران نامیده می‌شوند، در حالی که (a , ∞) و $(-\infty , b)$ بازه‌های باز یا بازه‌های باز بیکران نامیده می‌شوند.

زیر مجموعه‌ای ناتهی مانند S از $\mathbf{R}$ را در نظر بگیرید. به خاطر بیاورید که اگر S از بالا کراندار باشد، آنگاه، بنابر اصل موضوع کمال ۴.۴، $\sup S$ موجود و عدد حقیقی را نمایش می‌دهد. تعریف می‌کنیم

$$\sup S = +\infty ,$$

در صورتی که S از بالا کراندار نباشد. اگر S از پایین کراندار باشد، آنگاه $\inf S$ موجود و یک عدد حقیقی را نمایش می‌دهد [نتیجه ۵.۴]. تعریف می‌کنیم

$$\inf S = -\infty ,$$

در صورتی که S از پایین کراندار نباشد. برای تأکید، رئوس مطالب بالا را تکرار می‌کنیم:

فرض کنید S زیر مجموعهٔ ناتهی دلخواهی از $\mathbf{R}$ باشد. نمادهای supS و infS همواره با معنی‌اند. اگر S از بالا کراندار باشد، آنگاه supS عددی حقیقی است؛ در غیر این صورت، $\text{supS} = +\infty$. اگر S از پایین کراندار باشد آنگاه infS عددی حقیقی است؛ در غیر این‌صورت، $\text{infS} = -\infty$. به علاوه، داریم $\text{infS} \leq \text{supS}$.

تمرینهای این بخش در روشن کردن نکات مبهم مفیدند. اغلب آنها نتایج بخش ۴ را برای مجموعه‌هایی که لزوماً کراندار نیستند، گسترش می‌دهند.

تمرینها

۱.۵. مجموعه‌های زیر را با استفاده از نمادهای بازه‌ها بنویسید:

(الف) $\{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ (ب) $\{x \in \mathbf{R} : x^3 \leq 8\}$

(پ) $\{x^2 : x \in \mathbf{R}\}$ (ت) $\{x \in \mathbf{R} : x^2 < 8\}$

۲.۵. اینفیمم و سوپرمم هر یک از مجموعه‌های تمرین ۱.۵ را ارائه دهید.

۳.۵. اینفیمم و سوپرمم هر یک از مجموعه‌های بیکران تمرین ۱.۴ را ارائه دهید.

۴.۵. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{R}$ باشد و $-S = \{-s : s \in S\}$. ثابت کنید که $\text{infS} = -\sup(-S)$. راهنمایی: برای حالت $-\infty < \text{infS}$ صرفاً بیان کنید که در تمرین ۹.۴ ثابت شده است.

۵.۵. ثابت کنید که به ازای هر زیر مجموعهٔ ناتهی $\mathbf{R}$ مانند S، $\text{infS} \leq \text{supS}$. این نتیجه را با تمرین ۶.۴ (الف) مقایسه کنید.

۶.۵. فرض کنید S و T زیر مجموعه‌های ناتهی $\mathbf{R}$ باشند به طوری که $S \subseteq T$. ثابت کنید که $\text{infT} \leq \text{infS} \leq \text{supS} \leq \text{supT}$. این نتیجه را با تمرین ۷.۴ (الف) مقایسه کنید.

بخش ۶*. یک راه ساختن R

چندین روش برای ساختن دقیق **R** بر مبنای **Q** موجود است. ما به اختصار یکی از آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم و پیشنهادهایی برای مطالعه بیشتر این مبحث ارائه می‌کنیم. [تذکراتی راکه دربارهٔ بخشهای اختیاری در پیشگفتار آمده است، ببینید.]

برای ایجاد انگیزه، در روشی که برای ساختن R ارائه می‌کنیم، مقدمتاً مشاهده می‌کنیم که به ازای هر a، $a \in \mathbf{R}$،

$$a = \sup \{ r \in \mathbf{Q} : r < a\},$$

نگاه کنید به تمرین ۱۶.۴. توجه کنید که $a \le b$ اگر و تنها اگر $\{r \in \mathbf{Q} : r<a\} \subseteq \{r \in \mathbf{Q}: r<b\}$، و اینکه $a = b$ اگر و تنها اگر $\{r \in \mathbf{Q} : r < a\} = \{r\in \mathbf{Q}:r < b\}$. زیر مجموعه‌های αی **Q** که به شکل $\{r \in \mathbf{Q} : r < a\}$ اند، در خاصیتهای زیر صدق می‌کنند:

(i) $\alpha \neq \mathbf{Q}$ و α تهی نیست.

(ii) اگر $r \in \alpha$، $s \in \mathbf{Q}$، $s < r$، آنگاه $s \in \alpha$.

(iii) α فاقد بزرگترین عدد گویاست.

به علاوه، هر زیر مجموعهٔ α از **Q** که در (i) − (iii) صدق کند، به ازای aای از **R** به شکل $\{r \in \mathbf{Q} : r < a\}$ است؛ در حقیقت $a = \sup\alpha$. زیر مجموعه‌های α از **Q** که در (i) − (iii) صدق می‌کنند برشهای ددکیند نامیده می‌شوند.

تذکرات آخرین پاراگراف، که اعداد حقیقی را با برشهای ددکیند مربوط می‌کنند، مبتنی برشناخت ما از **R**، از جمله اصل موضوع کمال است. امّا این تذکرات می‌توانند انگیزهٔ دیگری برای ساختن **R**، منحصراً بر مبنای **Q**، باشند. در چنین روش ساختنی هیچ فرضهای پیشینی دربارهٔ **R** نمی‌کنیم. تنها فرض می‌کنیم که میدان مرتب **Q** را داریم و اینکه **Q** در خاصیت ارشمیدسی ۶.۴ صدق می‌کند. یک برش ددکیند، زیر مجموعه‌ای مانند α از **Q** است که در (i) − (iii) صدق می‌کند. مجموعهٔ **R** از اعداد حقیقی به عنوان فضای همه برشهای ددکیند تعریف می‌شود. بنابراین، اعضای **R** به عنوان زیر مجموعه‌های معینی از **Q** تعریف می‌شوند. اعداد گویا، به روش طبیعی، به کمک برشهای ددکیند مشخصی معین می‌شوند؛ یعنی، هر عدد گویای s با برش ددکیند $s^* = \{r \in \mathbf{Q} : r < s\}$ متناظر است. به این طریق **Q**، به عنوان زیر

مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ تلقی می‌شود؛ یعنی، $\mathbf{Q}$ با مجموعهٔ $\{s^* : s \in \mathbf{Q}\} = \mathbf{Q}^*$ معین می‌شود.

به مجموعهٔ $\mathbf{R}$، که در پاراگراف پیشین تعریف شد، یک ساختار ترتیب به شکل زیر داده می‌شود: اگر α و β برشهای ددکیند باشند، آنگاه $\alpha \le \beta$ را به معنی $\alpha \subseteq \beta$ تعریف می‌کنیم. برای این رابطهٔ ترتیبی، خاصیتهای ۱O ، ۲O ، و ۳Oی بخش ۳ برقرار است. جمع در $\mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر α و β برشهای ددکیند باشند آنگاه

$$\alpha + \beta = \{r_1 + r_2 : r_1 \in \alpha , r_2 \in \beta\} .$$

نتیجه می‌شود که $\alpha + \beta$ یک برش ددکیند [در نتیجه، در $\mathbf{R}$] است و اینکه این تعریف جمع در خاصیتهای ۱A – ۴A بخش ۳ صدق می‌کند. ضرب برشهای ددکیند کار پرزحمتی است و ابتدا باید برای برشهای ددکیندی که ناکمتر از 0^* اند تعریف شود. به عنوان تلاشی ساده، تمرین ۴.۶ را ملاحظه کنید. پس از آنکه ضرب برشهای ددکیند تعریف شد، می‌توان صحت خاصیتهای دیگر یک میدان مرتب را برای $\mathbf{R}$ تحقیق کرد. میدان مرتب $\mathbf{R}$، که با این روال از $\mathbf{Q}$ ساخته شد، کامل است: خاصیت کمال در ۴.۴ را می‌توان ثابت کرد. نه اینکه آن را به عنوان یک اصل موضوع اختیار نمود.

شیوهٔ ساختن $\mathbf{R}$، که در بالا به اختصار بیان شد، در [۱۸] و [۱۹] توضیح داده شده است. در [۱۲]، اعداد حقیقی از دنباله‌های کوشی در $\mathbf{Q}$ ساخته می‌شود. ساختمان کاملی از $\mathbf{R}$، بر مبنای اصول موضوع پئانو، در [۱۵] ارائه شده است.

تمرینها

۱.۶ فرض کنید $s , t \in \mathbf{Q}$. نشان دهید که

(الف) $s \le t$ اگر و تنها اگر $s^* \subseteq t^*$؛

(ب) $s = t$ اگر و تنها اگر $s^* = t^*$؛

(پ) $(s + t)^* = s^* + t^*$. توجه کنید که $s^* + t^*$ مجموعی از برشهای ددکیند است.

۲.۶ نشان دهید که اگر α و β برشهای ددکیند باشند، آنگاه $\alpha + \beta = \{r_1+r_2 : r_1\in\alpha , r_2\in\beta\}$ نیز چنین است.

۳.۶. (الف) نشان دهید که به ازای هر برش ددکیند α , $\alpha = {}^*\circ + \alpha$.

(ب) بدون برهان ادعا کردیم که جمع برشهای ددکیند در خاصیت ۴A صدق می‌کند. در نتیجه، اگر α یک برش ددکیند باشد، برش ددکیندی، مانند $-\alpha$ باید موجود باشد به طوری که $\alpha + (-\alpha) = \circ^*$. چگونه $-\alpha$ را تعریف می‌کنید؟

۴.۶. فرض کنید α و β برشهای ددکیند باشند و ضرب آنها را چنین تعریف کنید:

$$\alpha \,.\, \beta = \{r_۱ r_۲ : r_۱ \in \alpha\,,\, r_۲ \in \beta\}.$$

(الف) چند «حاصلضرب» برشهای ددکیند را با استفاده از برشهای ددکیند $\circ^*$، ۱^* و $(-۱)^*$ محاسبه کنید.

(ب) بحث کنید که چرا این تعریف «ضرب» برای تعریف ضرب در $\mathbf{R}$، کاملاً بیفایده است.

۵.۶. (الف) نشان دهید که $\{r \in \mathbf{Q} : r^۳ < ۲\}$ یک برش ددکیند است، امّا اینکه $\{r \in \mathbf{Q} : r^۲ < ۲\}$ یک برش ددکیند نیست.

(ب) آیا برش ددکیند $\{r \in \mathbf{Q} : r^۳ < ۲\}$ متناظر یک عدد گویا در $\mathbf{R}$ است؟

(پ) ثابت کنید که $\circ^* \cup \{r \in \mathbf{Q} : r \geq \circ\,,\, r^۲ < ۲\}$ یک برش ددکیند است. آیا این برش متناظر عددی گویا در $\mathbf{R}$ است.

فصل ۲

دنباله‌ها

بخش ۷. حد دنباله‌ها

یک دنباله، تابعی است که حوزهٔ تعریف آن مجموعه‌ای به صورت $\{n \in \mathbf{Z} : n \geq m\}$ است که در آن m معمولاً برابر ۱ یا ۰ است. بنابراین، یک دنباله تابعی است که به ازای هر عدد صحیح n که $n \geq m$، مقداری مشخص دارد. رسم بر این است که یک دنباله را با حرفی، مانند s، نشان می‌دهند و مقدار آن در n را به جای $s(n)$ به صورت s_n می‌نویسند. اغلب بهتر است که دنباله را به صورت $(s_n)_{n=m}^{\infty}$ یا $(s_m , s_{m+1} , s_{m+2} , \ldots)$ بنویسیم. اگر $m = 1$، می‌توانیم بنویسیم (s_n)، $n \in \mathbf{N}$ یا اینکه $(s_1 , s_2 , s_3 , \ldots)$. گاهی که حوزهٔ تعریف دنباله از مضمون آشکار باشد یا وقتی که نتایج مورد بحث به مقدار خاص m بستگی نداشته باشند، دنباله را به صورت (s_n) می‌نویسیم. در این فصل به دنباله‌هایی علاقه‌مند خواهیم بود که برد مقادیر آنها اعداد حقیقی‌اند؛ یعنی، هر s_n یک عدد حقیقی را نمایش می‌دهد.

مثال ۱.

(الف) دنبالهٔ $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ را که در آن $s_n = 1/n^2$، در نظر بگیرید. این همان دنباله $(1 , 1/4 , 1/9 , 1/16 , 1/25 , \ldots)$ است. البته، به طور صوری، حوزهٔ تعریف این تابع N است که مقدار آن در هر n، $1/n^2$ است. مجموعهٔ مقادیر آن عبارت است از $\{1 , 1/4 , 1/9 , 1/16 , 1/25 , \ldots\}$.

(ب) دنبالهٔ داده شده با ضابطهٔ $a_n = (-1)^n$ برای $n \geq 0$ را در نظر بگیرید؛ یعنی، $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

که در آن، $a_n = (-۱)^n$. توجه کنید که اولین جملهٔ دنباله $a_۰ = ۱$ و دنباله به صورت $(۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, ۱, \ldots)$ است. به طور صوری، این تابعی است که حوزهٔ تعریف آن عبارت است از $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ و مجموعهٔ مقادیر آن عبارت است از $\{-۱, ۱\}$.

تمایز بین یک دنباله و مجموعهٔ مقادیر آن حائز اهمیت است. زیرا، اعتبار بسیاری از نتایج در این کتاب بستگی به این دارد که با یک دنباله کار می‌کنیم یا اینکه با یک مجموعه. ما، همواره از پرانتز ( ) برای مشخص کردن یک دنباله و از ابرو { } برای مشخص کردن یک مجموعه استفاده خواهیم کرد. تعداد جملات دنبالهٔ $a_n = (-۱)^n$ نامتناهی است، گرچه مقادیر آنها تکراری‌اند. از سوی دیگر، مجموعهٔ $\{(-۱)^n : n = ۰, ۱, ۲, \ldots\}$ دقیقاً مجموعهٔ $\{-۱, ۱\}$، مرکب از دو عدد است.

(پ) دنبالهٔ $\cos(n\pi/۳)$، $n \in \mathbf{N}$، را در نظر بگیرید. اولین جملهٔ این دنباله عبارت است از $\cos(\pi/۳) = \cos ۶۰^\circ = ۱/۲$ و دنباله به صورت زیر است:

$$\left(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -۱, \ldots\right).$$

مجموعهٔ مقادیر آن عبارت است از $\{\cos(n\pi/۳): n \in \mathbf{N}\} = \{\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -۱, ۱\}$.

(ت) اگر $a_n = n^{۱/n}$، $n \in \mathbf{N}$، دنباله به صورت $(۱, \sqrt{۲}, ۳^{۱/۳}, ۴^{۱/۴}, \ldots)$ است. اگر مقادیر آن را تا چهار رقم اعشاری تقریب بزنیم، نتیجه به صورت زیر خواهد بود.

$$(۱, ۱٫۴۱۴۲, ۱٫۴۴۲۲, ۱٫۴۱۴۲, ۱٫۳۷۹۷, ۱٫۳۴۸۰, ۱٫۳۲۰۵, ۱٫۲۹۶۸, \ldots)$$

نتیجه می‌شود که $a_{۱۰۰}$ تقریباً برابر ۱٫۰۴۷۱ و $a_{۱۰۰۰}$ تقریباً برابر ۱٫۰۰۶۹ است.

(ث) دنباله $b_n = (۱ + ۱/n)^n$، $n \in \mathbf{N}$، را در نظر بگیرید. این دنباله همان دنبالهٔ $(۲, (۳/۲)^۲, (۴/۳)^۳, (۵/۴)^۴, \ldots)$ است. اگر مقادیر آن را تا چهار رقم اعشار تقریب بزنیم، داریم

$$(\ldots, 2{,}5658, 2{,}5465, 2{,}5216, 2{,}4883, 2{,}4414, 2{,}3704, 2{,}25, 2, 2)$$

همچنین، b_{100} تقریب ۲٫۷۰۴۸ است و b_{1000} تقریباً ۲٫۷۱۶۹ است.

«حد» دنباله‌ای مانند (s_n)، یک عدد حقیقی است در صورتی که به ازای مقادیر بزرگ n، مقادیر s_n به آن نزدیک باشند. مثلاً، مقادیر دنبالهٔ مثال ۱ (الف)، برای nهای بزرگ، به ۰ نزدیک اند و مقادیر دنبالهٔ مثال ۱ (ت)، برای nهای بزرگ، به ۱ نزدیک اند. دنبالهٔ (a_n) که با ضابطهٔ $a_n = (-1)^n$ داده شده است، مستلزم تأمل بیشتری است. شاید بشود گفت که حد آن ۱ است. زیرا، به ازای مقادیر بزرگ n که زوج باشند، $a_n = 1$. از طرف دیگر، به ازای مقادیر بزرگ دیگر n، $a_n = -1$ [که فاصله قابل توجهی با ۱ دارد.] ما به تعریف مختصر و مفیدی نیاز داریم تا تصمیم بگیریم که آیا ۱ حدی برای $a_n = (-1)^n$ است یا خیر. نتیجه آن می‌شود که در تعریف حد بخواهیم که به ازای کلیهٔ مقادیر بزرگ n، مقادیر دنباله به مقدار حد نزدیک باشند. بنابراین، ۱ حدی برای دنبالهٔ $a_n = (-1)^n$ نخواهد بود.

۱.۷ تعریف. دنباله‌ای مانند (s_n) از اعداد حقیقی را همگرا به عدد حقیقی s خوانیم مشروط بر اینکه

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود باشد به طوری که
$n > N$ مستلزم آن باشد که $|s_n - s| < \varepsilon$.

اگر (s_n) همگرا به s باشد، چنین خواهیم نوشت $\lim_{n\to\infty} s_n = s$، $\lim s_n = s$، یا $s_n \longrightarrow s$. عدد s حد دنبالهٔ (s_n) نامیده می‌شود. دنباله‌ای که همگرا به عددی حقیقی نباشد، واگرا نامیده می‌شود.

طرح چندین نکته ضروری است. اولاً با توجه به خاصیت ارشیمدسی می‌توانیم، اگر بخواهیم، عدد N در تعریف ۱.۷ را عددی طبیعی اختیار کنیم. نماد ε [حروف کوچک یونانی اپسیلون] در این تعریف معرف عددی مثبت است نه عدد سحر آمیز جدیدی. با این حال، یکی از سنن ریاضی، استفاده از ε و δ [حروف کوچک یونانی دلتا] است. در چنین وضعیتهایی است که در آنها مقدارهای جالب توجه یا مطلوب، مقادیر مثبت کوچک‌اند. ثالثاً، شرط (۱) مرکب از تعدادی نامتناهی از گزاره‌ها، یکی برای هر مقدار مثبت ε است. این شرط بیان می‌کند که با هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N، با خاصیت معین نظیر می‌شود؛ یعنی اینکه $n > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s| < \varepsilon$. مقدار N به مقدار ε بستگی دارد. معمولاً، اگر ε کوچک باشد، N باید عددی بزرگ باشد. این نکات را در مثال آتی تشریح می‌کنیم.

مثال ۲. دنباله $s_n = (۳n + ۱)/(۷n - ۴)$ را در نظر بگیرید. اگر s_n را به صورت $(۳ + ۱/n) / (۷ - ۴/n)$ بنویسیم و توجه کنیم که $۱/n$ و $۴/n$ برای nهای بزرگ بسیار کوچک‌اند، این نتیجه‌گیری به نظر معقول می‌آید که $\lim s_n = ۳/۷$. در واقع، پس از آنکه قضایای حدی بخش ۹ به دست آوریم، این استدلال کاملاً معتبر خواهد بود:

$$\lim s_n = \lim [\frac{۳ + ۱/n}{۷ - ۴/n}] = \frac{\lim ۳ + \lim(۱/n)}{\lim ۷ - ۴\lim(\frac{۱}{n})} = \frac{۳ + ۰}{۷ - ۴ \times ۰} = \frac{۳}{۷}.$$

با این حال، فعلاً به تجزیه و تحلیل این مطلب علاقه‌مندیم که منظور ما از $\lim s_n = ۳/۷$ دقیقاً چیست. بنا به تعریف ۱.۷، $\lim s_n = ۳/۷$ به معنی این است که

به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند N موجود است به طوری که

(۱) $n > N$ مستلزم آن است که $|\frac{۳n + ۱}{۷n - ۴} - \frac{۳}{۷}| < \varepsilon$.

وقتی ε تغییر می‌کند، N تغییر می‌کند. در مثال ۲ی بخش بعدی، نشان می‌دهیم که برای این دنبالهٔ خاص N را می‌توان به صورت $۴/۷ + ۱۹/۴۹\varepsilon$ اختیار کرد. با توجه به این نکته و استفاده از یک ماشین حساب در می‌یابیم که به ازای مقادیر ε برابر با ۱، ۱ر۰، ۰۱ر۰، ۰۰۱ر۰ و ۰۰۰۰۱ر۰، N را می‌توان، به ترتیب، تقریباً برابر با ۹۶ر۰، ۴۵ر۴، ۳۵ر۳۹، ۳۳ر۳۸۸، ۳۸۷ و ۶۷۰ر۷۵۵ اختیار کرد. چون توجه ما تنها به مقادیر صحیح n است، می‌توانیم جزء اعشاری N را حذف کنیم. در این صورت، ملاحظه می‌کنیم که ۵ تا از آن عدهٔ نامتناهی از گزاره‌های ارائه شده به وسیله (۱) عبارت‌اند از:

(۲) $n > ۰$ مستلزم آن است که $|\frac{۳n + ۱}{۷n - ۴} - \frac{۳}{۷}| < ۱$ ؛

(۳) $n > ۴$ مستلزم آن است که $|\frac{۳n + ۱}{۷n - ۴} - \frac{۳}{۷}| < ۰/۱$ ؛

(۴) $n > ۳۹$ مستلزم آن است که $|\frac{۳n + ۱}{۷n - ۴} - \frac{۳}{۷}| < ۰/۰۱$ ؛

(۵) $n > ۳۸۸$ مستلزم آن است که $|\frac{۳n + ۱}{۷n - ۴} - \frac{۳}{۷}| < ۰/۰۰۱$ ؛

(۶) $n > ۳۸۷٫۷۵۵$ مستلزم آن است که $|\frac{۳n + ۱}{۷n - ۴} - \frac{۳}{۷}| < ۰٫۰۰۰۰۰۱$؛

جدول ۱.۷ حکمهای (۲) تا (۶) را تا حدی تأیید می‌کند. می‌توانیم به این مثالهای عددی همچنان ادامه دهیم. ولی، آشکار است که اگر بخواهیم نتایجی در مورد حدها ثابت کنیم، به رهیافت نظری بیشتری نیاز داریم.

جدول ۱.۷

n	محاسبهٔ $s_n = (۳n + ۱)/(۷n - ۴)$ به طور تقریبی	محاسبهٔ $\|s_n - ۳/۷\|$ به طور تقریبی
۱	۱٫۳۳۳۳	۰٫۹۰۴۷
۲	۰٫۷۰۰۰	۰٫۲۷۱۴
۳	۰٫۵۸۸۲	۰٫۱۵۹۷
۴	۰٫۵۴۱۷	۰٫۱۱۳۱
۵	۰٫۵۱۶۱	۰٫۰۸۷۶
۶	۰٫۵۰۰۰	۰٫۰۷۱۴
۴۰	۰٫۴۳۸۴	۰٫۰۰۹۸
۴۰۰	۰٫۴۲۹۵	۰٫۰۰۰۹۷

مثال ۳. به امثلهٔ مثال ۱ باز می‌گردیم.

(الف) $\lim(۱/n^۲) = ۰$، این مورد در مثال ۱ بخش بعدی، ثابت خواهد شد.

(ب) دنبالهٔ a_n که در آن $a_n = (-۱)^n$، همگرا نیست. بنابراین، در این حالت عبارت «$\lim a_n$» بیمعنی است. این مثالها را مجدداً، در مثال ۴ بخش بعدی، مورد بحث قرار خواهیم داد.

(پ) دنبالهٔ $\cos(n\pi/۳)$ همگرا نیست. تمرین ۷.۸ را ببینید.

(ت) به نظر می‌رسد که دنبالهٔ $n^{۱/n}$ به ۱ همگرا باشد. در ۷.۹ (پ) ثابت خواهیم کرد که $\lim n^{۱/n} = ۱$.

(ث) دنبالهٔ (b_n) با $b_n = (۱ + ۱/n)^n$ به عدد e همگراست که می‌بایستی از حسابان با آن آشنا باشید و حد $\lim b_n$ و عدد e، در بخش اختیاری ۳۷ بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. به خاطر بیاورید که e تقریباً برابر است با ۲٫۷۱۸۲۸۱۸.

این بخش را با نشان دادن یکتایی حدها خاتمه می‌دهیم. یعنی، اگر $\lim s_n = s$ و $\lim t_n = t$ آنگاه باید داشته باشیم $s = t$. به طور مختصر، مقادیر s_n به ازای nهای بزرگ، نمی‌توانند به قدر دلخواه به مقادیر مختلفی نزدیک باشند. برای اثبات، $\varepsilon > ۰$ را در نظر بگیرید. بنابر تعریف حد، باید عددی مانند $N_۱$ موجود باشد به طوری که

$n > N_۱$ مستلزم آن است که $|s_n - s| < \varepsilon/۲$.

و باید عددی مانند $N_۲$ موجود باشد به طوری که

$n > N_۲$ مستلزم آن است که $|s_n - t| < \varepsilon/۲$.

به ازای $n > \max\{N_۱, N_۲\}$، نابرابری مثلث ۷.۳، نشان می‌دهد که

$$|s - t| = |(s - s_n) + (s_n - t)| \le |s - s_n| + |s_n - t| < \varepsilon/۲ + \varepsilon/۲ = \varepsilon.$$

این، نشان می‌دهد که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $|s - t| < \varepsilon$. از اینجا نتیجه می‌شود که $|s - t| = ۰$. از این رو $s = t$.

تمرینها

۱.۷. پنج جملهٔ اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

(الف) $s_n = ۱/(۳n + ۱)$ (ب) $b_n = (۳n + ۱)/(۴n - ۱)$

(پ) $c_n = n/۳^n$ (ت) $\sin(n\pi/۴)$

۲.۷. برای هر دنباله در تمرین ۱.۷ ، همگرا بون یا نبودن دنباله را معین کنید. اگر دنباله همگرا باشد، حد آن راارائه دهید. نیازی به برهان نیست.

۳.۷. برای هر یک از دنباله‌های زیر معین کنید که آیا دنباله همگراست یا خیر و اگر دنباله همگرا باشد، حد آن را ارائه دهید. نیازی به برهان نیست.

(الف) $a_n = n/(n + ۱)$ (ب) $b_n = (n^۲ + ۳)/(n^۲ - ۳)$

(پ) $c_n = ۲^{-n}$ (ت) $t_n = ۱ + ۲/n$

(ث) $x_n = ۷۳ + (-۱)^n$ (ج) $s_n = (۲)^{۱/n}$

(چ) $y_n = n!$ (ح) $d_n = (-۱)^n n$

(خ) $(-۱)^n/n$ (د) $(۷n^۳ + ۸n)/(۲n^۳ - ۳۱)$

(ذ) $(9n^2 - 18)/(6n + 18)$

(ر) $\sin(n\pi/2)$

(ز) $\sin(n\pi)$

(ژ) $\sin(2n\pi/3)$

(س) $1/n \sin n$

(ش) $(2^{n+1} + 5)/(2^n - 7)$

(ص) $3^n/n!$

(ض) $(1 + 1/n)^2$

(ط) $(4n^2 + 3)/(3n^2 - 2)$

(ظ) $(6n + 4)/(9n^2 + 7)$

۴.۷. مثالهایی با شرایط زیر ارائه دهید:

(الف) دنباله‌ای مانند (x_n) از اعداد گنگ و دارای حدی مانند $\lim x_n$ که عددی گویاست،

(ب) دنباله‌ای مانند (r_n) از اعداد گویا و دارای حدی مانند $\lim r_n$ که عددی گنگ است.

۵.۷. حدهای زیر را معین کنید. نیازی به برهان نیست، امّا محاسبات جبری لازم را ارائه دهید.

(الف) $\lim s_n$ با $s_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$،

(ب) $\lim(\sqrt{n^2 + n} - n)$،

(پ) $\lim(\sqrt{4n^2 + n} - 2n)$.

راهنمایی برای (الف): ابتدا نشان دهید که $s_n = 1/(\sqrt{n^2 + 1} + n)$.

بخش ۸. بحثی دربارهٔ برهانها

در این بخش مثالهای متعدّدی از برهانها را با استفاده از تعریف حد یک دنباله ارائه می‌دهیم. با کمی مطالعه و تمرین، خود دانشجویان باید قادر باشند برهانهایی از این نوع را ارائه دهند. گاهی برهانی را یک برهان صوری خواهیم نامید تا تأکید کنیم که برهان آن یک برهان ریاضی دقیق است.

مثال ۱. ثابت کنید که $\lim(1/n^2) = 0$.

بحث. کاری که برعهده داریم آن است که $\varepsilon > 0$ دلخواهی را در نظر گیریم و نشان دهیم که

عددی مانند N [که به ε بستگی خواهد داشت] موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|1/n^2 - 0| < \varepsilon$. بنابراین، انتظار داریم که برهان صوری ما با عبارت «فرض کنید $\varepsilon > 0$» شروع شود و با عبارتی مانند «بنابراین، $n > N$ مستلزم آن است که $|1/n^2 - 0| < \varepsilon$» پایان پذیرد. در متن برهان باید عددی مانند N را معین و سپس تحقیق کنیم که N دارای خاصیت مطلوب است؛ یعنی اینکه $n > N$ مستلزم آن است که $|1/n^2 - 0| < \varepsilon$.

همان طور که در مورد اتحادهای مثلثاتی معمول است، کار را بدواً به طور قهقرایی با شروع از نتیجهٔ مطلوب انجام می‌دهیم، امّا در برهان صوری باید مطمئن باشیم که گامهای ما برگشت پذیرند. در مثال اخیر، می‌خواهیم $|1/n^2 - 0| < \varepsilon$ و می‌خواهیم بدانیم که n باید چقدر بزرگ باشد. در نتیجه، روی این نابرابری به صورت جبری عمل می‌کنیم و سعی می‌کنیم آن را نسبت به n حل کنیم. بنابراین، می‌خواهیم که $1/n^2 < \varepsilon$. با ضرب طرفین در n^2 و تقسیم طرفین بر ε، معلوم می‌شود که باید داشته باشیم $n^2 > 1/\varepsilon$ یا $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$. اگر گامهای ما برگشت پذیر باشند، ملاحظه می‌کنیم که $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ مستلزم آن است که $|1/n^2 - 0| < \varepsilon$. از این نابرابری چنین به ذهن می‌رسد که قرار دهیم $N = 1/\sqrt{\varepsilon}$.

برهان صوری. فرض کنید $\varepsilon > 0$. قرار دهید $N = 1/\sqrt{\varepsilon}$. در این صورت، $n > N$ مستلزم آن است که $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ که خود مستلزم آن است که $n^2 > 1/\varepsilon$ و بنابراین، $\varepsilon > 1/n^2$. در نتیجه، $n > N$ مستلزم آن که $|1/n^2 - 0| < \varepsilon$. بنابراین، ثابت می‌شود که $\lim(1/n^2) = 0$. □

مثال ۲. ثابت کنید که $\lim(3n + 1)/(7n - 4) = 3/7$.

بحث. به ازای هر $\varepsilon > 0$، باید تصمیم بگیریم که n باید چه مقدار بزرگ باشد تا نابرابری $|(3n + 1)/(7n - 4) - 3/7| < \varepsilon$ تضمین شود. بنابراین، می‌خواهیم

$$\left|\frac{21n + 7 - 21n + 12}{7(7n - 4)}\right| < \varepsilon \quad \text{یا} \quad \left|\frac{19}{7(7n - 4)}\right| < \varepsilon.$$

چون $7n - 4 > 0$، می‌توانیم قدر مطلق را حذف کنیم و با اعمال جبری بیشتری نابرابری را برحسب n «حل کنیم»:

$$\frac{19}{7\varepsilon} < 7n - 4 \quad \text{، یا} \quad \frac{19}{7\varepsilon} + 4 < 7n \quad \text{، یا} \quad n > \frac{4}{7} + \frac{19}{49\varepsilon}.$$

گامهای ما برگشت پذیرند. بنابراین، قرار خواهیم داد $N = ۱۹/۴۹\varepsilon + ۴/۷$. ضمناً، می‌توانستیم N را هر عدد بزرگتر از $۱۹/۴۹\varepsilon + ۴/۷$ انتخاب کنیم.

برهان صوری. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و $N = ۱۹/۴۹\varepsilon + ۴/۷$. در این صورت، $n > N$ مستلزم آن است که $n > ۱۹/۴۹\varepsilon + ۴/۷$. بنابراین $۷n > ۱۹/۷\varepsilon + ۴$؛ لذا، $۷n - ۴ > ۱۹/۷\varepsilon$، و در نتیجه، $۱۹/[۷(۷n - ۴)] < ۷\varepsilon$ و یا $|(۳n + ۱)/(۷n - ۴) - \frac{۳}{۷}| < \varepsilon$. این ثابت می‌کند که $\lim[(۳n + ۱)/(۷n - ۴)] = ۳/۷$. □

مثال ۳. ثابت کنید که $\lim[(۴n^۳ + ۳n)/(n^۳ - ۶)] = ۴$.

بحث. به ازای هر $\varepsilon > ۰$ لازم است تعیین کنیم که n به چه بزرگی باید باشد تا مستلزم آن گردد که

$$\left|\frac{۴n^۳ + ۳n}{n^۳ - ۶} - ۴\right| < \varepsilon \quad \text{، یا} \quad \left|\frac{۳n + ۲۴}{n^۳ - ۶}\right| < \varepsilon \text{.}$$

با در نظر گرفتن $n > ۱$، می‌توانیم قدر مطلق را حذف کنیم؛ در نتیجه، لازم است تعیین کنیم که بزرگی n چه باید باشد تا $(۳n + ۲۴)/(n^۳ - ۶) < \varepsilon$. این بار حل این نامعادله برحسب n بسیار مشکل است. به خاطر بیاورید که نیاز به پیدا کردن N ای داریم که $n > N$ مستلزم آن است که $(۳n + ۲۴)/(n^۳ - ۶) < \varepsilon$. امّا، نیاز نداریم که کوچکترین N از این نوع را پیدا کنیم. بنابراین، با انجام تقریبهایی کار را ساده‌تر می‌کنیم. ایده این است که به ازای مقادیر به قدر کافی بزرگ n، عبارت $(۳n + ۲۴)/(n^۳ - ۶)$ کران بالایی به صورت مضربی از $n/n^۳ = ۱/n^۲$ دارد. برای پیدا کردن چنین کرانی، ما کران بالایی برای صورت کسر و کران پایینی برای مخرج کسر پیدا خواهیم کرد. به عنوان مثال، چون $۳n + ۲۴ \le ۲۷n$ کافی است که نابرابری $۲۷n/(n^۳ - ۶) < \varepsilon$ را به دست آوریم. برای کوچکتر کردن مخرج و در عین حال برای اینکه مضرب ثابتی از $n^۳$ شود، توجه می‌کنیم که $n^۳ - ۶ \ge n^۳/۲$، مشروط بر آنکه n به قدر کافی بزرگ باشد؛ در واقع، چیزی که کلاً به آن نیاز داریم این است که $n^۳/۲ \ge ۶$ یا $n^۳ \ge ۱۲$ یا $n > ۲$. بنابراین کافی است که نابرابری $۲۷n/(۱/۲(n^۳)) < \varepsilon$ یا $۵۴/n^۲ < \varepsilon$ یا $n > \sqrt{۵۴/\varepsilon}$ را به دست آوریم، مشروط بر آنکه $n > ۲$.

برهان صوری. فرض کنید $\varepsilon > ۰$، $N = \max\{۲, \sqrt{۵۴/\varepsilon}\}$. در این صورت، $n > N$ مستلزم آن

است که $n > \sqrt{۵۴/\varepsilon}$. بنابراین $\varepsilon > ۵۴/n^۲$. در نتیجه، $\varepsilon > ۲۷n/(۱/۲(n^۳))$. چون $n > ۲$، داریم $n^۳/۲ \le n^۳ - ۶$، و نیز $۲۷n \ge ۳n + ۲۴$. در نتیجه، $n > N$ مستلزم آن است که

$$\frac{۳n + ۲۴}{n^۳ - ۶} \le \frac{۲۷n}{\frac{۱}{۲}n^۳} = \frac{۵۴}{n^۲} < \varepsilon$$

و بنابراین،

$$\left|\frac{۴n^۳ + ۳n}{n^۳ - ۶} - ۴\right| < \varepsilon$$

که همان نتیجه مطلوب است. □

مثال ۳. نشان می‌دهیم که برهانهای مستقیم حتی حدهای نسبتاً ساده، ممکن است پیچیده باشند. به کمک قضایای حدها، در بخش ۹، صرفاً خواهیم نوشت

$$\lim\left[\frac{۴n^۳ + ۳n}{n^۳ - ۶}\right] = \lim\left[\frac{۴ + ۳/n^۲}{۱ - ۶/n^۳}\right] = \frac{\lim ۴ + ۳\lim(۱/n^۲)}{\lim ۱ - ۶\lim(۱/n^۳)} = ۴. \qquad \square$$

مثال ۴. نشان دهید که دنبالهٔ $a_n = (-۱)^n$ همگرا نیست.

بحث. فرض خواهیم کرد که $\lim(-۱)^n = a$ و تناقض به دست خواهیم آورد. صرف نظر از اینکه a چه باشد، یا ۱ یا ۱−، فاصله‌ای حداقل به اندازه ۱ از a دارد. بنابراین، به ازای همه nهای بزرگ، نابرابری $|(-۱)^n - a| < ۱$ برقرار نخواهد بود.

برهان صوری. فرض کنید به ازای a ای، $a \in \mathbf{R}$ و $\lim(-۱)^n = a$. با قرار دادن $\varepsilon = ۱$ در تعریف حد، ملاحظه می‌کنیم که عددی مانند N موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $|(-۱)^n - a| < ۱$.

با در نظر گرفتن هم مقدار زوج و هم مقدار فرد برای nهایی که $n > N$، ملاحظه می‌کنیم که

$|۱ - a| < ۱$ و $|-۱ - a| < ۱$.

اینک، بنابر نابرابری مثلث ۷.۳،

$$۲ = |۱ - (-۱)| = |۱ - a + a - (-۱)| \le |۱ - a| + |a - (-۱)| < ۱ + ۱ = ۲.$$

این نتیجهٔ باطل، نشان می‌دهد که فرض ما که $\lim(-۱)^n = a$، باید نادرست باشد. بنابراین،

دنبالهٔ $(-1)^n$ همگرا نیست. □

مثال ۵. فرض کنید که (s_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد و فرض کنید $\lim s_n = s$. توجه کنید که $s \geq 0$. تمرین ۹.۸ (الف) را ببینید. ثابت کنید که $\lim \sqrt{s_n} = \sqrt{s}$.

بحث. باید $\varepsilon > 0$ را در نظر بگیریم و نشان دهیم که N ای موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|\sqrt{s_n} - \sqrt{s}| < \varepsilon$.

این بار، با توجه به عام بودن ماهیت مسأله، نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که N را صریحاً برحسب ε به دست آوریم. امّا، می‌توانیم امیدوار باشیم که وجود چنین Nای را نشان دهیم. در اینجا، شگرد کار آن است که «با گنگ ساختن مخرج» از آموزشهایی که در جبر دیده‌ایم تخلف کنیم.

$$\sqrt{s_n} - \sqrt{s} = \frac{(\sqrt{s_n} - \sqrt{s})(\sqrt{s_n} + \sqrt{s})}{\sqrt{s_n} + \sqrt{s})} = \frac{s_n - s}{\sqrt{s_n} + \sqrt{s}}.$$

چون $s_n \longrightarrow s$، می‌توانیم صورت کسر را [به ازای مقادیر بزرگ n] کوچک کنیم. متأسفانه، اگر $s = 0$، مخرج کسر کوچک خواهد شد. بنابراین، دو حالت را بررسی می‌کنیم. اگر $s > 0$، مخرج کسر دارای کران پایین $\sqrt{s}$ است و شگرد ما کارگر خواهد شد:

$$|\sqrt{s_n} - \sqrt{s}| \leq \frac{|s_n - s|}{\sqrt{s}},$$

و بنابراین، N را به گونه‌ای انتخاب خواهیم کرد که به ازای $n > N$، $|s_n - s| < \sqrt{s}\,\varepsilon$. توجه کنید که N موجود است، زیرا می‌توانیم تعریف حد را به جای ε برای $\sqrt{s}\,\varepsilon$ به کار ببریم. به ازای $s = 0$، مستقیماً می‌توان نشان داد که $\lim s_n = 0$ مستلزم آن است که $\lim \sqrt{s_n} = 0$. در این حالت، نیازی به شگرد «گنگ سازی مخرج» نیست.

برهان صوری.

حالت I: $s > 0$. فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون $\lim s_n = s$، عددی مانند N موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s| < \sqrt{s}\,\varepsilon$.

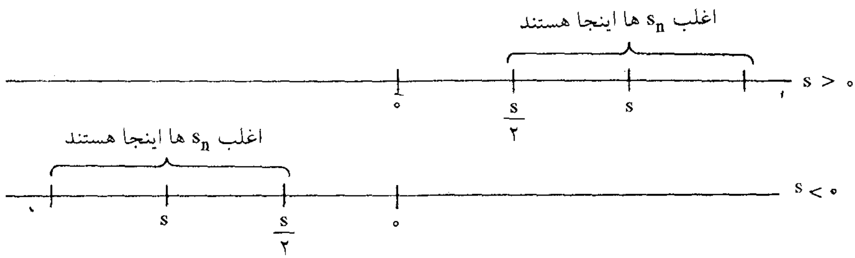
اینک، $n > N$ ایجاب می‌کند که

$$|\sqrt{s_n} - \sqrt{s}| = \frac{|\sqrt{s_n} - s|}{s_n + \sqrt{s}} \leq \frac{|s_n - s|}{\sqrt{s}} < \frac{\sqrt{s}\varepsilon}{\sqrt{s}} = \varepsilon\ .$$

حالت II: $s = 0$. این حالت را به عنوان تمرین ۳.۸ واگذار می‌کنیم. □

مثال ۶. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای همگرا از اعداد حقیقی باشد که به ازای هر $n \in N$، $s_n \neq 0$ و $\lim s_n = s \neq 0$. ثابت کنید که $\inf\{|s_n| : n \in N\} > 0$.

بحث. ایده آن است که اغلبِ جمله‌های s_n به s نزدیک‌اند و بنابراین به 0 نزدیک نیستند. به صورت صریحتر، اغلبِ جمله‌های s_n در فاصلهٔ $\frac{|s|}{2}$ از s قرار دارند و لذا اغلبِ s_nها در $|s_n| \geq |s|/2$ صدق می‌کنند. با توجه به شکل ۱.۸، این حکم بدیهی به نظر می‌آید. اما، یک برهان صوری آن مستلزم استفاده از نابرابری مثلث است.



شکل ۱.۸

برهان صوری. فرض کنید $\varepsilon = |s|/2 > 0$. چون $\lim s_n = s$، عددی مانند N در N موجود است به طوری که

$$n > N \text{ مستلزم آن است که } |s_n - s| < \frac{|s|}{2}\ .$$

امّا،

$$(1) \qquad n > N \text{ مستلزم آن است که } |s_n| \geq \frac{|s|}{2}\ ،$$

زیرا، در غیر این صورت، نابرابری مثلث ایجاب می‌کند که

$$|s| = |s - s_n + s_n| \leq |s - s_n| + |s_n| < \frac{|s|}{2} + \frac{|s|}{2} = |s|$$

که بیمعنی است. اگر قرار دهیم

$$m = \min\left\{\frac{|s|}{2}, |s_1|, |s_2|, \ldots, |s_N|\right\},$$

در این صورت، آشکارا خواهیم داشت $m > 0$، و با در نظر گرفتن (۱)، به ازای هر $n \in N$، $|s_n| \geq m$. بنابراین، $\inf\{|s_n| : n \in N\} \geq m > 0$، و این همان حکم مطلوب است.

تمرینها

در تمرینهای زیر، باید برهانهای صوری ارائه شوند.

۱.۸. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) $\lim[(-1)^n/n] = 0$ (ب) $\lim(1/n^{1/3}) = 0$

(پ) $\lim[(2n - 1)/(3n + 2)] = 2/3$ (ت) $\lim(n + 6)/(n^2 - 6) = 0$

۲.۸. حد دنباله‌های زیر را تعیین کنید و سپس ادعاهای خود را ثابت کنید.

(الف) $a_n = n/(n^2 + 1)$ (ب) $b_n = (7n - 19)/(3n + 7)$

(پ) $c_n = (4n + 3)/(7n - 5)$ (ت) $d_n = (2n + 4)/(5n + 2)$

(ث) $s_n = (1/n)\sin n$

۳.۸. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد و فرض کنید که $\lim s_n = 0$. ثابت کنید که $\lim \sqrt{s_n} = 0$. این نتیجه، برهان مثال ۵ را کامل خواهد کرد.

۴.۸. فرض کنید (t_n) دنبالهٔ کرانداری باشد؛ یعنی، عددی مانند M موجود است که به ازای هر n، $|t_n| \le M$، و فرض کنید که (s_n) دنباله‌ای باشد به طوری که $\lim s_n = 0$. ثابت کنید که $\lim(s_n t_n) = 0$.

۵.۸. (الف) سه دنبالهٔ (a_n)، (b_n)، و (s_n) را در نظر بگیرید به طوری که به ازای هر n، $a_n \le s_n \le b_n$ و $\lim a_n = \lim b_n = s$. ثابت کنید $\lim s_n = s$.

(ب) فرض کنید که (s_n) و (t_n) دنباله‌هایی باشند به طوری که به ازای هر n، $|s_n| \le t_n$ و $\lim t_n = 0$. ثابت کنید که $\lim s_n = 0$.

۶.۸. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد.

(الف) ثابت کنید $\lim s_n = 0$ اگر و تنها اگر $\lim |s_n| = 0$.

(ب) مشاهده کنید که اگر $s_n = (-1)^n$، آنگاه $\lim |s_n|$ موجود است اما $\lim s_n$ موجود نیست.

۷.۸. نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا نیستند.

(الف) $\cos(n\pi/3)$ (ب) $s_n = (-1)^n n$

(پ) $\sin(n\pi/3)$

۸.۸. احکام زیر را ثابت کنید [نگاه کنید به تمرین ۵.۷]:

(الف) $\lim[\sqrt{n^۲ + ۱} - n]$ (ب) $\lim[\sqrt{n^۲ + n} - n] = ۱/۲$

(پ) $\lim[\sqrt{۴n^۲ + ۱} - ۲n] = ۱/۴$

۹.۸. فرض کنید که (s_n) دنباله‌ای همگرا باشد.

(الف) نشان دهید که به ازای همه بجز تعدادی متناهی از nها اگر $s_n \geq a$، آنگاه $\lim s_n \geq a$.

(ب) نشان دهید که به ازای همه بجز تعدادی متناهی از nها اگر $s_n \leq b$، آنگاه $\lim s_n \leq b$.

(پ) نتیجه بگیرید که به ازای همه بجز تعداد متناهی از nها اگر s_nها به $[a , b]$ تعلق داشته باشند، آنگاه $\lim s_n$ به $[a , b]$ تعلق دارد.

۱۰.۸. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای همگرا باشد و فرض کنید که $\lim s_n \leq a$. ثابت کنید که عددی مانند N موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $s_n > a$.

بخش ۹. قضایای حدی برای دنباله‌ها

در این بخش برخی از نتایج بنیادی را که احتمالاً برای خوانندگان آشناست، ثابت می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که دنباله‌های همگرا، کراندارند. دنباله‌ای مانند (s_n) از اعداد حقیقی کراندار نامیده می‌شود در صورتی که $\{s_n : n \in N\}$ مجموعه‌ای کراندار باشد؛ یعنی، عدد ثابتی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر n، $|s_n| \leq M$.

۱.۹ قضیه. دنباله‌های همگرا کراندارند.

برهان. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای همگرا باشد و فرض کنید $s = \lim s_n$. با به کاربردن تعریف ۱.۷ با $\varepsilon = ۱$، عددی مانند N در N را به دست می‌آوریم به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s| < ۱$.

از نابرابری مثلث ملاحظه می‌کنیم که $n > N$ مستلزم آن است که $|s_n| < |s| + ۱$. تعریف می‌کنیم $M = \max\{|s| + ۱, |s_۱|, |s_۲|, \dots, |s_N|\}$. در این صورت، به ازای هر n که $n \in N$، $|s_n| \leq M$. بنابراین، (s_n) دنباله‌ای کراندار است. □

در برهان قضیهٔ ۱.۹، ما فقط نیاز به استفاده از خاصیّت ۱.۷ (الف)، تنها برای یک مقدار ε، داشتیم. انتخاب $\varepsilon = ۱$ از طرف ما کاملاً دلخواه بود.

۲.۹ قضیه. اگر دنبالهٔ (s_n) به s همگرا باشد و $k \in \mathbf{R}$، آنگاه دنبالهٔ (ks_n) به ks همگرا است؛ یعنی، $\lim(ks_n) = k\lim s_n$.

برهان. فرض کنید که $k \neq ۰$، زیرا این نتیجه، به ازای $k = ۰$، بدیهی است. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و توجه کنید که لازم است نشان دهیم که به ازای مقادیر بزرگ n، $|ks_n - ks| < \varepsilon$. چون $\lim s_n = s$، Nای موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$

در این صورت،

$n > N$ مستلزم آن است که $|ks_n - ks| < \varepsilon$. □

۳.۹ قضیه. اگر (s_n) به s همگرا، و (t_n) به t همگرا باشد، آنگاه $(s_n + t_n)$ به $s + t$ همگرا است؛ یعنی،

$$\lim(s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n .$$

برهان. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. لازم است نشان دهیم که به ازای مقادیر بزرگ n،

$$|s_n + t_n - (s + t)| < \varepsilon .$$

ملاحظه می‌کنیم که $|s_n + t_n - (s + t)| < |s_n - s| + |t_n - t|$. چون $\lim s_n = s$، $N_۱$ای موجود است به طوری که

$n > N_۱$ مستلزم آن است که $|s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{۲}$.

به همین نحو، $N_۲$ای موجود است که

$n > N_۲$ مستلزم آن است که $|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{۲}$.

فرض کنید $N = \max\{N_۱ , N_۲\}$. در این صورت، واضح است که

$n > N$ مستلزم آن است که $|s_n+t_n - (s+t)| \leq |s_n-s| + |t_n-t| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$. □

۴.۹ قضیه. اگر (s_n) به s و (t_n) به t همگرا باشد، آنگاه (s_nt_n) به st همگراست؛ یعنی،

$$\lim(s_n t_n) = (\lim s_n)(\lim t_n).$$

بحث. در اینجا، شگرد این است که به نابرابری زیر توجه کنیم:

$$\begin{aligned}|s_nt_n - st| &= |s_nt_n - s_nt + s_nt - st| \\ &\leq |s_nt_n - s_nt| + |s_nt - st| = |s_n| \cdot |t_n - t| + |t| \cdot |s_n - s|\end{aligned}$$

برای مقادیر بزرگ n، $|t_n - t|$ و $|s_n - s|$ کوچک‌اند. البته، $|t|$ مقداری ثابت است. خوشبختانه، قضیه ۱.۹ نشان می‌دهد که $|s_n|$ کراندار است. بنابراین، می‌توانیم نشان دهیم که $|s_nt_n - st|$ کوچک می‌شود.

برهان. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. بنا بر قضیهٔ ۱.۹، عدد ثابتی مانند $M > ۰$ موجود است به طوری که به ازای همه nها، $|s_n| \leq M$. چون $\lim t_n = t$، $N_۱$ای موجود است به طوری که

$n > N_۱$ مستلزم آن است که $|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{۲M}$.

همچنین، چون $\lim s_n = s$، عددی مانند $N_۲$ موجود است به طوری که

$n > N_۲$ مستلزم آن است که $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{۲(|t| + ۱)}$.

[چون ممکن است مقدار t صفر شود، $\varepsilon/۲(|t| + ۱)$ را به جای $\varepsilon/۲|t|$ به کار برده‌ایم.] اینک، اگر $N = \max\{N_۱ , N_۲\}$، آنگاه $n > N$ مستلزم آن است که

$$\begin{aligned}|s_nt_n - st| &\leq |s_n| \cdot |t_n - t| + |t| \cdot |s_n - s| \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{۲M} + |t| \cdot \frac{\varepsilon}{۲(|t| + ۱)} < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon .\end{aligned}$$ □

برای بررسی خارج قسمت دنباله‌ها، ابتدا به معکوس آنها می‌پردازیم.

۵.۹ لم. اگر (s_n) به s همگرا باشد و به ازای هر n، $s_n \neq 0$ و اگر $s \neq 0$، آنگاه $(1/s_n)$ به $(1/s)$ همگرا است.

بحث. با در نظر گرفتن تساوی زیر، بحث را آغاز می‌کنیم.

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \frac{|s - s_n|}{|s_n s|} .$$

به ازای nهای بزرگ صورتِ کسر کوچک است. تنها اشکالِ ممکن این است که برای مقادیر بزرگ n، مخرجِ آن نیز کوچک می‌شود. این مشکل در مثال ۶ از بخش ۸ حل شد، که در آنجا ثابت کردیم که $m = \inf\{|s_n| : n \in N\} > 0$. بنابراین،

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| \leq \frac{|s - s_n|}{m|s|} ,$$

و آشکار است که چگونه باید برهان را پیش ببریم.

برهان. فرض کنید $\varepsilon > 0$. بنابر مثال ۶ از بخش ۸، عددی مانند $m > 0$ موجود است به طوری که به ازای هر n، $|s_n| \geq m$. چون $\lim s_n = s$، عددی مانند N موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|s - s_n| < \varepsilon\, m|s|$.

در این صورت، $n > N$ ایجاب می‌کند که

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \frac{|s - s_n|}{|s_n s|} \leq \frac{|s - s_n|}{m|s|} < \varepsilon . \qquad \square$$

۶.۹ قضیه. فرض کنید که (s_n) به s و (t_n) به t همگرا باشد. اگر $s \neq 0$ و به ازای هر n، $s_n \neq 0$، آنگاه (t_n/s_n) به (t/s) همگرا است.

برهان. بنابر لمِ ۵.۹، $(1/s_n)$ به $1/s$ همگراست، و لذا، بنابر قضیه ۴.۹،

$$\lim(t_n/s_n) = \lim(1/s_n) \cdot t_n = (1/s) \cdot t = t/s . \qquad \square$$

قضایای حدی بالا و چند مثال استاندارد، این امکان را فراهم می‌کند که به سادگی به توان بسیاری از حدها را محاسبه کرد.

۷.۹ مثالهای اساسی.

(الف) به ازای $p > ۰$، $\lim(۱/n^p) = ۰$.

(ب) اگر $|a| < ۱$، $\lim a^n = ۰$.

(پ) $\lim(n^{۱/n}) = ۱$

(ت) به ازای $a > ۰$، $\lim(a^{۱/n}) = ۱$.

برهان.

(الف) فرض کنید که $\varepsilon > ۰$ و $N = (۱/\varepsilon)^{۱/p}$. در این صورت، $n > N$ مستلزم آن است که $n^p > ۱/\varepsilon$. بنابراین، $۱/n^p < \varepsilon$. چون $۱/n^p > ۰$، این نشان می‌دهد که $n > N$ مستلزم آن است که $|۱/n^p - ۰| < \varepsilon$. [معنی n^p، وقتی که p عددی صحیح نباشد، در بخش ۳۷ بحث خواهد شد.]

(ب) می‌توانیم چنین فرض کنیم که $a \neq ۰$. زیرا، برای $a = ۰$، تساوی $\lim a^n = ۰$ بدیهی است. چون $|a| < ۱$، می‌توانیم بنویسیم که $|a| = ۱/(۱ + b)$، که در آن $b > ۰$. بنابرِ قضیهٔ دوجمله‌ای [تمرین ۱۲.۱]، $(۱ + b)^n \geq ۱ + nb > nb$. بنابراین،

$$|a^n - ۰| = |a|^n = \frac{۱}{(۱ + b)^n} < \frac{۱}{nb}.$$

اینک، $\varepsilon > ۰$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $N = ۱/\varepsilon b$. در این صورت، $n > N$ مستلزم آن است که $n > ۱/\varepsilon b$، و بنابراین، $|a^n - ۰| < ۱/nb < \varepsilon$.

(پ) فرض کنید $s_n = n^{۱/n} - ۱$ و توجه کنید که به ازای هر n، $s_n \geq ۰$. بنابر قضیهٔ ۳.۹، کافی است نشان دهیم که $\lim s_n = ۰$. چون $۱ + s_n = n^{۱/n}$، داریم $(۱ + s_n)^n = n$. به ازای $n \geq ۲$، بسط دو جمله‌ای $(۱ + s_n)^n$ را به کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که

$$n = (۱ + s_n)^n \geq ۱ + ns_n + \frac{۱}{۲} n(n - ۱) s_n^۲ > \frac{۱}{۲} n(n - ۱) s_n^۲.$$

بنابراین، $n > \frac{۱}{۲} n(n - ۱) s_n^۲$، و لذا، $s_n^۲ < ۲/(n - ۱)$. در نتیجه، به ازای $n \geq ۲$، $s_n < \sqrt{۲/(n - ۱)}$. حال، برهان استانداردی نشان می‌دهد که $\lim s_n = ۰$؛ تمرین ۷.۹

را ببینید.

(ت) ابتدا، فرض کنید $a > ۱$. در این صورت، به ازای $n \ge a$ داریم $۱ \le a^{۱/n} \le n^{۱/n}$. چون $\lim n^{۱/n} = ۱$. به سادگی نتیجه می‌شود که $\lim(a^{۱/n}) = ۱$. با تمرین ۵.۸ (الف) مقایسه کنید. فرض کنید $۰ < a < ۱$، در این صورت $۱/a > ۱$ و بنابراین، از بالا نتیجه می‌شود که $\lim(۱/a)^{۱/n} = ۱$. حال لم ۵.۹ نشان می‌دهد که $\lim(a^{۱/n}) = ۱$. □

مثال ۱. ثابت کنید $\lim s_n = ۱/۴$، که در آن،

$$s_n = \frac{n^۳ + ۶n^۲ + ۷}{۴n^۳ + ۳n - ۴}.$$

حل. داریم

$$s_n = \frac{۱ + \frac{۶}{n} + \frac{۷}{n^۳}}{۴ + \frac{۳}{n^۲} - \frac{۴}{n^۳}}$$

بنابر ۷.۹ (الف)، داریم $\lim(۱/n) = ۰$ و $\lim(۱/n^۳) = ۰$. پس، بنابر قضیه‌های ۳.۹ و ۲.۹ خواهیم داشت،

$$\lim(۱ + \frac{۶}{n} + \frac{۷}{n^۳}) = \lim(۱) + ۶\lim(\frac{۱}{n}) + ۷\lim(\frac{۱}{n^۳}) = ۱ .$$

به همین نحو، داریم

$$\lim(۴ + \frac{۳}{n^۲} - \frac{۴}{n^۳}) = ۴ .$$

بنابراین، قضیهٔ ۶.۹ مستلزم آن است که $\lim s_n = ۱/۴$. □

مثال ۲. حاصلِ $\lim[(n - ۵)/(n^۲ + ۷)]$ را پیدا کنید.

حل. فرض کنید $s_n = (n - ۵)/(n^۲ + ۷)$. می‌توانیم s_n را به صورت $(۱ - ۵/n)/(n + ۷/n)$ بنویسیم. امّا، مخرج آن همگرا نیست. بنابراین، چنین می‌نویسیم:

$$s_n = \frac{\frac{۱}{n} - \frac{۵}{n^۲}}{۱ + \frac{۷}{n^۲}}$$

حال، بنابر ۷.۹ (الف) و قضیه‌های ۳.۹ و ۲.۹، $\lim(۱/n - ۵/n^۲) = ۰$. به همین نحو، $\lim(۱ + ۷/n^۲) = ۱$. بنابراین، قضیهٔ ۶.۹ بیان می‌کند که $\lim s_n = ۰/۱ = ۰$. □

مثال ۳. حاصل $\lim[(n^۲ + ۳)/(n + ۱)]$ را پیدا کنید.

حل. می‌توانیم عبارت $(n^۳ + ۳)/(n + ۱)$ را به صورت

$$\frac{n + \frac{۳}{n}}{۱ + \frac{۱}{n}} \quad \text{،} \quad \text{یا} \quad \frac{۱ + \frac{۳}{n^۲}}{\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n^۲}}$$

بنویسیم.' هر دو کسر ما را دچار مشکل می‌کند؛ یا صورت کسر همگرا نیست یا مخرج همگرا به صفر است. چنین نتیجه می‌شود که $(n^۲ + ۳)/(n + ۱)$ همگرا نیست، و نماد $\lim[(n^۲ + ۳)/(n + ۱)]$، حداقل در شرایط فعلی، تعریف نشده است؛ مثال ۶ را ببینید. در اینجا، خوانندگان ممکن است میل داشته باشند که نماد $+\infty$ را به کار ببرند. کار بعدی ما آن است که چنین استفاده‌ای از نماد $+\infty$ را موجّه سازیم. برای دنباله‌ای مانند s_n، می‌نویسیم $\lim s_n = +\infty$ و این به این معنی خواهد بود که جمله‌های s_n، درنهایت، همه بزرگ می‌شوند تعریفی مختصر چنین است.

۸.۹ تعریف. برای دنباله‌ای، مانند (s_n)، می‌نویسیم $\lim s_n = +\infty$، مشروط بر آنکه

به ازای هر $M > ۰$، عددی مانند N موجود باشد به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $s_n > M$.

در این حالت می‌گوییم که دنباله، واگرا به $+\infty$ است.

به همین نحو، می‌نویسیم $\lim s_n = -\infty$، مشروط بر آنکه

به ازای هر M، $M < ۰$، عددی مانند N موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $s_n < M$.

از این به بعد خواهیم گفت که (s_n) دارای حد است یا اینکه حد آن موجود است در صورتی که (s_n) همگرا باشد یا واگرا به $+\infty$ باشد و یا واگرا به $-\infty$ باشد. در تعریف $\lim s_n = +\infty$ مقادیر مورد نظر برای M، اعداد مثبت بزرگ‌اند: هر قدر که M بزرگ باشد، Nای بزرگ را طلب می‌کند. در تعریف $\lim s_n = -\infty$، مقادیر مورد نظر برای M، اعداد منفی «بزرگ»، مانند -۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ هستند. □

مثال ۴. داریم $\lim n^۲ = +\infty$، $\lim (-n) = -\infty$، $\lim ۲^n = +\infty$، $\lim(\sqrt{n} + ۷) = +\infty$. البته، بسیاری از دنباله‌ها، با اینکه بیکران اند، دارای حد $+\infty$ یا $-\infty$ نیستند. برای مثال، دنباله‌هایی که با $s_n = (-۱)^n n$ و $t_n = n \cos^۲(n\pi/۲)$ تعریف شده‌اند، بیکران هستند. اما، آنها واگرا به $+\infty$ یا $-\infty$ نیستند. بنابراین، عبارتهای $\lim[(-۱)^n n]$ و $\lim[n \cos^۲(n\pi/۲)]$ بی‌معنی هستند. توجه کنید که وقتی n زوج باشد، $t_n = n$ و وقتی که n فرد باشد $t_n = ۰$. □

راهکار مربوط به برهانهای متضمن حدهای نامتناهی، بسیار شبیه به حدهای متناهی است. در اینجا، چندین مثال ارائه می‌دهیم.

مثال ۵. برهانی صوری برای $\lim(\sqrt{n} + ۷) = +\infty$ ارائه دهید.

بحث. باید $M > ۰$ دلخواهی را در نظر بگیریم و ثابت کنیم که عددی مانند N [که به M بستگی خواهد داشت] موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $\sqrt{n} + ۷ > M$.

برای اینکه ببینیم N به چه بزرگی باشد باید نابرابری $\sqrt{n} + ۷ > M$ را برحسب n «حل کنیم». این نابرابری برقرار است مشروط بر اینکه $\sqrt{n} > M - ۷$ یا $n > (M - ۷)^۲$. بنابراین، N را به صورت $N = (M - ۷)^۲$ انتخاب خواهیم کرد.

برهان صوری. فرض کنید $M > ۰$ و $N = (M - ۷)^۲$. در این صورت، $n > N$ مستلزم آن است که $n > (M - ۷)^۲$، پس $\sqrt{n} > M - ۷$. بنابراین، $\sqrt{n} + ۷ > M$. این نشان می‌دهد که $\lim(\sqrt{n} + ۷) = +\infty$.

مثال ۶. برهانی صوری برای $\lim[(n^۲ + ۳)/(n + ۱)] = +\infty$ ارائه دهید؛ مثال ۳ را ببینید.

بحث. $M > ۰$ را در نظر بگیرید. لازم است تعیین کنیم که n به چه بزرگی باید باشد تا تضمین کند که $(n^۲ + ۳)/(n + ۱) > M$. ایده آن است که کسر $(n^۲ + ۳)/(n + ۱)$ را از پایین به وسیله مضربی از $n^۲/n = n$ کراندار کنیم؛ با مثال ۳ از بخش ۸ مقایسه کنید. چون $n^۲ + ۳ > n^۲$ و $n + ۱ \le ۲n$، پس داریم $(n^۲ + ۳)/(n + ۱) > n^۲/۲n = \frac{۱}{۲}n$، و کافی است قرار دهیم $\frac{۱}{۲}n > M$.

برهان صوری. فرض کنید $M > ۰$ و فرض کنید $N = ۲M$. در این صورت، $n > N$ مستلزم آن است که $\frac{۱}{۲}n > M$، که این نیز ایجاب می‌کند که

$$\frac{n^۳ + ۳}{n + ۱} > \frac{n^۲}{۲n} = \frac{۱}{۲}n > M .$$

پس $\lim[(n + ۳)/(n + ۱)] = +\infty$. □

در صورتی که می‌توانستیم قضیه‌ای حدی به کار ببریم، می‌توانستیم ساده‌تر از عهدهٔ مثال ۶ برآییم. امّا قضیه‌های حدّی ۲.۹ – ۶.۹ را نمی‌توان به کاربرد.

هشدار. سعی نکنید که قضیه‌های حدی ۲.۹ ـ ۶.۹ را در مورد حدهای نامتناهی به کار ببرید. بلکه از قضیه‌های ۹.۹ یا ۱۲.۹ زیر، یا تمرینهای ۹.۹ ـ ۱۲.۹، استفاده کنید.

۹.۹ قضیه. فرض کنید (s_n) و (t_n) دنباله‌هایی باشند به طوری که $\lim s_n = +\infty$ و $\lim t_n > ۰$ [$\lim t_n$ می‌تواند متناهی یا $+\infty$ باشد]. در این صورت، $\lim s_n t_n = +\infty$.

بحث. فرض کنید $M > ۰$. لازم است نشان دهیم که به ازای nهای بزرگ، $s_n t_n > M$. داریم $\lim s_n = +\infty$ و لازم است مطمئن شویم که به ازای nهای بزرگ، t_nها از ۰ دورند. عددی حقیقی مانند m را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $۰ < m < \lim t_n$ و مشاهده می‌کنیم که برای nهای بزرگ، $t_n > m$. در این صورت، نیاز داریم به اینکه برای nهای بزرگ $s_n > M/m$.

برهان. فرض کنید $M > 0$. عددی حقیقی مانند m را به گونه‌ای اختیار کنید که $0 < m < \lim t_n$، خواه $\lim t_n = +\infty$ و خواه چنین نباشد. روشن است که N_1 ای موجود است به طوری که

$$n > N_1 \text{ مستلزم آن است که } t_n > m ;$$

نگاه کنید به تمرین ۸.۱۰. چون $\lim s_n = +\infty$، عددی مانند N_2 موجود است به طوری که

$$n > N_2 \text{ مستلزم آن است که } s_n > M/m .$$

قرار دهید $N = \max\{N_1 , N_2\}$. در این صورت، $n > N$ مستلزم آن است که $s_n t_n > (M/m) . m = M$. □

مثال ۷. مشاهده می‌کنیم که $s_n t_n = (n^2 + 3)/(n + 1) = (n + 3/n)/(1 + 1/n)$ که در آن، $s_n = n + 3/n$, $t_n = 1/(1 + 1/n)$. به سادگی ثابت می‌شود که $\lim s_n = +\infty$, $\lim t_n = 1$. پس، بنابر قضیهٔ ۹.۹، داریم $\lim s_n t_n = +\infty$. □

قضیه مفید دیگری چنین است:

۹.۱۰ قضیه. برای دنباله‌ای، مانند s_n، از اعداد حقیقی مثبت داریم $\lim s_n = +\infty$ اگر و تنها اگر $\lim(1/s_n) = 0$.

برهان. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. باید نشان دهیم که

(۱) $\lim s_n = +\infty$ مستلزم آن است که $\lim(1/s_n) = 0$

و

(۲) $\lim(1/s_n) = 0$ مستلزم آن است که $\lim s_n = +\infty$.

در این حالت، برهانها به نظر بسیار شبیه هم خواهند آمد، ولی مراحل تفکر کاملاً متفاوت‌اند.

برای اثبات (۱)، فرض کنید که $\lim s_n = +\infty$. فرض کنید $\varepsilon \geq 0$ و $M = 1/\varepsilon$. چون $\lim s_n = +\infty$، عدد Nای موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $s_n > M = 1/\varepsilon$.

بنابراین، $n > N$ مستلزم آن است که $0 < 1/s_n < \varepsilon$ و در نتیجه،

$n > N$ مستلزم آن است که $|1/s_n - 0| < \varepsilon$،

یعنی، $\lim(1/s_n) = 0$. این (۱) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (۲)، نمادهای بند گذشته را کنار می‌گذاریم و از نو شروع می‌کنیم. فرض کنید که $\lim(1/s_n) = 0$. فرض کنید $M > 0$ و $\varepsilon = 1/M$. در این صورت، $\varepsilon > 0$ و بنابراین، N ای موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|1/s_n - 0| < \varepsilon = 1/M$. چون $s_n > 0$، می‌توانیم بنویسیم،

$n > N$ مستلزم آن است که $0 < 1/s_n < 1/M$،

و بنابراین، نتیجه می‌شود که

$n > N$ مستلزم آن است که $M < s_n$، □

یعنی $\lim s_n = +\infty$ و (۲) برقرار است.

تمرینها

۱.۹. با استفاده از قضیه‌های حدی ۲.۹ - ۶.۹ و ۷.۹، احکام زیر را ثابت کنید. برای همهٔ مراحل دلیل بیاورید.

(الف) $\lim [(n + 1)/n] = 1$ (ب) $\lim[(3n + 7)/(6n - 5)] = 1/2$

(پ) $\lim[(17n^5 + 73n^4 - 18n^2 + 3)/(23n^5 + 13n^3)] = 17/23$

۲.۹. فرض کنید که $\lim x_n = 3$، $\lim y_n = 7$، و اینکه y_nها ناصفرند. حدهای زیر را تعیین کنید:

(الف) $\lim(x_n + y_n)$ (ب) $\lim [(3y_n - x_n)/y_n^2]$

۳.۹. فرض کنید $\lim a_n = a$، $\lim b_n = b$ و $s_n = (a_n^3 + 4a_n)/(b_n^2 + 1)$. با استفاده از قضیه‌های حدی، ثابت کنید که $\lim s_n = (a^3 + 4a)/(b^2 + 1)$.

۴.۹. فرض کنید $s_1 = 1$ و برای $n \geq 1$، فرض کنید $s_{n+1} = \sqrt{s_n + 1}$

(الف) چهار جملهٔ اول (s_n) را فهرست کنید.

(ب) ثابت می‌شود که (s_n) همگرا است. با قبول این نتیجه، ثابت کنید که حد آن برابر $(1 + \sqrt{5})/2$ است.

۵.۹. فرض کنید $t_1 = ۱$ و برای $n \ge ۱$، $t_{n+1} = (t_n^2 + ۲)/۲t_n$. فرض کنید (t_n) همگرا باشد. حد آن را پیدا کنید.

۶.۹. فرض کنید $x_1 = ۱$ و برای $n \ge ۱$، $x_{n+1} = ۳x_n^2$.

(الف) نشان دهید که اگر $a = \lim x_n$، آنگاه $a = ۱/۳$ یا $a = ۰$.

(ب) آیا $\lim x_n$ موجود است؟ توضیح دهید.

(پ) در مورد تناقض ظاهری بین بخشهای (الف) و (ب) بحث کنید.

۷.۹. برهان ۷.۹ (پ) را کامل کنید؛ یعنی برهان استاندارد لازم را برای اثبات اینکه $\lim s_n = ۰$، ارائه دهید.

۸.۹. حدهای زیر را در صورت وجود ارائه دهید. در غیر این صورت، حکم کنید که «موجود نیستند».

(الف) $\lim n^3$ (ب) $\lim (-n^3)$

(پ) $\lim (-n)^n$ (ت) $\lim (۱٫۰۱)^n$

(ث) $\lim n^n$

۹.۹. فرض کنید N_0ای موجود باشد به طوری که برای هر $n > N_0$، $s_n \le t_n$.

(الف) ثابت کنید که اگر $\lim s_n = +\infty$، آنگاه $\lim t_n = +\infty$.

(ب) ثابت کنید که اگر $\lim t_n = -\infty$، آنگاه $\lim s_n = -\infty$.

(پ) ثابت کنید که اگر $\lim s_n$ و $\lim t_n$ موجود باشد، آنگاه $\lim s_n \le \lim t_n$.

۱۰.۹. (الف) نشان دهید که اگر $\lim s_n = +\infty$ و $k > ۰$، آنگاه $\lim(k\, s_n) = +\infty$.

(ب) نشان دهید که $\lim s_n = +\infty$ اگر و تنها اگر $\lim(-s_n) = -\infty$.

(پ) نشان دهید که اگر $\lim s_n = +\infty$ و $k < ۰$، آنگاه $\lim(k\, s_n) = -\infty$.

۱۱.۹. (الف) نشان دهید که اگر $\lim s_n = +\infty$ و $\inf\{t_n : n \in N\} > -\infty$ آنگاه $\lim(s_n + t_n) = +\infty$.

(ب) نشان دهید که اگر $\lim s_n = +\infty$ و $\lim t_n > -\infty$، آنگاه $\lim(s_n + t_n) = +\infty$.

(پ) نشان دهید که اگر $\lim s_n = +\infty$ و اگر (t_n) دنباله‌ای کراندار باشد، آنگاه $\lim(s_n + t_n) = +\infty$.

۱۲.۹. فرض کنید که به ازای هر n، $s_n \ne ۰$ و حد $\lim|s_{n+1}/s_n| = L$ موجود باشد.

(الف) نشان دهید که اگر $L < ۱$، آنگاه $\lim s_n = ۰$. راهنمایی: a را طوری اختیار کنید که

$1 > a > L$، و N را به گونه‌ای به دست آورید که برای $n > N$، $|s_{n+1}| < a\,|s_n|$. در این صورت، نشان دهید که به ازای $n > N$، $|s_n| < a^{n-N}\,|s_N|$.

(ب) نشان دهید که اگر $L > 1$، آنگاه $\lim s_n = +\infty$. راهنمایی: (الف) را برای دنبالهٔ $t_n = 1/s_n$ به کار ببرید؛ نگاه کنید به قضیهٔ ۱۰.۹.

۱۳.۹. نشان دهید که

$$\lim a^n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } |a| < 1 \\ 1 & \text{اگر } a = 1 \\ +\infty & \text{اگر } a > 1 \\ \text{وجود ندارد} & \text{اگر } a \leq -1 \end{cases}$$

۱۴.۹. فرض کنید $p > 0$. با به کار بردن تمرین ۱۲.۹، نشان دهید که

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } |a| \leq 1 \\ +\infty & \text{اگر } a > 1 \\ \text{وجود ندارد} & \text{اگر } a < -1 \end{cases}$$

۱۵.۹. نشان دهید که به ازای هر $a \in \mathbf{R}$، $\lim a^n/n! = 0$.

۱۶.۹. از قضیه‌های ۹.۹ یا ۱۰.۹، یا تمرینهای ۹.۹ – ۱۵.۹ استفاده کرده احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) $\lim[(n^4 + 8n)/(n^2 + 9)] = +\infty$.

(ب) $\lim[2^n/n^2 + (-1)^n] = +\infty$.

(پ) $\lim[3^n/n^3 - 3^n/n!] = +\infty$.

۱۷.۹. تنها با استفاده از تعریف ۸.۹، برهانی صوری برای اینکه $\lim n^2 = +\infty$، ارائه دهید.

۱۸.۹. (الف) تحقیق کنید که به ازای $a \neq 1$، $1 + a + a^2 + \dots + a^n = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$.

(ب) به ازای $|a| < 1$ مقدار $\lim_{n\to+\infty} (1 + a + a^2 + \dots + a^n)$ را پیدا کنید.

(پ) حاصل $\lim_{n\to+\infty} (1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + \dots + 1/3^n)$ را محاسبه کنید.

(ث) به ازای $a > 1$، $\lim_{n\to+\infty} (1 + a + a^2 + \dots + a^n)$ چیست؟

بخش ۱۰. دنباله‌های یکنوا و دنباله‌های کوشی

در این بخش دو قضیه [قضیه‌های ۲.۱۰ و ۱۱.۱۰] را به دست می‌آوریم که به ما این اجازه را می‌دهند بدون اینکه مقدار حد را از پیش بدانیم، نتیجه بگیریم که دنباله‌های معینی همگرا هستند. این قضیه‌ها مهم‌اند. زیرا در عمل، حدها معمولاً از پیش معلوم نیستند.

۱.۱۰ تعریف. دنباله‌ای مانند (s_n) از اعداد حقیقی دنبالهٔ نانزولی نامیده می‌شود در صورتی که برای هر n، $s_n \le s_{n+1}$؛ و (s_n) دنبالهٔ ناصعودی نامیده می‌شود در صورتی که برای هر n، $s_n \le s_{n+1}$. توجه کنید که اگر (s_n) نانزولی باشد آنگاه $s_n \le s_m$ در صورتی که $n < m$. دنباله‌ای که نانزولی یا ناصعودی باشد، دنبالهٔ یکنوا نامیده می‌شود.

مثال ۱. دنباله‌هایی که به صورت $a_n = 1 - \frac{1}{n}$، $b_n = n^2$ و $c_n = (1 + 1/n)^n$ تعریف شده‌اند. دنباله‌های نانزولی‌اند. دنبالهٔ $d_n = 1/n^2$ ناصعودی است. دنباله‌های $s_n = (-1)^n$، $t_n = \cos(n\pi/3)$، $u_n = (-1)^n n$، و $v_n = (-1)^n/n$ دنباله‌های یکنوا نیستند. همچنین، $x_n = n^{1/n}$، به طوری که با امتحان چهار مقدار اول آن دیده می‌شود، یکنوا نیست. مثال ۱ (ت) در بخش ۷ را ببینید.

در بین دنباله‌های بالا، (a_n)، (c_n)، (d_n)، (s_n)، (t_n)، (v_n)، و (x_n) دنباله‌هایی کراندارند. بقیهٔ دنباله‌ها؛ یعنی، (b_n) و (u_n) دنباله‌هایی بیکرانند.

۲.۱۰ قضیه. همهٔ دنباله‌های یکنوای کراندار، همگرایند.

برهان. فرض کنید (s_n) دنبالهٔ نانزولی کرانداری باشد. فرض کنید که S معرف مجموعهٔ $\{s_n: n \in \mathbb{N}\}$ باشد و فرض کنید $u = \sup S$. چون S کراندار است، u نمایش عددی حقیقی است. نشان می‌دهیم که $\lim s_n = u$. فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون $u - \varepsilon$ کران بالایی برای S نیست، Nای موجود است به طوری که $s_N > u - \varepsilon$. چون (s_n) نانزولی است، به ازای همه nهایی که $n > N$، داریم $s_N \le s_n$. البته، به ازای هر n، $s_n \le u$، و بنابراین، $n > N$ مستلزم آن است که $u - \varepsilon < s_n \le u$، که خود مستلزم آن است که $|s_n - u| < \varepsilon$. این نشان می‌دهد که $\lim s_n = u$.

برهان را برای دنباله‌های ناصعودی کراندار، به عنوان تمرین ۲.۱۰، واگذار می‌کنیم. □

توجه کنید که اصل موضوع کمال ۴.۴ از اجزای اساسی برهان قضیه ۲.۱۰ است.

۳.۱۰ بحث اعداد اعشاری. ما توجه چندانی به این مفهوم که اعداد حقیقی صرفاً همان بسطهای اعشاری‌اند، معطوف نکرده‌ایم. این مفهوم در اصل درست است، امّا باید نکات ظریفی را مورد توجه قرار دهیم. به عنوان مثال، بسطهای اعشاری متمایز می‌توانند نمایندهٔ یک عدد حقیقی باشند. روشهای ساختن تاحدی مجرد $\mathbf{R}$ از اعداد حقیقی، که در بخش ۶ مورد بحث قرار گرفت، بسیار مناسب از کار در می‌آیند.

ما توجه خود را به اعداد حقیقی نامنفی و بسطهای اعشاری نامنفی محدود می‌کنیم. از دیدگاه ما، هر بسط اعشاری نامنفی صورت کوتاه نوشته‌ای برای جد دنباله‌ای نانزولی و کراندار از اعداد حقیقی است. فرض کنید $k.d_1d_2d_3d_4\ldots$ بسط اعشاری مفروض باشد که k یک عدد صحیح نامنفی است و هر یک از d_jها متعلق به $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ است. فرض کنید

$$s_n = k + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_n}{10^n} \qquad (1)$$

در این صورت، (s_n) دنباله‌ای نانزولی از اعداد حقیقی و (s_n) کراندار است [در حقیقت، به وسیله $k + 1$]. بنابراین، بنابر قضیهٔ ۲.۱۰، (s_n) به عددی حقیقی، که بنابر رسم معمولی آن را به صورت $k.d_1d_2d_3d_4\ldots$ می‌نویسیم، همگرا است. به عنوان مثال ...۳٫۳۳۳۳ نمایش عدد

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots + \frac{3}{10^n}\right)$$

است. برای محاسبهٔ این حد، از مثاله ۱ در بخش ۱۴، نتیجهٔ زیر را در مورد سریهای هندسی به عاریت می‌گیریم:

$$\lim_{n\to+\infty} a(1 + r + r^2 + \ldots + r^n) = \frac{a}{1 - r}\ , \quad |r| < 1\ , \qquad (2)$$

همچنین، نگاه کنید به تمرین ۱۸.۹. در حالت مورد نظر ما وقتی که $a = 3$، $r = 1/10$، همان طور که انتظار داریم، ...۳٫۳۳۳۳ نمایش عدد $10/3 = 3/(1 - 1/10)$ است. به همین نحو، ...۰٫۹۹۹۹ نمایش عدد زیر است:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n}\right) = \frac{9/10}{1 - 1/10} = 1\,.$$

بنابراین ... ۹۹۹۹ر۰ و ... ۰۰۰۰ر۱ بسطهای اعشاری متمایزی هستند که عدد حقیقی واحدی را نمایش می‌دهند.

عکس بحث فوق نیز معتبر است. یعنی، هر عدد حقیقی نامنفی x حداقل دارای یک بسط اعشاری است. این موضوع، همراه با بعضی از نتایج وابسته، در بخش اختیاری ۱۶، ثابت خواهد شد.

دنباله‌های یکنوای بیکران نیز دارای حدهایی هستند.

۴.۱۰ قضیه.

(i) اگر (s_n) دنبالهٔ نانزولی بیکرانی باشد، آنگاه $\lim s_n = +\infty$.

(ii) اگر (s_n) دنبالهٔ ناصعودی بیکرانی باشد، آنگاه $\lim s_n = -\infty$.

برهان.

(i) فرض کنید (s_n) دنباله‌ای نانزولی و بیکران باشد. فرض کنید $M > 0$. چون مجموعهٔ $\{s_n : n \in \mathbf{N}\}$ بیکران است و از پایین به وسیلهٔ s_1 کراندار است، باید از بالا بیکران باشد. بنابراین، به ازای Nای در $\mathbf{N}$ داریم $s_N > M$. آشکار است که $n > N$ مستلزم آن است که $s_n \geq s_N > M$ و بنابراین، $\lim s_n = +\infty$.

(ii) برهان این قسمت مانند برهان (i) است و به عنوان تمرین ۵.۱۰ واگذار می‌شود. □

۵.۱۰ نتیجه. اگر (s_n) دنباله‌ای یکنوا باشد، آنگاه این دنباله یا همگرا است، یا واگرا به $+\infty$ است، و یا واگرا به $-\infty$ است. در نتیجه، $\lim s_n$ همیشه برای دنباله‌های یکنوا با معنی است.

برهان. قضیه‌های ۲.۱۰ و ۴.۱۰ را به کار ببرید. □

فرض کنید (s_n) دنباله‌ای کراندار در $\mathbf{R}$ باشد؛ این دنباله ممکن است همگرا باشد یا نباشد. از تعریف حدّ در ۱.۷، آشکار است که رفتار حدی دنبالهٔ (s_n) تنها به مجموعه‌هایی به صورت $\{s_n : n > N\}$ بستگی دارد. به عنوان مثال، اگر $\lim s_n$ موجود باشد، واضح است که مقدار آن

باید به بازه $[u_N, v_N]$ تعلق داشته باشد، که در آن، $u_N = \inf\{s_n : n > N\}$ و $v_N = \sup\{s_n : n > N\}$؛ نگاه کنید به تمرین ۹.۸. با افزایش N، مجموعه‌های $\{s_n : n > N\}$ کوچکتر می‌شوند، و بنابراین، داریم

$$u_1 \le u_2 \le u_3 \le \dots \quad \text{و} \quad v_1 \ge v_2 \ge v_3 \ge \dots;$$

نگاه کنید به تمرین ۷.۴ (الف). بنابر قضیهٔ ۲.۱۰، حدهای $u = \lim_{N\to+\infty} u_N$ و $v = \lim_{N\to+\infty} v_N$ و $u \le v$؛ زیرا، برای هر N، $u_N \le v_N$. اگر $\lim s_n$ موجود باشد آنگاه، همچنان که در بالا متذکر شدیم، برای هر N، $u_N \le \lim s_n \le v_N$، بنابراین، باید داشته باشیم $u \le \lim s_n \le v$. اعداد u و v مفیدند، صرف نظر از اینکه $\lim s_n$ موجود باشد یا نباشد، این حدها به ترتیب با $\lim\inf s_n$ و $\lim\sup s_n$ نشان داده می‌شوند.

۶.۱۰ تعریف. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\lim\sup s_n = \lim_{N\to+\infty} \sup\{s_n : n > N\} \tag{1}$$

و

$$\lim\inf s_n = \lim_{N\to+\infty} \inf\{s_n : n > N\}. \tag{2}$$

توجه کنید که در این تعریف، ما خود را مقید به اینکه (s_n) کراندار باشد، نمی‌کنیم. با وجود این، قراردادهای زیر را می‌پذیریم:

اگر (s_n) کران بالا نداشته باشد، برای هر N، $\sup\{s_n : n > N\} = +\infty$، و حکم می‌کنیم که $\lim\sup s_n = +\infty$. به همین نحو، اگر (s_n) کران پایین نداشته باشد، برای هر N، $\inf\{s_n : n > N\} = -\infty$، و حکم می‌کنیم که $\lim\inf s_n = -\infty$.

تأکید می‌کنیم که لازم نیست $\lim\sup s_n$ برابر $\sup\{s_n : n \in \mathbf{N}\}$ باشد، امّا $\lim\sup s_n \le \sup\{s_n : n \in \mathbf{N}\}$. برخی از مقادیر s_n ممکن است خیلی بزرگتر از $\lim\sup s_n$ باشند؛ $\lim\sup s_n$ بزرگترین مقداری است که تعدادی نامتناهی از s_nها می‌توانند به آن نزدیک شوند. تذکرات مشابهی برای $\lim\inf s_n$ صادق است. این تذکرات در قضیه ۷.۱۱ و بخش ۱۲ توضیح داده می‌شوند، و در آنجا بحث کاملی دربارهٔ $\lim\sup$ و $\lim\inf$ ارائه خواهد شد. در

حال حاضر، ما به قضیه‌ای نیاز داریم که نشان می‌دهد (s_n) دارای حدی است اگر و تنها اگر $\lim\inf s_n = \lim\sup s_n$.

۷.۱۰ قضیه. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد.

(i) اگر $\lim s_n$ تعریف شده باشد [به عنوان یک عدد حقیقی، $+\infty$ یا $-\infty$] آنگاه

$$\lim\inf s_n = \lim s_n = \lim\sup s_n .$$

(ii) اگر $\lim\inf s_n = \lim\sup s_n$، آنگاه $\lim s_n$ تعریف شده است و

$$\lim s_n = \lim\inf s_n = \lim\sup s_n .$$

برهان. در سراسر برهان، نمادهای $u_N = \inf\{s_n : n > N\}$، $v_N = \sup\{s_n : n > N\}$، $u = \lim u_N = \lim\inf s_n$ و $v = \lim v_N = \lim\sup s_n$ را به کار می‌بریم.

(۱) فرض کنید $\lim s_n = +\infty$. فرض کنید M یک عدد حقیقی مثبت باشد. در این صورت، عددی طبیعی مانند N موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $s_n > M$.

در این صورت، $u_N = \inf\{s_n : n \geq N\} \geq M$. نتیجه می‌شود که $m > N$ مستلزم آن است که $u_m \geq M$. به عبارت دیگر، دنبالهٔ (u_N) در شرایط تعریف $\lim u_N = +\infty$ صدق می‌کند؛ یعنی، $\lim\inf s_n = +\infty$. به همین نحو، $\lim\sup s_n = +\infty$.

حالت $\lim s_n = -\infty$ به روش مشابهی به انجام می‌رسد.

اینک، فرض کنید که $\lim s_n = s$ که در آن، s یک عدد حقیقی است. عدد مثبت ε را در نظر بگیرید. در این صورت، عددی طبیعی مانند N موجود است به طوری که به ازای $n > N$، $|s_n - s| < \varepsilon$. در نتیجه، به ازای $n > N$، $s_n < s + \varepsilon$ و بنابراین

$$v_N = \sup\{s_n : n > N\} \leq s + \varepsilon$$

همچنین، $m > N$ مستلزم آن است که $v_m \leq s + \varepsilon$ و بنابراین $\lim\sup s_n = \lim v_m \leq s + \varepsilon$. چون به ازای هر ε مثبت، صرف نظر از اینکه چقدر کوچک باشد، داریم $\lim\sup s_n < s + \varepsilon$؛ در نتیجه، $\lim\sup s_n \leq s = \lim s_n$. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $\lim s_n \leq \lim\inf s_n$. چون $\lim\inf s_n \leq \lim\sup s_n$، نتیجه می‌گیریم که این سه عدد مساوی‌اند:

$$\lim\inf s_n = \lim s_n = \lim\sup s_n .$$

(ii) اگر $\liminf s_n = \limsup s_n = +\infty$، به سادگی می‌توان نشان داد که $\lim s_n = +\infty$. اگر $\liminf s_n = \limsup s_n = -\infty$، به سادگی می‌توان نشان داد که $\lim s_n = -\infty$. بررسی این دو حالت خاص را به خواننده واگذار می‌کنیم.

سرانجام، فرض کنید $\liminf s_n = \limsup s_n = s$، که در آن، s یک عدد حقیقی است. لازم است ثابت کنیم که $\lim s_n = s$. فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون $s = \lim v_N$، عددی طبیعی مانند N_0 موجود است به طوری که

$$|s - \sup\{s_n : n > N_0\}| < \varepsilon .$$

بنابراین، $\sup\{s_n : n > N_0\} < s + \varepsilon$ و لذا،

(۱) به ازای هر $n > N_0$، $s_n < s + \varepsilon$.

به همین نحو، چون $s = \lim u_N$، عددی مانند N_1 موجود است به طوری که $|s - \inf\{s_n: n > N_1\}| < \varepsilon$، بنابراین، $\inf\{s_n : n > N_1\} > s - \varepsilon$، و در نتیجه

(۲) به ازای هر $n > N_1$، $s_n > s - \varepsilon$.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\text{به ازای } n > \max\{N_0 , N_1\}\text{،}\quad s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$$

و این معادل این است که

$$\text{به ازای } n > \max\{N_0 , N_1\}\text{،}\quad |s_n - s| < \varepsilon .$$

این ثابت می‌کند که $\lim s_n = s$ و این همان حکم مطلوب است. □

اگر (s_n) همگرا باشد آنگاه بنابر قضیه‌ای که هم اکنون ثابت شد $\liminf s_n = \limsup s_n$. بنابراین، برای Nهای بزرگ، اعداد $\sup\{s_n : n > N\}$ و $\inf\{s_n : n > N\}$ باید به هم نزدیک باشند. این مستلزم آن است که کلیهٔ اعداد در مجموعه $\{s_n: n > N\}$ باید به یکدیگر نزدیک باشند. این مطلب ما را به مفهومی رهنمون می‌کند که از لحاظ نظری اهمیت زیادی دارد و در سراسر این کتاب مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۱۰.۸ تعریف. دنباله‌ای، مانند (s_n)، از اعداد حقیقی را یک دنبالهٔ کوشی می‌نامند در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N موجود باشد به طوری که

(۱) m و $n > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

این تعریف را با تعریف ۱.۷ مقایسه کنید.

۹.۱۰ لم. دنباله‌های همگرا، دنباله‌های کوشی هستند.

برهان. فرض کنید $\lim s_n = s$. ایده برهان آن است که چون جملات s_n برای nهای بزرگ به s نزدیک‌اند، این جملات باید به یکدیگر نزدیک باشند؛ در حقیقت،

$$|s_n - s_m| = |s_n - s + s - s_m| \le |s_n - s| + |s - s_m| .$$

به طور دقیق، فرض کنید $\varepsilon > 0$. در این صورت، Nای موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

همچنین، آشکار است که می‌توانیم بنویسیم

$m > N$ مستلزم آن است که $|s - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}$،

و در نتیجه،

$m > N$ و n مستلزم آن است که

$$|s_n - s_m| \le |s_n - s| + |s - s_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

بنابراین، (s_n) یک دنبالهٔ کوشی است. □

۱۰.۱۰ لم. دنباله‌های کوشی، کراندارند.

برهان. برهان، مشابه برهان قضیهٔ ۱.۹ است. با به‌کاربردن تعریف ۸.۱۰ با $\varepsilon = 1$، Nای در N را به دست می‌آوریم به طوری که

$n > N$ و m مستلزم آن است که $|s_n - s_m| < 1$.

به ویژه اینکه، برای $n > N$، $|s_n - s_{N+1}| < 1$. بنابراین، برای $n > N$، $|s_n| < |s_{N+1}| + 1$.
اگر $M=\max\{|s_{N+1}|+1, |s_1|, |s_2|, \ldots, |s_N|\}$، آنگاه به ازای هر $n \in N$، $|s_n| \le M$. □

اهمیت قضیه بعدی در پیامد زیر است: برای تحقیق اینکه دنباله‌ای همگراست، کافی است تحقیق کنیم که آن دنباله، یک دنبالهٔ کوشی است. خاصیتی که کاری به حد دنباله ندارد.

۱۱.۱۰ قضیه. دنباله‌ای مفروض، یک دنباله همگرا است اگر و تنها اگر یک دنبالهٔ کوشی باشد.

برهان. عبارت «اگر و تنها اگر» دال بر آن است که باید صحت دو حکم زیر را معلوم کنیم: (i) دنباله‌های همگرا، دنباله‌های کوشی هستند، و (ii) دنباله‌های کوشی، دنباله‌های همگرا هستند. قبلاً، صحت (i) را در لم ۹.۱۰ تحقیق کردیم. برای تحقیق درستی (ii)، دنباله‌ای کوشی مانند (s_n) را در نظر می‌گیریم و توجه می‌کنیم که، بنابر لم ۱۰.۱۰، (s_n) کراندار است. بنابر قضیهٔ ۷.۱۰، تنها لازم است نشان دهیم که

$$\liminf s_n = \limsup s_n . \qquad (1)$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون (s_n) دنباله‌ای کوشی است، پس Nای موجود است به طوری که

$n > N$ و m مستلزم آن است که $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

به ویژه اینکه، برای کلیهٔ اعداد $n > N$ و m، $s_n < s_m + \varepsilon$. این، نشان می‌دهد که $s_m + \varepsilon$ یک کران بالا برای $\{s_n : n > N\}$ است. بنابراین، به ازای $m > N$، $v_N = \sup\{s_n : n > N\} \le s_m + \varepsilon$.

این، به نوبه خود، نشان می‌دهد که $v_N - \varepsilon$ یک کران پایین برای $\{s_m : m > N\}$ است، و بنابراین، $v_N - \varepsilon \le \inf\{s_m : m > N\} = u_N$. در نتیجه،

$$\limsup s_n \le v_N \le u_N + \varepsilon \le \lim s_n + \varepsilon .$$

چون، این نابرابری به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است، داریم $\limsup s_n \le \liminf s_n$. نابرابری عکس آن همیشه برقرار است، بنابراین، صحت (۱) را برقرار کرده‌ایم. □

در برهان قضیهٔ ۱۱.۱۰، از قضیهٔ ۷.۱۰ استفاده کرده‌ایم و قضیهٔ ۷.۱۰، به طور ضمنی، به اصل موضوع کمال ۴.۴ متکی است. زیرا، بدون اصل موضوع کمال واضح نیست که $\liminf s_n$ و $\limsup s_n$ معنی داشته باشند. اصل موضوع کمال این اطمینان را به ما می‌دهد که عبارتهای $\sup\{s_n : n > N\}$ و $\inf\{s_n : n > N\}$ در تعریف ۶.۱۰ معنی دارند وقضیهٔ ۲.۱۰ [که خود آن براصل موضوع کمال مبتنی است] این اطمینان را به ما می‌دهد که حدها در تعریف ۶.۱۰ با معنی اند.

تمرینها

تمرینهای مربوط به lim sup ها و lim inf ها، در بخشهای ۱۱ و ۱۲، آمده‌اند.

۱.۱۰. کدام یک از دنباله‌های زیر نانزولی‌اند؟ ناصعودی‌اند؟ کراندارند؟

(الف) $\frac{۱}{n}$ (ب) $(-۱)^n/n^۲$

(پ) $n^۵$ (ت) $\sin(n\pi/۷)$

(ت) $(-۲)^n$ (ج) $n/۳^n$

۲.۱۰. قضیهٔ ۲.۱۰ را برای دنباله‌های ناصعودی کراندار ثابت کنید.

۳.۱۰. برای بسط اعشاری ... $k.d_۱d_۲d_۳d_۴$، فرض کنید (s_n) به همان روش ۳.۱۰ تعریف شده‌باشد. ثابت کنید که به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $s_n < k + ۱$. راهنمایی: برای هر n، $۹/۱۰ + ۹/۱۰^۲ + ... + ۹/۱۰^n = ۱ - ۱/۱۰^n$.

۴.۱۰. بحث کنید که چرا قضیه‌های ۲.۱۰ و ۱۱.۱۰ در صورتی که اعداد مورد نظر به مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ از اعداد گویا محدود گردند، از اعتبار ساقط‌اند.

۵.۱۰. قضیهٔ ۴.۱۰ (ii) را ثابت کنید.

۶.۱۰. (الف) فرض کنید (s_n) دنباله‌ای باشد به طوری که

$$\text{به ازای هر } n \in \mathbf{N}\text{،}\quad |s_{n+۱} - s_n| < ۲^{-n}$$

ثابت کنید که (s_n) دنباله‌ای کوشی است و بنابراین دنباله‌ای همگراست.

(ب) آیا نتیجهٔ (الف) برقرار است در صورتی که تنها فرض کنیم به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $|s_{n+۱} - s_n| < ۱/n$؟

۷.۱۰. فرض کنید S یک زیر مجموعهٔ ناتهی و کراندار از $\mathbf{R}$ باشد و فرض کنید $\sup S \notin S$. ثابت کنید که دنباله‌ای نانزولی، مانند (s_n)، از نقاط S موجود است که $\lim s_n = \sup S$.

۸.۱۰. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای نانزولی از اعداد مثبت باشد و تعریف کنید $\gamma_n = (s_۱ + s_۲ + ... + s_n)/n$. ثابت کنید (γ_n) یک دنباله نانزولی است.

۹.۱۰. فرض کنید $s_۱ = ۱$ و $s_{n+۱} = (n/(n + ۱))s_n^۲$ (برای $n \ge ۱$).

(الف) $s_۲$، $s_۳$ و $s_۴$ را پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که $\lim s_n$ موجود است.

(پ) ثابت کنید که $\lim s_n = 0$.

۱۰.۱۰. فرض کنید $s_1 = 1$ و برای $n \geq 1$ ، $s_{n+1} = (s_n + 1)/3$.

(الف) s_2 ، s_3 ، و s_4 را پیدا کنید.

(ب) با استفاده از استقرا، نشان دهید که برای هر n ، $s_n > \frac{1}{2}$.

(پ) نشان دهید که (s_n) یک دنبالهٔ ناصعودی است.

(ت) نشان دهید که $\lim s_n$ موجود است و مقدار $\lim s_n$ را پیدا کنید.

۱۱.۱۰. فرض کنید $t_1 = 1$ و برای $n \geq 1$ ، $t_{n+1} = [1 - 1/(4n^2)] \cdot t_n$.

(الف) نشان دهید که $\lim t_n$ موجود است.

(ب) به نظرتان مقدار $\lim t_n$ چیست؟

۱۲.۱۰. فرض کنید $t_1 = 1$ و به ازای $n \geq 1$ ، $t_{n+1} = [1 - 1/(n + 1)^2] \cdot t_n$.

(الف) نشان دهید که $\lim t_n$ موجود است.

(ب) به نظرتان مقدار $\lim t_n$ چیست؟

(پ) با استفاده از استقرا نشان دهید که $t_n = (n + 1)/(2n)$.

(ت) قسمت (ب) را تکرار کنید.

بخش ۱۱. زیر دنباله‌ها

۱.۱۱ تعریف. فرض کنید $(s_n)_{n\in N}$ یک دنباله باشد. زیر دنباله‌ای از این دنباله، دنباله‌ای به صورت $(t_k)_{k\in N}$ است که در آن به ازای هر k ، عدد صحیح مثبتی مانند n_k موجود است به طوری که

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots \tag{1}$$

و

$$t_k = s_{n_k} . \tag{2}$$

بنابراین، (t_k) صرفاً انتخابی از تعدادی از s_nها [ممکن است همه آنها] است که به ترتیب انتخاب شده‌اند.

اینک چند راه دیگر را برای نگرش به این مفهوم عرضه می‌کنیم. توجه کنید که (۱) زیر مجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbf{N}$، یعنی $\{n_1, n_2, \ldots\}$، را تعریف می‌کند. برعکس، هر زیر مجموعهٔ نامتناهی از $\mathbf{N}$ را می‌توان به صورت (۱) توصیف کرد. بنابراین، زیر دنباله‌ای از (s_n) دنباله‌ای است که با انتخاب زیر مجموعه‌ای نامتناهی از جملات آن، با حفظ ترتیب، حاصل می‌شود.

برای ارائهٔ تعریف مختصرتری، به خاطر آورید که یک دنباله، تابعی مانند s با حوزهٔ تعریف $\mathbf{N}$ است. نگاه کنید به بخش ۷. برای زیر مجموعهٔ $\{n_1, n_2, \ldots\}$، تابعی طبیعی مانند σ [حرف یونانی کوچک سیگما] موجود است که به ازای $k \in \mathbf{N}$، با ضابطه $\sigma(k) = n_k$ داده می‌شود. تابع σ زیر مجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbf{N}$ را، با حفظ ترتیب، بر می‌گزیند. زیر دنبالهٔ s متناظر σ صرفاً تابع مرکب $t = s\circ\sigma$ است. یعنی، به ازای $k \in \mathbf{N}$

$$t_k \doteq t(k) = s\circ\sigma(k) = s(\sigma(k)) = s(n_k) = s_{n_k} \qquad (۳)$$

در نتیجه، دنباله‌ای مانند t زیر دنباله‌ای از دنباله s است اگر و تنها اگر برای تابعی صعودی مانند σ که $\mathbf{N}$ را بتوی $\mathbf{N}$ می‌نگارد، $t = s\circ\sigma$. ما معمولاً نماد σ را حذف خواهیم کرد و اغلب نماد t نیز حذف می‌شود. بنابراین، عبارت «زیر دنباله‌ای مانند (s_{n_k}) از (s_n)»، به زیر دنباله‌ای که به وسیلهٔ (۱) و (۲) یا به وسیلهٔ (۳) تعریف شده است، بسته به میل شما، اشاره خواهد داشت.

مثال ۱. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای باشد که با ضابطه $s_n = n^2(-1)^n$ تعریف شده است. جمله‌های مثبت این دنباله، زیر دنباله‌ای را تشکیل می‌دهد. در این حالت، دنبالهٔ (s_n) عبارت است از

$$(-۱, ۴, -۹, ۱۶, -۲۵, ۳۶, -۴۹, ۶۴, \ldots)$$

و زیر دنبالهٔ مزبور، چنین است:

$$(۴, ۱۶, ۳۶, ۶۴, ۱۰۰, ۱۴۴, \ldots)$$

به طور دقیقتر، این زیر دنباله عبارت است از $(s_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ که در آن $n_k = 2k$ به طوری که $s_{n_k} = (2k)^2(-1)^{2k} = 4k^2$. تابع گزینندهٔ σ با ضابطهٔ $\sigma(k) = 2k$ داده می‌شود.

مثال ۲. دنبالهٔ $a_n = \sin(n\pi/3)$ و زیر دنبالهٔ آن مرکب از جمله‌های نامنفی آن را در نظر بگیرید.

دنبالهٔ $(a_n)_{k\in N}$ عبارت است از

$$(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \ldots)$$

و زیر دنبالهٔ مورد نظر عبارت است از

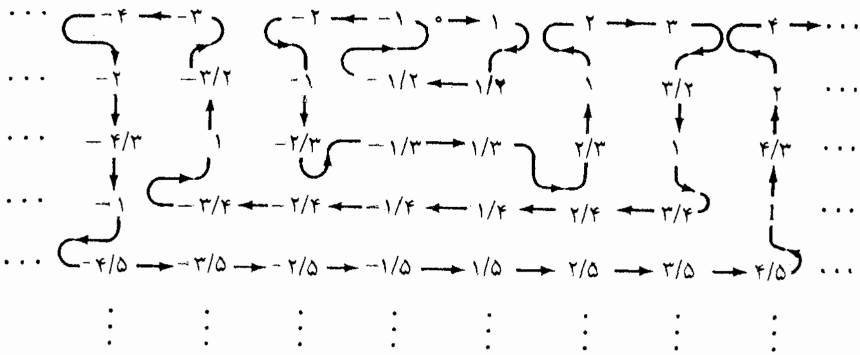
$$(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 0, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, 0, 0, \ldots)$$

پیداست که $n_1 = 1$، $n_2 = 2$، $n_3 = 3$، $n_4 = 6$، $n_5 = 7$، $n_6 = 8$، $n_7 = 9$، $n_8 = 12$، $n_9 = 13$، و غیره. می‌توانستیم فرمولی کلی برای n_k به دست آوریم، امّا، این کار به زحمتش نمی‌ارزد.

مثال ۳. می‌توان نشان داد که ممکن است مجموعهٔ **Q** از اعداد گویا را به صورت دنباله‌ای مانند (r_n)، فهرست کرد، اگر چه مشخص کردن فرمولی دقیق برای آن پرزحمت است. شکل ۱.۱۱، چنین فهرستی را [با امکان تکرار] پیشنهاد می‌کند، که در آن، $r_1 = 0$، $r_2 = 1$، $r_3 = 1/2$، $r_4 = -1/2$، $r_5 = -1$، $r_6 = -2$، $r_7 = -1$، و غیره. خوانندگانی که تا حدی با نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا باشند، تشخیص خواهند داد که این حکم دقیقاً همان نتیجه است که «**Q** شمارا است». این دنباله خاصیت شگفت انگیزی دارد: با در نظر گرفتن هر عدد حقیقی، مانند a، زیر دنباله‌ای مانند (r_{n_k}) از (r_n) موجود است که به a همگراست؛ یعنی، $\lim_{k\to\infty} r_{n_k} = a$. برای ملاحظهٔ درستی این نتیجه، نشان خواهیم داد که چگونه باید گام به گام زیر دنباله‌ای مانند r_{n_k} را تعریف کرد یا ساخت که در

$$|r_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad , \quad k \in \mathbf{N} \tag{1}$$

صدق می‌کند. به ویژه فرض خواهیم کرد که n_1، n_2، ...، n_k چنان برگزیده شده‌اند که در (۱) صدق می‌کنند، و نشان می‌دهیم که چگونه n_{k+1} را بر می‌گزینیم. نسبتاً آشکار است که با این کار، دنباله‌ای نامتناهی مانند (n_k) و در نتیجه، زیر دنباله‌ای مانند (r_{n_k}) از (r_n) که در (۱) صدق می‌کند، عاید می‌شود. کاملاً دقیق سازی این حکم، مستلزم لمی فنّی دربارهٔ ساختمانهای مرحله به مرحله است که برهان آن در نهایت به اصل موضوع پئانوی $5N$ بستگی دارد. ساختمانی از این نوع را «تعریف استقرایی» یا «تعریف به وسیله استقرا» می‌نامند.



شکل ۱.۱۱

اینک، به اختصار، ساختمان مورد بحث در بالا را مطرح می‌کنیم. $n_۱$ را به گونه‌ای گزینش کنید که $|r_{n_۱} - a| < ۱$؛ بنابر چگال بودن $\mathbf{Q}$، ۷.۴، این کار ممکن است. فرض کنید $n_۱$ ، $n_۲$ ، ... ، n_k چنان برگزیده شده‌اند که

$$n_۱ < n_۲ < ... < n_k \qquad (۲)$$

و

$$|a_{n_j} - a| < \frac{۱}{j} \quad , \quad j = ۱ , ۲ , ... , k .$$

بنابر تمرین ۱۱.۴ ، تعدادی نامتناهی عدد گویا دربازهٔ $(a - ۱/(k+۱) , a + ۱/(k+۱))$ موجود است. بنابراین باید عددی مانند $n_{k+۱}$ ، $n_{k+۱} > n_k$ ، موجود باشد به طوری که $r_{n_{k+۱}}$ به این بازه متعلق باشد. در این صورت، $|r_{n_{k+۱}} - a| < ۱/(k+۱)$ ، ولذا (۲) و (۳) با $k+۱$ به جای k، برقرارند. به کمک استقرا، این روند، $(n_k)_{k\in N}$ را تعریف می‌کند. چون (۳) برقرار است، (۱) نیز برقرار است. نتیجه می‌گیریم که $\lim_{k\to\infty} r_{n_k} = a$.

مثال ۴. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری که $\inf\{s_n : n \in N\} = ۰$. لزومی ندارد که دنبالهٔ (s_n) همگرا یا حتی کراندار باشد؛ امّا، این دنباله، زیر دنباله‌ای دارد که به طور یکنوا به ۰ همگراست. بار دیگر، یک ساختمان استقرایی را ارائه خواهیم داد. چون $\inf\{s_n : n \in N\} = ۰$ ، $n_۱$ ای در N موجود است به طوری که $s_{n_۱} < ۱$. فرض کنید $n_۱$ ، $n_۲$ ، ... ، n_k گزینش شده باشند به طوری که

$$n_۱ < n_۲ < ... < n_k \ , \qquad (۱)$$

و

$$s_{n_{j+۱}} < \min\{s_{n_j} , \frac{۱}{j+۱}\} \ , \ j = ۱ , ۲ , ... , k - ۱ . \qquad (۲)$$

توجه کنید که الزاماً می‌خواهیم که $s_{n_{j+1}} < s_{n_j}$، به طوری که زیر دنباله، یکنوا باشد و الزاماً می‌خواهیم که $s_{n_{j+1}} < 1/(j+1)$ تا همگرایی زیر دنباله به 0 تضمین شود. چون $\min\{s_n: 1 \le n \le n_k\} > 0$، نتیجه می‌شود که $\inf\{s_n: n > n_k\} = 0$. بنابراین، عددی مانند n_{k+1}، $n_{k+1} > n_k$، موجود است به طوری که $s_{n_{k+1}} < \min\{s_{n_k}, 1/(k+1)\}$. در این صورت، (۱) و (۲) با $k+1$ به جای k، برقرارند، و کار ساختمان به کمک استقرا ادامه می‌یابد. همان طور که در بالا متذکر شده‌ایم، (۲) نشان می‌دهد که (s_{n_k}) به طور یکنوا به 0 همگراست.

قضیهٔ بعدی تقریباً بدیهی است.

۲.۱۱ قضیه. اگر دنبالهٔ (s_n) همگرا باشد، آنگاه هر زیر دنبالهٔ آن به همان حد همگراست.

برهان. فرض کنید (s_{n_k}) معرف زیر دنباله‌ای از (s_n) باشد. توجه کنید که به ازای هر k، $n_k \ge k$. این حکم به سادگی به کمک استقرا ثابت می‌شود؛ در واقع، $n_1 \ge 1$، و $n_k \ge k$ مستلزم آن است که $n_{k+1} > n_k > k$، و لذا، $n_{k+1} \ge k+1$. بنابراین، $n_{k+1} \ge k+1$.

فرض کنید $s = \lim s_n$ و فرض کنید که $\varepsilon > 0$. N ای موجود است به طوری که $n \ge N$ مستلزم آن است $|s_n - s| < \varepsilon$. اینک، $k > N$ ایجاب می‌کند که $n_k > N$، که خود مستلزم آن است که $|s_n - s| < \varepsilon$. بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s .$$ □

هدف فوری ما، اثبات قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس است که برطبق آن هر دنبالهٔ کراندار، دارای یک زیر دنبالهٔ همگراست. ابتدا قضیه‌ای دربارهٔ زیر دنباله‌های یکنوا ثابت می‌کنیم.

۳.۱۱ قضیه: هر دنبالهٔ (s_n) دارای یک زیر دنبالهٔ یکنواست.

برهان. گوییم n امین جمله غالب است در صورتی که بزرگتر از هر جملهٔ بعد از خود باشد:

(۱) به ازای هر $m > n$ ، $s_m < s_n$.

حالت ۱. فرض کنید بینهایت جملهٔ غالب موجود باشد و فرض کنید (s_{n_k}) زیر دنباله‌ای دلخواه،

منحصراً متشکل از جمله‌های غالب باشد. در این صورت، بنابر (۱)، به ازای هر k، $s_{n_k} < s_{n_{k+1}}$، و بنابراین (s_{n_k}) یک دنبالهٔ نزولی است.

حالت ۲. فرض کنید که تنها تعدادی متناهی جملهٔ غالب موجود باشد. n_1 را به گونه‌ای برگزینید که s_{n_1} فراتر از همهٔ جمله‌های غالب دنباله باشد. در این صورت،

(۲) با مفروض بودن عدد N، $N \ge n_1$، عددی مانند m، $m > N$، موجود است به طوری که $s_m \ge s_N$.

با به کاربردن (۲) با $N = n_1$، عددی مانند n_2، $n_2 > n_1$، را به گونه‌ای بر می‌گزینید که $s_{n_2} \ge s_{n_1}$. فرض کنید که n_1، n_2، ...، n_k گزینش شده باشند به طوری که

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k \quad , \tag{۳}$$

و

$$s_{n_1} < s_{n_2} < \dots < s_{n_k} \quad , \tag{۴}$$

با به کاربردن (۲)، برای $N = n_k$، عدد n_{k+1} را که $n_{k+1} > n_k$، به گونه‌ای بر می‌گزینیم که $s_{n+1} \ge s_{n_k}$. در این صورت، (۳) و (۴) با $k + 1$ به جای k برقرارند. این روش به کمک استقرا ادامه می‌یابد، و ما زیر دنباله‌ای نانزولی مانند (s_{n_k}) را به دست می‌آوریم. □

با برهان دقیق قضیهٔ ۳.۱۱ از طریق دیوید بلوم[۱] آشنا شدیم که مبتنی بر حل مسأله‌ای در کتاب زیبای نیومن با عنوان سمینار مسأله[۲] است.

۴.۱۱ نتیجه. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای دلخواه باشد. زیر دنباله‌ای یکنوا موجود است که حد آن $\limsup s_n$ است و نیز دنباله‌ای یکنوا موجود است که حد آن $\liminf s_n$ است.

برهان. برای N، $N \in \mathbf{N}$، فرض کنید $v_N = \sup\{s_n : n > N\}$ و فرض کنید $v = \lim_N v_N = \limsup s_n$؛ نگاه کنید به تعریف ۶.۱۰. اگر $v \to -\infty$، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۷.۱۰، $\lim s_n = -\infty$ و خود دنبالهٔ (s_n) به $\limsup s_n$ همگراست. اگر $N \neq -\infty$، دنباله‌ای مانند (t_N) برگزینید که به v افزایش یابد. در حقیقت، اگر v متناهی باشد، آنگاه $t_N = v - (1/N)$

(۱) David M.Bloom

(۲) D.J. Newman , *A Problem Seminar*, Springer - Verlag , New York - Berlin - Heidelberg: 1982.

کفایت می‌کند و اگر $v = +\infty$، آنگاه $t_N = N$ کفایت می‌کند.

اینک، حالت ۱ برهان قبلی را ملاحظه کنید. در آن حالت، داریم

$$s_{n_k} = \sup\{s_m : m \geq s_{n_k}\} = v_{n_{k-1}} .$$

بنابراین، $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim_N v_N = \limsup s_n$، که این همان حکم مطلوب است.

حال حالت ۲ ی قضیهٔ قبل را ملاحظه کنید. چون

$$t_N < v \leq v_N = \sup\{s_m : m > N\} ,$$

شرط (۲) می‌تواند به صورت زیر اصلاح شود:

(۲) با مفروض بودن N، $N > n_1$، عددی مانند $m > N$ موجود است به طوری که $s_m > t_N$، $s_m \geq s_N$.

در این صورت، زیر دنبالهٔ (s_{n_k}) را می‌توان به گونه‌ای برگزید که علاوه بر شرایط (۳) و (۴)، داشته باشیم

به ازای هر k، $s_{n_{k+1}} > t_{n_k}$.

چون همواره داریم $s_n \leq \sup\{s_m : m \geq n\} = v_{n-1}$، نتیجه می‌گیریم که

به ازای هر k، $t_{n_k} < s_{n_{k+1}} \leq v_{n_{k+1}-1}$.

پس،

$$v = \lim_N t_N = \lim_k t_{n_k} \leq \lim_k s_{n_{k+1}} \leq \lim_k v_{n_{k+1}-1} = \lim_N v_N = v .$$

یعنی، $\lim_k s_{n_k} = \limsup s_n$، و این همان حکم مطلوب است.

حکم قضیه در مورد $\liminf s_n$ برهان مشابهی دارد، امّا می‌توان آن را از حکم اوّل نیز نتیجه گرفت. نگاه کنید به تمرین ۸.۱۱. □

۵.۱۱ *قضیه بولتسانو - وایرشتراس.* هر دنبالهٔ کراندار دارای زیر دنباله‌ای همگراست.

برهان. اگر (s_n) دنباله‌ای کراندار باشد، بنابر قضیهٔ ۳.۱۱. دنباله، دارای زیر دنباله‌ای یکنواست. بنابر قضیهٔ ۲.۱۰، این زیر دنباله، همگراست. □

قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس بسیار مهم است و در فصل ۳، در جاهای حساس، مورد

استفاده قرار خواهد گرفت. برهان ما برمبنای قضیهٔ ۳.۱۱، به دلایلی که هم اکنون مورد بحث قرار می‌دهیم، تا اندازه‌ای غیر متعارف است. بسیاری از مفاهیمی که در این فصل تعریف شده‌اند، در قالبهای کلیتر، هنوز هم دارای معنی‌اند، به عنوان مثال، مفاهیم مربوط به دنباله‌های همگرا، دنباله‌های کوشی و دنباله‌های کراندار برای هر دنباله‌ای مانند (s_n)، که در آن هر s_n متعلق به صفحه باشد، با معنی است. امّا، نظریهٔ دنبالهٔ یکنوا در صفحه به قوت خود باقی نیست. نتیجه این می‌شود که قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس در صفحه و در بسیاری از وضعیتهای دیگر نیز برقرار است. [نگاه کنید به قضیهٔ ۵.۱۳]. امّا، آشکار است که مناسب نیست که آن را مستقلاً به کمک مشابهی از قضیه ۳.۱۱ ثابت کنیم. چون قضیه بولتسانو - وایرشتراس ۵.۱۱، به وضعیتهای دیگر تعمیم پیدا می‌کند که قضیهٔ ۳.۱۱ در آنها فاقد معنی است، لذا در کاربردها، ما بیشتر بر ۵.۱۱ تأکید خواهیم کرد تا بر ۳.۱۱.

اینک به مفهوم دیگری نیاز داریم تا بتوانیم مفاهیم گوناگون خود در قضیهٔ ۷.۱۱ را به یکدیگر پیوند بزنیم.

۶.۱۱ تعریف. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد. یک حد زیر دنباله‌ای، هر عدد حقیقی یا نماد $+\infty$ یا $-\infty$ است در صورتی که حدِ زیر دنباله‌ای از (s_n) باشد.

اینک، به برخی از مثالهای بحث شده پس از تعریف ۱.۱۱ باز می‌گردیم.

مثال ۵. دنبالهٔ (s_n) را که در آن $s_n = n^2(-1)^n$، در نظر بگیرید. زیر دنبالهٔ حاصل از جملات زوج به $+\infty$ واگراست و زیر دنباله حاصل از جملات فرد به $-\infty$ واگراست. همهٔ زیر دنباله‌ها که دارای حدی هستند واگرا به $+\infty$ یا $-\infty$ اند. بنابراین، مجموعهٔ $\{-\infty, +\infty\}$، دقیقاً مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای (s_n) است.

مثال ۶. دنبالهٔ $a_n = \sin(n\pi/3)$ را در نظر بگیرید. این دنباله هر یک از مقادیر $\frac{1}{2}\sqrt{3}$، 0، و $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ را بینهایت بار اختیار می‌کند. تنها زیر دنباله‌های همگرای آن از جمله‌ای به بعد ثابت‌اند و $\{-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$ مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای (a_n) است. اگر $n_k = 3k$، آنگاه به ازای هر k، $k \in \mathbf{N}$، $a_{n_k} = 0$. بدیهی است که $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$. اگر $n_k = 6k + 1$، آنگاه به ازای هر

k، $a_{n_k} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$، و $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$؛ و اگر $n_k = 6k + 4$، آنگاه $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

مثال ۷. فرض کنید (r_n) فهرستی از همهٔ اعداد گویا باشد. در مثال ۳، نشان داده شد که هر عدد حقیقی، حد زیر دنباله‌ای مانند (r_n) است. همچنین $+\infty$ و $-\infty$ حدهای زیر دنباله‌ای‌اند، نگاه کنید به تمرین ۷.۱۱. در نتیجه $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای (r_n) است.

مثال ۸. فرض کنید که برای $n \in \mathbf{N}$، $b_n = n[1 + (-1)^n]$. در این صورت، برای nهای زوج، $b_n = 2n$ و برای nهای فرد $b_n = 0$. بنابراین، $\{-\infty, 0\}$ مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای (b_n) است.

۷.۱۱ قضیه. فرض کنید که (s_n) دنباله‌ای دلخواه در $\mathbf{R}$ باشد و فرض کنید که S معرف مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای (s_n) باشد.

(i) S ناتهی است.
(ii) $\sup S = \limsup s_n$ و $\inf S = \liminf s_n$.
(iii) $\lim s_n$ موجود است اگر و تنها اگر S دقیقاً دارای یک عضو؛ یعنی، $\lim s_n$، باشد.

برهان. (i)، پیامد فوری نتیجهٔ ۴.۱۱ است.

برای اثبات (ii)، حد دلخواه t از یک زیر دنبالهٔ (s_n)، مانند (s_{n_k})، را در نظر بگیرید. بنابر قضیهٔ ۷.۱۰، داریم $t = \liminf s_{n_k} = \limsup s_{n_k}$. چون به ازای هر N که $N \in \mathbf{N}$، $\{s_{n_k} : k > N\} \subseteq \{s_n : n > N\}$، داریم

$$\liminf s_n \le \liminf s_{n_k} = t = \limsup s_{n_k} \le \limsup s_n .$$

این نابرابری به ازای هر $t \in S$ برقرار است. بنابراین،

$$\liminf s_n \le \inf S \le \sup S \le \limsup s_n .$$

نتیجهٔ ۴.۱۱ نشان می‌دهد که $\limsup s_n$ و $\liminf s_n$، هر دو به S تعلق دارند. بنابراین، (ii) برقرار است.

حکم (iii) به سادگی با فرمول بندی مجدد قضیهٔ ۷.۱۰ حاصل می‌گردد. □

قضیهٔ ۷.۱۱ و نتیجهٔ ۴.۱۱ نشان می‌دهند که $\lim\sup s_n$ دقیقاً بزرگترین حد زیر دنباله‌ای (s_n) است، $\lim\inf s_n$ دقیقاً کوچکترین حد زیر دنباله‌ای (s_n) است، و $\lim\inf s_n$ دقیقاً کوچکترین حد زیر دنباله‌ای (s_n) است. با این نتیجه، محاسبه $\lim\sup$ و $\lim\inf$ آسانتر می‌شود.

اینک، به مثالهای ارائه شده قبل از قضیهٔ ۷.۱۱ باز می‌گردیم.

مثال ۹. اگر $s_n = n(-۱)^n$ آنگاه، همان طور که در مثال ۵ متذکر شدیم، $S = \{-\infty, \infty\}$. بنابراین، $\lim\sup s_n = \sup S = +\infty$ و $\lim\inf s_n = \inf S = -\infty$.

مثال ۱۰. اگر $a_n = \sin(n\pi/۳)$ آنگاه، همان طور که در مثال ۶ مشاهده کردیم،

$$S = \{-\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}, ۰, \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\}.$$

بنابراین، $\lim\sup a_n = \sup S = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ و $\lim\inf a_n = \inf S = -\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$.

مثال ۱۱. اگر (r_n) معرف فهرستی از همه اعداد گویا باشد، آنگاه $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ مجموعهٔ حدهای دنباله‌ای (r_n) است. در نتیجه، داریم $\lim\sup r_n = +\infty$ و $\lim\inf r_n = -\infty$.

مثال ۱۲. اگر $b_n = n[۱ + (-۱)^n]$، آنگاه $\lim\sup b_n = +\infty$ و $\lim\inf b_n = ۰$؛ نگاه کنید به تمرین ۸.

نتیجهٔ بعدی نشان می‌دهد که مجموعهٔ S از حدهای زیر دنباله‌ای، همواره شامل همهٔ حدهای دنباله‌های حاصل از S است. این مجموعه‌ها را مجموعه‌های بسته می‌نامند. مجموعه‌های از این نوع، در بخش ۱۳ که اختیاری است، بیشتر مورد بحث واقع خواهد شد.

۸.۱۱ قضیه. فرض کنید S مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای یک دنباله مانند (s_n) باشد. فرض کنید (t_n) دنباله‌ای در $S \cap \mathbf{R}$ باشد و $t = \lim t_n$. در این صورت، t به S تعلق دارد.

برهان. چون زیر دنباله‌ای از (s_n) به t_1 همگرا است. n_1ای موجود است به طوری که $|t_{n_1} - t_1| < 1$. فرض کنید که n_1 ، n_2 ، ... ، n_k به گونه‌ای گزینش شده باشند که

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ , \tag{1}$$

و

$$|s_{n_j} - t_j| < \frac{1}{j} \ , \quad j = 1, 2, \ldots, k \text{ به ازای } \tag{2}$$

چون زیر دنباله‌ای از (s_n) به t_{k+1} همگرا است، عددی مانند n_{k+1} با $n_{k+1} > n_k$ موجود است به طوری که $|s_{n_{k+1}} - t_{k+1}| < 1/(k+1)$. در نتیجه، برای $k+1$، (۱) و (۲) برقرار است.

برای بقیهٔ برهان لازم است چندین حالت را بررسی کنیم. ابتدا فرض کنید که $t \in \mathbf{R}$؛ یعنی، t برابر $+\infty$ یا $-\infty$ نباشد. چون برای هر k که $k \in \mathbf{N}$،

$$|s_{n_k} - t| \leq |s_{n_k} - t_k| + |t_k - t| < \frac{1}{k} + |t_k - t| \tag{3}$$

به سادگی نتیجه می‌شود که $\lim s_{n_k} = t$. بنابراین، t به S تعلق دارد. [برای بررسی اینکه $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = t$، فرض کنید $\varepsilon > 0$. N ای موجود است که $k > N$ مستلزم آن است که $|t_k - t| < \varepsilon/2$. اگر $k > \max\{N, 2/\varepsilon\}$، آنگاه $\frac{1}{k} < \varepsilon/2$ و $|t_n - t| < \varepsilon/2$، و لذا، بنابر (۳) $|s_{n_k} - t| < \varepsilon$.]

اینک، فرض کنید $t = +\infty$. از (۲) داریم

$$s_{n_k} > t_k - 1/k \ , \quad k \in \mathbf{N} \text{ به ازای } \tag{4}$$

چون $\lim t_k = +\infty$، به سادگی نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = +\infty$. بنابراین، $t = +\infty$ به S تعلق دارد. در مورد حالت $t = -\infty$ به نحو مشابهی عمل می‌کنیم. □

تمرینها

۱.۱۱. برای $n \in \mathbf{N}$، فرض کنید $a_n = 3 + 2(-1)^n$.

(الف) فهرست هشت جملهٔ اوّل دنباله (a_n) را بنویسید.

(ب) زیر دنباله‌ای ارائه دهید که ثابت باشد [مقدار یکتایی اختیار کند.] تابع گزینندهٔ σ را معین کنید.

۲.۱۱. دنباله‌های تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$a_n = (-۱)^n , b_n = ۱/n \ , \ c_n = n^۲ \ , \ d_n = \frac{۶n + ۴}{۷n - ۳}$$

(الف) برای هر دنباله، مثالی از یک زیر دنبالهٔ یکنوا ارائه دهید.

(ب) برای هر دنباله، مجموعهٔ «حدهای زیر دنباله‌ای» را ارائه دهید.

(پ) برای هر دنباله، lim sup و lim inf آن را ارائه دهید.

(ت) کدام یک از دنباله‌ها همگرایند؟ واگرا به $+\infty$ اند؟ واگرا به $-\infty$ اند؟

(ث) کدام یک از دنباله‌ها کراندارند؟

۳.۱۱. تمرین ۲.۱۱ را برای دنباله‌های زیر تکرار کنید:

$$s_n = \cos(n\pi/۳) \ , \ t_n = \frac{۳}{۴n + ۱} \ , \ u_n = (-\frac{۱}{۲})^n \ , \ v_n = (-۱)^n + ۱/n \ .$$

۴.۱۱. تمرین ۲.۱۱ را برای دنباله‌های زیر تکرار کنید.

$$w_n = (-۲)^n \ , \ x_n = ۵^{(-۱)^n} \ , \ y_n = ۱ + (-۱)^n \ , \ z_n = n \cos(n\pi/۴) \ .$$

۵.۱۱. فرض کنید که (q_n) فهرستی از اعداد گویا دربازهٔ $[۰ \ , \ ۱]$ باشد.

(الف) مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای (q_n) را ارائه دهید.

(ب) مقادیر $\limsup q_n$ و $\liminf q_n$ را ارائه دهید.

۶.۱۱. نشان دهید که هر زیر دنباله از زیر دنباله‌ای مفروض، خود زیر دنباله‌ای از دنبالهٔ مفروض است. راهنمایی: زیر دنباله‌ها را مانند (۳) از تعریف ۱.۱۱ تعریف کنید.

۷.۱۱. فرض کنید (r_n) فهرستی از مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ از همه اعداد گویا باشد. نشان دهید که زیر دنباله‌ای مانند (r_{n_k}) موجود است به طوری که $\lim_{k\to\infty} r_{n_k} = +\infty$.

۸.۱۱. (الف) با استفاده از تعریف ۶.۱۰ و تمرین ۴.۵ ، ثابت کنید که

$$\liminf s_n = -\limsup(-s_n) \ .$$

ب) فرض کنید که (t_k) یک زیر دنبالهٔ یکنوای $(-s_n)$ و همگرا به $\limsup(-s_n)$ باشد. نشان دهید که $(-t_k)$ یک زیر دنبالهٔ یکنوای (s_n) همگرا به $\liminf s_n$ است. توجه کنید که این حکم، برهان نتیجهٔ ۴.۱۱ را کامل می‌کند.

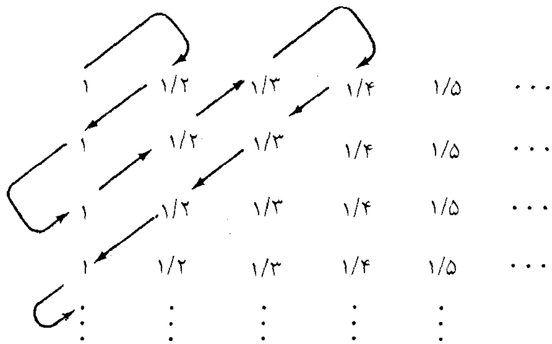
۹.۱۱. (الف) نشان دهید که بازهٔ بسته $[a , b]$ مجموعه‌ای بسته است.

(ب) آیا دنباله‌ای مانند (s_n) موجود است به طوری که $(۰ , ۱)$ مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای آن باشد.

۱۰.۱۱. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای از اعداد شکل ۲.۱۱ باشد که به ترتیبی که مشخص شده است، فهرست شده‌اند.

(الف) مجموعهٔ S از حدهای زیر دنباله‌ای (s_n) را پیدا کنید.

(ب) $\lim \sup s_n$ و $\lim \inf s_n$ را معین کنید.



شکل ۲.۱۱

بخش ۱۲. lim supها و lim infها

فرض کنید (s_n) دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی و S مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای (s_n) باشد. به خاطر می‌آوریم که

$$\lim \sup s_n = \lim_{N\to\infty} \sup \{s_n: n > N\} = \sup S \qquad (*)$$

و

$$\lim \inf s_n = \lim_{N\to\infty} \inf \{s_n: n > N\} = \inf S . \qquad (**)$$

نخستین برابریها در $(*)$ و $(**)$ تعریفهایی هستند که در ۶.۱۰ داده شده‌اند، و دومین برابریها

در قضیه ۷.۱۱ ثابت شده‌اند. این بخش به منظور افزایش آشنایی دانشجویان با این مفاهیم در نظر گرفته شده است. قسمت عمدهٔ مطالب در تمرینها داده شده است. ما این تکنیکها را با اثبات چند نتیجه که بعداً در این کتاب مورد نیاز خواهند بود، تشریح می‌کنیم.

۱.۱۲ قضیه. اگر (s_n) به عدد حقیقی مثبتی مانند s همگرا باشد و (t_n) دنباله‌ای دلخواه باشد، آنگاه

$$\limsup s_n t_n = s \,.\, \limsup t_n \,.$$

در اینجا، قرار دادهای $s.(+\infty) = +\infty$ و $s.(-\infty) = -\infty$ را برای $s > 0$ می‌پذیریم.

برهان. فرض کنید $\beta = \limsup t_n$. سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول. فرض کنید β متناهی باشد.

بنابر نتیجهٔ ۴.۱۱، زیر دنباله‌ای مانند (t_{n_k}) از (t_n) موجود است به طوری که $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = \beta$. همچنین، داریم $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s$ [بنابر قضیهٔ ۲.۱۱]، و بنابراین $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} t_{n_k} = s\beta$. در نتیجه، $(s_{n_k} t_{n_k})$ زیر دنباله‌ای از $(s_n t_n)$ است که به $s\beta$ همگراست، و لذا، $s\beta \le \limsup s_n t_n$. [به خاطر آورید که $\limsup s_n t_n$ بزرگترین حد ممکن زیر دنباله‌ای از $(s_n t_n)$ است.] بنابراین، داریم

$$\limsup s_n t_n \ge s.\limsup t_n \,. \qquad (1)$$

برای نابرابری معکوس، به حیلهٔ خاصی متوسل می‌شویم. ابتدا، توجه کنید که می‌توانیم چند جملهٔ اول (s_n) را نادیده بگیریم و فرض کنیم که همهٔ s_nها ناصفرند. سپس، بنابر لم ۵.۹، می‌توانیم بنویسیم $\lim(1/s_n) = 1/s$. اینک (۱) را با $\frac{1}{s_n}$ به جای s_n و $s_n t_n$ را به جای t_n به کار می‌بریم:

$$\limsup t_n = \limsup (1/s_n)(s_n t_n) \ge \frac{1}{s} \limsup s_n t_n \quad ,$$

یعنی،

$$\limsup s_n t_n \le s.\limsup t_n \,.$$

این نابرابری و (۱)، قضیه را در حالت ۱ ثابت می‌کند.

حالت ۲. فرض کنید $\beta = +\infty$.

زیر دنباله‌ای مانند t_{n_k} از (t_n) موجود است به طوری که $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = +\infty$. چون، $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s > 0$، قضیهٔ ۹.۹ نشان می‌دهد که $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} t_{n_k} = +\infty$. بنابراین، $\limsup s_n t_n = +\infty$.

حالت ۳. فرض کنید $\beta = -\infty$.

چون در این حالت $\liminf t_n \le \limsup t_n = -\infty$، می‌بینیم که $\lim t_n = -\infty$. در این صورت، $\lim(-t_n) = +\infty$، و لذا، با توجه به قضیهٔ ۹.۹، $\lim s_n(-t_n) = +\infty$. از این رو $\lim s_n t_n = -\infty$، و به ویژه $\limsup s_n t_n = -\infty$. □

قضیهٔ بعدی، در موقع کار با سریهای نامتناهی، مفید خواهد بود؛ برهان آزمون نسبت ۸.۱۴ را ببینید.

۲.۱۲ قضیه. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی ناصفر باشد. در این صورت، داریم

$$\liminf \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| \le \liminf |s_n|^{1/n} \le \limsup |s_n|^{1/n} \le \limsup \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| .$$

برهان. نابرابری میانی بدیهی است. اولین و دومین نابرابریها برهانهای مشابهی دارند. ما دومین نابرابری را ثابت خواهیم کرد و اولین نابرابری را به عنوان تمرین ۱۱.۱۲ واگذار می‌کنیم.

فرض کنید $\alpha = \limsup |s_n|^{1/n}$ و $L = \limsup |s_{n+1}/s_n|$. باید ثابت کنیم که $\alpha \le L$. این حکم، در صورتی که $L = +\infty$، بدیهی است. بنابراین، فرض می‌کنیم که $L < +\infty$. برای اثبات $\alpha \le L$، کافی است نشان دهیم که

(۱) به ازای هر L_1 که $L_1 > L$، $\alpha \le L_1$.

چون،

$$L = \limsup \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{N\to\infty} \sup \left\{\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| : n > N\right\} < L_1 ,$$

عددی طبیعی مانند N موجود است به طوری که

$$\sup \left\{\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| : n \in N\right\} < L_1 .$$

در این صورت،

(۲) به ازای $n > N$، $\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| < L_1$

حال، به ازای $n > N$، می‌توانیم بنویسیم

$$|s_n| = \left|\frac{s_n}{s_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{s_{n-1}}{s_{n-2}}\right| \dots \left|\frac{s_{N+1}}{s_N}\right| \cdot |s_N|$$

که در آن، تعداد عاملهای طرف دوم $n - N$ است. با به کاربردن (۲)، ملاحظه می‌کنیم که

به ازای $n > N$ ، $|s_n| < L_۱^{\,n-N}|s_N|$

چون $L_۱$ و N در این استدلال ثابت اند، $a = L_۱^{\,-N}|s_N|$ عدد مثبت ثابتی است و می‌توانیم بنویسیم

به ازای $n > N$ ، $|s_n| < L_۱^n a$.

بنابراین، داریم

به ازای $n > N$ ، $|s_n|^{۱/n} < L_۱ a^{۱/n}$.

چون بنابر مثال ۷.۹(ت)، $\lim_{n\to\infty} a^{۱/n} = ۱$ ، نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \limsup |s_n|^{۱/n} \le L_۱$؛ نگاه کنید به تمرین ۱.۱۲. در نتیجه، (۱) برقرار است و این همان حکم مطلوب است. □

۳.۱۲ نتیجه. اگر $\lim|s_{n+۱}/s_n|$ موجود [و برابر L] باشد، آنگاه $\lim |s_n|^{۱/n}$ موجود [و برابر L] است.

برهان. اگر $\lim |s_{n+۱}/s_n| = L$ ، آنگاه هر چهار مقدار در قضیه ۲.۱۲، باید برابر L باشند. از این رو، $\lim |s_n|^{۱/n} = L$. نگاه کنید به قضیه ۷.۱۰. □

تمرینها

۱.۱۲. فرض کنید (s_n) و (t_n) دنباله‌هایی باشند و فرض کنید که $N_۰$ ای موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N_۰$ ، $s_n \le t_n$. نشان دهید که $\liminf s_n \le \liminf t_n$ و $\limsup s_n \le \limsup t_n$. راهنمایی: تعریف ۶.۱۰ و تمرین ۹.۹ (پ) را به کار ببرید.

۲.۱۲. ثابت کنید که $\limsup |s_n| = ۰$ اگر و تنها اگر $\lim s_n = ۰$.

۳.۱۲. فرض کنید (s_n) و (t_n) دنباله‌های زیر باشند، که در آنها جمله‌ها در دوره‌های گردش چهارتایی تکرار شده‌اند:

$(s_n) = (۰ , ۱ , ۲ , ۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۱ , ...)$

$(t_n) = (۲ , ۱ , ۱ , ۰ , ۲ , ۱ , ۱ , ۰ , ۲ , ۱ , ۱ , ۰ , ۲ , ۱ , ۱ , ۰ , ...)$

پیدا کنید:

(الف) $\liminf s_n + \liminf t_n$ (ب) $\liminf (s_n + t_n)$

(پ) $\liminf s_n + \limsup t_n$ (ت) $\limsup (s_n + t_n)$

(ث) $\limsup s_n + \limsup t_n$ (ج) $\liminf (s_n + t_n)$

(چ) $\limsup(s_n t_n)$.

۴.۱۲. نشان دهید که برای دنباله‌های کراندار (s_n) و (t_n)،
$\limsup(s_n + t_n) \le \limsup s_n + \limsup t_n$. راهنمایی: ابتدا نشان دهید که

$$\sup\{s_n + t_n : n > N\} \le \sup\{s_n : n > N\} + \sup\{t_n : n > N\} .$$

سپس، تمرین ۹.۹ (پ) را به کار ببرید.

۵.۱۲. از تمرینهای ۸.۱۱ (الف) و ۴.۱۲ استفاده کرده ثابت کنید که برای دنباله‌های کراندار (s_n) و (t_n)

$$\liminf(s_n + t_n) \ge \liminf s_n + \liminf t_n .$$

۶.۱۲. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای کراندار و k یک عدد حقیقی نامنفی باشد.

(الف) ثابت کنید که $\limsup(k s_n) = k . \limsup s_n$.

(ب) همین حکم را برای $\liminf$ ثابت کنید. راهنمایی: تمرین ۸.۱۱ (الف) را به کار ببرید.

(پ) در (الف) و (ب) چه اتفاقی می‌افتد در صورتی که $k < 0$.

۷.۱۲. ثابت کنید که اگر $\limsup s_n = +\infty$ و $k > 0$، آنگاه $\limsup(k s_n) = +\infty$.

۸.۱۲. فرض کنید (s_n) و (t_n) دنباله‌های کراندار از اعداد نامنفی باشند. ثابت کنید که

$$\limsup (s_n t_n) \le (\limsup s_n)(\limsup t_n) .$$

۹.۱۲. (الف) ثابت کنید که اگر $\lim s_n = +\infty$ و $\liminf t_n > 0$، آنگاه $\lim s_n t_n = +\infty$.

(ب) ثابت کنید که اگر $\limsup s_n = +\infty$ و $\liminf t_n > 0$ آنگاه $\limsup s_n t_n = +\infty$.

(پ) توجه کنید که تمرین ۱۲.۷ حالت خاص (ب) است، که در آن برای هر $n \in N$، $t_n = k$.

۱۰.۱۲. ثابت کنید که (s_n) کراندار است اگر و تنها اگر $\limsup |s_n| < +\infty$.

۱۱.۱۲. اولین نابرابری در قضیهٔ ۲.۱۲ را ثابت کنید.

۱۲.۱۲. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد و برای هر n، تعریف کنید:

$$\sigma_n = (s_1 + s_2 + \dots + s_n)/n$$

(الف) نشان دهید که

$$\liminf s_n \le \liminf \sigma_n \le \limsup \sigma_n \le \limsup s_n$$

راهنمایی: برای آخرین نابرابری، ابتدا نشان دهید که $M > N$ مستلزم آن است که

$$\sup\{s_n : n > M\} \le (s_1 + s_2 + \dots + s_N)/M + \sup\{s_n : s > N\}.$$

(ب) نشان دهید که اگر $\lim s_n$ موجود باشد، آنگاه $\lim \sigma_n$ موجود است و $\lim \sigma_n = \lim s_n$.

۱۳.۱۲. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای کراندار در $\mathbf{R}$ باشد. فرض کنید A مجموعه aهایی با $a \in \mathbf{R}$ باشد به طوری که مجموعهٔ $\{n \in N : s_n < a\}$ متناهی است؛ یعنی، همه بجز تعدادی متناهی از s_nها بزرگتر از a یا مساوی a هستند. فرض کنید B مجموعهٔ همهٔ bهایی با $b \in \mathbf{R}$ باشد به طوری که مجموعهٔ $\{n \in N : s_n > b\}$ متناهی است. ثابت کنید که $\sup A = \liminf s_n$ و $\inf B = \limsup s_n$.

۱۴.۱۲. محاسبه کنید (الف) $\lim (n!)^{1/n}$، (ب) $\lim \frac{1}{n}(n!)^{1/n}$.

بخش ۱۳*. برخی مفاهیم توپولوژیکی در فضاهای متریک

در این کتاب، ما توجه خود را به آنالیز روی $\mathbf{R}$ محدود می‌کنیم. بنابراین، از خاصیتهای ترتیبی $\mathbf{R}$ به طور کامل استفاده کرده‌ایم و مفاهیم مهمی مانند $\limsup$ و $\liminf$ را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در بخش ۳، به اختصار، یک تابع فاصله را بر $\mathbf{R}$ تعریف کردیم. می‌توانیم قسمت اعظم آنالیز خود را بر مفهوم فاصله استوار کنیم که در این صورت آسان و طبیعی است که در چار چوبی کلیتر کار کنیم. به عنوان مثال، آنالیز روی فضاهای k - بعدی اقلیدسی $\mathbf{R}^k$ مهم است. امّا، این فضاها رابطهٔ ترتیبی طبیعی سودمندی را که $\mathbf{R}$ دارد ندارند، مگر اینکه $k = 1$.

۱.۱۳ *تعریف*. فرض کنید S یک مجموعه و d تابعی باشد که به ازای هر زوج (x, y) از اعضای $S \times S$ تعریف شده و در شرایط زیر صدق می‌کند:

D۱. برای هر x در S، $d(x, x) = 0$ و به ازای x و yهای متمایز در S، $d(x, y) > 0$.

D۲. برای هر x و y در S، $d(x, y) = d(y, x)$.

D۳. برای هر x و y و z در S، $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.

چنین تابع dای، یک تابع فاصله یا یک متریک بر S نامیده می‌شود. یک فضای متریک S مجموعه‌ای مانند S همراه با یک متریک بر آن است. به طور دقیق، یک فضای متریک، زوجی مانند (S , d) است. زیرا ممکن است بر مجموعه‌ای مانند S بیش از یک متریک تعریف شده باشد؛ نگاه کنید به تمرین ۱.۱۳.

مثال ۱. نظیر تعریف ۴.۳، فرض کنید به ازای اعداد حقیقی a و b، $\text{dist}(a , b) = |a - b|$. در این صورت، dist متریکی بر $\mathbf{R}$ است. توجه کنید که در این حالت D۳ از نتیجهٔ ۶.۳ حاصل می‌شود. به طوری که در آنجا متذکر شدیم، نابرابری

$$\text{diat}(a , c) \le \text{dist}(a , b) + \text{dist}(b , c)$$

نابرابری مثلث نامیده می‌شود.

مثال ۲. فضای همهٔ k- تاییهای

$x = (x_۱ , x_۲ , \ldots , x_k)$، که در آن برای $x_j \in \mathbf{R} \;,\; j = ۱ , ۲, \ldots , k$

فضای اقلیدسی k ـ بعدی نامیده شده و به صورت $\mathbf{R}^k$ نوشته می‌شود. هم چنان که در تمرین ۱.۱۳ متذکر شدیم، $\mathbf{R}^k$ چندین متریک دارد. معروفترین متریک آن متریکی است که فاصلهٔ معمولی در صفحهٔ $\mathbf{R}^۲$ یا در فضای ۳- بعدی $\mathbf{R}^۳$ را می‌دهد:

$$d(x , y) = \Big[\sum_{j=۱}^{k} (x_j - y_j)^۲\Big]^{۱/۲} .$$

[نماد مجموعیابی $\sum$ در ۱.۱۴ شرح داده شده‌است]. بدیهی است که این تابع d در خاصیتهای D۱ و D۲ صدق می‌کند. نابرابری مثلث D۳ چندان بدیهی نیست. برای ملاحظهٔ برهانی برای آن، نگاه کنید به [۱۷]، بخش ۱.۶ ، یا [۱۹]، ۳۷.۱.

۲.۱۳ تعریف. دنباله‌ای مانند (s_n) در یک فضای متریک (S , d) به s در S همگراست در صورتی که $\lim_{n\to\infty} d(s_n , s) = ۰$. دنباله‌ای مانند (s_n) در S یک دنبالهٔ کوشی است در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مانند N موجود باشد به طوری که

$n > N$ و m مستلزم آن است که $d(s_m , s_n) < \varepsilon$.

فضای متریک (S , d) را کامل خوانند در صورتی که هر دنبالهٔ کوشی در S به عضوی در S همگرا باشد.

چون اصل موضوع کمال ۴.۴ با کوچکترین کرانهای بالا سر و کار دارد، چنین به نظر می آید که کلمهٔ «کامل» دو معنی دارد. با این حال، این دو مورد استعمال از این اصطلاح، ارتباط نزدیکی با یکدیگر دارند و هر دو انعکاسی از این خاصیت‌اند که فضا کامل؛ یعنی، بدون رخنه است. قضیهٔ ۱۱.۱۰ حکم می‌کند که فضای متریک $(\mathbf{R}\ ,\ \text{dist})$ یک فضای متریک کامل است و در برهان آن از اصل موضوع کمال ۴.۴ استفاده می‌شود. می‌توانستیم، درست به همان قوّت، کامل بودن $(\mathbf{R}\ ,\ \text{dist})$ را به عنوان یک فضای متریک یک اصل موضوع بگیریم و خاصیت کوچکترین کران بالا در ۴.۴ را به عنوان یک قضیه ثابت کنیم. ما این کار را نکردیم؛ زیرا، از نظر ما مفهوم کوچکترین کران بالا در $\mathbf{R}$ بنیادیتر از مفهوم دنبالهٔ کوشی است.

ثابت خواهیم کرد که $\mathbf{R}^k$ کامل است. ولی، مشکل نمادگذاری را داریم. زیرا، دوست داریم هم برای دنباله‌ها و هم برای مختصات نقطه‌ها در $\mathbf{R}^k$ از اندیس پایین استفاده کنیم. وقتی تضادی در بین باشد به جای (x_n)، برای نشان دادن دنباله، خواهیم نوشت $(\mathbf{x}^{(n)})$. در این حالت

$$\mathbf{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}\ ,\ x_2^{(n)}\ ,\ \dots\ ,\ x_k^{(n)})\ .$$

متریک در $\mathbf{R}^k$، همواره همان است که در مثال ۲ داده شده است، مگر آنکه متریک دیگری مشخص شده‌باشد.

۳.۱۳ لم. دنبالهٔ $(\mathbf{x}^{(n)})$ در $\mathbf{R}^k$ همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $\mathbf{j}$ که $\mathbf{j} = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ k$، دنبالهٔ $(x_j^{(n)})$ در $\mathbf{R}$ همگرا باشد. دنباله‌ای مانند $(\mathbf{x}^{(n)})$ در $\mathbf{R}^k$ یک دنبالهٔ کوشی است اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ $(x_j^{(n)})$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}$ باشد.

برهان. برهان اولین حکم را به عنوان تمرین ۲.۱۳ واگذار می‌کنیم. برای حکم دوّم، ابتدا، مشاهده می‌کنیم که برای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در $\mathbf{R}^k$ و $\mathrm{j} = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ k$،

$$|x_j - y_j| \le d(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}) \le \sqrt{k}\ \max\{|x_j - x_j|\ :\ j = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ k\}\ . \qquad (1)$$

فرض کنید $(\mathbf{x}^{(n)})$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}^k$ باشد و j را ثابت در نظر می‌گیریم. اگر $0 < \varepsilon$، عددی مانند N موجود است به طوری که

$N < n$ و m مستلزم آن است که $d(\mathbf{x}^{(m)}\ ,\ \mathbf{x}^{(n)}) < \varepsilon$،

از (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$n > N \text{ و } m \text{ مستلزم آن است که } |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon ،$$

و بنابراین، $(x_j^{(n)})$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}$ است. □

اینک، فرض کنید که هر دنبالهٔ $(x_j^{(n)})$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}$ باشد. فرض کنید $\varepsilon > ۰$، به ازای $j = ۱ , ۲ , ... , k$، N_j ای موجود است به طوری که

$$n > N_j \text{ و } m \text{ مستلزم آن است که } |x_j^{(m)} - x_j^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} .$$

اگر $N = \max\{N_۱ , N_۲ , ... , N_k\}$ آنگاه، بنابر (۱)،

$$n > N \text{ و } m \text{ مستلزم آن است که } d(\mathbf{x}^{(m)} , \mathbf{x}^{(n)}) < \varepsilon ،$$

یعنی، $(\mathbf{x}^{(n)})$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}^k$ است. □

۴.۱۳ قضیهٔ. $\mathbf{R}^k$ فضای اقلیدسی kـ بعدی کامل است.

برهان. یک دنبالهٔ کوشی مانند $(\mathbf{x}^{(n)})$ در $\mathbf{R}^k$ را در نظر بگیرید. بنابر لم ۳.۱۳، به ازای هر j، $(x_j^{(n)})$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}$ است. پس، بنابر قضیهٔ ۱۰ـ۱۱، $(x_j^{(n)})$ به عددی حقیقی مانند x_j همگرا است. مجدداً، بنابر لم ۳.۱۳، دنبالهٔ $(\mathbf{x}^{(n)})$، در واقع، به $\mathbf{x} = (x_۱ , x_۲ , ... , x_k)$ همگرا است. □

اینک می‌توانیم قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس را برای $\mathbf{R}^k$ ثابت کنیم؛ مقایسه کنید با قضیهٔ ۵.۱۱. مجموعه‌ای مانند S در $\mathbf{R}^k$ کراندار است در صورتی که عدد مثبتی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر $\mathbf{x}$ در S،

$$\max\{|x_j| : j = ۱ , ۲ , ... , k\} \le M .$$

۵.۱۳ قضیه بولتسانو ـ *وایرشتراس*: هر دنبالهٔ کراندار در $\mathbf{R}^k$ دارای زیر دنباله‌ای همگراست.

برهان. فرض کنید $(\mathbf{x}^{(n)})$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbf{R}^k$ باشد. در این صورت، هر دنبالهٔ $(x_j^{(n)})$ در $\mathbf{R}$ کراندار است. بنابر قضیهٔ ۵.۱۱ ، می‌توانیم به جای $(\mathbf{x}^{(n)})$ زیر دنباله‌ای قرار دهیم به طوری که $(x_1^{(n)})$ همگرا باشد. بنابر همان قضیه، می‌توانیم به جای $(x^{(n)})$ زیر دنباله‌ای از زیر دنبالهٔ بالا را قرار دهیم به طوری که $(x_2^{(n)})$ همگرا باشد. البته، بنابر قضیهٔ ۲.۱۱، $(x_1^{(n)})$ هنوز هم همگرا است. با k بار تکرار این استدلال، دنباله‌ای مانند $(\mathbf{x}^{(n)})$ به دست می‌آوریم به طوری که هر دنبالهٔ $(x_j^{(n)})$ همگراست، $j = 1, 2, \ldots, k$. این دنباله، زیر دنباله‌ای از دنبالهٔ اولیه را نمایش می‌دهد که بنابر لم ۳.۱۳ در $\mathbf{R}^k$ همگراست.

۶.۱۳ تعریف. فرض کنید (S, d) یک فضای متریک باشد. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از S باشد. عضوی مانند $s_\circ \in E$ یک نقطهٔ درونی E است در صورتی که به ازای عدد مثبتی مانند r داشته باشیم

$$\{s \in S : d(s, s_\circ) < r\} \subseteq E .$$

از E° به نشانهٔ مجموعهٔ نقاط درونی E استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ E در S باز است در صورتی که هر نقطهٔ E یک نقطهٔ درونی E باشد؛ یعنی اینکه $E = E^\circ$.

۷.۱۳ بحث. می‌توان نشان داد [تمرین ۴.۱۳] که

(i) S در S باز است [بدیهی است].

(ii) مجموعهٔ تهی ϕ در S باز است [بدیهی است].

(iii) اجتماع هر گردایه از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است.

(iv) اشتراک تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز، مجدداً مجموعه‌ای باز است.

از مطالعه‌ای که دربارهٔ $\mathbf{R}^k$ به عمل آوردیم و نیز تمرینها، چنین به ذهن می‌رسد که فضاهای متریک چیزهایی نسبتاً مفید و عام‌اند. وقتی علاقه‌مند به همگرایی چیزهایی معین [مانند نقطه‌ها یا تابعها] باشیم، اغلب متریکی موجود است که ما را در مطالعهٔ همگرایی یاری می‌کند. امّا گاهی هیچ متریکی به درد کار نمی‌خورد، در حالی که هنوز هم نوعی مفهوم همگرایی در بین است. اغلب، ابزار مناسب این کار چیزی است که توپولوژی نامیده می‌شود. منظور، مجموعه‌ای مانند S است که برای آن زیر مجموعه‌های معینی را به عنوان مجموعه‌های باز مقرر می‌کنیم. در

حالت کلی، فقط می‌خواهیم که خانوادهٔ مجموعه‌های باز در (i) − (iv)ی بالا صدق کنند. به ویژه، مجموعه‌های بازی که به وسیله یک متریک تعریف می‌شوند، تشکیل یک توپولوژی می‌دهند. ما این نظریهٔ مجرد را بیش از این دنبال نخواهیم کرد. با این حال، براساس این نظریه مجرد، مفاهیمی که می‌توان آنها را برحسب مجموعه‌های باز تعریف کرد [نگاه کنید به تعریفهای ۸.۱۳ ، ۱۱.۱۳ ، ۱.۲۲] مفاهیم توپولوژیکی نامیده می‌شوند و عنوان این بخش نیز از همین مشتق شده است.

۸.۱۳ تعریف. فرض کنید (S , d) یک فضای متریک باشد. زیر مجموعه‌ای مانند E از S مجموعه‌ای بسته است. در صورتی که متمم آن $S\backslash E$ مجموعه‌ای باز باشد. به عبارت دیگر، E بسته است در صورتی که $E = S\backslash U$؛ که در آن، U مجموعه‌ای باز است.

بنابر (iii) در بحث ۷.۱۳ ، اشتراک گردایه‌ای دلخواه از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است. [تمرین ۵.۱۳]. بستار $\bar{E}$ از مجموعهٔ E اشتراک همه مجموعه‌های بستهٔ شامل E است. مرز E مجموعه $\bar{E}\backslash E^{\circ}$ است؛ نقاط این مجموعه، نقاط مرزی E نامیده می‌شوند.

برای درک این مفاهیم، چند نتیجه ساده را بیان می‌کنیم و برهانها را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

۹.۱۳ قضیه. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از فضای متریک (S , d) باشد.

(الف) مجموعهٔ E بسته است اگر و تنها اگر $E = \bar{E}$.

(ب) مجموعهٔ E بسته است اگر و تنها اگر حد هر دنباله همگرا از نقاط E را در برداشته باشد.

(پ) یک عنصر به $\bar{E}$ تعلق دارد اگر و تنها اگر حد دنباله‌ای از نقاط E باشد.

(ت) یک نقطه روی مرز E است اگر و تنها اگر به بستار E و بستار متمم آن تعلق داشته باشد.

مثال ۳. در $\mathbf{R}$ بازه‌های باز (a , b) ، مجموعه‌های بازند. بازه‌های بستهٔ $[a , b]$ ، مجموعه‌های بسته‌اند. درون بازهٔ $[a , b]$ ، بازه (a , b) است. مرز (a , b) و مرز $[a , b]$ مجموعهٔ دو عضوی $\{a , b\}$ است.

مثال ۴. در $\mathbf{R}^k$ ، گویهای باز $\{x: d(x , x_{\circ}) < r\}$ ، مجموعه‌های بازند و گویهای بسته

$\{x: d(x, x_0) \le r\}$، مجموعه‌های بسته‌اند. مرز هر یک از این مجموعه‌ها $\{x: d(x, x_0) = r\}$ است. در صفحهٔ R^2، مجموعه‌های

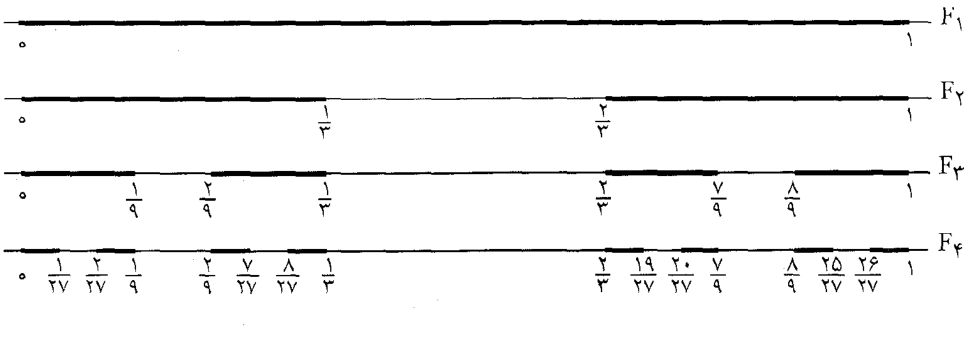
$$\{(x_1, x_2): x_1 > 0, x_2 > 0\} \quad , \quad \{(x_1, x_2): x_1 > 0\}$$

بازند. اگر به جای $>$ قرار داده شود $\ge$، مجموعه‌های بسته را به دست می‌آوریم. بسیاری از مجموعه‌ها نه بازند و نه بسته‌اند. به عنوان مثال

$$\{(x_1, x_2): x_1 > 0, x_2 \ge 0\} .$$

۱۰.۱۳ قضیه. فرض کنید (F_n) دنباله‌ای نزولی [یعنی، $\ldots \subseteq F_2 \subseteq F_1$] از مجموعه‌های ناتهی کراندار بسته در R^k باشد. در این صورت، $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ نیز بسته، ناتهی، و کراندار است.

برهان. بدیهی است که F بسته و کراندار است. تنها ناتهی بودن F نیاز به برهان دارد! به ازای هر n، عضوی مانند x_n در F_n را انتخاب می‌کنیم. بنابر قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۵.۱۳، زیر دنباله‌ای مانند $(x_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ از (x_n) به نقطه‌ای مانند x_0 در R^k همگراست. برای اثبات اینکه $x_0 \in F$، کافی است نشان دهیم که به ازای n_0 ثابتی، $x_0 \in F_{n_0}$. اگر $m \ge n_0$، آنگاه $n_m \ge n_0$. بنابراین، $x_{n_m} \in F_{n_m} \in F_{n_0}$. در نتیجه، دنبالهٔ $(x_{n_m})_{m=n_0}^{\infty}$ متشکل از نقاطی در F_{n_0} به x_0 همگراست. در نتیجه، بنابر (ب) قضیه ۹.۱۳، x_0 به F_{n_0} تعلق دارد. □



شکل ۱.۱۳. ساختن مجموعهٔ کانتور

مثال ۵. اینک، مجموعه ناتهی بستهٔ معروفی در R را که مجموعهٔ کانتور نامیده می‌شود، معرفی می‌کنیم. به طور تصویری، $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$، که در آن F_n ها در شکل ۱.۱۳ ترسیم شده‌اند.

مجموعهٔ کانتور خاصیتهای قابل توجهی دارد. مجموع طولهای بازه‌های تشکیل دهنده F_n ها برابر $(۲/۳)^{n-۱}$ است و این مقدار وقتی $n \longrightarrow +\infty$ به صفر میل می‌کند. با این حال، اشتراک F به اندازه‌ای بزرگ است که نمی‌توان آن را به صورت دنباله‌ای نوشت. در قالب اصطلاحات نظریه مجموعه‌ها، F «ناشمارا» است. درون F ، مجموعهٔ تهی است. بنابراین، F برابر مرز خودش است. جهت اطلاع بیشتر نگاه کنید به [۱۹]، ۴۴.۲؛ یا [۱۲]، ۶۲.۶.

۱۱.۱۳ تعریف. فرض کنید (S , d) یک فضای متریک باشد. خانوادهٔ $\mathscr{U}$ از مجموعه‌های باز، یک پوشش باز برای مجموعهٔ E نامیده می‌شود در صورتی که هر نقطهٔ $\dot{E}$ حداقل به مجموعه‌ای در $\mathscr{U}$ تعلق داشته باشد؛ یعنی،

$$E \subseteq \cup \{U: U \in \mathscr{U}\} .$$

یک زیر پوشش $\mathscr{U}$ زیر خانوادهٔ دلخواهی از $\mathscr{U}$ است که آن نیز E را می‌پوشاند. یک پوشش یا زیر پوشش متناهی است در صورتی که تنها شامل تعدادی متناهی از مجموعه‌ها باشد. خود مجموعه‌ها ممکن است نامتناهی باشند.

مجموعه‌ای مانند E فشرده است در صورتی که هر پوشش باز E دارای یک زیر پوشش متناهی برای E باشد.

این تعریف نسبتاً مجرد، در آنالیز پیشرفته اهمیت زیادی دارد؛ برای نمونه، نگاه کنید به مقالهٔ ادوین ـ هیوویت[۱] [e]. مجموعه‌های فشرده در $\mathbf{R}^k$ به طرز زیبایی به صورت زیر مشخص سازی می‌شوند.

۱۲.۱۳ قضیه هاینه ـ بورل. *زیر مجموعه‌ای مانند E از $\mathbf{R}^k$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد.*

برهان. فرض کنید E فشرده باشد. به ازای هر $m \in \mathbf{N}$ ، فرض کنید U_m مرکب از همهٔ $\mathbf{x}$ هایی در $\mathbf{R}^k$ باشد به طوری که

$$\max\{|x_j| : j = ۱ , ۲ , ... , k\} < m .$$

خانوادهٔ $\mathscr{U} = \{U_m: m \in \mathbf{N}\}$ ، یک پوشش باز E است [این خانواده $\mathbf{R}^k$ را می‌پوشاند!] و

(۱) Edwin Hewitt.

بنابراین، یک زیر خانوادهٔ متناهی از $\mathscr{U}$ مجموعهٔ E را می‌پوشاند. اگر $U_{m_\circ}$ بزرگترین عضو این زیر خانواده باشد، در این صورت $E \subseteq U_{m_\circ}$. نتیجه می‌شود که E کراندار است. برای اثبات اینکه E بسته است، فرض کنید $x_\circ$ نقطهٔ دلخواهی در R^k/E باشد. به ازای $m \in N$، فرض کنید،

$$V_m = \{x \in R^k : d(x , x_\circ) > \frac{1}{m}\} .$$

در این صورت، هر V_m در R^k باز است و $\mathscr{V} = \{V_m : m \in N\}$ مجموعهٔ E را می‌پوشاند. زیرا، $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_m = R^k\setminus\{x_\circ\}$. چون می‌توان E را به وسیلهٔ تعدادی متناهی از V_m ها پوشاند، برای $m_\circ$ای، داریم

$$E \subseteq \{x \in R^k: d(x , x_\circ) > \frac{1}{m_\circ}\} .$$

در نتیجه، $\{x\in R^k : d(x , x_\circ) < \frac{1}{m_\circ}\} \subseteq R^k\setminus E$، به طوری که $x_\circ$ درون $R^k\setminus E$ است. چون $x_\circ$ در $R^k\setminus E$ دلخواه است، لذا $R^k\setminus E$ یک مجموعهٔ باز است. بنابراین، E مجموعه‌ای بسته است.

حال فرض کنید که E بسته و کراندار باشد. چون E کراندار است، E زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ای مانند F به شکل زیر است:

$$F = \{x \in R^k : |x_j| \leq m , j = 1 , 2 , ... , k| .$$

هم چنان که در تمرین ۱۲.۱۳ متذکر شدیم، کافی است ثابت کنیم که F فشرده است. ما این کار را در قضیهٔ بعدی، پس از مقداری تدارک، انجام می‌دهیم. □

مجموعهٔ F در برهان قبل یک k - حجره است زیرا شکلی به صورت زیر دارد. بازه‌های بسته‌ای مانند $[a_1 , b_1]$، $[a_2 , b_2]$، ...، $[a_k , b_k]$ موجودند به طوری که

$$F = \{x \in R^k : x_j \in [a_j , b_j] , j = 1 , 2 , ... , k\} .$$

قطر F عبارت است از

$$\delta = [\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2]^{1/2} ;$$

یعنی، $\delta = \sup\{d(x , y) : x , y \in F\}$. با استفاده از نقاط میانی $c_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j)$ از بازهٔ $[a_j , b_j]$، ملاحظه می‌کنیم که F اجتماعی از 2^k، k ـ حجره است که هر یک دارای قطر $\delta/2$ اند. اگر این تذکر واضح نباشد، ابتدا حالتهای $k = 2$ و $k = 3$ را در نظر بگیرید.

۱۳.۱۳ قضیه. هر k ـ حجره F در R^k فشرده است.

برهان. فرض کنید که F فشرده نباشد در این صورت، پوشش بازی مانند $\mathscr{U}$ برای F موجود است که هیچ زیر خانوادهٔ متناهی آن F را نمی‌پوشاند. فرض کنید δ معرف قطر F باشد. به طوری که در بالا متذکر شدیم، F اجتماعی از 2^k ، k ـ حجره با قطر $\delta/2$ است. حداقل یکی از این 2^k ، kـحجره که آن را با F_1 نشان می‌دهیم، نمی‌توانند به وسیلهٔ تعدادی متناهی از مجموعه‌های عضو $\mathscr{U}$ پوشانده شود. به همین نحو، F_1 شامل k – حجره ای مانند F_2 با قطر $\delta/4$ است که نمی‌توان آن را به وسیلهٔ تعدادی متناهی از مجموعه‌های عضو $\mathscr{U}$ پوشاند. با ادامه کار به همین سبک، دنباله‌ای از k ـ حجره‌ها، مانند (F_n) ، را به دست می‌آوریم به طوری که

(۱) $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ ؛

(۲) F_n دارای قطر $2^{-n}\delta$ است؛

(۳) F_n را نمی‌توان به وسیلهٔ تعدادی متناهی از مجموعه‌های عضو $\mathscr{U}$ پوشاند.

بنابر قضیهٔ ۱۰.۱۳ ، اشتراک $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ شامل نقطه‌ای مانند x_0 است. این نقطه به مجموعه‌ای مانند U_0 در $\mathscr{U}$ تعلق دارد. چون U_0 باز است، $r_0 > 0$ ای موجود است به طوری که

$$\{x \in R^k : d(x , x_0) < r\} \subseteq U_0 .$$

نتیجه می‌شود که $F_n \subseteq U_0$ ، مشروط بر آنکه $2\delta^{-n} < r$. امّا، این نتیجه به طرز فاحشی با (۳) تناقض دارد. □

چون $R = R^1$ ، نتایج قبلی برای R نیز معتبرند.

تمرینها

۱.۱۳. برای نقاط x و y در R^k ، فرض کنید

$$d_1(x , y) = \max\{|x_j - y_j| : j = 1 , 2 , \dots , k\}$$

و

$$d_2(x , y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

(الف) نشان دهید که d_1 و d_2 متریکهایی برای $\mathbf{R}^k$ هستند.

(ب) نشان دهید که d_1 و d_2 کامل‌اند.

۲.۱۳. (الف) نابرابری (۱) در لم ۳.۱۳ را ثابت کنید.

(ب) اولین حکم لم ۳.۱۳ را ثابت کنید.

۳.۱۳. فرض کنید B مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کراندار $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ باشد و تعریف کنید

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{|x_j - y_j| : j = 1, 2, \dots\}.$$

(الف) نشان دهید که d یک متریک بر B است.

(ب) آیا $d^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|$ یک متریک را بر B تعریف می‌کند؟

۴.۱۳. (iii) و (iv) در بحث ۷.۱۳ را ثابت کنید.

۵.۱۳. (الف) درستی قانون دمورگن را برای مجموعه‌ها تحقیق کنید:

$$\cap\{S\backslash U : U \in \mathscr{U}\} = S\backslash \cup\{U : U \in \mathscr{U}\}.$$

(ب) نشان دهید که اشتراک هر گردایه از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است.

۶.۱۳. قضیه ۹.۱۳ را ثابت کنید.

۷.۱۳. نشان دهید که هر مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}$ اجتماعی از دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از بازه‌های باز مجزا است.

۸.۱۳. (الف) درستی حکم مثال ۳ را تحقیق کنید.

(ب) درستی حکم مثال ۴ را تحقیق کنید.

۹.۱۳. بستار مجموعه‌های زیر را پیدا کنید.

(الف) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$،

(ب) $\mathbf{Q}$، مجموعهٔ اعداد گویا،

(پ) $\{r \in \mathbf{Q} : r^2 < 2\}$.

۱۰.۱۳. نشان دهید که درون هر یک از مجموعه‌های زیر مجموعه‌ای تهی است.

(الف) $\{1/n : n \in \mathbf{N}\}$،

(ب) $\mathbf{Q}$، مجموعه اعداد گویا،

(پ) مجموعهٔ کانتور در مثال ۵.

۱۱.۱۳. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}^k$ باشد. نشان دهید که E فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله در E زیر دنباله‌ای داشته باشد که به نقطه‌ای در E همگراست.

۱۲.۱۳. فرض کنید (S , d) فضای متریک دلخواهی باشد.

(الف) نشان دهید که اگر E زیر مجموعهٔ بسته‌ای از یک مجموعهٔ فشرده مانند F باشد، آنگاه E نیز فشرده است.

(ب) نشان دهید که اجتماع متناهی از مجموعه‌های فشرده در S، مجموعه‌ای فشرده است.

۱۳.۱۳. فرض کنید E یک زیر مجموعهٔ فشردهٔ ناتهی در $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که $\sup E$ و $\inf E$ به E تعلق دارند.

۱۴.۱۳. فرض کنید E یک زیر مجموعهٔ فشردهٔ ناتهی از $\mathbf{R}^k$ باشد و فرض کنید $\delta = \sup\{d(\mathbf{x} , \mathbf{y}): \mathbf{x} , \mathbf{y} \in E\}$. نشان دهید که E شامل نقاطی مانند $x_\circ$ و $\mathbf{y}_\circ$ است به طوری که $d(\mathbf{x}_\circ , \mathbf{y}_\circ) = \delta$.

۱۵.۱۳. فرض کنید (B , d) مانند تمرین ۳.۱۳ باشد و F متشکل از همهٔ $\mathbf{x} \in B$ هایی باشد به طوری که $\sup \{|x_j| : j = ۱ , ۲ , ...\} \leq ۱$.

(الف) نشان دهید که F بسته و کراندار است. [مجموعهٔ F در فضای متریک (S , d) کراندار است در صورتی که $s_\circ \in S$ و rای موجود باشد به طوری که $F \subseteq \{s \in S : d(s , s_\circ) \leq r\}$.]

(ب) نشان دهید که F فشرده نیست. راهنمایی: به ازای هر $\mathbf{x}$ در F، فرض کنید $U(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in B : d(\mathbf{x} , \mathbf{y}) \leq ۱\}$، و پوشش $\mathscr{U}$ برای F مرکب از همهٔ $U(\mathbf{x})$ ها را در نظر بگیرید. به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، فرض کنید $\mathbf{x}^{(n)}$ به گونه‌ای تعریف شده باشد که $x_n^{(n)} = -۱$ و برای $j \neq n$، $x_j^{(n)} = ۱$. نشان دهید که $\mathbf{x}^{(n)}$ های متمایز نمی‌توانند به عضو یکسانی از $\mathscr{U}$ تعلق داشته باشند.

بخش ۱۴. سریها

مطالعهٔ جامع دنباله‌ها این امکان را به ما می‌دهد که سریعاً خاصیتهای اصلی سریهای نامتناهی را به دست آوریم.

۱.۱۴ نماد مجموعیابی. نماد $\sum_{k=m}^{n} a_k$ مخففی برای حاصل جمع $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ است. نماد «$\sum$» دستور جمع را می‌دهد و نشانه‌های $k = m$ و $k = n$ به ما می‌گویند که عاملهای جمع حاصل از قرار دادن اعداد $m, m+1, \dots, n$ به جای k را با هم جمع کنیم. به عنوان مثال $\sum_{k=2}^{5} 1/(k^2 + k)$ مخفف

$$\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\frac{1}{4^2+4}+\frac{1}{5^2+5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$$

و $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$ مخفف $1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n$ است.

نماد $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ مخفف $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$ است، گرچه هنوز معنایی برای چنین مجموع نامتناهی قائل نشده‌ایم.

۲.۱۴ سریهای نامتناهی. برای اینکه معنایی برای $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ قائل شویم، دنبالهٔ $(s_n)_{n=m}^{\infty}$ از مجموعهای جزئی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$s_n = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

گوییم سری نامتناهی $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ همگرا است در صورتی که دنبالهٔ (s_n) از مجموعهای جزئی به عددی حقیقی مانند s همگرا باشد که در این صورت تعریف می‌کنیم $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = s$. بنابراین، $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = s$ به معنی این است که $\lim s_n = s$ یا $\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=m}^{n} a_k) = s$.

هر سری که همگرا نباشد، واگرا نامیده می‌شود. گوییم سری $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ واگرا به $+\infty$ است و می‌نویسیم $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = +\infty$ در صورتی که $\lim s_n = +\infty$؛ تذکر مشابهی در مورد $-\infty$ صادق است. نماد $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ معنایی ندارد، مگر اینکه این سری همگرا یا به $+\infty$ یا $-\infty$ واگرا باشد. اغلب به خاصیتهای سری نامتناهی، بدون توجه به مقادیر دقیق آنها و اینکه دقیقاً مجموعیابی از کجا شروع می‌شود، علاقه‌مندیم؛ که در این حالت می‌توانیم به جای $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$، بنویسیم $\sum a_n$.

اگر جمله‌های a_n یک سری نامتناهی مانند $\sum a_n$ همه نامنفی باشند، آنگاه مجموعهای جزئی (s_n) دنباله‌ای نانزولی تشکیل می‌دهند و لذا قضیه‌های ۲.۱۰ و ۴.۱۰ نشان می‌دهند که $\sum a_n$ یا همگراست یا واگرا به $+\infty$ است. به ویژه، $\sum |a_n|$ برای هر دنبالهٔ (a_n) با معنی است. سری $\sum a_n$

را مطلقاً همگرا یا همگرای مطلق نامیم در صورتی که $\sum |a_n|$ همگرا باشد. به طوری که در ۷.۱۴ خواهیم دید، سریهای همگرای مطلق، همگرا هستند.

مثال ۱. سری ای به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$، برای مقادیر ثابت a و r، سری هندسی نامیده می‌شود. این سریها ساده‌ترین سریهایی هستند که می‌توان مجموع آنها را به دست آورد. به ازای $r \neq 1$ مجموعهای جزئی s_n به صورت

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\,\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{1}$$

هستند. درستی این اتحاد را می‌توان به کمک استقرای ریاضی یا با ضرب هر دو طرف در $1 - r$ تحقیق کرد، که در این صورت طرف راست برابر $a - ar^{n+1}$ است و طرف چپ به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}(1 - r)\sum_{k=0}^{n} ar^k &= \sum_{k=0}^{n} ar^k - \sum_{k=0}^{n} ar^{k+1}\\ &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^n - (ar + ar^2 + \dots + ar^{n+1})\\ &= a - ar^{n+1}.\end{aligned}$$

برای $|r| < 1$، بنابر مثال ۷.۹ (پ)، داریم $\lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = 0$، و لذا از (۱) داریم $\lim_{n\to\infty} s_n = a/(1 - r)$. این، ثابت می‌کند که

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}\ ,\quad |r| < 1. \tag{2}$$

اگر $a \neq 0$ و $|r| \geq 1$، آنگاه دنبالهٔ (ar^n) به 0 همگرا نیست، و لذا بنابر نتیجهٔ ۵.۱۴ که در زیر می‌آید، سری $\sum ar^n$ واگراست.

مثال ۲. دستور (۲) از مثال (۱) و نتیجهٔ بعدی بسیار مهم‌اند و هر جا که ممکن باشد باید از هر دوی آنها استفاده کرد، اگر چه حکم (۱) زیر را تا قبل از بخش بعدی ثابت نخواهیم کرد. عدد حقیقی مثبت ثابتی مانند P را در نظر گیرید. در این صورت،

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$.

به ویژه، برای $p \leq 1$، می‌توانیم بنویسیم $\sum 1/n^p = +\infty$: تعیین مقدار دقیق این سری برای

۱ < p ، آسان نیست. در اینجا چند فرمول مهم را ارائه می‌کنیم که می‌توانیم آنها را به کمک تکنیکهایی [به عنوان دو مورد از این تکنیکها، می‌توان از سریهای فوریه یا متغیرهای مختلط نام برد] ثابت کرد که در این کتاب گنجانده نشده‌اند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449\ \ldots, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}0823\ \ldots, \tag{3}$$

فرمولهای مشابهی برای $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ برای هر عدد صحیح زوج p ، برقرارند. اما، هیچ موردی از این فرمولهای جالب برای p های فرد به دست نیامده است. به ویژه، هیچ فرمولی از این نوع برای $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ در دست نیست، گرچه این سری همگراست و می‌توان آن را با هر دقت مورد نظر تقریب زد.

تأکید بر این نکته ارزشمند است که اغلب، اثبات وجود حد یا اثبات همگرا بودن یک سری، آسانتر از تعیین مقدار دقیق آن است. در بخش بعد، بدون برخورد با مشکل عمده‌ای نشان خواهیم داد که برای بر $p > 1$ ، $\sum 1/n^p$ همگراست، امّا اثبات اینکه مجموع، وقتی $p = 2$ ، برابر $\pi^2/6$ است بسیار مشکل است. برای $p = 3$ ، کسی مقدار دقیق مجموع را نمی‌داند.

۳.۱۴ تعریف. گوییم سری $\sum a_n$ در معیار کوشی صدق می‌کند در صورتی که دنبالهٔ (s_n) از مجموعهای جزئی آن یک دنبالهٔ کوشی باشد [نگاه کنید به تعریف ۸.۱۰]:

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود است به طوری که

(۱) $m, n > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

اگر قید $n > m$ را در این تعریف اعمال کنیم، چیزی از آن کاسته نمی‌شود. به علاوه، اگر به جای m وقتی $n > m$ ، از $m - 1$ وقتی $n \geq m$ استفاده کنیم، تنها مشکل حاصل، مشکل نمادی است. بنابراین، (۱) معادل است با

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N موجود است به طوری که

(۲) $n \geq m > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s_{m-1}| < \varepsilon$.

چون $s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k$ ، شرط (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود است به طوری که

(۳) $n \geq m > N$ مستلزم آن است که $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$.

ما معمولاً از بیان (۳) به عنوان معیار کوشی استفاده خواهیم کرد. قضیهٔ ۱۱.۱۰ مستلزم قضیهٔ زیر است.

۴.۱۴ قضیه. یک سری همگراست اگر و تنها اگر در معیار کوشی صدق کند.

۵.۱۴ نتیجه. اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim a_n = 0$.

برهان. چون این سری همگراست، پس (۳) در تعریف ۳.۱۴ صدق می‌کند. به ویژه، (۲) در ۳.۱۴، به ازای $n = m$، صدق می‌کند؛ یعنی، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|a_n| < \varepsilon$. بنابراین، $\lim a_n = 0$. □

عکس نتیجهٔ ۵.۱۴، به طوری که از مثال $\sum 1/n = +\infty$ بر می‌آید، درست نیست. حال، چند آزمون را ارائه می‌دهیم که در تعیین همگرا بودن یک سری به ما یاری می‌کنند. اولین آزمون مقدماتی، ولی مفید است.

۶.۱۴ آزمون مقایسه. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری باشد که در آن، به ازای هر n، $a_n \geq 0$.

(i) اگر $\sum a_n$ همگرا باشد و برای هر n، $|b_n| \leq a_n$، آنگاه $\sum b_n$ همگراست.

(ii) اگر $\sum a_n = +\infty$ و برای هر n، $b_n \geq a_n$، آنگاه $\sum b_n = +\infty$.

برهان.

(i) به ازای $n \geq m$، داریم

$$|\sum_{k=m}^{n} b_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k ;$$

اولین نابرابری از نابرابری مثلث نتیجه می‌شود [تمرین ۶.۳ (ب)]. چون $\sum a_n$ همگراست، در معیار کوشی ۳.۱۴ صدق می‌کند. از (۱) نتیجه می‌شود که $\sum b_n$ نیز در معیار کوشی صدق می‌کند و بنابراین $\sum b_n$ همگراست.

(ii) فرض کنید (s_n) و (t_n)، به ترتیب، دنباله‌های مجموعهای جزئی برای $\sum a_n$ و $\sum b_n$ باشند.

چون به ازای هر n، $b_n \geq a_n$، بدیهی است که برای هر n، $t_n \geq s_n$. چون $\lim s_n = +\infty$، نتیجه می‌گیریم که $\lim t_n = +\infty$؛ یعنی، $\sum b_n = +\infty$. □

۷.۱۴ نتیجه. سریهای همگرای مطلق همگرا هستند.

برهان. فرض کنید که $\sum b_n$ همگرای مطلق باشد. این بدان معنی است که $\sum a_n$ همگراست که در آن، برای هر n، $a_n = |b_n|$. در این صورت، به طور بدیهی، $|b_n| \leq a_n$، و لذا بنابر ۶.۱۴ (i)، $\sum b_n$ همگراست. □

اینک، آزمون نسبت را که به دلیل آنکه استفاده از آن اغلب آسان و مورد توجه است، بیان می‌کنیم. امّا، این آزمون نقصهایی دارد: این آزمون، آن عمومیت آزمون ریشه را ندارد. نتیجهٔ مهمی دربارهٔ شعاع همگرایی یک سری توانی، از آزمون ریشه استفاده می‌کند. سرانجام، آزمون نسبت در صورتی که بعضی از a_nها مساوی ۰ باشند، فاقد ارزش است. برای دوره کردن lim sup ها و lim inf ها نگاه کنید به ۶.۱۰، ۷.۱۰، ۷.۱۱ و بخش ۱۲.

۸.۱۴ آزمون نسبت. سری $\sum a_n$ با جملات ناصفر

(i) همگرای مطلق است در صورتی که $\limsup |a_{n+1}/a_n| < 1$،

(ii) واگراست در صورتی که $\liminf |a_{n+1}/a_n| > 1$،

(iii) در غیر این صورت، $\liminf |a_{n+1}/a_n| \leq 1 \leq \limsup |a_{n+1}/a_n|$ و از این آزمون هیچ اطلاعی حاصل نمی‌شود.

برهان این آزمون را پس از برهان آزمون ریشه ارائه می‌دهیم.

به خاطر داشته باشید که اگر $\lim |a_{n+1}/a_n|$ موجود باشد، این حد با هر دوی $\limsup |a_{n+1}/a_n|$ و $\liminf |a_{n+1}/a_n|$ برابر است و آزمون نسبت اطلاعاتی به ما می‌دهد، البته، مگر اینکه حد $\lim |a_{n+1}/a_n|$ برابر ۱ باشد.

۹.۱۴ آزمون ریشه. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری باشد و فرض کنید $\alpha = \limsup |a_n|^{1/n}$. سری $\sum a_n$

(i) همگراست در صورتی که $\alpha < ۱$،

(ii) واگراست در صورتی که $\alpha > ۱$،

(iii) در غیر این صورت، $\alpha = ۱$ و از این آزمون هیچ اطلاعی حاصل نمی‌شود.

برهان.

(i) فرض کنید $\alpha < ۱$ و $\varepsilon > ۰$ را چنان اختیار کنید که $\alpha + \varepsilon < ۱$. در این صورت، بنابر تعریف ۶.۱۰، عددی طبیعی مانند N موجود است به طوری که

$$\alpha - \varepsilon < \sup \{|a_n|^{۱/n} : a > N\} < \alpha + \varepsilon$$

به ویژه، برای $n > N$، داریم $|a_n|^{۱/n} < \alpha + \varepsilon$، و بنابراین، برای $n > N$،

$$|a_n| < (\alpha + \varepsilon)^n .$$

چون $۰ < \alpha + \varepsilon < ۱$، سری هندسی $\sum_{n=N+۱}^{\infty}(\alpha + \varepsilon)^n$ همگراست و آزمون مقایسه نشان می‌دهد که سری $\sum_{n=N+۱}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. در این صورت، آشکار است که $\sum a_n$ همگراست. نگاه کنید به تمرین ۹.۱۴.

(ii) اگر $\alpha > ۱$، بنابر نتیجهٔ ۴.۱۱، زیر دنباله‌ای از $|a_n|$ دارای حدی مانند $\alpha > ۱$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که برای تعدادی نامتناهی از nها، $|a_n| > ۱$. به ویژه، امکان ندارد که دنبالهٔ (a_n) به ۰ همگرا شود. لذا، بنابر نتیجهٔ ۵.۱۴، سری $\sum a_n$ نمی‌تواند همگرا باشد.

(iii) برای هر یک از سریهای $\sum ۱/n$ و $\sum ۱/n^۲$، با به کارگیری ۷.۹ (پ)، α برابر با ۱ می‌شود. چون $\sum ۱/n$ واگراست و $\sum ۱/n^۲$ همگراست و تساوی $\alpha = ۱$ همگرایی یا واگرایی یک سری را تضمین نمی‌کند. □

برهان آزمون نسبت. فرض کنید $\alpha = \limsup |a_n|^{۱/n}$، بنابر قضیهٔ ۲.۱۲، داریم

$$\liminf |\frac{a_n}{a_n}| \leq \alpha \leq \limsup |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| . \qquad (۱)$$

اگر $\limsup |a_{n+۱}/a_n| < ۱$، آنگاه $\alpha < ۱$، و لذا بنابر آزمون ریشه، سری همگراست. اگر $\liminf |a_{n+۱}/a_n| > ۱$، آنگاه $\alpha > ۱$، و سری بنابر آزمون ریشه، واگراست. درستی حکم ۸.۱۴ (iii)، مجدداً، با امتحان سریهای $\sum ۱/n$ و $\sum ۱/n^۲$ تحقیق می‌شود. □

نابرابری (i) در برهان آزمون نسبت، نشان می‌دهد که آزمون ریشه به مفهوم زیر بر آزمون نسبت برتری دارد: هر وقت که ازآزمون ریشه هیچ اطلاعی حاصل نمی‌شود [یعنی، $\alpha = ۱$]، مطمئناً آزمون نسبت نیز هیچ اطلاعی نمی‌دهد. از طرف دیگر، مثال ۸ زیر سری‌یی را ارائه می‌دهد که برای آن آزمون نسبت هیچ اطلاعی نمی‌دهد، ولی سری، بنابر آزمون ریشه، همگراست. با این حال، همان طور که از تذکر بعدی بر می‌آید، معمولاً این آزمونها همراه با هم بی‌نتیجه می‌مانند.

۱۰.۱۴ تذکر. اگر جمله‌های a_n ناصفر باشند و اگر $\lim |a_n/a_n| = ۱$، آنگاه بنابر نتیجهٔ ۳.۱۲، $a = \lim\sup |a_n|^{۱/n} = ۱$، و لذا نه از آزمون نسبت و نه از آزمون ریشه هیچ اطلاعی در رابطه با همگرایی $\sum a_n$ حاصل نمی‌شود.

تا به حال سه آزمون برای همگرایی در سریها به دست آورده‌ایم [آزمون مقایسه، نسبت، ریشه] و دو آزمون دیگر را در بخش بعدی به دست خواهیم آورد. در اینجا، هیچ استراتژی روشنی به ما این آگاهی را نمی‌دهد که ابتدا کدام آزمون را بیازماییم. با این حال، اگر از شکل یک سری مفروض مانند $\sum a_n$ استراتژی خاصی را درنیابیم، و اگر محاسبهٔ نسبتهای $a_{n+۱}/a_n$ آسان باشد، شاید امتحان آزمون نسبت، در ابتدا بهتر باشد.

مثال ۳. سری

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \left(-\frac{۱}{۳}\right)^n = \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱}{۸۱} - \frac{۱}{۲۴۳} + \dots \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید. این، یک سری هندسی است و اگر آن را به صورت $(۱/۹)\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱/۳)^n$ بنویسیم، آنگاه سری به صورت $\sum_{n=۰}^{\infty} ar^n$ در می‌آید. در اینجا، $a = ۱/۹$ و $r = -۱/۳$ و بنابر (۲) از مثال ۱، مجموع سری؛ عبارت است از $(۱/۹)/[۱ - (-۱/۳)] = ۱/۱۲$.

می‌توان به کمک آزمون مقایسه نیز نشان داد که سری (۱) همگراست. زیرا، بنابر آزمون نسبت یا آزمون ریشه، سری $\sum ۱/۳^n$ همگراست. در حقیقت اگر $a_n = (-۱/۳)^n$، آنگاه $\lim |a_{n+۱}/a_n| = \lim\sup |a_n|^{۱/n} = ۱/۳$. البته، هیچ یک از این آزمونها مقدار دقیق سری (۱) را به ما نمی‌دهند.

مثال ۴. سری

$$\sum \frac{n}{(n^۲ + ۳)} \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید. اگر $a_n = n/(n^۲ + ۳)$ آنگاه

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{n + ۱}{(n + ۱)^۲ + ۳} \cdot \frac{n^۲ + ۳}{n} = \frac{n + ۱}{n} \cdot \frac{n^۲ + ۳}{n^۲ + ۲n + ۴},$$

بنابراین، $\lim |a_{n+۱}/a_n| = ۱$. همان طور که در ۱۰.۱۴ متذکر شدیم، نه آزمون نسبت و نه آزمون ریشه هیچ اطلاعی را در این حالت به ما نمی‌دهند. قبل از به کار بردن آزمون مقایسه، لازم است تصمیم بگیریم که آیا همگرا بودن سری را باور داریم یا خیر. چون a_n برای nهای بزرگ تقریباً برابر $۱/n$ است و چون $\sum ۱/n$ واگراست، انتظار داریم که سری (۱) واگرا باشد. امّا،

$$\frac{n}{n^۲ + ۳} \geq \frac{n}{n^۲ + ۳n^۲} = \frac{n}{۴n^۲} = \frac{۱}{۴n}.$$

چون $\sum(۱/n)$ واگراست، پس $\sum(۱/۴n)$ نیز واگرا می‌شود [مجموعهای جزئی آن به صورت $s_n/۴$ هستند که در آن $s_n = \sum_{k=۱}^{n}(۱/k)$] ، و لذا، بنابر آزمون مقایسه، سری (۱) واگراست.

مثال ۵. سری

$$\sum \frac{۱}{(n^۲ + ۱)} \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید. به طوری که خواننده تحقیق خواهد کرد، نه از آزمون نسبت و نه از آزمون ریشه هیچ اطلاعی حاصل نمی‌شود. n امین جمله تقریباً $۱/n^۲$ است، و در حقیقت، $۱/(n^۳ + ۱) \leq \frac{۱}{n^۲}$. چون $\sum(۱/n^۲)$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه، سری (۱) همگرا می‌شود.

مثال ۶. سری

$$\sum \frac{n}{۳^n} \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید. اگر $a_n = n/۳^n$ ، آنگاه $a_{n+۱}/a_n = (n + ۱)/(۳n)$ ، و بنابراین، $\lim |a_{n+۱}/a_n| = ۱/۳$. در نتیجه، بنابر آزمون نسبت، سری (۱) همگرا می‌شود. در این حالت، به کاربردن آزمون ریشه، در صورتی که به خاطر داشته باشیم که $\lim n^{۱/n} = ۱$، چندان مشکلتر از آن نیست. همچنین، با مقایسه این سری با سری هندسی مناسبی، اثبات اینکه (۱) همگراست، امکانپذیر است.

مثال ۷. سری $\sum a_n$ را در نظر بگیرید که در آن

$$a_n = \left[\frac{۲}{(-۱)^n - ۳}\right]^n . \qquad (۱)$$

شکل a_n، آزمون ریشه را پیشنهاد می‌کند. چون برای nهای زوج، $|a_n|^{۱/n} = ۱$ و برای nهای فرد، $|a_n|^{۱/n} = \frac{۱}{۲}$، داریم $\alpha = \limsup |an|^{۱/n} = ۱$. بنابراین، از آزمون ریشه هیچ اطلاعی حاصل نمی‌شود، و آزمون نسبت نیز نمی‌تواند سودمند باشد. از طرف دیگر، اگر هوشیار می‌بودیم، مشاهده می‌کردیم که برای هر n زوج $a_n = ۱$، و لذا، (a_n) نمی‌تواند به ۰ همگرا شود. در نتیجه، بنابر نتیجه ۵.۱۴، سری (۱) واگراست.

مثال ۸. سری

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{(-۱)^n - n} = ۲ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۶۴} + \dots , \qquad (۱)$$

را در نظر گیرید. فرض کنید $a_n = ۲^{(-۱)^n - n}$. چون برای هر n، $a_n < ۱/۲^{n-۱}$، می‌توانیم به سرعت نتیجه بگیریم که سری، بنابر آزمون نسبت، همگراست. امّا، علاقهٔ واقعی ما به این سری در این است که این سری تمایز بین آزمون نسبت و ریشه را توضیح می‌دهد. چون برای nهای زوج، $a_{n+۱}/a_n = ۱/۸$ و برای nهای فرد، $a_{n+۱}/a_n = ۲$، پس داریم

$$\frac{۱}{۸} = \liminf \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| < ۱ < \limsup \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = ۲ .$$

در نتیجه، از آزمون نسبت هیچ اطلاعی حاصل نمی‌شود.

توجه کنید که برای هر n زوج، $(a_n)^{۱/n} = ۲^{۱/n-۱}$ و برای nهای فرد $(a_n)^{۱/n} = ۲^{-۱/n-۱}$. چون، بنابر مثال ۷.۹(ت)، $\lim ۲^{۱/n} = \lim ۲^{-۱/n} = ۱$، نتیجه می‌گیریم که $\lim (a_n)^{۱/n} = ۱/۲$. بنابراین، $\alpha = \limsup (a_n)^{۱/n} = ۱/۲ < ۱$، و سری (۱) همگراست.

مثال ۹. سری

$$\sum \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}$$

را در نظر بگیرید. چون $\lim \sqrt{n/(n+۱)} = ۱$، نه از آزمون نسبت و نه از آزمون ریشه هیچ

اطلاعی حاصل نمی‌شود. نظر به اینکه $\sum ۱/\sqrt{n}$ واگراست، قادر نخواهیم بود که آزمون مقایسه ۶.۱۴ (i) را برای نشان دادن اینکه (۱) همگراست، به کار ببریم. چون جملات سری (۱) همه نامنفی هستند، قادر نخواهیم بود که از آزمون مقایسه ۶.۱۴ (ii)، برای نشان دادن اینکه (۱) واگراست، استفاده کنیم. نتیجه این می‌شود که این سری بنابر آزمون سریهای متناوب ۳.۱۵، که بحث آن را به بخش بعد موکول کرده‌ایم، همگراست.

تمرینها

۱.۱۴. تعیین کنید که کدام یک از سریهای زیر همگرا هستند. جواب خود را توجیه کنید.

(الف) $\sum n^۴/۲^n$ (ب) $\sum ۲^n/n!$

(پ) $\sum n^۲/۳^n$ (ت) $\sum n!/(n^۴ + ۳)$

(ث) $\sum \cos^۲ n/n^۲$ (ج) $\sum_{n=۲}^{\infty} ۱/(\log n)$

۲.۱۴. تمرین ۱.۱۴ را برای سریهای زیر تکرار کنید.

(الف) $\sum (n - ۱)/n^۲$ (ب) $\sum (-۱)^n$

(پ) $\sum ۳n/n^۳$ (ت) $\sum n^۳/۳^n$

(ث) $\sum n^۲/n!$ (ج) $\sum ۱/n^n$

(چ) $\sum n/۲^n$

۳.۱۴. تمرین ۱.۱۴ را برای سریهای زیر تکرار کنید.

(الف) $\sum ۱/\sqrt{n!}$ (ب) $\sum (۲ + \cos n)/۳^n$

(پ) $\sum ۱/(۲^n + n)$ (ت) $\sum (۱/۲)^n(۵۰ + ۲/n)$

(ث) $\sum \sin(n\pi/۹)$ (ج) $\sum (۱۰۰)^n/n!$

۴.۱۴. تمرین ۱.۱۴ را برای سریهای زیر تکرار کنید.

(الف) $\sum_{n=۲}^{\infty} ۱/[n + (-۱)^n]$ (ب) $\sum [\sqrt{n + ۱} - \sqrt{n}]$

(پ) $\sum n!/n^n$

۵.۱۴. فرض کنید $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$، که در آن A و B اعداد حقیقی‌اند. قضیه‌های حدی بخش ۹ را برای اثبات سریع احکام زیر به کار ببرید.

(الف) $\sum (a_n + b_n) = A + B$.

(ب) $\sum ka_n = kA\ , k \in R$.

(پ) آیا $\sum a_n b_n = AB$ حدس موجهی است؟ بحث کنید.

۶.۱۴. (الف) ثابت کنید که اگر $\sum |a_n|$ همگرا و (b_n) دنباله‌ای کراندار باشد، آنگاه $\sum a_n b_n$ همگراست. راهنمایی: قضیه ۴.۱۴ را به کار ببرید.

(ب) بررسی کنید که نتیجه ۷.۱۴ حالت خاصی از (الف) است.

۷.۱۴. ثابت کنید که اگر $\sum a_n$ یک سری همگرا از اعداد نامنفی باشد و $p > 1$، آنگاه $\sum a_n^p$ همگراست.

۸.۱۴. نشان دهید که اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهایی همگرا از اعداد نامنفی باشند، آنگاه $\sum \sqrt{a_n b_n}$ همگراست. راهنمایی: نشان دهید که به ازای هر n، $\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n$.

۹.۱۴. همگرایی یک سری به تعداد متناهی دلخواهی از جملات آن بستگی ندارد. گر چه البته مقدار حد سری به آن وابسته است. به عبارت دقیقتر، سریهای $\sum a_n$ و $\sum b_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که مجموعهٔ $\{n \in N\ ;\ a_n \neq b_n\}$ متناهی باشد. در این صورت، هر دو سری همگرا یا هر دو واگرا هستند. این حکم را ثابت کنید. راهنمایی: این حکم از قضیهٔ ۴.۱۴ تقریباً بدیهی است.

۱۰.۱۴. یک سری مانند $\sum a_n$ پیدا کنید که بنابر آزمون ریشه واگرا باشد ولی برای آن آزمون نسبت هیچ اطلاعی ندهد. با مثال ۸ مقایسه کنید.

۱۱.۱۴. فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی ناصفر باشد به طوری که دنبالهٔ حاصل از نسبتهای a_{n+1}/a_n دنبالهٔ ثابتی باشد. نشان دهید که $\sum a_n$ یک سری هندسی است.

۱۲.۱۴. فرض کنید $(a_n)_{n\in N}$ دنباله‌ای باشد به طوری که $\liminf |a_n| = 0$. ثابت کنید که زیر دنباله‌ای مانند $(a_{n_k})_{k\in N}$ موجود است به طوری که $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ همگراست.

۱۳.۱۴. دیدیم که پیدا کردن مقادیر یک مجموع نامتناهی اغلب بسیار مشکلتر از اثبات وجود آن است. در اینجا تعدادی مجموع ارائه می‌شوند که می‌توان از عهده آنها بر آمد.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (-2/3)^n$ را محاسبه کنید.

(ب) ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\big(n(n+1)\big) = 1$. راهنمایی: ثابت کنید که

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1/k - 1/(k+1)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/\left(k(k+1)\right)$.

(پ) ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)/2^{n+1} = n^2$. راهنمایی:

$(k-1)/\left(2^{(k+1)}\right) = k/(2^k) - (k+1)/\left(2^{k+1}\right)$.

(ت) با به کاربردن (پ) حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ را محاسبه کنید.

۱۴.۱۴. با مقایسه با سری $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$، ثابت کنید که سری $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n$ واگراست، که در آن (a_n) عبارت از دنبالهٔ زیر است؛

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

بخش ۱۵. سریهای متناوب و آزمونهای انتگرال

گاهی می‌توان همگرایی یا واگرایی سریها را با مقایسهٔ مجموعهای جزئی با انتگرالهای رایج بررسی کرد. این مطلب را به‌کمک مثالهایی شرح می‌دهیم.

مثال ۱. نشان دهید که $\sum (1/n) = +\infty$.

نمودار تابع $f(x) = 1/x$ را در شکل ۱.۱۵ ملاحظه کنید. برای $n \geq 1$، آشکار است که

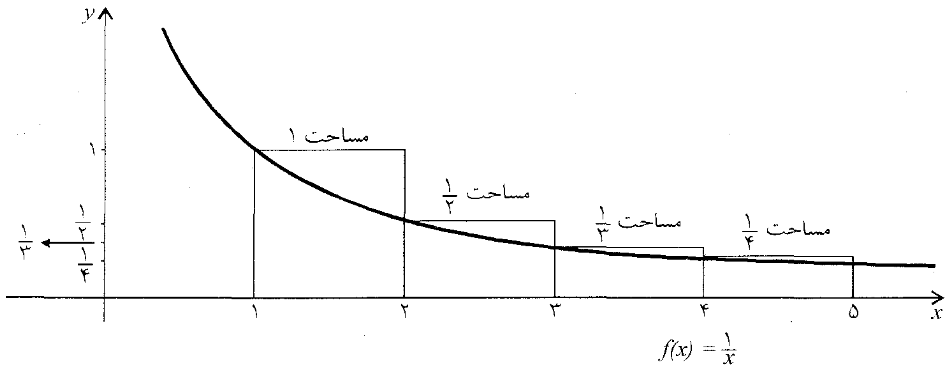
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \text{مجموع مساحتهای } n \text{ مستطیل اول در شکل } 1.15$$

$$\geq \text{مساحت زیر منحنی } \frac{1}{x} \text{ بین } 1 \text{ و } (n+1)$$

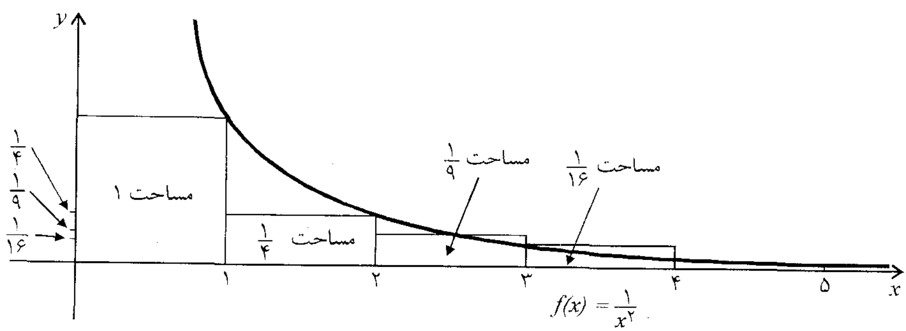
$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(n+1) .$$

چون $\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty$، نتیجه می‌گیریم که $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) = +\infty$.

واگرایی سری $\sum (1/n)$ بسیار کند است. در مثال ۷ بخش ۱۶، مشاهده می‌کنیم که $\sum_{n=1}^{N} (1/n)$ تقریباً برابر با $\log_e N + 0{,}5772$ است. بنابراین، به ازای $N = 1000$ مجموع آن تقریباً برابر ۷٫۴۸۵ است و به ازای $N = 1{,}000{,}000$ مجموع آن تقریباً برابر است با ۱۴٫۳۹۳.



شکل ۱.۱۵



شکل ۲.۱۵

به برهان دیگری برای واگرا بودن $\sum 1/n$ ، در تمرین ۴.۱۴ اشاره شده‌است. با این حال، آزمون انتگرال برای اثبات نتیجهٔ بعدی سودمند است.

مثال ۲. نشان دهید که $\sum 1/n^2$ همگراست.

نمودار $f(x) = 1/x^2$ در شکل ۲.۱۵ را در نظر بگیرید. در این صورت، به ازای هر $n \geq 1$ ، داریم

$$\text{مجموع مساحتهای } n \text{ مستطیل اول} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
$$\leq 1 + \int_1^n \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = 2 - \frac{1}{b} < 2 .$$

در نتیجه، مجموعهای جزئی تشکیل دنباله‌ای صعودی می‌دهند که از بالا به وسیلهٔ ۲ کراندار است. بنابراین، $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n^2$ همگراست و مجموع آن کوچکتر از ۲ یا مساوی ۲ است. در واقع، قبلاً [بدون برهان] متذکر شده‌ایم که این مجموع برابر $1{,}6449... = \pi^2/6$ است.

توجه کنید که در برآورد کردن $\sum_{k=1}^{n} (1/k^2)$ صرفاً ننوشتیم که $\sum_{n=1}^{\infty} (1/k^2) \leq \int_0^n (1/x^2)\, dx$. زیرا، این انتگرال نامتناهی است، گرچه این نابرابری درست است. ما در جستجوی یک کران بالای متناهی برای مجموعهای جزئی بودیم.

می‌توان از تکنیکهایی که در بالا شرح داده شد، برای اثبات قضیهٔ زیر استفاده کرد.

۱.۱۵ قضیهٔ. $\sum (1/n^p)$ همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$.

برهان. برای خود، شکلی آماده و مشاهده کنید که اگر $p > 1$، آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} .$$

در نتیجه، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \frac{p}{p-1} < +\infty$.

فرض کنید $0 < p < 1$. در این صورت، به ازای هر n، $1/n \leq 1/n^p$. چون $\sum 1/n$ واگراست، ملاحظه می‌کنیم که بنابر آزمون مقایسه $\sum 1/n^p$ واگراست. □

۲.۱۵ *آزمون انتگرال*. در اینجا شرایطی را ارائه می‌کنیم که در صورت برقراری آنها، استفاده از آزمون انتگرال را می‌توان توصیه کرد.

(الف) به نظر نمی‌رسد آزمونهای بخش ۱۴ قابل استفاده باشند.

(ب) جملات سری $\sum a_n$ نامنفی‌اند.

(پ) تابع ناصعودی مناسبی مانند f بر $[1, \infty)$ موجود است به طوری که به ازای هر n، $f(n) = a_n$ [f ناصعودی است در صورتی که $x < y$ مستلزم آن باشد که $f(x) \geq f(y)$].

(ت) محاسبه یا برآورد انتگرال f ساده است.

اگر $\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n} f(x)dx = +\infty$ آنگاه، مانند مثال ۱، سری واگرا خواهد شد. اگر $\lim\int_{1}^{n} f(x)dx < \infty$ آنگاه، مانند مثال ۲، سری همگرا خواهد شد. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند نتیجهٔ کلّی را فرمولبندی و ثابت کند [مثال ۸.۱۵].

اثبات نتیجهٔ زیر نیاز به مقداری شگرد دارد. امّا این امکان را به ما می‌دهد که نتیجه بگیریم سریهایی مانند $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ همگرا هستند، اگر چه مطلقاً همگرا نیستند. نگاه کنید به مثال ۹ در بخش ۱۴.

۳.۱۵ قضیهٔ سریهای متناوب. اگر $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq 0$ و $\lim a_n = 0$، آنگاه سری $\sum(-1)^n a_n$ همگرا است.

سری $\sum(-1)^n a_n$ یک سری متناوب نامیده می‌شود، زیرا علامتهای جمله‌ها متناوباً بین + و − تغییر می‌کند.

برهان. کافی است نشان دهیم که این سری در معیار کوشی ۳.۱۴ (۳) صدق می‌کند. این مطلب به سادگی از

(۱) $n \geq m > N$ مستلزم آن است که $|\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k| < a_N$،

نتیجه می‌شود. زیرا به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $a_N < \varepsilon$.

برای اثبات (۱)، $n > m$ را تثبیت می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$A = a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \dots \pm a_n$$

به طوری که

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k = (-1)^m A . \qquad (2)$$

اگر $n - m$ فرد باشد، آخرین جملهٔ A برابر $-a_n$ است، و بنابراین،

$$A = [a_m - a_{m+1}] + [a_{m+2} - a_{m+3}] + \dots + [a_{n-1} - a_n] \geq 0$$

و همچنین،

$$A = a_m - [a_{m+1} - a_{m+2}] - [a_{m+3} - a_{m+4}] + \dots + [a_{n-2} - a_{n-1}] - a_n \leq a_m .$$

به خاطر آورید که اعداد داخل کروشه، نامنفی‌اند. زیرا، (a_n) ناصعودی است. اگر $n - m$ زوج

باشد، آخرین جملهٔ A عبارت است از $+a_n$. بنابراین،

$$A = [a_m - a_{m+1}] + [a_{m+2} - a_{m+3}] + \dots + [a_{n-2} - a_{n-1}] + a_n \geq 0$$

و

$$A = a_m - [a_{m+1} - a_{m+2}] - [a_{m+3} - a_{m+4}] - \dots - [a_{n-1} - a_n] \leq a_m .$$

در هر یک از حالتها داریم $0 \leq A \leq a_m$. در نتیجه، از (۲) مشاهده می‌شود که

$$|\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k| = A \leq a_m .$$

حال، حکم (۱) نتیجه می‌شود، زیرا $n \geq m > N$ مستلزم آن است که

$$|\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k\} \leq a_m \leq a_N$$ □

تمرینها

۱.۱۵. معین کنید کدام یک از سریهای زیر همگرا هستند. جوابهای خود را توجیه کنید.

(الف) $\sum (-1)^n/n$ (ب) $\sum (-1)^n n!/2^n$

۲.۱۵. تمرین ۱.۱۵ را برای سریهای زیر تکرار کنید.

(الف) $\sum [\sin(n\pi/6)]^n$ (ب) $\sum[\sin(n\pi/r)]^n$

۳.۱۵. نشان دهید که $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\log n)^p]$ همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$.

۴.۱۵. معین کنید کدام یک از سریهای زیر همگرا هستند. جوابهای خود را توجیه کنید.

(الف) $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(\sqrt{n} \log n)$ (ب) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)/n$

(پ) $\sum_{n=4}^{\infty} 1/[n(\log n)(\log \log n)]$ (ت) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)/n^2$

۵.۱۵. چرا آزمون مقایسه را برای اثبات قضیهٔ ۱.۱۵، به ازای $p > 1$، به کار نبردیم؟

۶.۱۵. (الف) مثالی از یک سری واگرا مانند $\sum a_n$ ارائه دهید که برای آن $\sum a_n^2$ همگرا باشد.

(ب) بررسی کنید که اگر $\sum a_n$ یک سری همگرا با جملات نامنفی باشد، آنگاه $\sum a_n^2$ نیز همگراست. نگاه کنید به تمرین ۷.۱۴.

(پ) مثالی از یک سری همگرا مانند $\sum a_n$ ارائه دهید که در آن $\sum a_n^2$ واگرا باشد.

۷.۱۵. (الف) ثابت کنید که اگر (a_n) دنباله‌ای نانزولی از اعداد حقیقی باشد و اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim na_n = 0$. راهنمایی: به ازای N مناسبی، $|a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_n|$ را

در نظر بگیرید.

(ب) با استفاده از (الف) برهان دیگری برای واگرایی $\sum(1/n)$ ارائه دهید.

۸.۱۵. به طوری که در ۲.۱۵ پیشنهاد شد، یک آزمون انتگرال کلی را فرمولبندی کرده آن را ثابت کنید.

بخش ۱۶*. بسطهای اعشاری اعداد حقیقی

موضوع را با یادآوری بحث کوتاه اعداد اعشاری، در بحث ۳.۱۰، آغاز می‌کنیم. در آنجا یک بسط اعشاری مانند ... $k.\ d_1d_2d_3$ را در نظر گرفتیم که در آن، k یک عدد صحیح نامنفی است و هر رقم d_j به $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ تعلق دارد. این بسط نمایش عدد حقیقی

$$k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j} = k + \sum_{j=1}^{\infty} d_j \cdot 10^{-j}.$$

است که می‌توانیم آن را به صورت زیر نیز بنویسیم.

$$\lim s_n \text{، که در آن، } s_n = k + \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot 10^{-j}.$$

بنابراین، هر چنین بسط اعشاری، یک عدد حقیقی نامنفی را نمایش می‌دهد. ما عکس این حکم را نیز، پس از بیان صوری فرایند تقسیمات طولانی ثابت خواهیم کرد. بحث حاضر براساس برخی پیشنهادهای کارل استرامبرگ[1] استوار است.

۱.۱۶ ***تقسیمات طولانی.*** ابتدا، اعداد صحیح مثبت a و b را که در آن، $a < b$ در نظر بگیرید. مراحل تقسیمات طولانی آشنا را که بسطی اعشاری برای a/b ارائه می‌دهد، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. شکل ۱.۱۶ چند گام نخست را در حالتی که $a = 3$ و $b = 7$، نشان می‌دهد. اگر ارقام را d_1، d_2، d_3، ... و باقیمانده‌ها را r_1، r_2، ...، بنامیم، در این صورت تا این مرحله داریم $d_1 = 4$، $d_2 = 2$، $r_1 = 2$، $r_2 = 6$. در مرحلهٔ بعدی عدد $10r_2 = 60$ را بر ۷

(1) Karl Stromberg

تقسیم می‌کنیم و به دست می‌آوریم ۴ + ۸ × ۷ = ۶۰. خارج قسمت ۸ سومین رقم $d_۳$ می‌شود، حاصل ضرب ۵۶ را زیر ۶۰ قرار داده، کم می‌کنیم و باقیماندهٔ جدیدی مانند ۴ = $r_۳$ را به دست می‌آوریم. یعنی، باقیماندهٔ حاصل از تقسیم ۶۰ بر ۷ را محاسبه می‌کنیم. سپس، باقیماندهٔ ۴ = $r_۳$ را در ۱۰ ضرب می‌کنیم و این عمل را تکرار می‌کنیم. در هر مرحله

$$d_n \in \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹\}$$

$$r_n = ۱۰ \times r_{n-۱} - ۷d_n$$

$$۰ \leq r_n < ۷ .$$

این نتایج برای ... , ۲ , ۱ = n برقرار است در صورتی که قرار دهیم ۳ = $r_۰$. به طور کلی، قرار می‌دهیم $r_۰ = a$ و به دست می‌آوریم

$$d_n \in \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹\} \qquad (۱)$$

$$r_n = ۱۰ \times r_{n-۱} - bd_n \qquad (۲)$$

$$۰ \leq r_n < b . \qquad (۳)$$

اینک نشان می‌دهیم که این روش ساختمان در حالت کلی، خوشتعریف است و اینکه بسط اعشاری بالا نمایش a/b است. در آنچه در زیر می‌آید نیاز به این فرض نداریم که a و b اعداد صحیح‌اند؛ a و b معرف اعداد مثبت خواهند بود. تنها تغییر مهم در این روش ساختمان این است که «باقیمانده»های r_n لزوماً اعداد صحیح نخواهند بود. همچنین، فرض نمی‌کنیم که $a < b$. بنابراین، اولین مرحله در مقایسه با مثال ما، اندکی متفاوت خواهد بود. نخستین مرحله، جزء صحیح a/b را به ما خواهد داد.

$$\begin{array}{r|l}
 & ۰٫۴۲d_۳ \qquad d_۱ = ۴ \qquad d_۲ = ۲ \\
۷ & ۳٫۰۰۰۰ \\
 & ۲۸ \qquad r_۱ = ۲ \\
 & ۲۰ \\
 & ۱۴ \qquad r_۲ = ۶ \\
 & ۶۰ \\
 & r_۳
\end{array}$$

شکل ۱.۱۶

فرض کنید $Z^+ = N \cup \{۰\}$. بنابر خاصیت ارشمیدسی ۹.۴، برای عدد صحیح مثبتی مانند n، داریم $a < nb$. پس، $\{m \in Z^+ : mb \leq a\}$ مجموعه‌ای متناهی است. این مجموعه، ناتهی هم هست؛ زیرا شامل ۰ است، و لذا می‌توانیم تعریف کنیم،

$$k = \max\{m \in \mathbf{Z}^+ : mb \le a\} .$$

در نتیجه، $kb \le a < (k+1)b$. فرض کنید $r_0 = a - kb$ و توجه کنید که $0 \le r_0 < b$. سپس، تعریف می‌کنیم،

$$d_1 = \max\{d \in \mathbf{Z}^+ : db \le 10r_0\}$$

و

$$r_1 = 10r_0 - b_1 d .$$

توجه کنید که $d_1 \le 9$؛ زیرا، $10b \le 10r_0$ مستلزم این خواهد شد که $b \le r_0$، که یک تناقض است. همچنین، توجه کنید که $d_1 b \le 10r_0 < (d_1 + 1)b$، و لذا،

$$0 \le r_1 = 10r_0 - d_1 b < b .$$

بنابراین، احکام زیر، برای $n = 1$، برقرارند:

$$d_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \tag{1}$$

$$r_n = 10r_{n-1} - d_n b \tag{2}$$

$$0 \le r_n < b . \tag{3}$$

فرض کنید که d_1 ، d_2 ، ... ، d_n اعضای $\mathbf{Z}^+$ باشند و r_0 ، r_1 ، ... ، r_n طوری تعریف شده‌اند که در (۱) - (۳) صدق می‌کنند. حال، تعریف کنید

$$d_{n+1} = \max\{d \in \mathbf{Z}^+ : db \le 10r_n\}$$

و

$$r_{n+1} = 10r_n - d_{n+1} b .$$

در این صورت، $d_{n+1} \le 9$؛ زیرا، $10b \le 10r_n$ مستلزم این خواهد شد که $b \le r_n$، و این با (۳) در تناقض است. پس، رابطهٔ (۱) برای $n + 1$ برقرار است و (۲) نیز، بنابر تعریف ما از r_{n+1}، به ازای $n + 1$ بدیهی است. بالاخره، $d_{n+1} b \le 10r_n < (d_{n+1} + 1)b$ مستلزم این است که $0 \le r_{n+1} < b$، و لذا، (۳) برای $n + 1$ برقرار است. ساختن دنباله‌های (d_n) و (r_n) که در (۱) - (۳) صدق می‌کنند، با توسل به اصل استقرا، انجام می‌شود.

برای ملاحظهٔ اینکه بسط اعشاری $k.d_1 d_2 d_3 \ldots$ عدد a/b را نمایش دهد، مشاهده می‌کنیم که (۲) مستلزم این است که، به ازای $n \ge 1$،

$$r_n \cdot 10^{-n} = r_{n-1} \cdot 10^{-n+1} - d_n \cdot 10^{-n} \cdot b.$$

با انتقال جمله‌هایی از یک طرف به طرف دیگر و تغییر n به j، برای $j \geq 1$، به دست می‌آوریم

$$d_j \cdot 10^{-j} \cdot b = r_{j-1} \cdot 10^{-j+1} - r_j \cdot 10^{-j} .$$

وقتی مجموع را از $j = 1$ تا $j = n$ محاسبه می‌کنیم، بیشتر جملات سمت راست حذف می‌شو د [این مجموع، یک مجموع ادغامی نامیده می‌شود]. لذا، مجموعهای جزئی s_n برای بسط اعشاری، در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$s_n \cdot b = [k + \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot 10^{-j}] \cdot b = kb + r_0 - r_n \cdot 10^{-n} .$$

با در نظر گرفتن (۳)، داریم $\lim[r_n \cdot 10^{-n}] = 0$، لذا، $\lim s_n = k + r_0/b$. به خاطر بیاورید که $r_0 = a - kb$، و از این رو،

$$\lim s_n = k + \frac{a - kb}{b} = \frac{a}{b} .$$

در نتیجه، $k.d_1d_2d_3 \ldots$ بسط اعشاری a/b است.

۲.۱۶ قضیه. هر عدد حقیقی نامنفی x، حداقل دارای یک بسط اعشاری است.

برهان. در رابطهٔ ۱.۱۶ بالا، قرار دهید $a = x$ و $b = 1$. □

همان طور که در بحث ۳.۱۰ متذکر شدیم، اعداد ... ۱ر۰۰۰ , ... ۰ر۹۹۹ بسطهای اعشاری یک عدد حقیقی‌اند. یعنی، سریهای

$$\sum_{j=1}^{\infty} 9.10^{-j} , \quad 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 0.10^{-j}$$

مقداری یکسان دارند که همان ۱ است. به همین نحو، ... ۲ر۷۵۰۰۰ و ... ۲ر۷۴۹۹۹ هر دو بسط اعشاری برای ۱۱/۴اند [تمرین ۱.۱۶]. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که این اساساً تنها راهی است که در آن یک عدد می‌تواند بسطهای اعشاری متمایز داشته باشد.

۳.۱۶ قضیه. یک عدد حقیقی x دقیقاً دارای یک بسط اعشاری است، یا در غیر این صورت، x دارای دو بسط اعشاری است که یکی به دنباله‌ای که همه جملات آن ۰ است و دیگری به دنباله‌ای که همه جملات آن ۹ است ختم می‌شود.

برهان. فرض می‌کنیم که $x \geq ۰$. اگر x دارای بسط اعشاری $k.۰۰۰\ldots$، $k > ۰$، باشد، آنگاه این عدد بسط اعشاری دیگری مانند $(k - ۱)\text{ر}۹۹۹\ldots$ دارد. اگر x دارای بسط اعشاری $k.d_۱d_۲d_۳\ldots d_r۰۰۰\ldots$ باشد که $d_r \neq ۰$، آنگاه دارای یک بسط اعشاری دیگری است:

$$k\text{ر}d_۱d_۲d_۳\ldots(d_r - ۱)۹۹۹\ldots$$

خواننده می‌تواند به سادگی این ادعاها را ثابت کند [تمرین ۲.۱۶].

اینک، فرض کنید که x دارای دو بسط اعشاری متمایز $k.d_۱d_۲d_۳\ldots$ و $l.l_۱l_۲l_۳\ldots$ باشد. فرض کنید که $k < l$. اگر هر $d_j < ۹$، آنگاه بنابر تمرین ۳.۱۶، داریم

$$x < k + \sum_{j=۱}^{\infty} ۹.۱۰^{-j} = k + ۱ \leq l \leq x\,,$$

این یک تناقض است. از اینجا نتیجه می‌شود که $x = k + ۱ = l$ و بسطهای اعشاری آن باید $k\text{ر}۹۹۹\ldots$ و $(k + ۱)\text{ر}۰۰۰\ldots$ باشند. در حالت باقی مانده، داریم $l = k$.

فرض کنید

$$m = \min\ \{j : d_j \neq e_j\}\,.$$

می‌توانیم فرض کنیم که $d_m < e_m$. اگر برای هر $j > m$، $d_j < ۹$، آنگاه بنابر تمرین ۳.۱۶،

$$x < k + \sum_{j=۱}^{m} d_j\,.\,۱۰^{-j} + \sum_{j=m+۱}^{\infty} ۹.۱۰^{-j} = k + \sum_{j=۱}^{m} d_j\,.\,۱۰^{-j} + ۱۰^{-m}$$

$$= k + \sum_{j=۱}^{m-۱} e_j\,.\,۱۰^{j} + d_m\,.\,۱۰^{-m} + ۱۰^{-m} \leq k + \sum_{j=۱}^{m} e_j\,.\,۱۰^{-j} \leq x\,,$$

و این تناقض است. در نتیجه، برای $j > m$، $d_j = ۹$. به همین نحو، اگر برای هر $j > m$، $e_j > ۰$، آنگاه

$$x > k + \sum_{j=۱}^{m} e_j\,.\,۱۰^{-j} = k + \sum_{j=۱}^{m-۱} d_j\,.\,۱۰^{-j} + e_m\,.\,۱۰^{-m}$$

$$\geq k + \sum_{j=۱}^{m-۱} d_j\,.\,۱۰^{-j} + d_m\,.\,۱۰^{-m} + ۱۰^{-m}$$

$$= k + \sum_{j=۱}^{m} d_j\,.\,۱۰^{-j} + \sum_{j=m+۱}^{\infty} ۹.۱۰^{-j} \geq x\,,$$

که یک تناقض است. بنابراین، در این حالت، برای $j > m$، $d_j = ۹$، $e_m = d_m + ۱$، و برای $j > m$، $e_j = ۰$. □

۴.۱۶ تعریف. عبارتی به صورت

$$k.d_1d_2 \ldots d_i\overline{d_{i+1} \ldots d_{i+r}}$$

نمایش یک بسط اعشاری است، که در آن، بلوک $d_{i+1} \ldots d_{i+r}$، به طور نامحدود تکرار می‌شود:

$$k.d_1d_2 \ldots d_id_{i+1} \ldots d_{i+r}d_{i+1} \ldots d_{i+r}d_{i+1} \ldots d_{i+r}d_{i+1} \ldots d_{i+r} \ldots .$$

چنین بسطی را یک بسط اعشاری دوره‌ای می‌نامیم.

مثال ۱. هر عدد صحیح یک عدد اعشاری دوره‌ای است. به عنوان مثال، $17 = 17.\bar{0} = 17.000 \ldots$. مثال ساده دیگری چنین است:

$$\bar{8} = 0.888 \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} 8.10^{-j} = \frac{8}{10} \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-j} = \frac{8}{10} . \frac{10}{9} = \frac{8}{9} .$$

مثال ۲. عبارت $3.9\overline{67}$ نمایش کسر اعشاری دوره‌ای $3.9676767 \ldots$ است. می‌توانیم مقدار آن را به این صورت تعیین کنیم:

$$3.9\overline{67} = 3 + 9.10^{-1} + 6.10^{-2} + 7.10^{-3} + 6.10^{-4} + 7.10^{-5} \ldots$$

$$= 3 + 9.10^{-1} + 67.10^{-3} \sum_{j=0}^{\infty} (10^{-2})^j$$

$$= 3 + 9.10^{-1} + 67.10^{-3} \left(\frac{100}{99}\right) = 3 + \frac{9}{10} + \frac{67}{990}$$

$$= \frac{3928}{990} = \frac{1964}{495} .$$

در نتیجه، کسر اعشاری دوره‌ای $3.9\overline{67}$ نمایش عدد گویای $1964/495$ است. هر کسر دهدهی دوره‌ای را می‌توان به این طریق به صورت عددی گویا محاسبه کرد، و این مطلبی است که در قضیهٔ بعدی ثابت می‌کنیم.

مثال ۳. بسط اعشاری عدد ۱۱/۷ را پیدا می‌کنیم. به کمک روند تقسیمات طولانی معمولی در ۱.۱۶، در می‌یابیم که

$$\frac{11}{7} = 1.571428571428571428571 \ldots ,$$

یعنی؛ $11/7 = 1.\overline{571428}$. برای بررسی درستی این تساوی، مشاهده کنید که

$$1.\overline{571428} = 1 + 57142.10^{-6} \sum_{j=0}^{\infty} (10^{-6})^j = 1 + \frac{571428}{999999}$$

$$= ۱ + \frac{۴}{۷} = \frac{۱۱}{۷}$$

بسیاری از کتابها قضیه بعدی را، احتمالاً به خاطر اجتناب از نمادگذاریهای پیچیده، به صورت تمرین ارائه می‌دهند.

۵.۱۶ قضیه. عدد حقیقی x گویاست اگر و تنها اگر بسط اعشاری آن دوره‌ای باشد. (قضیه ۳.۱۶ نشان می‌دهد که اگر x دارای دو بسط اعشاری باشد، هر دو بسط اعشاری دوره‌ای‌اند.)

برهان. ابتدا فرض کنید که $x \geq ۰$ دارای یک بسط اعشاری دوره‌ای مانند $x = k.d_۱d_۲ \ldots d_i\overline{d_{i+۱} \ldots d_{i+r}}$ باشد. در این صورت،

$$x = k + \sum_{j=۱}^{i} d_j \cdot ۱۰^{-j} + ۱۰^{-i}y \quad ,$$

که در آن،

$$y = .\overline{d_{i+۱} \ldots d_{i+r}} \quad ,$$

و لذا، کافی است نشان دهیم که چنین yهایی گویا هستند. برای اختصار در نمادگذاری، می‌نویسیم،

$$y = .\overline{e_۱e_۲ \ldots e_r}$$

کمی محاسبه نشان می‌دهد که

$$y = \sum_{j=۱}^{r} e_j \cdot ۱۰^{-j} \left[\sum_{j=۰}^{\infty} (۱۰^{-r})^j\right] = \sum_{j=۱}^{r} e_j \cdot ۱۰^{-j} \frac{۱۰^r}{۱۰^r - ۱} .$$

در حقیقت، اگر $e_۱e_۲ \ldots e_r$ را به نشانهٔ عدد اعشاری معمولی $\sum_{j=۰}^{r-۱} e_j \cdot ۱۰^{r-۱-j}$، نه به نشانه حاصل ضرب آنها بنویسیم، آنگاه $y = e_۱e_۲ \ldots e_r/(۱۰^r - ۱)$؛ نگاه کنید به مثال ۳.

اینک، عدد گویای مثبتی مانند a/b را، که $a , b \in \mathbf{N}$، در نظر بگیرید. می‌توانیم فرض کنیم که $a < b$. همان طور که در ۱.۱۶ دیدیم، a/b به وسیلهٔ بسط اعشاری $۰.d_۱d_۲d_۳ \ldots$ داده شده است که در آن $r_۰ = a$، و برای $n \geq ۱$،

$$d_n \in \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹\} \qquad (۱)$$

$$r_n = ۱۰.r_{n-۱} - d_nb \qquad (۲)$$

$$۰ \leq r_n < b . \qquad (۳)$$

چون a و b اعداد صحیح‌اند، هر r_n عددی صحیح است. در نتیجه، (۳) را می‌توان به صورت

$$r_n \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}, n \geq 0 \qquad (4)$$

نوشت. این مجموعه دارای b عضو است، بنابراین نخستین $b+1$ باقیماندهٔ r_n همهٔ نمی‌توانند متمایز باشند. یعنی، اعداد صحیحی مانند $m \geq 0$ و $p > 0$ موجود است به طوری که

$$r_m = r_{m+p} \quad , \quad 0 \leq m < m+p \leq b \ .$$

از این روش ساختمان که (۱) - (۳) را می‌دهد، آشکار است که با مفروض بودن r_n، اعداد صحیح r_n و d_n به صورتی یکتا معین می‌شوند. در نتیجه،

$r_j = r_k$ مستلزم آن است که $r_{j+1} = r_{k+1}$ و $d_{j+1} = d_{k+1}$.

چون $r_m = r_{m+p}$، نتیجه می‌گیریم که $r_{m+1} = r_{m+1+p}$ و $d_{m+1} = d_{m+1+p}$. استقرای ساده‌ای نشان می‌دهد که گزاره

$$«d_n = d_{n+p} \ , \ r_n = r_{n+p}»$$

برای همهٔ اعداد صحیح $n \geq m+1$، برقرار است. در نتیجه، بسط اعشاری a/b، دوره‌ای با دورهٔ تناوب p، پس از نخستین m رقم است. یعنی

$$\frac{a}{b} = 0.d_1 d_2 \ldots d_m \overline{d_{m+1} \ldots d_{m+p}}$$ □

مثال ۴. عبارتی به صورت

$$0.10100100010000100000100000010000000100000000100\ldots$$

باید نمایش عددی گنگ باشد؛ زیرا، این بسط نمی‌تواند یک کسر اعشاری دوره‌ای باشد: در اینجا بلوکهای طولانی دلخواهی از ۰ ها را کنار هم چیده‌ایم.

مثال ۵. بسط اعشاری کامل $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ و بسیاری از اعداد گنگ آشنای دیگر را نمی‌دانیم. اما، بنابر قضیهٔ قبلی می‌دانیم که این بسطها نمی‌توانند دوره‌ای باشند.

مثال ۶. ادعا کرده‌ایم که π و e اعداد گنگ هستند. این احکام و بسیاری از احکام دیگر در کتابی جذّاب از ایوان نیون[1] [۱۶]، ثابت شده‌اند. برهان اینکه

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

---

(۱) Ivan Niven

گنگ است چنین است: فرض کنید $e = a/b$ که در آن، $a\ ,\ b \in \mathbf{N}$. در این صورت، $b!e$ و $b!\sum_{k=0}^{b}(1/k!)$ هر دو باید اعداد صحیح باشند، و لذا تفاضل

$$b!\sum_{k=b+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

باید عددی صحیح باشد. از طرف دیگر، آخرین عدد کوچکتر از

$$(b+1)^{-1}+(b+1)^{-2}+(b+1)^{-3}+\ldots = b^{-1} \leq 1$$

است که یک تناقض است.

مثال ۷. عددی مشهور موجود است که بیش از ۲۰۰ سال پیش توسط اویلر معرفی شده است و در مطالعهٔ تابع گاما ظاهر می‌شود. این عدد به ثابت اویلر مشهور شده است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log_e n\right].$$

اگر چه

$$\lim \log_e n = +\infty \quad , \quad \lim \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$$

حدّی که γ را تعریف می‌کند موجود و متناهی است [تمرین ۹.۱۶]. در حقیقت، γ تقریباً برابر است با ۵۷۷۲۱۶ر۰. موضوع شگفت آور اینکه هیچکس نمی‌داند که آیا γ گویاست یا خیر: بسیاری از ریاضیدانان معتقدند که γ گنگ است. این بدان دلیل است که گنگ بودن اعداد «آسانتر» ازگویا بودن آنهاست، زیرا بسطهای اعشاری دوره‌ای باید منظم باشند. تذکر مندرج در تمرین ۸.۱۶ به دلیل دیگری اشاره می‌کند که بنابر آن، گنگ بودن اعداد آسانتر عملی می‌شود.

تمرینها

۱.۱۶. (الف) نشان دهید که $2{,}74\overline{9}$ و $2{,}75\overline{0}$ هر دو بسط اعشاری برای ۱۱/۴ اند.

(ب) کدام یک از این بسطها از فرایند تقسیمات طولانی شرح داده شده در ۱.۱۶ ناشی می‌شوند.

۲.۱۶. درستی ادعاهای اولین بند در برهان قضیهٔ ۳.۱۶ را تحقیق کنید.

۳.۱۶. فرض کنید که $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهای همگرا از اعداد نامنفی باشند. نشان دهید که اگر

برای هر n، $a_n \le b_n$ و اگر برای حداقل یک n، $a_n < b_n$، آنگاه $\sum a_n < \sum b_n$.

۴.۱۶. اعداد اعشاری دوره‌ای زیر را به صورت اعداد گویا، یعنی کسرهایی از اعداد صحیح بنویسید.

(الف) $\overline{2}$ (ب) $0.0\overline{2}$

(پ) $0.0\overline{02}$ (ت) $3.\overline{14}$

(ث) $0.\overline{10}$ (ج) $1.\overline{492}$

۵.۱۶. بسط اعشاری اعداد گویای زیر را پیدا کنید.

(الف) ۱/۸ (ب) ۱/۱۶

(پ) ۲/۳ (ت) ۷/۹

(ث) ۶/۱۱ (ج) ۲۲/۷

۶.۱۶. بسطهای اعشاری ۱/۷، ۲/۷، ۳/۷، ۴/۷، ۵/۷، ۶/۷ را پیدا کنید. به طرح جالب آنها توجه کنید.

۷.۱۶. آیا ...۰٫۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰۲۱۲۲۲۳۲۴۲۵۲۶ گویاست؟

۸.۱۶. فرض کنید (s_n) دنباله‌ای از اعداد در $(0, 1)$ باشد. هر s_n یک بسط اعشاری به صورت $0.d_1^{(n)} d_2^{(n)} d_3^{(n)} \ldots$ دارد. به ازای هر n، فرض کنید $e_n = 6$ در صورتی که $d_n^{(n)} \neq 6$، و $e_n = 7$ در صورتی که $d_n^{(n)} = 6$. نشان دهید که $0.e_1e_2e_3 \ldots$ بسط اعشاری عددی مانند y در $(0, 1)$ است به طوری که به ازای هر n، $y \neq s_n$.

تذکر: این موضوع نشان می‌دهد که نمی‌توان اعشاری $(0, 1)$ را به صورت یک دنباله فهرست کرد. به زبان نظریهٔ مجموعه‌ها $(0, 1)$ ناشماراست. چون نمی‌توان اعضای $(0, 1)$ را به صورت یک دنباله فهرست کرد، باید تعداد اعداد گنگ در $(0, 1)$ خیلی زیاد باشد!

۹.۱۶. فرض کنید $\gamma_n = (\sum_{k=1}^{n} 1/k) - \log_e n = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \int_1^n t^{-1}\, dt$.

(الف) نشان دهید که (γ_n) دنباله‌ای نزولی است. راهنمایی: به $\gamma_n - \gamma_{n+1}$ توجه کنید.

(ب) نشان دهید که به ازای هر n، $0 < \gamma_n \le 1$.

(پ) بررسی کنید که $\gamma = \lim \gamma_n$ موجود و متناهی است.

فصل ۳

پیوستگی

بخش عمدهٔ حسابان به مطالعهٔ تابعهای پیوسته اختصاص دارد. در این فصل، تابعهای پیوسته و پیوستهٔ یکنواخت را مطالعه می‌کنیم.

بخش ۱۷. تابعهای پیوسته

به خاطر آورید که خصوصیات عمدهٔ تابعی مانند f عبارت‌اند از:

(الف) مجموعه‌ای که f بر آن تعریف شده است، موسوم به حوزهٔ تعریف f که به صورت $\mathrm{dom}(f)$ نوشته می‌شود.

(ب) عمل تخصیص، قاعده، یا فرمولی که مقدار $f(x)$ از f را در هر $x \in \mathrm{dom}(f)$ مشخص می‌کند.

توجه ما به تابعهایی مانند f خواهد بود که $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbf{R}$ و به طوری که f یک تابع حقیقی مقدار است؛ یعنی، به ازای هر x که $x \in \mathrm{dom}(f)$، $f(x) \in \mathbf{R}$. به بیان صحیح، نماد f نمایش تابع است، در حالی که $f(x)$ نمایش مقدار تابع در x است. با این حال، یک تابع اغلب با مشخص کردن مقدارهای آن، بدون ذکری از حوزهٔ تعریف آن، داده می‌شود. در این حالت حوزهٔ تعریف تابع، حوزهٔ تعریف طبیعی تابع گرفته می‌شود؛ یعنی، بزرگترین زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}$، که در آن تابع مفروض، یک تابع حقیقی مقدار خوشتعریف است. مثلاً، تابع $f(x) = ۱/x$، صورت اختصاری برای «تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۱/x$ و حوزهٔ تعریف طبیعی $\{x \in \mathbf{R} : x \neq ۰\}$» است. به همین نحو

حوزهٔ تعریف طبیعی $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$، بازهٔ $[-2, 2]$ و حوزهٔ تعریف طبیعی $\csc x = 1/\sin x$، مجموعهٔ اعداد حقیقی xاست که به صورت $n\pi$، $n \in \mathbf{N}$، نباشند.

در مطابقت با راه و روش این کتاب، پیوستگی را برحسب دنباله‌ها تعریف خواهیم کرد. سپس، نشان خواهیم داد که تعریف ما با تعریف $\varepsilon - \delta$ی معمولی معادل است.

۱.۱۷ تعریف. فرض کنید که f تابعی حقیقی مقدار باشد که حوزهٔ تعریف آن، زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ باشد. تابع f در نقطهٔ $x_\circ$از $\mathrm{dom}(f)$ پیوسته است در صورتی که به ازای هر دنبالهٔ (x_n) در $\mathrm{dom}(f)$ که به $x_\circ$همگرا باشد، داشته باشیم $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$. اگر f در هر نقطهٔ مجموعه‌ای مانند S، $S \subseteq \mathrm{dom}(f)$، پیوسته باشد، آنگاه f را پیوسته بر S گوییم. تابع f را پیوسته نامند در صورتی که بر $\mathrm{dom}(f)$ پیوسته باشد.

از تعریف پیوستگی نتیجه می‌شود که اگر مقادیر xبه $x_\circ$نزدیک باشند، مقادیر $f(x)$ به $f(x_\circ)$ نزدیک‌اند. قضیهٔ بعدی این حکم را به طریق دیگری بیان می‌کند. در حقیقت شرطِ (۱) قضیهٔ بعدی، همان تعریف $\varepsilon - \delta$ی پیوستگی است که در بسیاری از کتابهای حسابان داده شده‌است.

۲.۱۷ قضیه. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار باشد که حوزهٔ تعریف آن زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ است. در این صورت، f در $x_\circ$، $x_\circ \in \mathrm{dom}(f)$، پیوسته است اگر و تنها اگر

به ازای هر $\varepsilon > \circ$ عددی مانند $\delta > \circ$ موجود است به طوری که

(۱) $x \in \mathrm{dom}(f)$ و $|x - x_\circ| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon$

برهان. فرض کنید که (۱) برقرار باشد و (x_n) در $\mathrm{dom}(f)$ را در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که $\lim x_n = x_\circ$. لازم است ثابت کنیم که $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$. فرض کنید $\varepsilon > \circ$. بنابر (۱) عدد مثبتی مانند δ موجود است به طوری که

$x \in \mathrm{dom}(f)$ و $|x - x_\circ| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon$.

چون $\lim x_n = x_\circ$، N ای موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $|x_n - x_\circ| < \delta$

نتیجه می‌شود که

$n > N$ مستلزم آن است که $|f(x_n) - f(x_\circ)| < \varepsilon$.

در نتیجه، ثابت می‌شود که $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$.

اینک فرض کنید که f در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته باشد ولی (۱) درست نباشد. در این صورت، $\varepsilon > \circ$ای موجود است که استلزام

$$«x \in \mathrm{dom(f)} \text{ و } |x - x_\circ| < \delta \text{ مستلزم این است که } |f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon»$$

برای هر δ نادرست است. به ویژه، استلزام

$$«x \in \mathrm{dom(f)}, |x - x_\circ| < \frac{1}{n} \text{ مستلزم این است که } |f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon»$$

برای هر n، $n \in \mathbf{N}$، نادرست است. بنابراین، برای هر $n \in \mathbf{N}$، x_nای در $\mathrm{dom(f)}$ موجود است به طوری که $|x_n - x_\circ| < 1/n$، امّا، $|f(x_n) - f(x_\circ)| \geq \varepsilon$. بنابراین، داریم $\lim x_n = x_\circ$. ولی نمی‌توانیم داشته باشیم $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$، زیرا به ازای هر n، $|f(x_n) - f(x_\circ)| \geq \varepsilon$. این نتیجه نشان می‌دهد که f ، برخلاف فرض ما، نمی‌تواند در $x_\circ$پیوسته باشد. □

به طوری که در مثال بعدی تشریح می‌شود. گاهی کارکردن با تعریف دنباله‌ای پیوستگی در تعریف ۱.۱۷، ساده‌تر از خاصیت $\varepsilon - \delta$ در قضیهٔ ۲.۱۷ است. با این حال، مهم است که با خاصیت $\varepsilon - \delta$ به سهولت کار کنیم، قسمتی به این دلیل که تعریف پیوستگی یکنواخت با خاصیت $\varepsilon - \delta$ ارتباط نزدیکتری دارد تا تعریف دنباله‌ای پیوستگی.

مثال ۱. فرض کنید که به ازای $x \in \mathbf{R}$، $f(x) = 2x^2 + 1$. با استفاده از هر یک از موارد زیر، ثابت کنید که f پیوسته است.

(الف) با استفاده از تعریف،

(ب) با استفاده از خاصیت $\varepsilon - \delta$ی قضیهٔ ۲.۱۷.

حل.

(الف) فرض کنید $\lim x_n = x_\circ$. در این صورت، داریم

$$\lim f(x_n) = \lim[2x_n^2 + 1] = 2[\lim_n x_n]^2 + 1 = 2x_\circ^2 + 1 = f(x_\circ)$$

که در آن، دومین تساوی، کاربردی از قضیه‌های حدی ۲.۹ - ۴.۹ است. بنابراین، f در هر نقطهٔ $x_\circ$از $\mathbf{R}$ پیوسته است.

(ب) فرض کنید $x_\circ$ در $\mathbf{R}$ باشد و فرض کنید $\varepsilon > \circ$. می‌خواهیم نشان دهیم که $|f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon$، مشروط بر آنکه $|x - x_\circ|$ به قدر کافی کوچک باشد، یعنی کوچکتر از عددی مانند δ باشد. مشاهده می‌کنیم که

$$|f(x) - f(x_\circ)| = |۲x^۲ + ۱ - (۲x_\circ^۲ + ۱)| = |۲x^۲ - ۲x_\circ^۲|$$
$$= ۲|x - x_\circ|\ |x_\circ + x| .$$

لازم است کرانی برای $|x + x_\circ|$ به دست آوریم که به x بستگی نداشته باشد. توجه می‌کنیم که اگر، مثلاً، $|x - x_\circ| < ۱$، آنگاه $|x| < |x_\circ| + ۱$، و لذا، $|x+x_\circ| \leq |x|+|x_\circ| < ۲|x_\circ|+۱$. در نتیجه، داریم

$$|f(x) - f(x_\circ)| < ۲\ |x - x_\circ|\ (۲|x_\circ| + ۱) ,$$

مشروط بر اینکه $|x - x_\circ| < ۱$. برای برقراری $۲|x - x_\circ|\ (۲|x_\circ| + ۱) < \varepsilon$، کافی است داشته باشیم $|x - x_\circ| < \varepsilon/[۲(۲\ |x_\circ| + ۱)]$ و نیز $|x - x_\circ| < ۱$. بنابراین، قرار می‌دهیم

$$\delta = \min \{۱ , \frac{\varepsilon}{[۲(۲\ |x_\circ| + ۱)]}\} .$$

نتایج بالا نشان می‌دهند که $|x - x_\circ| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon$، و این همان چیزی است که می‌خواستیم. □

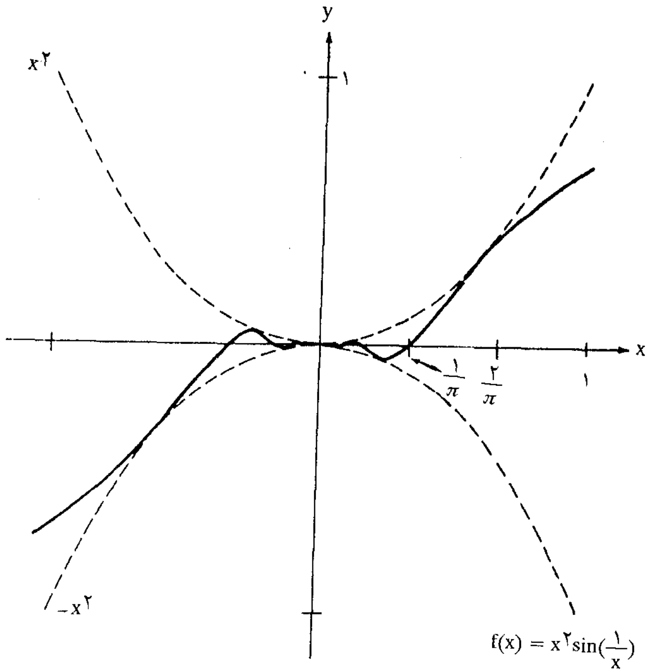
دلیل اینکه جواب (الف) در مثال ۱ به این اندازه آسان است، آن است که قبلاً در اثبات قضیه‌های حدی بخش ۹ تحلیل دقیقی انجام شده است.

مثال ۲. فرض کنید به ازای $x \neq \circ$، $f(x) = x^۲\sin(\frac{۱}{x})$ و $f(\circ) = \circ$. نمودار f در شکل ۱.۱۷ به نظر پیوسته می‌آید. ثابت کنید که f در $\circ$ پیوسته است.

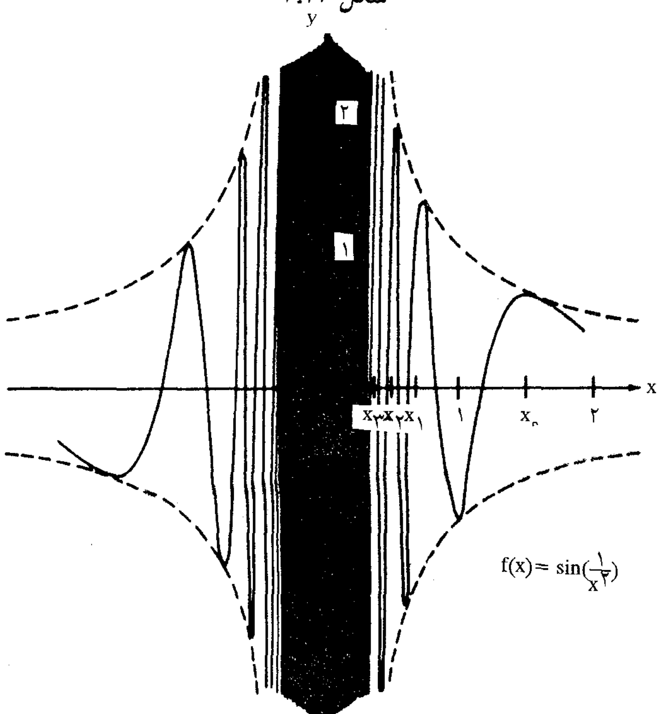
حل. فرض کنید $\varepsilon > \circ$. روشن است که به ازای هر x، $|f(x) - f(\circ)| = |f(x)| \leq x^۲$. چون می‌خواهیم این عبارت کوچکتر از ε باشد، قرار می‌دهیم $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. در این صورت، $|x - \circ| < \delta$ مستلزم آن است که $x^۲ < \delta^۲ = \varepsilon$ و لذا

$|x - \circ| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(\circ)| < \varepsilon$.

پس، خاصیت $\varepsilon - \delta$ برقرار است و f در $\circ$ پیوسته است. □



شکل ۱.۱۷



شکل ۲.۱۷

در مثال ۲ به همان سادگی می‌توانیم نشان دهیم که اگر $\lim x_n = ۰$، آنگاه $\lim f(x_n) = ۰$.
تابع f در مثال ۲ در نقاط دیگر $\mathbf{R}$ نیز پیوسته است. مثال ۴ را ببینید. □

مثال ۳. فرض کنید که به ازای $x \neq ۰$، $f(x) = (۱/x)\sin(۱/x^۲)$ و $f(۰) = ۰$؛ نگاه کنید به شکل ۲.۱۷. نشان دهید که f ناپیوسته است؛ یعنی، در نقطه ۰ پیوسته نیست.

حل. کافی است دنباله‌ای مانند (x_n) همگرا به ۰ پیدا کنیم به طور که $f(x_n)$ به $f(۰) = ۰$ همگرا نباشد. لذا، ترتیبی می‌دهیم که وقتی $x_n \to ۰$، $(۱/x_n)\sin(۱/x_n^۲) = ۱/x_n$. بنابراین، می‌خواهیم داشته باشیم $\sin(۱/x_n^۲) = ۱$ یا $۱/x_n^۲ = ۲n\pi + \pi/۲$، یا $x_n^۲ = ۱/(۲n\pi + \pi/۲)$ و یا $x_n = ۱/\sqrt{۲n\pi + \pi/۲}$. در این صورت، $\lim x_n = ۰$ در حالی که

$$\lim f(x_n) = \lim (۱/x_n) = +\infty$$ □

فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد. برای k در $\mathbf{R}$، kf دلالت بر تابعی می‌کند که با ضابطهٔ $(kf)(x) = k\, f(x)$ برای $x \in \mathrm{dom}(f)$ تعریف شده است. همچنین، $|f|$ تابعی است که با ضابطه $|f|(x) = |f(x)|$ برای $x \in \mathrm{dom}(f)$ تعریف شده است. در نتیجه، اگر f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x} - ۴$ برای $x \geq ۰$ داده شده باشد، آنگاه ۳f با ضابطهٔ $۳f(x) = ۳\sqrt{x} - ۱۲$، برای $x \geq ۰$ داده می‌شود و $|f|$ برای $x \geq ۰$ با ضابطه $|f|(x) = |\sqrt{x} - ۴|$ داده می‌شود. قضیهٔ ساده‌ای را در زیر ارائه می‌کنیم.

۳.۱۷ قضیه. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد با $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbf{R}$. اگر f در $x_۰$ از $\mathrm{dom}(f)$ پیوسته باشد، آنگاه $|f|$ و kf، $k \in \mathbf{R}$، در $x_۰$ پیوسته‌اند.

برهان. دنبالهٔ (x_n) در $\mathrm{dom}(f)$ همگرا به $x_۰$ را در نظر می‌گیریم. چون f در نقطهٔ $x_۰$ پیوسته است، پس $\lim f(x_n) = f(x_۰)$. قضیهٔ ۲.۹ نشان می‌دهد که $\lim k\, f(x_n) = k\, f(x_۰)$. این مطلب ثابت می‌کند kf در $x_۰$ پیوسته است.

برای اثبات اینکه $|f|$ در $x_۰$ پیوسته است، نیاز به اثبات این داریم که $\lim |f(x_n)| = |f(x_۰)|$. این حکم از نابرابری

$$\big||f(x_n)| - |f(x_\circ)|\big| \leq |f(x_n) - f(x_\circ)| \ , \qquad (۱)$$

نتیجه می‌شود. نگاه کنید به تمرین ۵.۳. [برای تفصیل بیشتر، $\varepsilon > \circ$ را در نظر بگیرید. چون $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$، عدد N ای موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|f(x_n) - f(x_\circ)| < \varepsilon$]. لذا، بنابر (۱)، $n > N$ مستلزم آن است که

$$\big||f(x_n)| - |f(x_\circ)|\big| < \varepsilon \ ,$$

در نتیجه، $\lim |f(x_n)| = |f(x_\circ)|$.] □

متذکر می‌شویم که اگر f و g توابعی حقیقی مقدار باشند، آنگاه می‌توانیم با ترکیب f و g تابعهای جدیدی به دست آوریم:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$,

$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $\qquad g\circ f(x) = g(f(x))$,

$\max(f , g)(x) = \max\{f(x) , g(x)\}$, $\qquad \min(f , g)(x) = \min\{f(x) , g(x)\}$.

تابع gof ترکیب g و f نامیده می‌شود. هر یک از این تابعهای جدید، دقیقاً در هر جا که معنی داشته باشند، تعریف می‌شوند. بنابراین، حوزه‌های تعریف $f + g$، fg، $\max(f , g)$ و $\min(f ,g)$ عبارت است از $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$. حوزهٔ تعریف f/g مجموعهٔ $\mathrm{dom}(f)\cap\{x\in\mathrm{dom}(g) , g(x) \neq \circ\}$ است و حوزهٔ تعریف gof مجموعهٔ $\{x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) \in \mathrm{dom}(g)\}$ است. توجه کنید که $f + g= g + f$ و $fg = gf$. اما، در حالت کلی $fog \neq gof$.

این تابعهای جدید پیوسته‌اند در صورتی که f و g تابعهای پیوسته‌ای باشند.

۴.۱۷ قضیه. فرض کنید f و g تابعهای حقیقی مقدار باشند به طوری که در $x_\circ$ از **R** پیوسته باشند. در این صورت،

(i) $f + g$ در $x_\circ$ پیوسته است؛

(ii) fg در $x_\circ$ پیوسته است؛

(iii) f/g در $x_\circ$ پیوسته است در صورتی که $g(x_\circ) \neq \circ$.

برهان. فرض کرده‌ایم که $x_\circ$ در $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ باشد. فرض کنید (x_n) دنباله‌ای در $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ و همگرا به $x_\circ$ باشد. در این صورت، داریم $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$ و

$\lim g(x_n) = g(x_\circ)$. قضیهٔ ۳.۹ نشان می‌دهد که

$$\lim(f + g)(x_n) = \lim[f(x_n) + g(x_n)] = \lim f(x_n) + \lim g(x_n)$$
$$= f(x_\circ) + g(x_\circ) = (f + g)(x_\circ)$$

و بنابراین، $f + g$ در $x_\circ$ پیوسته است. به همین نحو، قضیهٔ ۴.۹ مستلزم این است که fg در $x_\circ$ پیوسته است.

برای پرداختن به f/g، فرض می‌کنیم $g(x_\circ) \neq \circ$ و دنباله‌ای مانند (x_n) در $\mathrm{dom}(f) \cap \{x \in \mathrm{dom}(g) : g(x) \neq \circ\}$ همگرا به $x_\circ$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، قضیهٔ ۶.۹ نشان می‌دهد که

$$\lim \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_\circ)}{g(x_\circ)} = \frac{f}{g}(x_\circ)$$

در نتیجه، f/g در $x_\circ$ پیوسته است. □

۵.۱۷ قضیه. اگر f در $x_\circ$ پیوسته باشد و g در $f(x_\circ)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع مرکب gof در $x_\circ$ پیوسته است.

برهان. فرض کرده‌ایم که $x_\circ \in \mathrm{dom}(f)$ و $f(x_\circ) \in \mathrm{dom}\ (g)$. فرض کنید (x_n) دنباله‌ای در $\{x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) \in \mathrm{dom}\ (g)\}$ باشد که به $x_\circ$ همگراست. چون f در $x_\circ$ پیوسته است داریم $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$. چون دنبالهٔ $(f(x_n))$ به $f(x_\circ)$ همگراست و g در $f(x_\circ)$ پیوسته است. همچنین داریم $\lim g(f(x_n)) = g(f(x_\circ))$؛ یعنی، $\lim gof(x_n) = gof(x_\circ)$. پس gof در $x_\circ$ پیوسته است. □

مثال ۴. در این مثال، پیوستگی تابعهای چند جمله‌ای و تابعهای $\sin x$، $\cos x$، و e^x بر $\mathbf{R}$ را دانسته می‌گیریم. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۳.۱۷، تابعهای $۴e^x$ و $|\sin\ x|$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته‌اند. بنابر (۱) از قضیهٔ ۴.۱۷، تابع $\sin\ x + ۴e^x + x^۳$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است. بنابر (ii) از قضیهٔ ۴.۱۷، تابع $x^۴\sin x$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است؛ و (iii) از قضیهٔ ۴.۱۷، نشان می‌دهد که $\tan x = \sin x/\cos x$ پیوسته است هرگاه $\cos x \neq \circ$؛ یعنی، همهٔ xهایی که به صورت $n\pi + \pi/۲$، $n \in \mathbf{Z}$، نباشند. قضیهٔ ۵.۱۷ به ما می‌گوید که $e^{\sin\ x}$ و $\cos(e^x)$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته‌اند؛ به عنوان مثال، $gof(x) = \cos(e^x)$، که در آن، $f(x) = e^x$ و $g(x) = \cos x$. چندین بار استفاده از قضیهٔ ۳.۱۷ − ۵.۱۷، نشان می‌دهد که $x^۲\sin(۱/x)$ و $\sin(۱/x^۲)$ $(۱/x)$ بر همهٔ اعداد ناصفر x در $\mathbf{R}$ پیوسته‌اند.

مثال ۵. فرض کنید f و g در x_0 از R پیوسته باشند. ثابت کنید که $\max(f , g)$ در x_0 پیوسته است.

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم که

$$\max(f , g) = \frac{1}{2} (f + g) + \frac{1}{2} |f - g| .$$

این معادله برقرار است، زیرا رابطهٔ $\max\{a , b\} = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2} |a - b|$، به ازای هر a و b از R، درست است. درستی این نتیجه را می‌توان به آسانی با در نظر گرفتن $a \geq b$ و $a < b$ امتحان کرد. بنابر قضیهٔ ۴.۱۷ (i)، $f + g$ و $f - g$ در x_0 پیوسته‌اند. لذا، بنابر قضیهٔ ۳.۱۷، $|f - g|$ در x_0 پیوسته است. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۳.۱۷، $\frac{1}{2}(f + g)$ و $\frac{1}{2}|f - g|$ در x_0 پیوسته‌اند و کاربردِ دیگری از قضیهٔ ۴.۱۷ (i) نشان می‌دهد که $\max(f , g)$ در x_0 پیوسته است. □

تمرینها

۱.۱۷. فرض کنید به ازای $x \leq 4$، $f(x) = \sqrt{4 - x}$، و به ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $g(x) = x^2$.

(الف) حوزه‌های تعریف $f + g$، fg، fog و gof را تعیین کنید.

(ب) مقادیر $fog(0)$، $gof(0)$، $fog(1)$، $gof(1)$، $fog(2)$، $gof(2)$ را پیدا کنید.

(پ) آیا تابعهای fog و gof برابرند؟

(ت) آیا $fog(3)$ و $gof(3)$ با معنی‌اند؟

۲.۱۷. فرض کنید به ازای $x \geq 0$، $f(x) = 4$، و به ازای $x < 0$، $f(x) = 0$، و به ازای هر x، $g(x) = x^2$. در نتیجه، $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) = \mathbf{R}$.

(الف) تابعهای $f+ g$، fg، fog، gof را معین کنید. حتماً حوزه تعریف آنها را مشخص کنید.

(ب) کدام یک از تابعهای f، g، $f + g$، fg، fog، gof پیوسته‌اند؟

۳.۱۷. از روی اعتماد بپذیرید که تابعهای آشنای زیر بر حوزهٔ تعریفشان پیوسته‌اند: $\sin x$، $\cos x$، e^x، 2^x، $\log_e x$، x^p برای $x > 0$ [p عدد حقیقی دلخواهی است]. با استفاده از این واقعیتها و قضیه‌های این بخش، ثابت کنید که تابعهای زیر پیوسته‌اند.

(الف) $\log_e (1 + \cos^4 x)$ (ب) $[\sin^2 x + \cos^6 x]^{\pi}$

(پ) 2^{x^2} (ت) 8^x

(ث) $\tan x$ برای xهایی که متمایز از مضرب فرد $\pi/2$اند.

(ج) $x\sin(1/x)$برای $x \neq 0$. (چ) $x^2\sin(1/x)$برای $x \neq 0$.

(ح) $1/x \sin(1/x^2)$ برای $x \neq 0$.

۴.۱۷. ثابت کنید که تابع $\sqrt{x}$ بر حوزهٔ تعریف آن $[0, \infty)$ پیوسته است. راهنمایی: تمرین ۵ بخش ۸ را به کار ببرید.

۵.۱۷. (الف) ثابت کنید که اگر $m \in \mathbf{N}$، آنگاه تابع $f(x) = x^m$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است.

(ب) ثابت کنید که هر تابع چند جمله‌ای $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است.

۶.۱۷. یک تابع گویا تابعی مانند f به صورت p/q است، که در آن، p و q تابعهای چند جمله‌ای‌اند. دامنهٔ f ، مجموعهٔ $\{x \in \mathbf{R} : q(x) \neq 0\}$ است. ثابت کنید که هر تابع گویا پیوسته است. راهنمایی: از تمرین ۵.۱۷ استفاده کنید.

۷.۱۷. (الف) توجه کنید که اگر $k \in \mathbf{R}$ ، آنگاه تابع $g(x) = kx$ ، بنا به تمرین ۵.۱۷، پیوسته است.

(ب) ثابت کنید که $|x|$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است.

(پ) از (الف) و (ب) و قضیهٔ ۵.۱۷ استفاده کرده برهان دیگری برای قضیهٔ ۳.۱۷ ارائه کنید.

۸.۱۷. فرض کنید f و g تابعهای حقیقی باشند.

(الف) نشان دهید که $\min(f , g) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|$.

(ب) نشان دهید که $\min(f , g) = -\max(-f , -g)$.

(پ) با استفاده از (الف) و (ب) ثابت کنید که اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، آنگاه $\min(f , g)$ در x_0 پیوسته است.

۹.۱۷. با بررسی خاصیت $\varepsilon - \delta$ در قضیهٔ ۲.۱۷ ، ثابت کنید که هر یک از تابعهای زیر در x_0 پیوسته‌اند.

(الف) $f(x) = x^2$ ، $x_0 = 2$؛

(ب) $f(x) = \sqrt{x}$ ، $x_0 = 0$؛

(پ) برای $x \neq 0$ ، $f(x) = x\sin(1/x)$ و $f(0) = 0$ و $x_0 = 0$؛

(ت) $g(x) = x^3$، x_0 دلخواه است. راهنمایی برای (ت): $x^3-x_0^3 = (x-x_0)(x^2+x_0x+x_0^2)$.

۱۷.۱۰. ثابت کنید که تابعهای زیر، در نقاط ذکر شده، ناپیوسته‌اند. می‌توانید از تعریف ۱.۱۷ یا خاصیت $\varepsilon - \delta$ در قضیهٔ ۲.۱۷ استفاده کنید.

(الف) $f(x) = 1$ برای $x > 0$ و $f(x) = 0$ برای $x \le 0$، $x_0 = 0$؛

(ب) $g(x) = \sin(1/x)$ برای $x \neq 0$ و $g(0) = 0$، $x_0 = 0$؛

(پ) $\operatorname{sgn}(x) = -1$ برای $x < 0$، $\operatorname{sgn}(x) = 1$ برای $x > 0$، $\operatorname{sgn}(0) = 0$، $x_0 = 0$؛

(ت) $P(x) = 15$ برای $0 \le x < 1$ و $P(x) = 15 + 13n$ برای $n \le x < n + 1$، x_0 عددی صحیح مثبت.

تابع sgn تابع علامت نامیده می‌شود؛ توجه کنید که برای $x \neq 0$، $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$.

تعریف P، تابع تمبر پستی برای حدود سال ۱۹۷۹ میلادی به این معنی است که P مقدار ۱۵ را در بازه $[0 , 1)$ اختیار می‌کند و مقدار ۲۸ را در بازهٔ $[1 , 2)$ و مقدار ۴۱ را در بازهٔ $[2 , 3)$ می‌گیرد و به همین ترتیب الی آخر[1].

۱۷.۱۱. فرض کنید f تابع حقیقی مقداری با $\operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید که f در نقطهٔ x_0 پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر دنبالهٔ یکنوای (x_n) در $\operatorname{dom}(f)$ که به x_0 همگراست داشته باشیم $\lim f(x_n) = f(x_0)$. راهنمایی: قضیهٔ ۱۱.۳ را فراموش نکنید.

۱۷.۱۲. (الف) فرض کنید f تابع حقیقی مقدار پیوسته‌ای با دامنهٔ (a , b) باشد. نشان دهید که اگر به ازای هر عدد گویای r در (a , b)، $f(r) = 0$، آنگاه به ازای هر x از (a , b)، $f(x) = 0$.

(ب) فرض کنید f و g تابعهای حقیقی مقدار پیوسته‌ای بر (a , b) باشند به طوری که به ازای هر عدد گویای r در (a , b)، $f(r) = g(r)$. ثابت کنید که به ازای هر x از (a , b)، $f(x) = g(x)$.

۱۷.۱۳. (الف) فرض کنید به ازای اعداد گویای x، $f(x) = 1$ و به ازای اعداد گنگ x، $f(x) = 0$. نشان دهید که f در هر x از $\mathbf{R}$ ناپیوسته است.

(ب) فرض کنید به ازای اعداد گویای x، $h(x) = x$ و به ازای اعداد گنگ x، $h(x) = 0$. نشان دهید که h در $x = 0$ پیوسته است و در هیچ نقطهٔ دیگری چنین نیست.

---

۱) توجه کنید که این تعریف تابع تمبر پستی مطابق با تعرفه‌های لیست ارسال نامه‌ها در کشور ایالات متحده برای حدود سال ۱۹۷۹ داده شده است. م.

۱۴.۱۷. هر عدد گویای x را به صورت p/q بنویسید، که در آن، p و q اعداد صحیح بدون عامل مشترک‌اند و $q > 0$. سپس، تعریف کنید $f(x) = 1/q$. همچنین برای هر $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$، تعریف کنید $f(x) = 0$. بنابراین، $f(x) = 1$ برای هر عدد صحیح x و $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \dots = \frac{1}{2}$ و غیره. نشان دهید که f در هر نقطه $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ پیوسته است و در هر نقطهٔ $\mathbf{Q}$ ناپیوسته است.

۱۵.۱۷. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که حوزهٔ تعریف آن زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که f در نقطهٔ x_0 از $\mathrm{dom}(f)$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر دنبالهٔ (x_n) در $\mathrm{dom}(f)\backslash\{x_0\}$ که به x_0 همگراست، داشته باشیم $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

بخش ۱۸. خاصیتهای تابعهای پیوسته

تابع حقیقی مقدار f کراندار نامیده می‌شود در صورتی که $\{f(x) : x \in \mathrm{dom}(f)\}$ مجموعه‌ای کراندار باشد؛ یعنی، عددی حقیقی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر x در $\mathrm{dom}(f)$، $|f(x)| \le M$.

۱.۱۸ قضیه. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار پیوسته بر بازه‌ای بسته مانند $[a , b]$ باشد. در این صورت، f تابعی کراندار است. به علاوه، f مقادیر ماکسیمم و مینیمم خود را بر $[a , b]$ اختیار می‌کند؛ یعنی، اعداد x_0 و y_0 در $[a , b]$ موجودند به طوری که به ازای هر x در $[a , b]$، $f(x_0) \le f(x) \le f(y_0)$.

برهان. فرض کنید f بر $[a , b]$ کراندار نباشد. در این صورت، متناظر با هر n در $\mathbf{N}$، x_n ای در $[a , b]$ موجود است به طوری که $f(x_n) > n$. بنابر قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۵.۱۱، (x_n) دارای زیر دنباله‌ای مانند (x_{n_k}) است به طوری که به عددی حقیقی مانند x_0 همگراست. همچنان که در تمرین ۹.۸ متذکر شده‌ایم، عدد x_0 نیز باید به بازهٔ بسته $[a , b]$ تعلق داشته باشد. چون f در x_0 پیوسته است، داریم $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. اما، همچنین داریم $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$ که یک تناقض است. نتیجه می‌شود که f کراندار است.

حال، فرض کنید $M = \sup\{f(x) : x \in [a\ ,\ b]\}$؛ بنابر پاراگراف قبل، M متناهی است. به ازای هر n در N، عضوی مانند y_n در $[a\ ,\ b]$ موجود است به طوری که $M - 1/n < f(y_n) \le M$. بنابراین، داریم $\lim f(y_n) = M$. بنابر قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس، زیر دنباله‌ای از (y_n) مانند (y_{n_k}) موجود است به طوری که به حدی مانند y_0 در $[a\ ,\ b]$ همگراست. چون f در y_0 پیوسته است، داریم $f(y_0) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. چون $\big(f(y_{n_k})\big)_{k\in N}$ زیر دنباله‌ای از $\big(f(y_n)\big)_{n\in N}$ است، قضیهٔ ۲.۱۱، نشان می‌دهد که $\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = M$، و لذا، $f(y_0) = M$. در نتیجه، f ماکسیمم خود را در y_0 اختیار می‌کند.

مطلب پاراگراف اخیر در مورد $-f$ نیز صادق است. بنابراین، $-f$ ماکسیمم خود را در نقطه‌ای مانند x_0 در $[a\ ,\ b]$ اختیار می‌کند. به سادگی نتیجه می‌شود که f مینیمم خود را در x_0 اختیار می‌کند؛ نگاه کنید به تمرین ۱.۱۸. □

قضیهٔ ۱.۱۸ در حل مسائل ماکسیمم و مینیمم در حسابان، حداقل به طور ضمنی، همواره به کار برده می‌شود. زیرا، وجود جواب برای این گونه مسأله‌ها مسلّم گرفته می‌شوند؛ یعنی اینکه تابعی پیوسته بر یک بازهٔ بسته، واقعاً ماکسیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند. موقعی که حوزهٔ تعریف تابع، بازه‌ای بسته نباشد، باید دقت به خرج داد. نگاه کنید به تمرین ۳.۱۸.

قضیهٔ ۱.۱۸ در صورتی که به جای بازهٔ بستهٔ $[a\ ,\ b]$، بازهٔ بازی قرار دهیم، نادرست است. به عنوان مثال، $f(x) = 1/x$ بر بازهٔ $(0\ ,\ 1)$ پیوسته ولی بیکران است. تابع x^2 بر $(-1\ ,\ 1)$ پیوسته و کراندار است، اما در $(-1\ ,\ 1)$ دارای ماکسیمم نیست.

۲.۱۸ قضیهٔ مقدار میانی. اگر f تابع پیوستهٔ حقیقی مقداری بر بازه‌ای مانند I باشد، آنگاه f دارای خاصیت مقدار میانی بر I است: هر وقت $a\ ,\ b \in I$، $a < b$ و y بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد [یعنی، $f(a) < y < f(b)$ یا $f(b) < y < f(a)$]، حداقل یک x در $(a\ ,\ b)$ موجود است به طوری که $f(x) = y$.

برهان. فرض می‌کنیم که $f(a) < y < f(b)$؛ حالت دیگر، مشابه همین است. فرض کنید $S = \{x \in [a\ ,\ b] : f(x) < y\}$؛ نگاه کنید به شکل ۱.۱۸. چون a به S تعلق دارد، S ناتهی است. و لذا، $x_0 = \sup S$ معرف عضوی از $[a\ ,\ b]$ است. به ازای هر n در N، $x_0 - 1/n$ یک کران بالا

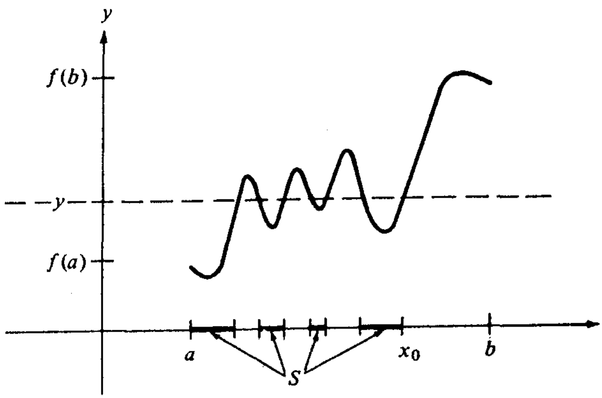
برای S نیست. بنابراین، s_nای در S موجود است به طوری که $x_\circ - 1/n < s_n \le x_\circ$. در نتیجه، $\lim s_n = x_\circ$ ، و چون به ازای هر n ، $f(s_n) < y$ ، پس داریم

$$f(x_\circ) = \lim f(s_n) \le y . \qquad (1)$$

فرض کنید $t_n = \min\{b , x_\circ + 1/n\}$. چون $x_\circ \le t_n < x_\circ + 1/n$، پس داریم $\lim t_n = x_\circ$. هر t_n به $[a , b]$ تعلق دارد امّا نه به S ، و لذا، به ازای هر n ، $f(t_n) \ge y$. در نتیجه، داریم

$$f(x_\circ) = \lim f(t_n) \ge y$$

این و (۱) مستلزم آن است که $f(x_\circ) = y$. □



شکل ۱.۱۸

۳.۱۸ نتیجه. اگر f تابع پیوستهٔ حقیقی مقداری بر بازه‌ای مانند I باشد آنگاه مجموعهٔ $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ نیز یک بازه یا یک نقطهٔ تنهاست.

برهان. مجموعهٔ $J = f(I)$ دارای این ویژگی است:

$$y_\circ , y_1 \in J \text{ و } y_\circ < y < y_1 \text{ مستلزم آن است که } y \in J \qquad (1)$$

اگر $\inf J < \sup J$ ، آنگاه چنین مجموعه‌ای باید یک بازه باشد. در حقیقت نشان خواهیم داد که

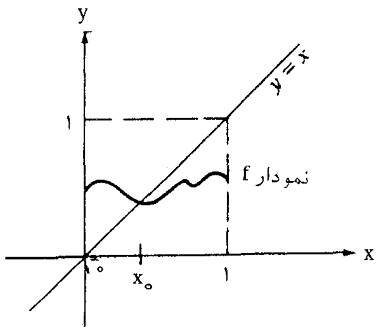
$$\inf J < y < \sup J \text{ مستلزم آن است که } y \in J. \qquad (2)$$

و لذا، J نیز یک بازه با دو نقطهٔ انتهایی $\inf J$ و $\sup J$ است؛ $\inf J$ و $\sup J$ ممکن است به J تعلق داشته باشند یا تعلق نداشته باشند و آنها ممکن است متناهی باشند یا نباشند.

برای اثبات (۲) از (۱) ، ملاحظه کنید که $\inf J < y < \sup J$. در این صورت، $y_\circ$ و y_1ای در J موجودند به طوری که $y_\circ < y < y_1$. در نتیجه، بنابر (۱) ، $y \in J$. □

مثال ۱. فرض کنید که f تابعی پیوسته باشد که $[۰ , ۱]$ را به توی $[۰ , ۱]$ می‌نگارد. به عبارت دیگر، $\mathrm{dom}\ (f) = [۰ , ۱]$ و به ازای هر $x \in [۰ , ۱]$، $f(x) \in [۰ , ۱]$. نشان دهید که f دارای یک نقطهٔ ثابت است؛ یعنی، نقطه‌ای مانند $x_۰$ در $[۰ , ۱]$ موجود است به طوری که $f(x_۰) = x_۰$؛ یعنی، $x_۰$ به وسیله f «ثابت» نگهداشته می‌شود.

حل. نمودار f در داخل مربع واحد قرار دارد. نگاه کنید به شکل ۲.۱۸. حکم بالا معادل این است که نمودار f خط $y = x$ را قطع می‌کند که تقریباً بدیهی است.



شکل ۲.۱۸

برهان دقیق، متضمن کمی درایت است. ما $g(x) = f(x) - x$ را در نظر می‌گیریم که آن نیز تابعی پیوسته بر $[۰ , ۱]$ است. چون $g(۰) = f(۰) - ۰ = f(۰) \geq ۰$ و $g(۱) = f(۱) - ۱ \leq ۱ - ۱ = ۰$. قضیهٔ مقدار میانی نشان می‌دهد که به ازای $x_۰$ای در $[۰ , ۱]$، $g(x_۰) = ۰$. در این صورت، آشکار است که داشته باشیم $f(x_۰) = x_۰$. □

مثال ۲. نشان دهید که اگر $y > ۰$ و $m \in N$، آنگاه y دارای ریشهٔ mام مثبتی است.

حل. تابع $f(x) = x^m$ پیوسته است [تمرین ۵.۱۷]. عددی مثبت مانند b موجود است به طوری که $y \leq b^m$؛ در حقیقت، اگر $y \leq ۱$، فرض کنید $b = ۱$ و اگر $y > ۱$، فرض کنید $b = y$. بنابراین $f(۰) < y \leq f(b)$ و قضیهٔ مقدار میانی مستلزم آن است که به ازای xای در $(۰ , b]$، $f(x) = y$. پس $y = x^m$ و x یک ریشهٔ mام y است. □

حال تابع $f(x) = x^m$ در مثال ۲ را بیشتر مورد تحلیل دقیق قرار می‌دهیم. این تابع یک تابع اکیداً صعودی بر $[0, \infty)$ است:

$$0 \le x_1 < x_2 \text{ مستلزم آن است که } x_1^m < x_2^m.$$

بنابراین f یک به یک است و هر عدد نامنفی y دقیقاً دارای یک ریشهٔ m ام نامنفی است. این مطلب ما را مطمئن می‌سازد که نماد $y^{1/m}$ مبهم نیست. در حقیقت، $f^{-1}(y) = y^{1/m}$ تابع معکوس f است. زیرا، به ازای هر $x \in \mathrm{dom}(f)$، $f^{-1}of(x) = x$ و به ازای هر $y \in \mathrm{dom}(f^{-1})$، $fof^{-1}(y) = y$. چون $f(x) = x^m$ پیوسته است، تابع $y^{1/m}$ بنابر قضیهٔ بعدی، بر $[0, \infty)$ پیوسته است. توجه کنید که به ازای $m = 2$، این نتیجه در تمرین ۴.۱۷ ظاهر می‌شود.

۴.۱۸ قضیه. فرض کنید f تابعی اکیداً صعودی پیوسته بر بازه‌ای مانند I باشد. در این صورت، بنابر نتیجهٔ ۳.۱۸، $f(I)$ بازه‌ای مانند J است و f^{-1} نمایش تابعی با حوزهٔ تعریف J است. تابع f^{-1} یک تابع اکیداً صعودی و پیوسته بر J است.

برهان. به سادگی نشان داده می‌شود که f^{-1} اکیداً صعودی است. چون f^{-1} بازهٔ J را بروی I می‌نگارد. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که f^{-1} پیوسته است. □

۵.۱۸ قضیه. فرض کنید g تابعی اکیداً صعودی بر بازه‌ای مانند J باشد به طوری که $g(J)$ بازه‌ای مانند I است. در این صورت، g بر J پیوسته است.

برهان. x_0 را در J در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x_0 یک نقطهٔ انتهایی J نیست؛ در غیر این صورت، نیاز به تغییرات جزئی در برهان داریم. در این صورت، $g(x_0)$ یک نقطهٔ انتهایی I نیست و بنابراین ε_0 مثبتی موجود است به طوری که $(g(x_0) - \varepsilon_0 , g(x_0) + \varepsilon_0) \subseteq I$.

فرض کنید $\varepsilon > 0$، چون تنها نیاز به بررسی خاصیت $\varepsilon - \delta$ از قضیهٔ ۲.۱۷ برای εهای کوچکی داریم، می‌توانیم فرض کنیم که $\varepsilon < \varepsilon_0$. در این صورت، $x_1 , x_2 \in J$ موجودند به طوری که $g(x_1) = g(x_0) - \varepsilon$ و $g(x_2) = g(x_0) + \varepsilon$. آشکار است که داریم $x_1 < x_0 < x_2$. همچنین، اگر $x_1 < x < x_2$، آنگاه $g(x_1) < g(x) < g(x_2)$. بنابراین، $g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$، و لذا، $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. اینک، اگر قرار دهیم $\delta = \min\{x_2 - x_0 , x_0 - x_1\}$، آنگاه

$\delta > |x - x_\circ|$ مستلزم آن است که $x_1 < x < x_2$، و بنابراین، $\varepsilon > |g(x) - g(x_\circ)|$. □

قضیهٔ ۵.۱۸ عکسی جزئی برای قضیهٔ مقدار میانی را در اختیار می‌گذارد. زیرا، این قضیه به ما می‌گوید که یک تابع اکیداً صعودی با خاصیت مقدار میانی، پیوسته است. با این حال، تمرین ۱۲.۱۸ نشان می‌دهد که یک تابع می‌تواند دارای خاصیت مقدار میانی باشد، بدون آنکه پیوسته باشد.

۶.۱۸ قضیه. فرض کنید f یک تابع پیوسته و یک به یک بر بازه‌ای مانند I باشد. در این صورت، f اکیداً صعودی است [$x_1 < x_2$ مستلزم آن است که $f(x_1) < f(x_2)$] یا اکیداً نزولی است [$x_1 < x_2$ مستلزم آن است که $f(x_1) > f(x_2)$].

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که

(۱) اگر $a < b < c$ در I، آنگاه f(b) بین f(a) و f(c) قرار دارد.

اگر چنین نباشد آنگاه، فرضاً، $f(b) > \max\{f(a), f(c)\}$. y را به گونه‌ای اختیار کنید که $f(b) > y > \max\{f(a), f(c)\}$. بنابر قضیهٔ مقدار میانی ۲.۱۸، که در مورد بازه‌های $[a, b]$ و $[b, c]$ به کار گرفته شود، اعداد x_1 در (a, b) و x_2 در (b, c) موجودند به طوری که $f(x_1) = f(x_2) = y$. این نتیجه با یک به یک بودن f تناقض دارد.

اینک، به ازای هر $a_\circ$ و $b_\circ$ای با $a_\circ < b_\circ$ که در I انتخاب کنید و با فرض اینکه $f(a_\circ) < f(b_\circ)$، نشان خواهیم داد که f بر I اکیداً صعودی است. بنابر (۱)، داریم

به ازای $x < a_\circ$، $f(x) < f(a_\circ)$ [چون $x < a_\circ < b_\circ$]،

به ازای $a_\circ < x < b_\circ$، $f(a_\circ) < f(x) < f(b_\circ)$،

به ازای $x > b_\circ$، $f(b_\circ) < f(x)$ [چون $a_\circ < b_\circ < x$].

به ویژه،

(۲) به ازای هر $x < a_\circ$، $f(x) < f(a_\circ)$،

(۳) به ازای هر $x > a_\circ$، $f(a_\circ) < f(x)$.

$x_1 < x_2$ دلخواه را در I در نظر بگیرید. اگر $x_1 \le a_\circ \le x_2$ آنگاه، بنابر (۲) و (۳)، $f(x_1) < f(x_2)$. اگر $x_1 < x_2 < a_\circ$ آنگاه، بنابر (۲)، $f(x_1) < f(a_\circ)$، و در نتیجه، بنابر (۱) داریم، $f(x_1) < f(x_2)$. سرانجام، اگر $a_\circ < x_1 < x_2$، آنگاه $f(a_\circ) < f(x_2)$، و لذا، $f(x_1) < f(x_2)$. □

تمرینها

۱.۱۸. فرض کنید f همان تابع قضیهٔ ۱.۱۸ باشد. نشان دهید ک اگر $-f$ ماکسیمم خود را در $x_\circ \in [a , b]$ اختیار کند، آنگاه f مینیمم خود را در $x_\circ$ اختیار می‌کند.

۲.۱۸. برهان قضیهٔ ۱.۱۸ را با (a , b) به جای $[a , b]$ مجدداً مرور کنید. حکم قضیه در کجا نقض می‌شود؟ بحث کنید.

۳.۱۸. با استفاده از حسابان، ماکسیمم و مینیمم $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۹x + ۱$ را بر $[\circ , ۵)$ پیدا کنید.

۴.۱۸. فرض کنید $S \subseteq \mathbf{R}$ و فرض کنید دنباله‌ای مانند (x_n) در S موجود باشد که به عددی مانند $x_\circ$، $x_\circ \notin S$، همگرا باشد. نشان دهید که یک تابع پیوستهٔ بیکران بر S موجود است.

۵.۱۸. (الف) فرض کنید f و g تابعهایی پیوسته بر $[a , b]$ باشند به طوری که $f(a) \geq g(a)$ و $f(b) \leq g(b)$. ثابت کنید که به ازای حداقل $x_\circ$ای در $[a , b]$، $f(x_\circ) = g(x_\circ)$.

(ب) نشان دهید که مثال ۱ را می‌توان به عنوان حالت خاصی از قسمت (الف) تلقی کرد.

۶.۱۸. ثابت کنید به ازای xای در $(\circ , \frac{\pi}{۲})$, $x = \cos x$.

۷.۱۸. ثابت کنید که به ازای xای در $(\circ , ۱)$، $x۲^x = ۱$.

۸.۱۸. فرض کنید f تابع پیوستهٔ حقیقی مقداری بر $\mathbf{R}$ باشد و به ازای a و b ای در $\mathbf{R}$، $f(a) f(b) < \circ$. ثابت کنید xای بین a و b موجود است به طوری که $f(x) = \circ$.

۹.۱۸. ثابت کنید که تابع چند جمله‌ای f از درجهٔ فرد، حداقل دارای یک ریشهٔ حقیقی است. راهنمایی: شاید مفید باشد که ابتدا حالتی را که f تابع درجهٔ سوّم است؛ یعنی، $f(x) = a_\circ + a_۱x + a_۲x^{۲} + a_۳x^{۳}$، که در آن $a_۳ \neq \circ$، بررسی کنید.

۱۰.۱۸. فرض کنید f بر $[\circ , ۲]$ پیوسته باشد و $f(\circ) = f(۲)$. ثابت کنید که x و y ای در $[\circ , ۲]$ موجودند به طوری که $|y - x| = ۱$ و $f(x)=f(y)$. راهنمایی: تابع $g(x)=f(x+۱) - f(x)$ را بر $[\circ , ۱]$ در نظر بگیرید.

۱۱.۱۸. (الف) نشان دهید که اگر f بر بازه‌ای مانند I اکیداً صعودی باشد آنگاه، $-f$ بر I اکیداً

نزولی است.

(ب) قضیه‌های ۴.۱۸ و ۵.۱۸ را برای تابعهای اکیداً نزولی بیان و ثابت کنید.

۱۲.۱۸. فرض کنید به ازای $x \neq ۰$، $f(x) = \sin(۱/x)$ و $f(۰) = ۰$.

(الف) بررسی کنید که f، بنابر تمرین ۱۰.۱۷ (ب)، در ۰ ناپیوسته است.

(ب) نشان دهید که f دارای خاصیت مقدار میانی بر $\mathbf{R}$ است.

بخش ۱۹. پیوستگی یکنواخت

فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که حوزهٔ تعریف آن، زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ است. قضیهٔ ۲.۱۷ حاکی از آن است که f بر زیر مجموعه‌ای مانند S، $S \subseteq \mathrm{dom}(f)$ پیوسته است اگر و تنها اگر

به ازای هر $x_۰ \in S$ و $\varepsilon > ۰$، عددی مانند $\delta > ۰$ موجود است به طوری که

(*) $x \in \mathrm{dom}\,(f)$ و $|x - x_۰| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(x_۰)| < \varepsilon$.

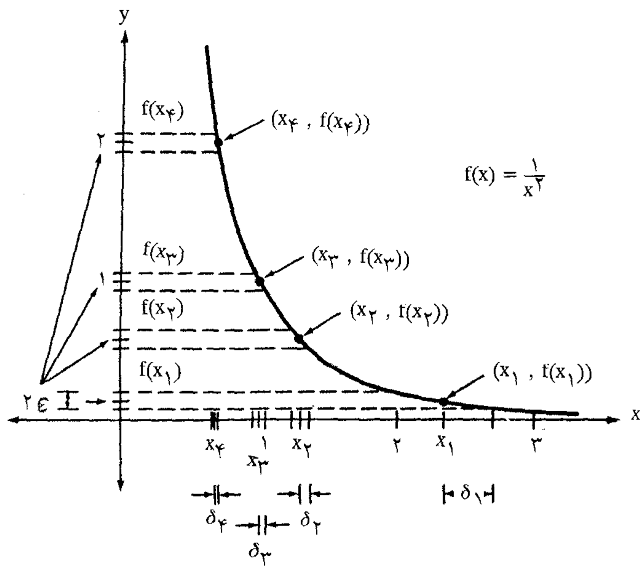
انتخاب δ به $\varepsilon > ۰$ و نقطه $x_۰$ در S بستگی دارد.

مثال ۱. ما درستی (*) را برای تابع $f(x) = ۱/x^۲$ بر $(۰\,,\,\infty)$ تحقیق می‌کنیم. فرض کنید $x_۰ > ۰$ و $\varepsilon > ۰$. لازم است نشان دهیم که برای $|x - x_۰|$ به قدر کافی کوچک، $|f(x) - f(x_۰)| < \varepsilon$. توجه کنید که

$$f(x) - f(x_۰) = \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x_۰^۲} = \frac{x_۰^۲ - x^۲}{x^۲x_۰^۲} = \frac{(x_۰ - x)(x_۰ + x)}{x^۲x_۰^۲} \qquad (۱)$$

اگر $|x - x_۰| < x_۰/۲$ آنگاه داریم $|x| > x_۰/۲$ ، $|x| < ۳x_۰/۲$ و $|x + x_۰| < ۵x_۰/۲$. این مشاهدات و (۱) نشان می‌دهند که اگر $|x - x_۰| < x_۰/۲$ ، آنگاه

$$|f(x) - f(x_۰)| < \frac{|x_۰ - x|\,.\,۵x_۰/۲}{(x_۰/۲)^۲\,x_۰^۲} = \frac{۱۰|x - x_۰|}{x_۰^۳}.$$



شکل ۱.۱۹

در نتیجه، اگر قرار دهیم $\delta = \min\{x_0/2 , x_0^3\varepsilon/10\}$، آنگاه

$|x - x_0| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

این نتیجه حکم (*) را برای f روی $(0 , \infty)$ برقرار می‌کند. توجه کنید که δ به هر دوی ε و x_0 بستگی دارد. حتی اگر ε ثابت باشد، وقتی که x_0 کوچک شود، δ کوچک می‌شود. این امر نشان می‌دهد که انتخاب δی ما به x_0 و ε بستگی دارد، گرچه ممکن است این کار به این دلیل باشد که δ را از طریق تقریبهای نادقیق به دست آورده‌ایم. در حقیقت، در این حالت، δ باید به x_0 و نیز به ε بستگی داشته باشد. نگاه کنید به مثال ۳. شکل ۱.۱۹ نشان می‌دهد که وقتی که x_0 به ۰ نزدیک می‌شود، εای ثابت، مستلزم مرتباً کوچکتر شدن δ است. [در این شکل، δ_1 دلالت بر δای دارد که به ازای آن (*) برای x_1 و ε صادق است، δ_2 دلالت بر δای دارد که آن (*) برای x_2 و ε صادق است و غیره.]

نتیجه آنکه بسیار سودمند خواهد بود بدانیم که چه موقع می‌توان δی شرط (*) را به گونه‌ای انتخاب کرد که تنها به ε و S وابسته باشد، به طوری که δ به x_0 خاصی وابسته نباشد. چنین تابعهایی پیوسته یکنواخت بر S نامیده می‌شوند. در تعریف آن، نقاط x و x_0 نقشهایی

متقارن دارند، و لذا، آنها را x و y خواهیم نامید.

۱.۱۹ تعریف. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که بر مجموعهٔ S، $S \subseteq \mathbf{R}$، تعریف شده است. در این صورت f بر S پیوستهٔ یکنواخت است در صورتی که

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند δ موجود است به طوری که

$x, y \in S$ و $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(x)| < \varepsilon$.

خواهیم گفت که f پیوستهٔ یکنواخت است در صورتی که f پیوستهٔ یکنواخت بر dom(f) باشد. توجه کنید که برای اینکه تابعی بر مجموعه‌ای پیوسته یکنواخت باشد، لازم است بر آن مجموعه پیوسته باشد. این حکم باید بدیهی باشد؛ اگر حکم برای شما بدیهی نباشد، باید قضیهٔ ۲.۱۷ و تعریف ۱.۱۹ را مورد بررسی دقیق قرار دهید. همچنین، توجه کنید که پیوستگی یکنواخت، خاصیتی دربارهٔ یک تابع و یک مجموعه است [که تابع بر آن تعریف شده است]. اینکه بگوییم تابعی در یک نقطه، پیوسته یکنواخت است بیمعنی است.

مثال ۲. نشان می‌دهیم که تابع $f(x) = 1/x^2$ بر هر مجموعه‌ای به صورت $[a, \infty)$، که در آن، $a > 0$، پیوستهٔ یکنواخت است. در اینجا، a ثابت است. فرض کنید $\varepsilon > 0$. لازم است نشان دهیم که عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

(۱) $x \geq a$، $y \geq a$ و $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

مانند فرمول (۱)، در مثال ۱، داریم

$$f(x) - f(y) = \frac{(y - x)(y + x)}{x^2y^2}.$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که عدد ثابتی مانند M، کرانی برای $\frac{y + x}{x^2y^2}$ بر $[a, \infty)$ است، آنگاه δ را برابر ε/M انتخاب خواهیم کرد. امّا، داریم

$$\frac{y + x}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy^2} < \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3} = \frac{2}{a^3}$$

و بنابراین، قرار می‌دهیم $\delta = \varepsilon a^3/2$. اینک، تحقیق (۱) سر راست است. در حقیقت، $x \geq a$، $y \geq a$ و $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|y - x|\ |y + x|}{x^2y^2} < \delta\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy^2}\right) \leq \frac{2\delta}{a^3} = \varepsilon.$$

نشان داده‌ایم که f بر $[a, \infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است. زیرا، δ تنها به ε و مجموعهٔ $[a, \infty)$ وابسته است.

مثال ۳. تابع $f(x) = 1/x^2$ بر مجموعهٔ $(0, \infty)$، یا حتی بر مجموعهٔ $(0, 1)$ پیوستهٔ یکنواخت نیست. ما این حکم را مستقیماً با نقض تعریف پیوستگی یکنواخت ثابت خواهیم کرد. خواننده نازک طبع می‌تواند این اثبات را نادیده بگیرد و در انتظار برهان سادهٔ مثال ۶ باشد. نشان خواهیم داد که (۱) در تعریف ۱.۱۹، به ازای $\varepsilon = 1$، از اعتبار ساقط است؛ یعنی،

به ازای هر $\delta > 0$، x و y ای در $(0, 1)$ موجودند به طوری که

$$|x - y| < \delta \text{ و با این حال } |f(x) - f(y)| \geq 1 . \qquad (1)$$

[در واقع برای این تابع، (۱) در ۱.۱۹ به ازای هر $\varepsilon > 0$، از اعتبار ساقط است.] برای نشان دادن (۱)، کافی است $y = x + \delta/2$ اختیار کنیم و نابرابری

$$|f(x) - f(x + \delta/2)| \geq 1 \qquad (2)$$

را برقرار کنیم. [انگیزهٔ این تدبیر، گریز از دو مجهول x و y به یک مجهول x در (۲) است.] بنابر (۱) در مثال ۱، نابرابری (۲) معادل این است که

$$1 \leq \frac{(x + \delta/2 - x)(x + \delta/2 + x)}{x^2(x + \delta/2)^2} = \frac{d(2x + \delta/2)}{2x^2(x + \delta/2)^2} . \qquad (3)$$

کافی است (۱) را برای $\delta < \frac{1}{2}$ ثابت کنیم. برای به دست آوردن (۳)، بدون هیچ دلیل مشخصی، $x = \delta$ را امتحان می‌کنیم. در این صورت،

$$\frac{\delta(2\delta + \delta/2)}{2\delta^2(\delta + \delta/2)^2} = \frac{5\delta^2/2}{9\delta^4/2} = \frac{5}{9\delta^2} \geq \frac{5}{9(1/2)^2} = \frac{20}{9} > 1 .$$

بله، بخت با ما یار بوده است! به طور خلاصه، نشان داده‌ایم که اگر $0 < \delta < \frac{1}{2}$، آنگاه $|f(\delta) - f(\delta + \delta/2)| > 1$، و لذا، (۱) با $x = \delta$ و $y = \delta + \delta/2$ برقرار است.

مثال ۴. آیا تابع $f(x) = x^2$ بر $[-7, 7]$ پیوستهٔ یکنواخت است؟ برای بررسی این حکم، فرض کنید $\varepsilon > 0$. توجه کنید که $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y|\ |x + y|$. چون به ازای $x, y \in [-7, 7]$، $|x + y| \leq 14$، داریم

$$\text{به ازای } x, y \in [-7, 7]\text{،}\quad |f(x) - f(y)| \leq 14|x - y| .$$

بنابراین، اگر $\delta = \varepsilon/14$، آنگاه

$x , y \in [-7 , 7]$ و $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

نشان داده‌ایم که f بر $[-7 , 7]$ پیوستهٔ یکنواخت است. برهان مشابهی برای $f(x) = x^2$ بر هر بازهٔ بسته‌ای قابل اعمال است. با این حال، همان طور که از قضیهٔ مهم بعدی آشکار می‌شود، این نتایج تصادفی نیستند.

۲.۱۹ قضیه. اگر f بر بازهٔ بسته‌ای مانند $[a , b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a , b]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. فرض کنید که f بر $[a , b]$ پیوستهٔ یکنواخت نباشد. در این صورت، $\varepsilon > 0$ ای موجود است به طوری که به ازای هر $\delta > 0$، استلزام «$|x - y| < \delta$ مستلزم این خواهد بود که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$» برقرار نیست؛ یعنی، به ازای هر $\delta > 0$، x و y ای در $[a , b]$ موجودند به طوری که $|x - y| < \delta$، و با این حال، $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. در این صورت، به ازای هر n در N، x_n و y_n ای در $[a , b]$ موجودند به طوری که $|x_n - y_n| < 1/n$، ولی $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. بنابر قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس ۵.۱۱، زیردنباله‌ای از (x_n) مانند (x_{n_k}) همگراست. به علاوه، اگر $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$، آنگاه x_0 به $[a , b]$ تعلق دارد. نگاه کنید به تمرین ۹.۸. همچنین، آشکار است که داریم $x_0 = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$. چون f در x_0 پیوسته است، داریم

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) ,$$

و لذا

$$\lim_{k\to\infty} [f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0$$

چون به ازای هر k، $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$، پس تناقض حاصل می‌شود. از اینجا نتیجه می‌گیریم که f بر $[a , b]$ پیوستهٔ یکنواخت است. □

در برهان بالا تنها از دو خاصیت $[a , b]$ استفاده می‌شود: (الف) کراندار بودن، به طوری که قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس صادق باشد؛ و (ب) یک دنبالهٔ همگرا در $[a , b]$ باید به نقطه‌ای در $[a , b]$ همگرا شود. همان طور که پیش از قضیهٔ ۸.۱۱، متذکر شده‌ایم، مجموعه‌هایی با خاصیت (ب) مجموعه‌های بسته نامیده می‌شوند. بنابراین، قضیهٔ ۲.۱۹ دارای تعمیم زیر است. اگر f بر مجموعهٔ بسته و کراندار S پیوسته باشد، آنگاه f بر S پیوستهٔ یکنواخت است. همچنین، نگاه کنید به قضیه‌های ۴.۲۱ و ۱۲.۱۳ که در بخشهای اختیاری آورده می‌شوند.

مثال ۵. با توجه به قضیهٔ ۲.۱۹، تابعهای زیر بر مجموعه‌های داده شده، پیوستهٔ یکنواخت‌اند: x^{73} بر $[-13, 13]$؛ $\sqrt{x}$ بر $[0, 400]$؛ $x^{17}\sin(e^x) - e^{4x}\cos 2x$ بر $[-8\pi, 8\pi]$ و $1/x^6$ بر $[\frac{1}{4}, 44]$.

۳.۱۹ بحث. مثال ۵ قدرت قضیهٔ ۲.۱۹ را تشریح می‌کند. امّا، هنوز هم ممکن است روشن نباشد که چرا پیوستگی یکنواخت، ارزش مطالعه را دارد. یکی از کاربردهای مهم پیوستگی یکنواخت، مربوط به انتگرالپذیری تابعهای پیوسته بر بازه‌های بسته است. برای اینکه مقتضی بودن پیوستگی یکنواخت را مشاهده کنیم، تابع حقیقی مقدار نامنفی پیوستهٔ f را بر بازهٔ $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم. به ازای $n \in \mathbb{N}$ و $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ فرض کنید،

$$M_{i,n} = \sup\{f(x) : x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]\}.$$

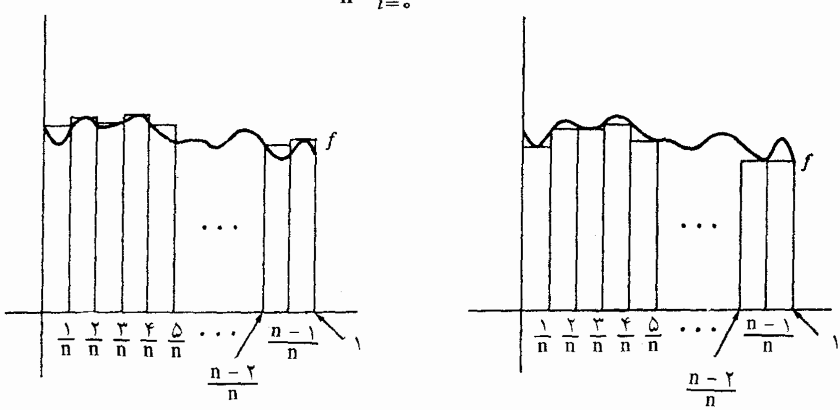
$$m_{i,n} = \inf\{f(x) : x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]\}.$$

در این صورت مجموع مساحتهای مستطیلها، در شکل ۲.۱۹ (الف) برابر است با

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M_{i,n},$$

و مجموع مساحتهای مستطیلها، در شکل ۲.۱۹ (ب) برابر است با

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m_{i,n}.$$



(a) (b)

شکل ۲.۱۹

تابع f، انتگرالپذیر ریمان می‌شود مشروط بر آنکه اعداد U_n و L_n برای n های بزرگ، به یکدیگر نزدیک باشند؛ یعنی، در صورتی که

$$\lim_{n\to\infty} (U_n - L_n) = 0\,; \tag{۱}$$

نگاه کنید به تمرین ۶.۳۲. به علاوه خواهیم داشت $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim U_n = \lim L_n$. ممکن است رابطهٔ (۱) از شکل ۲.۱۹ بدیهی به نظر بیاید. امّا، برای اثبات آن پیوستگی یکنواخت را لازم داریم. ابتدا، توجه کنید که به ازای هر n،

$$0 \le U_n - L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} (M_{i,n} - m_{i,n})\,.$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$. بنابر قضیهٔ ۲.۱۹، f بر $[0\,,\,1]$ پیوستهٔ یکنواخت است، و لذا، $\delta > 0$ ای موجود است به طوری که

(۲) $x\,,\,y \in [0\,,\,1]$ و $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

N را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $\frac{1}{N} < \delta$. فرض کنید $n > N$؛ برای $i = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n-1$ قضیهٔ ۱.۱۸ نشان می‌دهد که x_i و y_i ای در $[i/n\,,\,(i+1)/n]$ موجودند که در $f(x_i) = m_{i,n}$ و $f(y_i) = M_{i,n}$ صدق می‌کنند. چون $|x_i - y_i| \le 1/n < 1/N < \delta$، (۲) نشان می‌دهد که

$$M_{i,n} - m_{i,n} = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon\,,$$

و لذا،

$$0 \le U_n - L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} (M_{i,n} - m_{i,n}) < \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon = \varepsilon\,.$$

رابطهٔ (۱) از این تساوی ثابت می‌شود و این همان حکم مطلوب است.

دو قضیهٔ بعدی نشان می‌دهند که تابعهای پیوستهٔ یکنواخت دارای خاصیتهای خوبی هستند.

۴.۱۹ قضیه. اگر f بر مجموعه‌ای مانند S پیوستهٔ یکنواخت باشد و (s_n) یک دنبالهٔ کوشی در S باشد آنگاه، $(f(s_n))$ یک دنبالهٔ کوشی است.

برهان. فرض کنید (s_n) یک دنبالهٔ کوشی در S باشد و فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون f بر S پیوستهٔ یکنواخت است، عدد مثبتی مانند δ موجود است به طوری که

(۱) $x\,,\,y \in S$ و $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

چون (s_n) یک دنبالهٔ کوشی است، عدد N ای موجود است به طوری که

$m\ ,\ n > N$ مستلزم آن است که $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

از (۱) ملاحظه می‌کنیم که

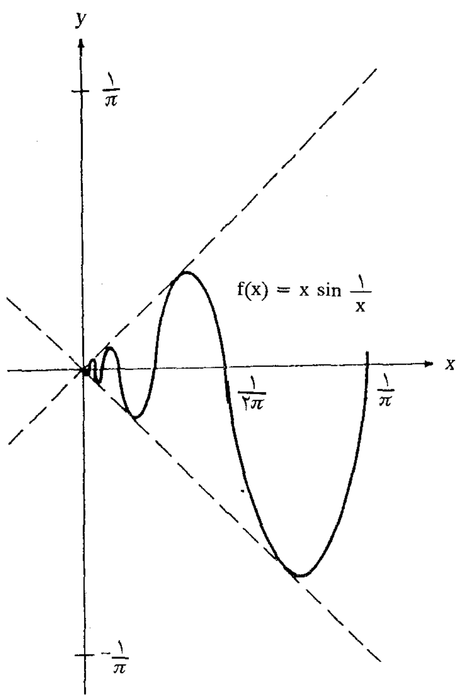
$m\ ,\ n > N$ مستلزم آن است که $|f(s_n) - f(s_m)| < \varepsilon$.

این ثابت می‌کند که $(f(s_n))$ نیز یک دنباله کوشی است. □

مثال ۶. نشان می‌دهیم که $f(x) = ۱/x^۲$ بر $(۰\ ,\ ۱)$ پیوستهٔ یکنواخت نیست. فرض کنید که برای $n \in N$، $s_n = ۱/n$. در این صورت (s_n) آشکارا یک دنبالهٔ کوشی بر $(۰\ ,\ ۱)$ است. چون $f(s_n) = n^۲$، $(f(s_n))$ یک دنبالهٔ کوشی نیست. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۴.۱۹، f نمی‌تواند بر $(۰\ ,\ ۱)$ پیوسته یکنواخت باشد.

قضیهٔ بعدی متضمن توسیع تابعهاست. گوییم که تابعی مانند $\tilde{f}$ یک توسیع تابع f است در صورتی که

$\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(\tilde{f})$ و به ازای هر x در $\mathrm{dom}(f)$ ، $f(x) = \tilde{f}(x)$.

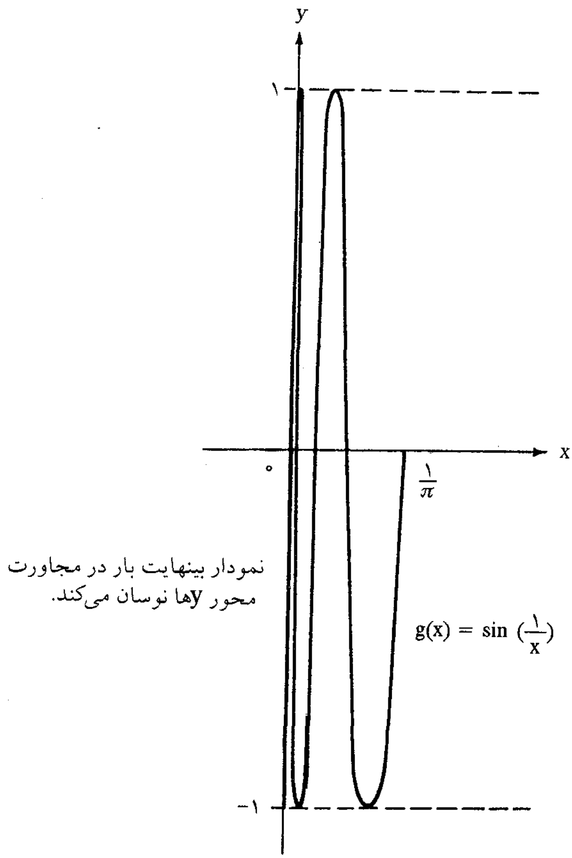


شکل ۳.۱۹

مثال ۷. فرض کنید برای $x \in (\circ\ ,\ \backslash/\pi]$، $f(x) = x\sin(\backslash/x)$. تابع تعریف شده با ضابطهٔ

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin(\backslash/x) \ ، & \circ < x \leq \backslash/\pi \\ \circ \ ، & x = \circ \end{cases}$$

توسیعی از f است. توجه کنید که $\mathrm{dom}(f) = (\circ\ ,\ \backslash/\pi]$ و $\mathrm{dom}(\tilde{f}) = [\circ\ ,\ \backslash/\pi]$. در این حالت، $\tilde{f}$ توسیع پیوسته‌ای از f است. نگاه کنید به شکل ۳.۱۹ و نیز به تمرینهای ۱۳.۱۷ (ج) و ۹.۱۷ (پ).



شکل ۴.۱۹

مثال ۸. فرض کنید برای $x \in (\circ\ ,\ \backslash/\pi]$، $g(x) = \sin(\frac{\backslash}{x})$. تابع g را می‌توان به چندین صورت به تابعی مانند $\tilde{g}$ با حوزهٔ تعریف $[\circ\ ,\ \backslash/\pi]$ توسیع داد. امّا، $\tilde{g}$ پیوسته نخواهد بود. نگاه کنید به شکل ۴.۱۹.

تابع f در مثال ۷ پیوستهٔ یکنواخت است [زیرا، $\tilde{f}$ چنین است] و f بر بازهٔ بستهٔ مفروض، به تابعی پیوسته توسیع می‌یابد. تابع g، در مثال ۸، در بازهٔ بستهٔ مفروض به تابعی پیوسته توسیع نمی‌یابد و چنین معلوم می‌شود که g پیوسته یکنواخت نیست. این مثالها قضیهٔ بعدی را تشریح می‌کند.

۵.۱۹ قضیه. یک تابع حقیقی مقدار بر $(a\ ,\ b)$ پیوستهٔ یکنواخت است اگر و تنها اگر بتوان آن را به تابعی پیوسته مانند $\tilde{f}$ بر $[a\ ,\ b]$ توسیع داد.

برهان. ابتدا، فرض کنید که می‌توان f را به تابع پیوسته‌ای مانند $\tilde{f}$ بر $[a\ ,\ b]$ توسیع داد. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۲.۱۹، $\tilde{f}$ بر $[a\ ,\ b]$ پیوستهٔ یکنواخت است، و لذا، واضح است که f بر $(a\ ,\ b)$ پیوستهٔ یکنواخت است.

اینک، فرض کنید f بر $(a\ ,\ b)$ پیوستهٔ یکنواخت باشد. باید $\tilde{f}(a)$ و $\tilde{f}(b)$ را طوری تعریف کنیم که تابع توسیع یافته، پیوسته باشد. کافی است که به بررسی $\tilde{f}(a)$ بپردازیم. دو ادعا را مطرح می‌کنیم:

اگر (s_n) دنباله‌ای در $(a\ ,\ b)$ همگرا به a باشد، آنگاه

(۱) $(f(s_n))$ همگراست،

و

اگر (s_n) و (t_n) دنباله‌هایی در $(a\ ,\ b)$ همگرا به a باشند،

(۲) آنگاه $\lim f(s_n) = \lim f(t_n)$.

موقتاً موارد (۱) و (۲) را به عنوان احکام معتبر می‌پذیریم و تعریف می‌کنیم

به ازای هر دنبالهٔ (s_n) در $(a\ ,\ b)$ همگرا به a،

(۳) $$\tilde{f}(a) = \lim f(s_n)\ .$$

حکم (۱) ضمانت می‌کند که حد موجود است و حکم (۲) ضمانت می‌کند که این تعریف نامبهم است. پیوستگی $\tilde{f}$ در a مستقیماً از (۳) نتیجه می‌شود؛ نگاه کنید به تمرین ۱۵.۱۷.

برای اثبات (۱)، توجه کنید که (s_n) یک دنبالهٔ کوشی است، و لذا، $(f(s_n))$ نیز بنابر قضیهٔ ۴.۱۹ یک دنبالهٔ کوشی است. از این رو، بنابر قضیهٔ ۱۱.۱۰، $(f(s_n))$ همگراست. برای اثبات (۲)، دنبالهٔ سوّمی مانند (u_n) را ایجاد می‌کنیم به طوری که (s_n) و (t_n) هر دو زیر دنباله‌های (u_n)

باشند. در حقیقت، صرفاً (s_n) و (t_n) را یک در میان بین هم جای می‌دهیم:

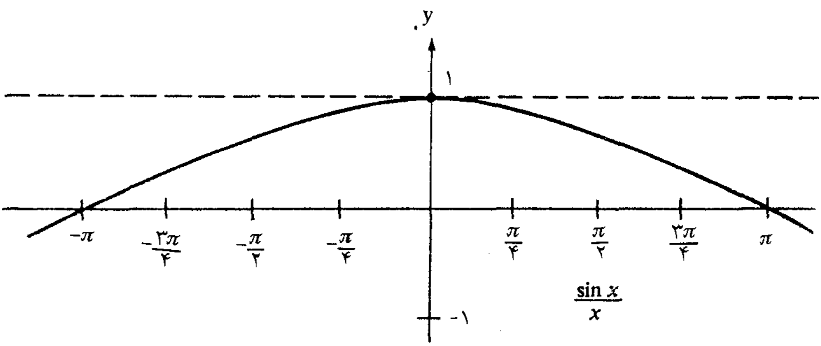
$$(u_n)_{n=1}^{\infty} = (s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3, s_4, t_4, s_5, t_5, \ldots).$$

پیداست که $\lim u_n = a$، و لذا بنابر (۱)، $\lim f(u_n)$ موجود است. قضیهٔ ۲.۱۱ نشان می‌دهد که زیر دنباله‌های $(f(s_n))$ و $(f(t_n))$ از $(f(u_n))$ هر دو باید به $\lim f(u_n)$ همگرا شوند. بنابراین، $\lim f(s_n) = \lim f(t_n)$. □

مثال ۹. فرض کنید به ازای $x \neq 0$، $h(x) = (\sin x)/x$. تابع $\tilde{h}$ که با ضابطهٔ

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{به ازای } x \neq 0 \\ 1 & \text{به ازای } x = 0 \end{cases}$$

بر $\mathbf{R}$ تعریف می‌شود، توسیعی از h است. آشکاراست که در همهٔ نقاط $x \neq 0$، تابعهای h و $\tilde{h}$ پیوسته‌اند. چنین معلوم می‌شود که $\tilde{h}$ در $x = 0$ پیوسته است [مطالب بعدی را ببینید]، و لذا، بنابر قضیهٔ ۵.۱۹، به ازای هر $b < 0 < a$، تابع h بر $(0, a)$ و $(b, 0)$ پیوستهٔ یکنواخت است. در حقیقت $\tilde{h}$ بر $\mathbf{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است [تمرین ۱۱.۱۹].



شکل ۵.۱۹

ما نمی‌توانیم پیوستگی $\tilde{h}$ در ۰ را در این کتاب ثابت کنیم. زیرا، تعریفی برای $\sin x$ ارائه نداده‌ایم. پیوستگی $\tilde{h}$ در ۰ حاکی از این حقیقت است که $\sin x$ در ۰ مشتقپذیر است، و اینکه مشتق آن در این نقطه عبارت است از $\cos(0) = 1$؛ یعنی،

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x};$$

نگاه کنید به شکل ۵.۱۹. برهان، بستگی به تعریف $\sin x$ دارد؛ بحث مختصر ۱۲.۳۷ را ببینید.

برای بحث این حد و قاعدهٔ هوپیتال، مثال (۱) در بخش ۳۰ را نگاه کنید.
در اینجا، معیار مفید دیگری ارائه می‌کنیم که مستلزم پیوستگی یکنواخت است.

۶.۱۹ قضیه. فرض کنید f یک تابع پیوسته بر بازه‌ای مانند I باشد [I ممکن است کراندار یا بیکران باشد]. فرض کنید I° بازه‌ای باشد که از حذف همه نقاط انتهایی که ممکن است در I باشند، به دست آمده باشد. اگر f بر I° مشتقپذیر باشد و اگر f' بر I° کراندار باشد، آنگاه f بر I پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. برای این برهان، به قضیهٔ مقدار میانگین نیاز داریم که می‌توان آن را در اغلب کتابهای حسابان یا بعداً در این کتاب [قضیه ۳.۲۹] پیدا کرد.

فرض کنید M کران بالایی برای f' بر I باشد به طوری که به ازای هر x، $|f'(x)| \leq M$. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ و فرض کنید $\delta = \varepsilon/M$. a و b را در I در نظر بگیرید، که در آن، $a < b$ و $|b-a| < \delta$. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، xای در (a , b) موجود است به طوری که $f'(x)=[f(b)-f(a)]/(b-a)$، و لذا،

$$|f(b) - f(a)| = |f'(x)| \,.\, |b - a| \leq M|b - a| < M\delta = \varepsilon \,.$$

این نتیجه، پیوستگی یکنواخت f بر I را ثابت می‌کند. □

مثال ۱۰. فرض کنید که $a > \circ$ و $f(x) = ۱/x^۲$ را در نظر بگیرید. چون $f'(x) = -۲/x^۳$، بر $[a , \infty)$ داریم، $|f'(x)| \leq ۲/a^۳$. لذا، بنابر قضیهٔ ۶.۱۹، تابع f بر $[a , \infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است. برای ملاحظهٔ برهان مستقیمی از این نتیجه، مثال ۲ را ببینید.

تمرینها

۱.۱۹. کدام یک از تابعهای پیوسته زیر بر مجموعه‌های تعیین شده پیوستهٔ یکنواخت‌اند؟ جوابهای خودتان را توجیه کنید. از هر قضیه‌ای که مایل باشید می‌توانید استفاده کنید.

(الف) $f(x) = x^{۱۷}\sin x - e^x\cos ۳x$ بر $[\circ , \pi]$،

(ب) $f(x) = x^۳$ بر $[\circ , ۱]$،

(پ) $f(x) = x^3$ بر $(0\,,\,1)$،

(ت) $f(x) = x^3$ بر $\mathbf{R}$،

(ث) $f(x) = 1/x^3$ بر $(0\,,\,1]$،

(ج) $f(x) = \sin(1/x^2)$ بر $(0\,,\,1]$،

(چ) $f(x) = x^2\sin(1/x)$ بر $(0\,,\,1]$.

۲.۱۹. با بررسی مستقیم خاصیت $\varepsilon - \delta$ در تعریف ۱.۱۹، ثابت کنید که هر یک از تابعهای زیر بر مجموعه‌های تعیین شده پیوستهٔ یکنواخت‌اند.

(الف) $f(x) = 3x + 11$ بر $\mathbf{R}$،

(ب) $f(x) = x^2$ بر $[0\,,\,3]$،

(پ) $f(x) = 1/x$ بر $[\frac{1}{2}\,,\,\infty)$.

۳.۱۹. تمرین ۲.۱۹ را برای تابعهای زیر تکرار کنید.

(الف) $f(x) = x/(x + 1)$ بر $[0\,,\,2]$،

(ب) $g(x) = 5x/(2x - 1)$ بر $[1\,,\,\infty)$.

۴.۱۹. (الف) ثابت کنید که اگر f بر مجموعه‌ای کراندار مانند S پیوستهٔ یکنواخت باشد، آنگاه f تابعی کراندار بر S است. راهنمایی: فرض کنید چنین نباشد. از قضیهٔ ۵.۱۱ و ۴.۱۹ استفاده کنید.

(ب) از (الف) باز هم استفاده کنید و برهان دیگری ارائه دهید که $1/x^2$ بر $(0\,,\,1)$ پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۵.۱۹. کدام یک از تابعهای پیوستهٔ زیر بر مجموعه‌های تعیین شده پیوسته یکنواخت‌اند؟ جوابهای خود را با استفاده از قضیه‌های مناسب، یا تمرین ۴.۱۹ (الف) توجیه کنید.

(الف) $\tan\ x$ بر $[0\,,\,\pi/4]$،

(ب) $\tan\ x$ بر $[0\,,\,\pi/2)$،

(پ) $(1/x)\sin^2 x$ بر $(0\,,\,\pi]$،

(ت) $1/(x - 3)$ بر $(0\,,\,3)$،

(ث) $1/(x - 3)$ بر $(3\,,\,\infty)$،

(ج) $1/(x - 3)$ بر $(4\,,\,\infty)$.

۶.۱۹. (الف) فرض کنید که برای $x \geq 0$، $f(x) = \sqrt{x}$. نشان دهید که f' بر $(0\,,\,1]$ بیکران

است، امّا با این وصف، تابع f بر [۱ , ۰) پیوستهٔ یکنواخت است. این را با قضیهٔ ۶.۱۹ مقایسه کنید.

(ب) نشان دهید که f بر (∞ , ۱] پیوستهٔ یکنواخت است.

۷.۱۹. (الف) فرض کنید f تابعی پیوسته بر (∞ , ۰] باشد. ثابت کنید که اگر به ازای هر k، تابع f بر (∞ , k] پیوستهٔ یکنواخت باشد، آنگاه f بر (∞ , ۰] پیوستهٔ یکنواخت است.

(ب) از (الف) و تمرین ۶.۱۹ (ب) استفاده کنید و ثابت کنید که $\sqrt{x}$ بر (∞ , ۰] پیوستهٔ یکنواخت است.

۸.۱۹. (الف) با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین، ثابت کنید که به ازای هر x و y از **R**،

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| ;$$

نگاه کنید به برهان قضیه ۶.۱۹.

(ب) نشان دهید که $\sin x$ بر **R** پیوسته یکنواخت است.

۹.۱۹. فرض کنید که برای $x \neq 0$، $f(x) = x\sin(1/x)$ و $f(0) = 0$.

(الف) بررسی کنید که f بر **R** پیوسته است؛ نگاه کنید به تمرینهای ۳.۱۷ (ج) و ۹.۱۷ (پ).

(ب) چرا f بر هر زیر مجموعهٔ کراندار **R** پیوستهٔ یکنواخت است؟

(پ) آیا f بر **R** پیوستهٔ یکنواخت است؟

۱۰.۱۹. تمرین ۹.۱۹ را برای تابع g، که در آن برای $x \neq 0$، $g(x) = x^2\sin(1/x)$ و $g(0) = 0$، تکرار کنید.

۱۱.۱۹. این مطلب را که تابع h در مثال ۹ بر **R** پیوسته است، بپذیرید: ثابت کنید که این تابع بر **R** پیوستهٔ یکنواخت است.

بخش ۲۰. حدهای تابعها

تابعی مانند f در نقطه‌ای مانند a پیوسته است در صورتی که به ازای xهای نزدیک a [و x در dom(f)]، مقادیر $f(x)$ به f(a) نزدیک باشند. تعریف ۱.۱۷ و قضیهٔ ۲.۱۷ را ببینید. به نظر معقول

می‌آید که $f(a)$ را به عنوان حد مقادیر $f(x)$، برای xهای نزدیک a تلقی کنیم و بنویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. در این بخش، این مفهوم را رسمیت می‌بخشیم و این بخش برای مطالعهٔ دقیق مشتقها در فصل ۵ لازم است. امّا می‌توان خواندن آن را تا آن زمان به تعویق انداخت.

ما به حدهای معمولی، حدهای چپ و راست و حدها در بینهایت، علاقه‌مندیم. برای اینکه به صورت مؤثر به این مفاهیم متنوع بپردازیم و نیز بر ویژگیهای مشترک آنها تأکید کنیم بحث را با تعریفی بسیار کلی شروع می‌کنیم.

۱.۲۰ تعریف. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ باشد و فرض کنید a عددی حقیقی با نماد $+\infty$ و یا نماد $-\infty$ باشد؛ یعنی، حد دنباله‌ای در S باشد. فرض کنید L عددی حقیقی یا نماد $+\infty$ و یا نماد $-\infty$ باشد. می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ در صورتی که

(۱) f تابعی تعریف شده بر S باشد،

و

به ازای هر دنبالهٔ (x_n) در S با حد a داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L \quad . \qquad (۲)$$

عبارت «$\lim_{x\to a^S} f(x)$» چنین خوانده می‌شود «حد $f(x)$ وقتی که x در طول S به a میل کند».

۲.۲۰. تذکّر

(الف) از تعریف ۱.۱۷ ملاحظه می‌کنیم که تابعی مانند f در a از $S = \mathrm{dom}(f)$ پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a^S} f(x) = f(a)$.

(ب) ملاحظه کنید که حدها، در صورت وجود، یکتا هستند. این از (۲) ی تعریف ۱.۲۰ نتیجه می‌شود. زیرا، حدهای یک دنباله یکتا هستند و درستی این حقیقت در انتهای بخش ۷ مورد بررسی واقع شده‌است.

اینک مفاهیم گوناگون حدی استاندارد را برای تابعها تعریف می‌کنیم.

۳.۲۰ تعریف

(الف) برای $a \in \mathbf{R}$ و تابعی مانند f، می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$، در صورتی که برای مجموعه‌ای مانند $S = J\backslash\{a\}$، که در آن، J بازه‌ای شامل a باشد داشته باشیم

$\lim_{x\to a}^{S} f(x) = L$. $\lim_{x\to a} f(x)$ حد [دو طرفه] f در نقطهٔ a نامیده می‌شود. توجه کنید که f لازم نیست در نقطه a تعریف شده باشد، و حتی اگر f در نقطهٔ a تعریف شده باشد، لازم نیست که مقدار f(a) برابر $\lim_{x\to a} f(x)$ باشد. در حقیقت $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$، اگر و تنها اگر f بر بازهٔ بازی شامل a تعریف شده باشد و f در a پیوسته باشد.

(ب) برای $a \in \mathbf{R}$، و برای تابعی مانند f، می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ در صورتی که برای بازهٔ بازی مانند $S = (a , b)$، $\lim_{x\to a}^{S} f(x) = L$. عبارت $\lim_{x\to a^+} f(x)$ حد سمت راست f در a است. باز هم لازم نیست که f در a تعریف شده باشد.

(پ) برای $a \in \mathbf{R}$، و تابعی مانند f، می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$، در صورتی که به ازای بازهٔ بازی مانند $S = (c , a)$، $\lim_{x\to a}^{S} f(x) = L$. $\lim_{x\to a^-} f(x)$ حد سمت چپ f در a است.

(ت) برای تابعی مانند f، می‌نویسیم $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$، در صورتی که برای بازه‌ای مانند $S = (c , \infty)$، $\lim_{x\to \infty}^{S} f(x) = L$. به همین نحو، می‌نویسیم $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$، در صورتی که برای بازه‌ای مانند $S = (-\infty , b)$، $\lim_{x\to -\infty}^{S} f(x) = L$.

حدهای تعریف شده در بالا یکتا هستند، یعنی، به انتخاب دقیق مجموعهٔ S بستگی ندارند. [تمرین ۱۹.۲۰].

مثال ۱. داریم $\lim_{x\to ۴} x^۳ = ۶۴$ و $\lim_{x\to ۲} (۱/x) = ۱/۲$. زیرا تابعهای $x^۳$ و $۱/x$، به ترتیب در ۴ و ۲ پیوسته‌اند. می‌توان به سادگی نشان داد که $\lim_{x\to ۰^+} (۱/x) = +\infty$ و اینکه $\lim_{x\to ۰^-} (۱/x) = -\infty$؛ نگاه کنید به تمرین ۱۴.۲۰. نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to ۰} (۱/x)$ موجود نیست. نگاه کنید به قضیهٔ ۱۰.۲۰.

مثال ۲. $\lim_{x\to ۲} [(x^۲ - ۴)/(x - ۲)]$ را در نظر بگیرید. این مورد، مانند مورد مثال ۱ نیست. زیرا، تابع تحت حد، حتی در $x = ۲$، تعریف نشده است. با این حال، می‌توانیم تابع f را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = \frac{(x - ۲)(x + ۲)}{(x - ۲)} = x + ۲ \quad , \quad x \neq ۲ \text{ به ازای }$$

اینک، بدیهی است که $\lim_{x\to ۲} [(x^۲ - ۴)/(x - ۲)] = \lim_{x\to ۲} (x + ۲) = ۴$. باید تأکید کنیم که تابعهای $(x^۲ - ۴)/(x - ۲)$ و $x + ۲$ یکی نیستند. حوزهٔ تعریف $f(x) = (x^۲ - ۴)/(x - ۲)$

عبارت است از $(-\infty\,,\,۲)\cup(۲\,,\,\infty)$، در حالی که، حوزهٔ تعریف $f(x)=x+۲$ مجموعهٔ $\mathbf{R}$ است. بنابراین، $\tilde{f}$ توسیعی از f است. ممکن است به نظر برسد که زیادی به جزئیات بها داده می‌شود و این مثال شاید مهمل جلوه کند. امّا، تابع f است و نه $\tilde{f}$ که به طور طبیعی در محاسبه مشتق $g(x)=x^۲$ در $x=۲$ پیش می‌آید. در حقیقت، با استفاده از تعریف مشتق، داریم

$$g'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}$$

در نتیجه، محاسبات نسبتاً سادهٔ بالا، نشان می‌دهد که $g'(۲)=۴$. البته، این نتیجه از فرمول $g'(x)=۲x$ بدیهی است، ولی ما در تدارک مبانی حدها و مشتقها هستیم، و لذا کار را با مثالهای ساده شروع می‌کنیم.

مثال ۳. $\lim_{x\to ۱}[(\sqrt{x}-۱)/(x-۱)]$ را در نظر بگیرید. ما از حیله‌ای استفاده می‌کنیم که دیگر با آن مأنوس شده‌ایم. صورت و مخرج را در $\sqrt{x}+۱$ ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم؛

$$\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}\,,\quad x\neq ۱ \text{ برای}$$

بنابراین، داریم $\lim_{x\to ۱}[(\sqrt{x}-۱)/(x-۱)]=\lim_{x\to ۱}[۱/(\sqrt{x}+۱)]=۱/۲$. در واقع، با دشواری زیادی تحقیق کرده‌ایم که اگر $h(x)=\sqrt{x}$، آنگاه $h'(۱)=۱/۲$.

مثال ۴. فرض کنید به ازای $x\neq ۲$، $f(x)=۱/(x-۲)^۳$. در این صورت،

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=۰$$

برای تعیین صحت $\lim_{x\to\infty}f(x)=۰$، دنباله‌ای مانند (x_n) را در نظر بگیرید به طوری که $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$. نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=۰$. این مطلب نشان خواهد داد که مثلاً، برای $S=(۲\,,\,\infty)$، $\lim_{x\to\infty^S}f(x)=۰$. تمرین ۱۱.۹ و قضیهٔ ۹.۹ نشان می‌دهد که $\lim_{n\to\infty}(x_n-۲)^۳=+\infty$، و سپس، قضیهٔ ۱۰.۹ نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n-۲)^{-۳}=۰\,. \qquad (۱)$$

یک برهان مستقیم برای (۱) چنین است. فرض کنید $\varepsilon>۰$. برای nهای بزرگ لازم است داشته باشیم $|x_n-۲|^{-۳}<\varepsilon$ یا $|x_n-۲|^۳>\varepsilon^{-۱}$ یا $|x_n-۲|>\varepsilon^{-۱/۳}$. نابرابری آخر در صورتی که $x_n>\varepsilon^{-۱/۳}+۲$، برقرار است. چون $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$، Nای موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که $x_n > \varepsilon^{-۱/۳} + ۲$.

با عکس کردن مراحل جبری بالا، در می‌یابیم که

$n > N$ مستلزم آن است که $|x_n - ۲|^{-۳} < \varepsilon$.

این حکم، (۱) را ثابت می‌کند.

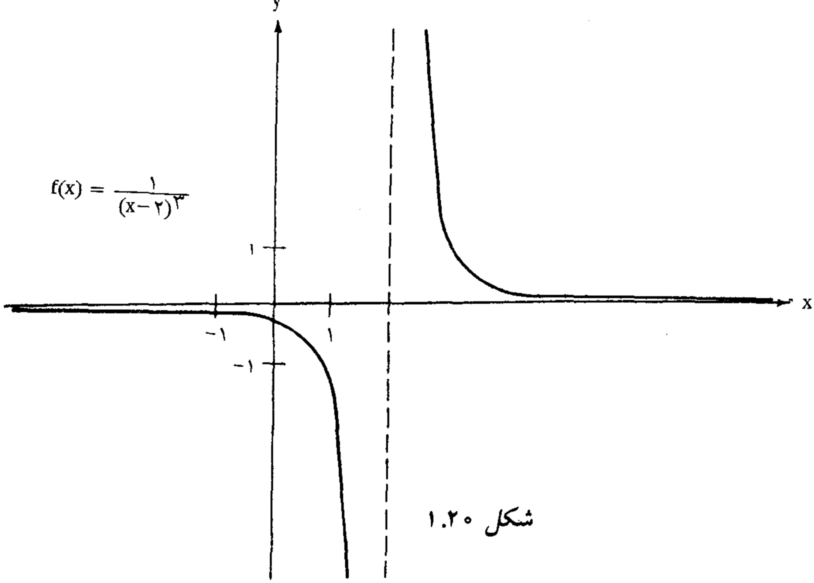
با استدلالهای مشابهی ثابت می‌شود که $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ۰$ و $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = +\infty$. برای اثبات $\lim_{x\to ۲^-} f(x) = -\infty$ ، دنباله‌ای مانند (x_n) را در نظر بگیرید به طوری که به ازای هر n ، $x_n < ۲$ و $\lim_{x\to\infty} x_n = ۲$. در این صورت، به ازای هر n ، $۲ - x_n > ۰$ و $\lim_{n\to\infty}(۲-x_n) = ۰$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۴.۹، $\lim_{n\to\infty} (۲ - x_n)^۳ = ۰$ ، و قضیهٔ ۱۰.۹ مستلزم آن است که $\lim_{n\to\infty} (۲ - x_n)^۳ = +\infty$. از اینجا نتیجه می‌شود [تمرین ۱۰.۹ (ب)] که

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n - ۲)^{-۳} = -\infty . \qquad (۲)$$

این نتیجه، ثابت می‌کند که به ازای $S = (-\infty , ۲)$ ، $\lim_{x\to ۲^S} f(x) = -\infty$ ، و لذا، $\lim_{x\to ۲^-} f(x) = -\infty$. البته، می‌توان برهان مستقیمی نیز برای (۲) ارائه داد.

حدهای بحث شده در بالا در شکل ۱.۲۰ ، به ثبوت رسیده است.

حدهای گوناگون تعریف شده در تعریف ۳.۲۰ را مجدداً در پایان این بخش مورد بحث قرار خواهیم داد. ابتدا، تعدادی قضیهٔ حدی را که ماهیت کلی قابل ملاحظه‌ای دارند، ثابت می‌کنیم.



شکل ۱.۲۰

۴.۲۰ قضیه. فرض کنید f_1 و f_2 تابعهایی باشند که برای آنها حدهای $L_1 = \lim_{x\to a}{}^{s} f_1(x)$ و $L_2 = \lim_{x\to a}{}^{s} f_2(x)$ موجود و متناهی‌اند. در این صورت،

(i) $\lim_{x\to a}{}^{s} (f_1 + f_2)(x)$ موجود و برابر $L_1 + L_2$ است؛

(ii) $\lim_{x\to a}{}^{s} (f_1 f_2)(x)$ موجود و برابر $L_1 L_2$ است؛

(iii) $\lim_{x\to a}{}^{s} (f_1/f_2)(x)$ موجود و برابر L_1/L_2 است مشروط بر آنکه $L_2 \neq 0$ و برای $x \in S$ ، $f_2(x) \neq 0$.

برهان. فرض قضیه، مستلزم آن است که f_1 و f_2 هر دو بر S تعریف شده‌اند و اینکه a حد دنباله‌ای در S است. آشکار است که تابعهای $f_1 + f_2$ و $f_1 f_2$ بر S تعریف شده‌اند و بنابراین، f_1/f_2 نیز چنین است، در صورتی که برای $x \in S$، $f_2(x) \neq 0$.

دنباله‌ای مانند (x_n) در S را با حد a در نظر می‌گیریم. بنابر فرض داریم $L_1 = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ و $L_2 = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n)$. اما، قضیه‌های ۳.۹ و ۴.۹ نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} (f_1 + f_2)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) + \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = L_1 + L_2$$

و

$$\lim_{n\to\infty} (f_1 f_2)(x_n) = [\lim f_1(x_n)] \cdot [\lim f_2(x_n)] = L_1 L_2$$

در نتیجه (۲) ی تعریف ۱.۲۰ برای $f_1 + f_2$ و $f_1 f_2$ برقرار است. بنابراین، (i) و (ii) برقرارند. به طریق مشابه (iii) با کاربردی از قضیه ۶.۹ حاصل می‌شود. □

برخی صورتهای قضیهٔ ۴.۲۰، مربوط به حدهای نامتناهی، در تمرین ۲۰.۲۰ ظاهر می‌شوند. قضیهٔ بعدی کمتر از آنچه از آن انتظار می‌رود کلیت دارد؛ مثال ۷ نشان می‌دهد که چرا چنین است.

۵.۲۰ قضیه. فرض کنید f تابعی باشد که برای آن حد $L = \lim_{x\to a}{}^{s} f(x)$ موجود و متناهی است. اگر g تابعی باشد که بر $\{f(x) : x \in S\} \cup \{L\}$ تعریف شده‌باشد به طوری که در L پیوسته است، آنگاه $\lim_{x\to a}{}^{s} g\circ f(x)$ موجود و برابر $g(L)$ است.

برهان. توجه کنید که $g\circ f$، بنابر فرض S تعریف شده‌است. دنباله‌ای مانند (x_n) در S با حد a را در

نظر بگیرید. در این صورت، داریم $L = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. چون g در L پیوسته است، نتیجه می‌شود که

$$g(L) = \lim_{n\to\infty} g(f(x)) = \lim_{n\to\infty} gof(x_n) .$$

پس، $\lim_{x\to a^s} gof(x) = g(L)$. □

مثال ۵. اگر f تابعی باشد که برای آن حد $L = \lim_{x\to a} f(x)$ موجود و متناهی باشد، آنگاه داریم $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$. این نتیجه بی‌درنگ از قضیهٔ ۵.۲۰ با $g(x) = |x|$، حاصل می‌شود. به همین نحو داریم، $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^L$ مشروط بر آنکه این حکم را که $g(x) = e^x$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است، بپذیریم.

مثال ۶. فرض کنید که f تابعی باشد که برای آن $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۰$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pi/۲$. در این صورت، داریم $\lim_{x\to ۰^+} e^{f(x)} = e^{۰} = ۱$، $\lim_{x\to\infty} e^{f(x)} = e^{\pi/۲}$،

$$\lim_{x\to\infty} \sin(f(x)) = \sin(\pi/۲) = ۱ \ , \ \lim_{x\to ۰^+} \sin(f(x)) = \sin(۰) = ۰ \ .$$

مثال ۷. با ارائه مثالی نشان می‌دهیم که پیوستگی g در قضیهٔ ۵.۲۰، ضروری است. صریحاً مثالهایی از تابعهای f و g ارائه می‌دهیم به گونه‌ای که $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$, $\lim_{x\to ۱} g(x) = ۴$ و در حالی که $\lim_{x\to ۰} gof(x)$ موجود نیست. شاید انتظار داشته باشیم که این حد موجود و برابر ۴ است. اما در این مثال، برای xهای به طور دلخواه کوچک، $f(x)$ برابر ۱ می‌شود. در حالی که $g(۱)\neq ۴$. تابعهای f و g چنین تعریف می‌شوند: برای $x \neq ۰$، $f(x) = ۱ + x\sin(\pi/x)$؛ برای $x \neq ۱$ $g(x) = ۴$، و $g(۱) = -۴$. واضح است که $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$ $\lim_{x\to ۱} g(x) = ۴$. فرض کنید که برای $n \in \mathbf{N}$، $x_n = ۲/n$. در این صورت، $f(x_n) = ۱ + (۲/n)\sin(n\pi/۲)$؛ بنابراین، برای nهای زوج $f(x_n) = ۱$ و برای nهای فرد $f(x_n) \neq ۱$. در نتیجه، برای nهای زوج $gof(x_n) = -۴$ و برای nهای فرد $gof(x_n) = ۴$. چون $\lim_{n\to\infty} x_n = ۰$، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to ۰} gof(x)$ نمی‌تواند موجود باشد.

مانند قضیهٔ ۲.۱۷، می‌توان حدهای تعریف شده در تعریفهای ۱.۲۰ و ۳.۲۰ را به گونه‌ای طرح ریزی کرد که از دنباله‌ها دوری جست. ابتدا، یک نتیجهٔ نوعی از این قبیل را بیان و ثابت

می‌کنیم، بعداً به دنبال نتیجهٔ ۸.۲۰، طرحی کلی را بدون برهان ارائه می‌دهیم.

۶.۲۰ قضیه. فرض کنید f تابعی باشد که بر زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ مانند S تعریف شده‌باشد، فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد که حد دنباله‌ای در S است، و فرض کنید L یک عدد حقیقی باشد. در این صورت، $\lim_{x\to a}{}^{s} f(x) = L$ اگر و تنها اگر

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

(۱) $x \in S$ و $|x - a| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

برهان. از برهان قضیهٔ ۲.۱۷ تقلید می‌کنیم. فرض کنید (۱) برقرار باشد و دنباله‌ای مانند (x_n) در S را در نظر بگیرید به طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. برای اینکه نشان دهیم $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$، $\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. بنابر (۱)، $\delta > 0$ ای موجود است به طوری که

$x \in S$ و $|x - a| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

چون $\lim_{n\to\infty} x_n = a$، N ای موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|x_n - a| < \delta$. چون برای هر n، $x_n \in S$، نتیجه می‌گیریم که

$n > N$ مستلزم آن است که $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

اینک، فرض کنید که $\lim_{x\to a}{}^{s} f(x) = L$، ولی (۱) برقرار نباشد. در این صورت به ازای $\varepsilon > 0$ ای استلزام «$x \in S$ و $|x - a| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$» به ازای هر $\delta > 0$ ای نادرست است. لذا، برای هر $n \in \mathbf{N}$، $x_n \in S$ ای موجود است به طوری که $|x_n - a| < 1/n$، حال آنکه $|f(x_n) - L| \ge \varepsilon$. در این صورت، (x_n) دنباله‌ای در S با حد a است که برای آن، $\lim_{n\to\infty}{}^{s} f(x_n) = L$ نادرست است. در نتیجه برقرار بودن $\lim_{x\to a}{}^{s} f(x_n) = L$ نیز باید نادرست باشد. □

۷.۲۰ نتیجه. فرض کنید f تابعی باشد که به ازای مجموعهٔ بازی مانند J شامل a بر $J\backslash\{a\}$ تعریف شده است و فرض کنید که L عددی حقیقی باشد. در این صورت، $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

(۱) $0 < |x - a| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

۸.۲۰ نتیجه. فرض کنید f تابعی باشد که بر مجموعهٔ باز $(a\ ,\ b)$ تعریف شده است. فرض کنید L عددی حقیقی باشد. در این صورت، $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ اگر و تنها اگر

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

(۱) $0 < x < a + \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

۹.۲۰ بحث. اینک، $\lim_{x\to s} f(x) = L$ را در نظر می‌گیریم که در آن، L می‌تواند عددی متناهی یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد و s نمادی مانند a، a^+، a^-، ∞ یا $-\infty$ است [در اینجا، $a \in \mathbf{R}$]. توجه کنید که در اینجا پانزده [$= 5 \times 3$] حالت مختلف از حدها را داریم. نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to s} f(x) = L$ اگر و تنها اگر

به ازای هر ــــــــ عددی مانند ــــــــ موجود است به طوری که

ــــــــ مستلزم آن است که ــــــــ

برای حدهای متناهی L، اولین و آخرین جاهای خالی با «$\varepsilon > 0$» و «$|f(x) - L| < \varepsilon$» پر می‌شوند. برای $L = +\infty$، اولین و آخرین جاهای خالی با «$M > 0$» و «$f(x) > M$» پر می‌شوند، در حالی که برای $L = -\infty$، جاهای خالی با «$M > 0$» و «$f(x) < M$» پر می‌شوند. وقتی $\lim_{x\to a} f(x)$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت، برای بازهٔ بازی مانند J شامل a، f بر $J\setminus\{a\}$ تعریف شده است، و دومین و سومین جاهای خالی با «$\delta > 0$» و «$0 < |x - a| < \delta$» پر می‌شوند. برای $\lim_{x\to a^+} f(x)$، قید می‌کنیم که f بر بازه‌ای مانند $(a\ ,\ b)$ تعریف شده‌باشد و دومین و سومین جاهای خالی با $\delta > 0$ و $a < x < a + \delta$ پر می‌شوند. برای $\lim_{x\to a^-} f(x)$ قید می‌کنیم که f بر بازه‌ای مانند $(c\ ,\ a)$ تعریف شده است و دومین و سومین جاهای خالی با «$\delta > 0$» و «$a - \delta < x < a$» پر می‌شوند. برای $\lim_{x\to\infty} f(x)$ قید می‌کنیم که f بر بازه‌ای مانند $(c\ ,\ \infty)$ تعریف شده است و دومین و سومین جاهای خالی با «$\alpha < \infty$» و «$\alpha < x$» پر می‌شوند. تذکر مشابهی برای $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ صادق است.

احکام بالا با L متناهی و s برابر با a یا a^+ در نتیجه‌های ۷.۲۰ و ۸.۲۰ گنجانیده شده‌اند.

۱۰.۲۰ قضیه. فرض کنید f تابعی باشد که برای بازهٔ بازی مانند J شامل a بر $J\setminus\{a\}$ تعریف شده‌باشد. در این صورت، $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود است اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)$ هر دو موجود و برابر باشند، که در این صورت هر سه حد برابرند.

برهان. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و L عددی متناهی باشد. در این صورت، (۱) از نتیجهٔ ۷.۲۰ برقرار است و لذا (۱) نتیجهٔ ۸.۲۰ آشکارا برقرار می‌شود. در نتیجه، داریم $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$؛ به همین نحو، $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

اینک، فرض کنید $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ که در آن، L متناهی است. $\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم؛ نتیجهٔ ۸.۲۰ و مشابه آن را برای a^- به کار می‌بریم تا اعداد $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ را به دست آوریم به طوری که

$a < x < a + \delta_1$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$

و

$a - \delta_2 < x < a$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

اگر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$، آنگاه

$0 < |x - a| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$،

در نتیجه، بنابر نتیجهٔ ۷.۲۰، $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

در صورتی که حدهای L نامتناهی باشند، استدلالهای مشابهی را می‌توان به کاربرد. مثلاً، فرض کنید که $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $M > 0$ را در نظر بگیرید. عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

(۱) $0 < |x - a| < \delta$ مستلزم آن است که $f(x) > M$.

سپس، بدیهی است که

(۲) $a < x < a + \delta$ مستلزم آن است که $f(x) > M$،

و

(۳) $a - \delta < x < a$ مستلزم آن است که $f(x) > M$،

نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.

به عنوان آخرین مثال، فرض کنید که $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$. به ازای هر $M > 0$، عددی مانند $\delta_1 > 0$ موجود است به طوری که (۲) برقرار است و عددی مانند $\delta_2 > 0$ موجود است که (۳) برقرار است. در این صورت، با فرض $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$، (۱) برقرار می‌گردد. نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. □

۱۱.۲۰ **تذکر.** توجه کنید که $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ شباهت زیادی به حد سمت راست $\lim_{x\to a^+} f(x)$

دارد. به عنوان مثال، اگر L متناهی باشد آنگاه $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ اگر و تنها اگر

به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\alpha > a$ موجود است به طوری که

(۱) $a < x < \alpha$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

زیرا، $\alpha > a$ اگر و تنها اگر به ازای $\delta > ۰$، $\alpha = a + \delta$؛ نگاه کنید به نتیجهٔ ۸.۲۰. اگر در (۱) قرار دهیم $a = -\infty$، شرط ۹.۲۰ (۱) را به دست می‌آوریم که معادل $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ است.

به همان روش حدهای $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)$ برابر L خواهد شد [L متناهی است] اگر و تنها اگر

به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\alpha < a$ موجود است به طوری که

(۲) $\alpha < x < a$ مستلزم آن است که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

بدیهی است که اگر L نامتناهی باشد تغییراتی لازم است.

تمرینها

۱.۲۰. تابع $f(x) = x/|x|$ را رسم کنید. با تفتیش حدهای $\lim_{x\to\infty} f(x)$، $\lim_{x\to ۰^+} f(x)$، $\lim_{x\to ۰^-} f(x)$، $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to ۰} f(x)$ را در صورت وجود تعیین کنید. همچنین، مشخص کنید که چه موقع حدها موجود نیستند.

۲.۲۰. تمرین ۱.۲۰ را برای $f(x) = x^۳/|x|$ تکرار کنید.

۳.۲۰. تمرین ۱.۲۰ را برای $f(x) = (\sin x)/x$ تکرار کنید. نگاه کنید به مثال ۹ از بخش ۱۹.

۴.۲۰. تمرین ۱.۲۰ را برای $f(x) = x\sin(۱/x)$ تکرار کنید.

۵.۲۰. حکمهای حدی تمرین ۱.۲۰ را ثابت کنید.

۶.۲۰. حکمهای حدی تمرین ۲.۲۰ را ثابت کنید.

۷.۲۰. حکمهای حدی تمرین ۳.۲۰ را ثابت کنید.

۸.۲۰. حکمهای حدی تمرین ۴.۲۰ را ثابت کنید.

۹.۲۰. تمرین ۱.۲۰ را برای $f(x) = (۱ - x^۲)/x$ تکرار کنید.

۱۰.۲۰. حکمهای حدی تمرین ۹.۲۰ را ثابت کنید.

۱۱.۲۰. حدهای زیر را پیدا کنید.

(الف) $\lim_{x\to a} [(x^2 - a^2)/(x - a)]$

(ب) $\lim_{x\to b} [(\sqrt{x} - \sqrt{b})/(x - b)]$، $b > 0$

(پ) $\lim_{x\to a} [(x^3 - a^3)/(x - a)]$

راهنمایی: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

۱۲.۲۰. (الف) تابع $f(x) = (x - 1)^{-1}(x - 2)^{-2}$ را رسم کنید.

(ب) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$، $\lim_{x\to 2^-} f(x)$، $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ را تعیین کنید.

(پ) $\lim_{x\to 2} f(x)$ و $\lim_{x\to 1} f(x)$ را در صورت وجود معین کنید.

۱۳.۲۰. ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 2$، آنگاه

(الف) $\lim_{x\to a} [3f(x) + g(x)^2] = 13$،

(ب) $\lim_{x\to a} (1/g(x)) = 1/2$،

(پ) $\lim_{x\to a} \sqrt{3f(x) + 8g(x)} = 5$.

۱۴.۲۰. ثابت کنید که $\lim_{x\to 0^+} (1/x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^-} (1/x) = -\infty$.

۱۵.۲۰. برای تابع f در مثال ۴، ثابت کنید $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

۱۶.۲۰. فرض کنید $L_1 = \lim_{x\to a^+} f_1(x)$ و $L_2 = \lim_{x\to a^+} f_2(x)$ موجود باشد.

(الف) نشان دهید که اگر به ازای هر x در بازه‌ای مانند (a, b)، $f_1(x) \le f_2(x)$، آنگاه $L_1 \le L_2$.

(ب) فرض کنید که این واقعیت را داشته باشیم که به ازای هر x در بازه‌ای مانند (a, b)، $f_1(x) < f_2(x)$. آیا می‌توان نتیجه گرفت که $L_1 < L_2$.

۱۷.۲۰. نشان دهید که اگر $\lim_{x\to a^+} f_1(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ و اگر به ازای هر x در بازه‌ای مانند (a, b)، $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x)$، آنگاه $\lim_{x\to a^+} f_2(x) = L$. هشدار: این حکم مستقیماً از تمرین ۱۶.۲۰ (الف) نتیجه نمی‌شود، زیرا فرض نکرده‌ایم که $\lim_{x\to a^+} f_2(x)$ موجود است؛ این مطلب باید ثابت شود.

۱۸.۲۰. فرض کنید به ازای $x \ne 0$، $f(x) = [\sqrt{1 + 3x^2} - 1]/x^2$. نشان دهید که $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود است و مقدار آن را تعیین کنید. همه ادعاها را توجیه کنید.

۱۹.۲۰. حدهای تعریف شده در تعریف ۳.۲۰ به انتخاب مجموعهٔ S بستگی ندارند. به عنوان یک مثال، $a < b_1 < b_2$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که f بر (a, b_2) تعریف شده

است. نشان دهید که اگر حد $\lim_{x\to a^s} f(x)$ یا برای $S = (a\ ,\ b_1)$ یا $S = (a\ ,\ b_2)$ موجود باشد، آنگاه حد برای انتخاب دیگر S نیز موجود است و این حدها یکسان‌اند. مقدار مشترک آنها همان است که به عنوان $\lim_{x\to a^+} f(x)$ می‌نویسیم.

۲۰.۲۰. فرض کنید f_1 و f_2 تابعهایی باشند به طوری که $\lim_{x\to a^s} f_1(x) = +\infty$ و حد $L_2 = \lim_{x\to a^s} f_2(x)$ موجود باشد.

(الف) ثابت کنید که $\lim_{x\to a^s} (f_1 + f_2)(x) = +\infty$ در صورتی که $L_2 \neq -\infty$. راهنمایی: از تمرین ۱۱.۹ استفاده کنید.

(ب) ثابت کنید که $\lim_{x\to a^s} (f_1 f_2)(x) = +\infty$ در صورتی که $0 < L_2 \leq +\infty$. راهنمایی: قضیهٔ ۹.۹ را به کار ببرید.

(پ) ثابت کنید که $\lim_{x\to a^s} (f_1 f_2)(x) = -\infty$ در صورتی که $-\infty \leq L_2 < 0$.

(ت) اگر $L_2 = 0$، در مورد $\lim_{x\to a^s} (f_1 f_2)(x)$ چه می‌توانید بگویید؟

بخش ۲۱*. مطالب بیشتری دربارهٔ فضاهای متریک: پیوستگی

در این بخش و بخش بعدی، آشنایی با مفاهیم فضاهای متریک را که در بخش ۱۳ آغاز کردیم، ادامه می‌دهیم. بحثهای جامعتر را می‌توان در [۱۳]، [۱۷]، و [۱۹] یافت. به ویژه، در این آشنایی مختصر ما از موضوع فنی و تا حدی گیج کنندهٔ توپولوژیهای مربوط که در بحثی جامعتر نمی‌توان و نباید از آنها اجتناب کرد، اجتناب می‌کنیم.

ما به تابعهایی بین فضاهای متریک $(S\ ,\ d)$ و $(S^*\ ,\ d^*)$ علاقه مندیم و خواهیم نوشت «$f: S \longrightarrow S^*$» که مشخص می‌کند $\mathrm{dom}(f) = S$ و اینکه تابع f مقادیر خود را در S^* اختیار می‌کند؛ یعنی، به ازای هر $s \in S$، $f(s) \in S^*$.

۱.۲۱ تعریف. فضاهای متریک $(S\ ,\ d)$ و $(S^*\ ,\ d^*)$ را در نظر می‌گیریم. تابعی مانند $f: S \to S^*$ در s_0 از S پیوسته است در صورتی که

به ازای هر $\epsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

(۱) $d(s, s_\circ) < \delta$ مستلزم آن است که $d^*(f(s), f(s_\circ)) < \varepsilon$.

گوییم f بر زیر مجموعهٔ E از S پیوسته است در صورتی که f در هر نقطه E پیوسته باشد. تابع f بر زیر مجموعهٔ E از S پیوستهٔ یکنواخت است در صورتی که

به ازای هر $\varepsilon > \circ$، عددی مانند $\delta > \circ$ موجود است به طوری که

(۲) $s, t \in S$ و $d(s, t) < \delta$ مستلزم آن است که $d^*(f(s), f(t)) < \varepsilon$.

مثال ۱. فرض کنید $S = S^* = \mathbf{R}$ و $d = d^* = \text{dist}$، که در آن، مطابق معمول $\text{dist}(a, b) = |a - b|$. تعریف پیوستگی که در بالا ارائه شد، با توجه به قضیهٔ ۲.۱۷، با همان تعریف بخش ۱۷ معادل است. تعریف پیوستگی یکنواخت، معادل همان تعریفی است که در ۱.۱۹ آمده است.

مثال ۲. در حسابان چند متغیره، تابعهای حقیقی مقدار با حوزهٔ تعریف $\mathbf{R}^۲$ یا $\mathbf{R}^۳$، یا حتی $\mathbf{R}^k$، به طور گسترده‌ای مطالعه می‌شوند. این موضوع متناظر است با حالت $S = \mathbf{R}^k$،

$$d(x, y) = \Big[\sum_{j=۱}^{k} (x_j - y_j)^۲\Big]^{\frac{۱}{۲}} ,$$

$S^* = \mathbf{R}$ و $d^* = \text{dist}$. ما این نظریه را بسط نخواهیم داد. امّا به طور کلی، مواردی از تابعهای پیوسته را ذکر خواهیم کرد. چند مثال در $\mathbf{R}^۲$ عبارت‌اند از $f(x_۱, x_۲) = x_۱^۲ + x_۲^۲$، $f(x_۱, x_۲) = x_۱x_۲\sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + ۱}$، $f(x_۱, x_۲) = \cos(x_۱ - x_۲^۵)$. چند مثال در $\mathbf{R}^۳$ عبارت‌اند از $g(x_۱, x_۲, x_۳) = x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲$، $g(x_۱, x_۲, x_۳) = x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + x_۲x_۳$،

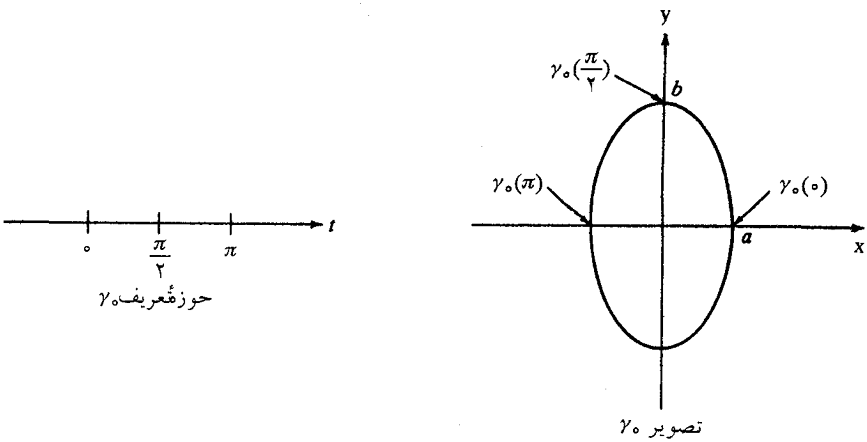
$$g(x_۱, x_۲, x_۳) = e^{x_۱ + x_۲} \cdot \log(x_۳^۲ + ۲) .$$

مثال ۳. تابعهایی با حوزهٔ تعریف $\mathbf{R}$ و مقادیر در $\mathbf{R}^۲$ یا $\mathbf{R}^۳$ یا به طور کلی در $\mathbf{R}^k$ نیز در حسابان چند متغیره مطالعه می‌شوند. این موضوع متناظر است با حالت $S = \mathbf{R}$، $d = \text{dist}$، $S^* = \mathbf{R}^k$ و

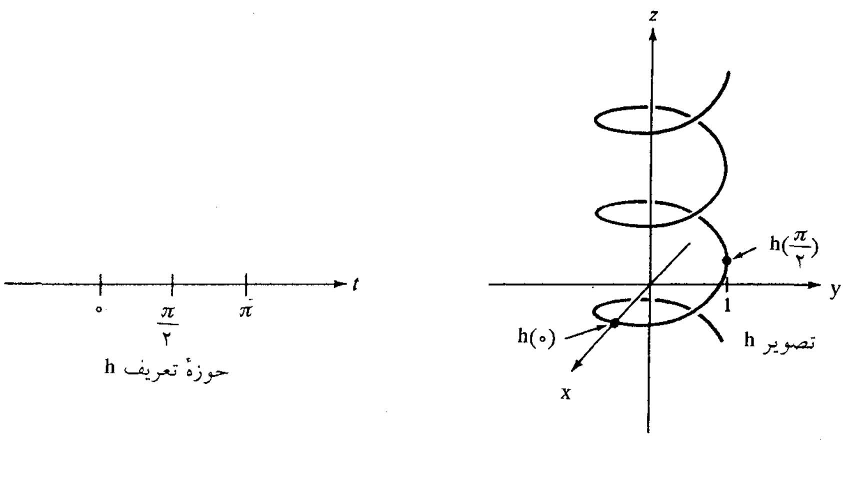
$$d^*(x, y) = \Big[\sum_{j=۱}^{k} (x_j - y_j)^۲\Big]^{۱/۲} .$$

تصویرهای چنین تابعهایی را غیر ریاضیدانان اغلب «خم» یا «مسیر» می‌نامند. برای تمایز یک

تابع از تصویر آن، ما از اصطلاحات زیر استفاده خواهیم کرد. فرض کنید که $\gamma : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^k$ پیوسته باشد. در این صورت γ را یک مسیر می‌نامیم؛ و تصویر آن، $\gamma(\mathbf{R})$ در $\mathbf{R}^k$ یک خم نامیده می‌شود. ما باز هم از همین اصطلاح، در صورتی که γ بر زیر بازه‌ای از $\mathbf{R}$ مانند $[a , b]$ تعریف شده و پیوسته باشد، استفاده خواهیم کرد. نگاه کنید به تمرین ۷.۲۱.



شکل ۱.۲۱



شکل ۲.۲۱

به عنوان مثال، γ را که در آن $\gamma(t) = (\cos t , \sin t)$ در نظر بگیرید. این تابع $\mathbf{R}$ را به روی دایره‌ای در $\mathbf{R}^2$، حول $(0 , 0)$ با شعاع ۱ می‌نگارد. به طور کلی، $\gamma_0(t) = (a\cos t , b\sin t)$ مجموعهٔ $\mathbf{R}$ را به روی بیضی به معادلهٔ $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ می‌نگارد؛ نگاه کنید به شکل ۱.۲۱.

نمودار یک تابع پیوسته معمولی مانند $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ به نظر شبیه یک خم است و در واقع چنین هم هست! این نمودار، خم مسیر $\gamma(t) = (t , f(t))$ است.

خمها در $\mathbf{R}^۳$ ممکن است کاملاً عجیب و غریب باشند. به عنوان مثال، خم مسیر $h(t) = (\cos t , \sin t , t/۴)$ یک پیچ است. شکل ۲.۲۱ را ببینید.

ثابت نکردیم که هر کدام از مسیرهای $\mathbf{R}$ پیوسته‌اند، زیرا، می‌توانیم نتیجه کلی زیر را ثابت کنیم.

۲.۲۱ قضیه. اگر $f_۱ , f_۲ , \ldots , f_k$ تابعهایی پیوستهٔ حقیقی مقدار بر $\mathbf{R}$ باشند، آنگاه

$$\gamma(t) = (f_۱(t) , f_۲(t) , \ldots , f_k(t))$$

یک مسیر بر $\mathbf{R}^k$ تعریف می‌کند.

برهان. لازم است نشان دهیم که γ پیوسته است. فرمول (۱) در برهان لم ۳.۱۳ و تمرین ۲.۱۳ را به خاطر آورید:

$$d^*(x , y) \le \sqrt{k} \max\{|x_j - y_j| : j = ۱ , ۲ , \ldots , k\} . \qquad (۱)$$

$t_۰ \in \mathbf{R}$ و $\varepsilon > ۰$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $j = ۱ , ۲ , \ldots , k$، عددی مانند $\delta_j > ۰$ موجود است به طوری که

$$|t - t_۰| < \delta_j \text{ مستلزم آن است که } |f_j(t) - f_j(t_۰)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} .$$

برای $\delta = \min\{\delta_۱ , \delta_۲ , \ldots , \delta_k\}$ و $|t - t_۰| < \delta$، داریم

$$\max\{|f_j(t) - f_j(t_۰)| : j = ۱ , ۲ , \ldots , k\} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}},$$

و لذا، بنابر (۱) داریم، $d^*(\gamma(t) , \gamma(t_۰)) < \varepsilon$. در نتیجه، γ در $t_۰$ پیوسته است. □

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که پیوستگی یک خاصیت توپولوژیکی است؛ بحث ۷.۱۳ را ببینید.

۳.۲۱ قضیه. فضاهای متریک (S , d) و (S^* , d^*) را در نظر بگیرید. تابعی مانند $f: S \longrightarrow S^*$ بر S پیوسته است اگر و تنها اگر

به ازای هر زیر مجموعهٔ باز U از S^*

(۱) $f^{-1}(U)$ زیر مجموعهٔ بازی از S است.

یادآوری می‌کنیم که $f^{-1}(U) = \{s \in S: f(s) \in U\}$.

برهان. فرض کنید که f بر S پیوسته باشد. فرض کنید U زیر مجموعهٔ بازی از S^* باشد و $s_\circ \in f^{-1}(U)$ را در نظر می‌گیریم. لازم است نشان دهیم که $s_\circ$ درون $f^{-1}(U)$ است. چون $f(s_\circ) \in U$ و U باز است، به ازای $\varepsilon > \circ$ ای داریم

$$\{s^* \in S^* : d^*(s^*, f(s_\circ)) < \varepsilon\} \subseteq U . \tag{۲}$$

چون f در $s_\circ$ پیوسته است، عددی مانند $\delta > \circ$ موجود است به طوری که

(۳) $d(s, s_\circ) < \delta$ مستلزم آن است که $d^*(f(s), f(s_\circ)) < \varepsilon$.

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $d(s, s_\circ) < \delta$ مستلزم آن است که $f(s) \in U$، پس $s \in f^{-1}(U)$؛ یعنی،

$$\{s \in S : d(s, s_\circ) < \delta\} \subseteq f^{-1}(U) .$$

بنابراین، $s_\circ$ درون $f^{-1}(U)$ است.

به عکس، فرض کنید که (۱) برقرار باشد و $s_\circ \in S$، و $\varepsilon > \circ$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت، $U = \{s^* \in S^* : d^*(s^*, f(s_\circ)) < \varepsilon\}$ در S^* باز است و لذا، $f^{-1}(U)$ در S باز است. چون $s_\circ \in f^{-1}(U)$، به ازای $\delta > \circ$، داریم

$$\{s \in S: d(s, s_\circ) < \delta\} \subseteq f^{-1}(U) .$$

نتیجه می‌شود که

$d(s, s_\circ) < \delta$ مستلزم آن است که $d^*(f(s), f(s_\circ)) < \varepsilon$.

در نتیجه، f در $s_\circ$ پیوسته است. □

پیوستگی در یک نقطه نیز یک خاصیت توپولوژیکی است؛ نگاه کنید به ۲.۲۱. پیوستگی یکنواخت نیز یک خاصیت توپولوژیکی است. امّا، اگر این موضوع را دقیق سازیم، به دستهٔ خاصی از توپولوژیها رهنمون خواهیم شد که به کمک اصطلاحات «یکنواختیها» حاصل می‌شوند.

نشان خواهیم داد که تابعهای پیوسته، دو خاصیت مهم توپولوژی را حفظ می‌کنند: فشردگی

و همبندی، که در بخش بعدی تعریف خواهند شد. قضیه و نتیجهٔ بعدی قدرت فشردگی را تشریح می‌کند.

۴.۲۱ قضیه. فضاهای متریک (S, d) و (S^*, d^*) و تابع پیوسته‌ای مانند $f: S \longrightarrow S^*$ را در نظر بگیرید. فرض کنید E زیر مجموعهٔ فشرده‌ای از S باشد. در این صورت،

(i) $f(E)$ زیر مجموعهٔ فشرده S^* است و

(ii) f بر E پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. برای اثبات (i) فرض کنید $\mathscr{U}$ پوشش بازی برای $f(E)$ باشد. به ازای هر $U \in \mathscr{U}$، $f^{-1}(U)$ در S باز است. به علاوه، $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ یک پوشش باز E است. بنابراین، U_1، U_2، ...، U_mای در $\mathscr{U}$ موجود است به طوری که

$$E \subseteq f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_m) .$$

در این صورت،

$$f(E) \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m ,$$

و لذا، $\{U_1 , U_2 , \ldots , U_m\}$ زیر پوشش متناهی مطلوبی از $\mathscr{U}$ برای $f(E)$ است. این، (i) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (ii)، فرض کنید $\varepsilon > 0$. برای هر $s \in E$، عددی مانند $\delta_s > 0$ [این δ به s بستگی دارد] موجود است به طوری که

(۱) $d(s , t) < \delta_s$ مستلزم آن است که $d^*\big(f(s) , f(t)\big) < \varepsilon/2$.

برای هر $s \in E$، فرض کنید $V_s = \{t \in S: d(s , t) < \frac{1}{2}\delta_s\}$. در این صورت، $\mathscr{V} = \{V_s: s \in E\}$ یک پوشش باز E است. از این رو، بنابر فشردگی، تعدادی متناهی نقطه مانند s_1، s_2، ..، s_n در E موجودند به طوری که

$$E \subseteq V_{s_1} \cup V_{s_2} \cup \ldots \cup V_{s_n} .$$

فرض کنید $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{s_1} , \delta_{s_2} , \ldots , \delta_{s_n}\}$. برهان را با نشان دادن اینکه

(۲) $s , t \in E$ و $d(s , t) < \delta$ مستلزم این است که $d^*\big(f(s) , f(t)\big) < \varepsilon$

کامل می‌کنیم. به ازای kای در $\{1 , 2 , \ldots , n\}$ داریم، $s \in V_{s_k}$؛ یعنی، $d(s , s_k) < \frac{1}{2}\delta_{s_k}$.

همچنین، داریم

$$d(t\,,s_k) \le d(t\,,s) + d(s\,,s_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{s_k} \le \delta_{s_k}$$

بنابراین، با دو بار به‌کاربردن (۱)، داریم

$$d^*(f(t)\,,f(s_k)) < \varepsilon/2\,,\ d^*(f(s)\,,f(s_k)) < \varepsilon/2\,.$$

پس، $d^*(f(s)\,,f(t)) < \varepsilon$ و این همان حکم مطلوب است. □

حکم (ii) در قضیهٔ ۴.۲۱، قضیهٔ ۲.۱۹ را تعمیم می‌دهد. نتیجهٔ بعدی را باید با قضیهٔ ۱.۱۸ مقایسه کرد.

۵.۲۱ نتیجه. فرض کنید f تابع پیوستهٔ حقیقی مقداری بر فضای متریک $(S\,,d)$ باشد. اگر E زیر مجموعه فشرده‌ای از S باشد، آنگاه

(i) f بر E کراندار است،

(ii) f ماکسیمم و مینیمم خود را در E می‌گیرد.

برهان. چون $f(E)$ در $\mathbf{R}$ فشرده است، بنابر قضیهٔ ۱۲.۱۳، $f(E)$ باید کراندار باشد. این، مستلزم (i) است.

چون $f(E)$ فشرده است، بنابر تمرین ۱۳.۱۳، شامل $\sup f(E)$ است. بنابراین، $s_0 \in E$ ای موجود است به طوری که $f(s_0) = \sup f(E)$. این موضوع حاکی از آن است که f مقدار ماکسیمم خود را در نقطهٔ s_0 بر E می‌گیرد. به همین نحو، f مینیمم خود را بر E می‌گیرد. □

مثال ۴. همهٔ تابعهای f در مثال ۲ بر هر زیر مجموعهٔ فشرده $\mathbf{R}^2$، یعنی بر هر مجموعهٔ بسته و کراندار $\mathbf{R}^2$، کراندارند. به همین نحو، همه تابعهای g در مثال ۲ بر هر مجموعهٔ بسته و کراندار در $\mathbf{R}^3$ کراندارند.

مثال ۵. فرض کنید γ مسیر دلخواهی در $\mathbf{R}^k$ باشد؛ نگاه کنید به مثال ۲. برای $-\infty<a<b<\infty$، تصویر $\gamma([a\,,b])$، بنابر قضیهٔ ۴.۲۱، در $\mathbf{R}^k$ بسته و کراندار است. توجه کنید که نتیجهٔ ۵.۲۱، در این حالت، صادق نیست. زیرا، S^* در $\mathbf{R}^k$ است نه در $\mathbf{R}$. همچنین، قضیهٔ ۴.۲۱ حاکی از آن است

که γ بر $[a , b]$ پیوستهٔ یکنواخت است. در نتیجه، اگر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

$$s , t \in [a , b] \text{ و } |s - t| < \delta \text{ مستلزم آن است که } d(\gamma(s) , \gamma(t)) < \varepsilon .$$

این نتیجه در حسابان چند متغیره، در موقع انتگرالگیری در طور مسیر γ، مفید است. با بحث ۳.۱۹ مقایسه کنید.

تمرینها

۱.۲۱. نشان دهید که اگر تابعهای f_1 ، f_2 ، ... ، f_k در قضیهٔ ۲.۲۱ پیوستهٔ یکنواخت باشند، آنگاه γ نیز چنین است.

۲.۲۱. $f: S \longrightarrow S^*$ را در نظر بگیرید که در آن، (S , d) و (S^* , d^*) فضاهای متریک‌اند. نشان دهید که f در $s_0 \in S$ پیوسته است اگر و تنها اگر

به ازای هر مجموعهٔ باز U در S^* که شامل $f(s_0)$ باشد، مجموعهٔ بازی مانند V در S شامل s_0 موجود است به طوری که $f(V) \subseteq U$.

۳.۲۱. فرض کنید (S , d) یک فضای متریک باشد و s_0 را در S اختیار کنید. نشان دهید که $f(s) = d(s , s_0)$ تابع پیوسته یکنواخت حقیقی مقداری را بر S تعریف می‌کند.

۴.۲۱. $f: S \longrightarrow R$ را در نظر بگیرید که در آن (S , d) یک فضای متریک است. نشان دهید که احکام ذیل معادل‌اند.

(i) f پیوسته است؛

(ii) به ازای هر $a < b$، $f^{-1}((a , b))$ در S باز است؛

(iii) به ازای هر $a < b$ ی گویا، $f^{-1}((a , b))$ در S باز است.

۵.۲۱. فرض کنید که E یک زیر مجموعهٔ نافشردهٔ $\mathbf{R}^k$ باشد.

(الف) نشان دهید که تابع پیوستهٔ یکنواخت حقیقی مقداری بر E موجود است. راهنمایی: یا E بیکران است، یا در غیر این صورت $\bar{E}$ شامل x_0 ای است که در E نیست. در حالت اخیر از $1/g$ استفاده کنید که در آن، $g(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x} , \mathbf{x}_0)$.

(ب) نشان دهید که تابع پیوستهٔ کراندار حقیقی مقداری بر E موجود است به طوری که

ماکسیمم خود را بر E نمی‌گیرد.

۶.۲۱. فرض کنید (S_1 , d_1)، (S_2 , d_2)، (S_3 , d_3) فضاهای متریک باشند. ثابت کنید که اگر $f: S_1 \longrightarrow S_2$ و $g: S_2 \longrightarrow S_3$ پیوسته باشند، آنگاه gof از S_1 به توی S_3 پیوسته است.
راهنمایی: استفاده از قضیهٔ ۳.۲۱ تا حدی آسانتر است تا استفاده از تعریف.

۷.۲۱. (الف) بررسی کنید که اگر (S , d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq S$، آنگاه (E , d) نیز یک فضای متریک است. به ویژه، اگر $E \subseteq \mathbf{R}$، آنگاه برای $a , b \in E$، $d(a , b) = |a - b|$ یک متریک بر E تعریف می‌کند.
(ب) تعریف پیوستگی را برای $\gamma : [a , b] \longrightarrow \mathbf{R}^k$ ارائه دهید.

۸.۲۱. فرض کنید (S , d) و (S^* , d^*) فضاهای متریک باشند. نشان دهید که اگر $f:S \longrightarrow S^*$ پیوستهٔ یکنواخت باشد و اگر (s_n) یک دنبالهٔ کوشی در S باشد، آنگاه $(f(s_n))$ یک دنبالهٔ کوشی در S^* است.

۹.۲۱. گوییم تابعی مانند f مجموعه‌ای مانند E را به روی مجموعهٔ F می‌نگارد، مشروط بر اینکه $f(E) = F$.
(الف) نشان دهید که تابعی پیوسته موجود است که مربع واحد

$$\{(x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1 , 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

را به روی $[0 , 1]$ می‌نگارد.
(ب) فکر می‌کنید که آیا تابع پیوسته‌ای موجود است به طوری که $[0 , 1]$ را به روی مربع واحد بنگارد؟

۱۰.۲۱. نشان دهید که تابعهای پیوسته‌ای موجودند که
(الف) $(0 , 1)$ را به روی $[0 , 1]$ می‌نگارند،
(ب) $(0 , 1)$ را به روی $\mathbf{R}$ می‌نگارد،
(پ) $[0 , 1] \cup [2 , 3]$ را به روی $[0 , 1]$ می‌نگارد.

۱۱.۲۱. نشان دهید که تابعهای پیوسته‌ای وجود ندارند که
(الف) $[0 , 1]$ را به روی $(0 , 1)$ بنگارد،
(ب) $[0 , 1]$ را به روی $\mathbf{R}$ بنگارد.

بخش ۲۲*. مطالب بیشتری دربارهٔ فضاهای متریک: همبندی

زیر مجموعه‌ای مانند E از $\mathbf{R}$ را که یک بازه نباشد، در نظر بگیرید. همان طور که در برهان نتیجهٔ ۳.۱۸ متذکر شدیم، خاصیت

y_1 و y_2 در E و $y_1 < y < y_2$ مستلزم آن است که $y \in E$

باید نادرست باشد. بنابراین، y_1 ، y_2 ، y ای در $\mathbf{R}$ موجودند به طوری که

$$y \notin E \ ، \ y_1 , y_2 \in E \ ، \ y_1 < y < y_2 . \qquad (*)$$

مجموعه E «همبند» نیست. زیرا، y مجموعهٔ E را به دو تکه تفکیک می‌کند. به بیان دیگر، اگر قرار دهیم $U_1 = (-\infty , y)$ و $U_2 = (y , \infty)$، آنگاه دو مجموعهٔ باز مجزا به دست می‌آوریم به طوری که

$$E \subseteq U_1 \cup U_2 \quad , \quad E \cap U_1 \neq \varnothing \quad , \quad E \cap U_2 \neq \varnothing .$$

نکته آخر را می‌توان به تعریف کلی مفیدی ارتقا داد.

۱.۲۲ تعریف. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از یک فضای متریک (S , d) باشد. مجموعهٔ E را ناهمبند خوانیم در صورتی که زیر مجموعه‌های باز مجزایی، مانند U_1 و U_2 در S موجود باشند به طوری که

$$E \subseteq U_1 \cup U_2 , \qquad (1)$$

$$E \cap U_1 \neq \varnothing \quad , \quad E \cap U_2 \neq \varnothing . \qquad (2)$$

مجموعه E را همبند خوانیم در صورتی که ناهمبند نباشد.

مثال ۱. همان طور که قبل از این تعریف متذکر شدیم، مجموعه‌هایی در $\mathbf{R}$ که بازه نباشند ناهمبندند. به عکس، بازه‌ها در $\mathbf{R}$ همبندند. برای اثبات این مطلب به کمک تعریف، بازه‌ای مانند I را در نظر گیرید و فرض کنید مجموعه‌های بازی مانند U_1 و U_2 ، به صورتی که در تعریف ۱.۲۲ توصیف شده‌اند، موجود باشند. انتخاب کنید: $a_1 \in I \cap U_1$ و $a_2 \in I \cap U_2$. می‌توانیم فرض کنیم که $a_1 < a_2$. فرض کنید

$$b = \sup [a_1 , a_2) \cap U_1 .$$

آشکار است که $a_1 < b \le a_2$. چون $b \in I$، باید داشته باشیم $b \in U_1$ یا $b \in U_2$، امّا نه هر دو. بنابراین، به ازای $\varepsilon > 0$ای خواهیم داشت یا

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subseteq U_1 \qquad (1)$$

یا

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subseteq U_2 \qquad (2)$$

در حالت (۱)، داریم $a_1 < b < a_2$ و $(b_1, a_2) \cap U_1 \neq \phi$، به طوری که b نمی‌تواند یک کران بالای $[a_1, a_2) \cap U_1$ باشد، چه رسد به اینکه کوچکترین کران بالای آن باشد. در حالت (۲)، داریم $\varnothing = U_1 \cap (b - \varepsilon, b]$. اگر b کران بالایی برای $[a_1, a_2) \cap U_1$ باشد، آنگاه $b - \varepsilon$ نیز یک کران بالاست و بنابراین، b نمی‌تواند کوچکترین کران بالای این مجموعه باشد. هر دو حالت، منجر به تناقض می‌شود. در نتیجه، I باید همبند باشد.

۲.۲۲ قضیه. فضاهای متریک (S, d) و (S^*, d^*) را در نظر بگیرید، و فرض کنید $f: S \longrightarrow S^*$ پیوسته باشد. اگر E زیر مجموعهٔ همبندی از S باشد، آنگاه $f(E)$ یک زیر مجموعهٔ همبند S^* است.

برهان. فرض کنید $f(E)$ در S^* همبند نباشد. در این صورت، مجموعه‌های باز مجزایی مانند V_1 و V_2 در S^* موجودند به طوری که

$$f(E) \subseteq V_1 \cup V_2 \qquad (1)$$

$$f(E) \cap V_2 \neq \varnothing \quad , \quad f(E) \cap V_1 \neq \varnothing .$$

فرض کنید $U_1 = f^{-1}(V_1)$ و $U_2 = f^{-1}(V_2)$. در این صورت، U_1 و U_2 مجموعه‌های باز مجزا در S اند و $E \subseteq U_1 \cup U_2$، $E \cap U_1 \neq \varnothing$، و $E \cap U_2 \neq \varnothing$. □

نتیجه بعدی، قضیهٔ ۲.۱۸ و نتیجهٔ آن را تعمیم می‌دهد.

۳.۲۲ نتیجه. فرض کنید f تابعی پیوسته و حقیقی مقدار بر فضای متریک (S, d) باشد. اگر E زیر مجموعهٔ همبندی از S باشد، آنگاه $f(E)$ یک بازه در $\mathbf{R}$ است. به ویژه، f دارای خاصیت مقدار میانی است.

مثال ۲. خمها همبندند؛ یعنی، اگر γ به صورتی که در مثال ۳ی بخش ۲۱ توصیف شده است،

مسیری در $\mathbf{R}^k$ و I زیر بازه‌ای از $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه تصویر $\gamma(I)$ در $\mathbf{R}^k$ همبند است.

۴.۲۲ تعریف. زیر مجموعه‌ای مانند E از فضای متریک $(S\ ,\ d)$ را همبند مسیری نامند در صورتی که به ازای هر دو زوج s و t از نقاط E، تابعی پیوسته مانند $\gamma:\ [a\ ,\ b] \longrightarrow E$ موجود باشد به طوری که $\gamma(a) = s$ و $\gamma(b) = t$. γ را یک مسیر می‌نامیم.

۵.۲۲ قضیه. اگر E در $(S\ ,\ d)$ همبند مسیری باشد، آنگاه E همبند است. [نادرستی عکس آن در تمرین ۴.۲۲ تشریح شده است.]

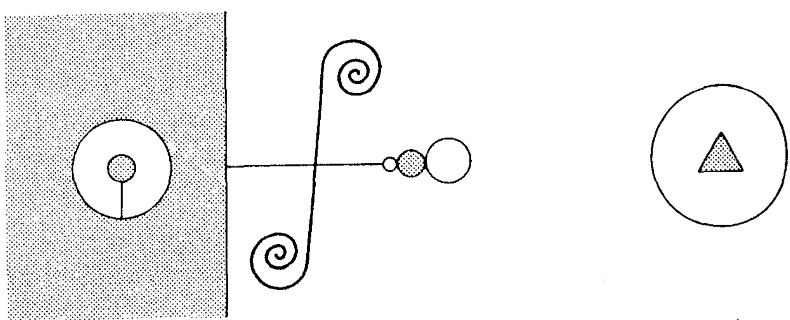
برهان. فرض کنید E به وسیلهٔ مجموعه‌های باز مجزای $U_۱$ و $U_۲$ ناهمبند شده باشد:

$$E \subseteq U_۱ \cup U_۲\ , \qquad (۱)$$

$$E \cap U_۲ \neq \varnothing\quad ,\ E \cap U_۱ \neq \varnothing \qquad (۲)$$

s را در $E \cap U_۱$ و t را در $E \cap U_۲$ اختیار کنید. فرض کنید $\gamma:\ [a\ ,\ b] \longrightarrow E$ یک مسیر باشد که در آن $\gamma(a) = s$ و $\gamma(b) = t$. فرض کنید $F = \gamma([a\ ,\ b])$. در این صورت، (۱) و (۲) با F به جای E برقرارند. بنابراین، F ناهمبند است. امّا، F بنابر قضیهٔ ۲.۲۲ باید همبند باشد.

شکل ۱.۲۲ ، یک مجموعهٔ همبند مسیری و مجموعه‌ای ناهمبند را در $\mathbf{R}^۲$ نمایش می‌دهد.



شکل ۱.۲۲

مثال ۳. بسیاری از مجموعه‌های مأنوس در $\mathbf{R}^k$ مانند گوی باز $\{x:\ d(x\ ,\ ۰) < r\}$ ، گوی بستهٔ

$\{\mathbf{x}: d(\mathbf{x}, ۰) \le r\}$ و مکعب

$$\{\mathbf{x}: \max\{|x_j|: j = ۱, ۲, \ldots, k\} \le ۱\}$$

محدب‌اند. زیر مجموعهٔ E از $\mathbf{R}^k$ محدب است در صورتی که

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ در E و $۰ < t < ۱$ مستلزم آن است که $t\mathbf{x} + (۱ - t)\mathbf{y} \in E$،

یعنی، هر وقت که E شامل دو نقطه باشد، شامل قطه خطی است که آن نقطه‌ها را به هم وصل می‌کند. شکل ۲.۲۲ را ببینید. مجموعه‌های محدب E در $\mathbf{R}^k$ همیشه همبند مسیری‌اند. این بدان دلیل است که $\gamma(t) = t\mathbf{x} + (۱ - t)\mathbf{y}$ مسیری مانند $\gamma: [۰, ۱] \longrightarrow E$ تعریف می‌کند به صورتی که $\gamma(۰) = \mathbf{y}$ و $\gamma(۱) = \mathbf{x}$. برای توجیه بیشتر، به هر کتابی دربارهٔ حسابان چند متغیره مراجعه کنید.

شکل ۲.۲۲

این بخش را با بحثی از برخی فضاهای متریک کاملاً متفاوت به پایان می‌بریم. در واقع، نقاط این فضاها، خود، تابعهایی هستند.

۶.۲۲ تعریف. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ باشد. فرض کنید $C(S)$ مجموعهٔ همهٔ تابعهای پیوستهٔ کراندار حقیقی مقدار بر S باشد و به ازای f و g در $C(S)$، فرض کنید،

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in S\}.$$

با این تعریف $C(S)$ به صورت یک فضای متریک در می‌آید [تمرین ۶.۲۲]. اینک، توجه کنید که دنباله‌ای مانند (f_n) در این فضای متریک به نقطه‌ای [تابعی !] مانند f همگراست در صورتی که $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = ۰$؛ یعنی

$$\lim_{n\to\infty} [\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in S\}] = ۰. \qquad (*)$$

به عبارت دیگر، به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند N، موجود است به طوری که

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ ، } n > N \text{ و } x \in S \text{ به ازای هر}$$

ما این مفهوم مهم را در فصل بعدی مورد مطالعه قرار خواهیم داد. اما، بدون اینکه از اصطلاحات فضاهای متریک استفاده کنیم. نگاه کنید به تعریف ۲.۲۴ و تذکر ۴.۲۴ که در آن (*) همگرایی یکنواخت نامیده می‌شود.

دنباله‌ای مانند (f_n) در $C(S)$ دقیقاً یک دنبالهٔ کوشی نسبت به متریک بالاست در صورتی که این دنباله به مفهومی که در تعریف ۳.۲۵ تعریف شد، به طور یکنواخت کوشی باشد. در قالب اصطلاحات فضاهای متریک، قضیهٔ ۴.۲۵ صرفاً بیانگر آن است که $C(S)$ یک فضای متریک کامل است.

تمرینها

۱.۲۲. نشان دهید که تابعهای پیوسته‌ای با خاصیتهای زیر موجود نیستند.

(الف) تابعی که $[۰ , ۱]$ را به روی $[۰ , ۱] \cap [۲ , ۳]$ می‌نگارد.

(ب) تابعی که $(۰ , ۱)$ را به روی $\mathbf{Q}$ می‌نگارد.

۲.۲۲. نشان دهید که $\{(x_۱ , x_۲) \in \mathbf{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\}$ یک زیر مجموعه همبند $\mathbf{R}^۲$ است.

۳.۲۲. ثابت کنید که اگر E زیر مجموعهٔ همبندی از یک فضای متریک (S , d) باشد، آنگاه بستار آن E^-، نیز همبند است.

۴.۲۲. زیر مجموعهٔ زیر از $\mathbf{R}^۲$ را در نظر بگیرید:

$$E = \{(x , \sin \frac{۱}{x}) : x \in (۰ , ۱]\} ;$$

E همان نمودار $f(x) = \sin(۱/x)$ در طول بازهٔ $(۰ , ۱]$ است.

(الف) E را رسم کنید و بستار آن، E^-، را تعیین کنید.

(ب) نشان دهید که E^- همبند است.

(پ) نشان دهید که E^- همبند مسیری نیست.

۵.۲۲. فرض کنید E و F مجموعه‌هایی همبند در یک فضای متریک باشند.

(الف) ثابت کنید که اگر $E \cap F \neq \varnothing$، آنگاه $E \cup F$ همبند است.

(ب) مثالی ارائه دهید که نشان دهد لازم نیست $E \cap F$ همبند باشد. ضمناً مجموعهٔ

تهی، مجموعه‌ای همبند است.

۶.۲۲. (الف) نشان دهید که $C(S)$ ای که در تعریف ۶.۲۲ داده شده است، یک فضای متریک است.

(ب) چرا قید کردیم که تابعها در $C(S)$ کراندار باشند در حالی که چنین شرطی در تعریف ۲.۲۴ ظاهر نمی‌شود؟

۷.۲۲. نشان دهید که فضای متریک B در تمرین ۳.۱۳ را می‌توان به عنوان $C(\mathbf{N})$ تلقی کرد.

۸.۲۲. به ازای زیر مجموعه‌ای مانند S از $\mathbf{R}$؛ $C(S)$ را در نظر می‌گیریم. به ازای $s_{\circ}$ ثابتی در S، تعریف می‌کنیم $F(f) = f(s_{\circ})$. ثابت کنید که F یک تابع پیوستهٔ یکنواخت حقیقی مقدار بر فضای متریک $C(S)$ است.

۹.۲۲. f و g در $C(S)$ را که $S \subseteq \mathbf{R}$ در نظر بگیرید. فرض کنید $F(t) = tf + (1 - t)g$. نشان دهید که F یک تابع پیوستهٔ یکنواخت از $\mathbf{R}$ به توی $C(S)$ است.

۱۰.۲۲. فرض کنید f یک تابع پیوستهٔ یکنواخت در $C(\mathbf{R})$ باشد. به ازای هر $x \in \mathbf{R}$، فرض کنید f_x تابعی باشد که با ضابطهٔ $f_x(y) = f(x + y)$ تعریف شده است. فرض کنید $F(x) = f_x$. نشان دهید که F یک تابع پیوستهٔ یکنواخت از $\mathbf{R}$ به توی $C(\mathbf{R})$ است.

۱۱.۲۲. $C(S)$ را که در آن $S \subseteq \mathbf{R}$ در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathscr{E}$ مرکب از همه fهایی در $C(S)$ باشد به طوری که $\sup\{|f(x)| : x \in S\} \leq 1$.

(الف) نشان دهید که $\mathscr{E}$ در $C(S)$ بسته است،

(ب) نشان دهید که $C(S)$ همبند است،

(پ) نشان دهید که $\mathscr{E}$ همبند است.

۱۲.۲۲. زیر مجموعه‌ای مانند $\mathscr{E}$ از $C(S)$، $S \subseteq \mathbf{R}$، را در نظر بگیرید. تابعی مانند $f_{\circ}$ در $\mathscr{E}$ در درون $\mathscr{E}$ است در صورتی که زیر مجموعه‌ای متناهی مانند F از S، و $\varepsilon > 0$، موجود باشند، به طوری که

$$\{f \in C(S): |f(x) - f_{\circ}(x)| < \varepsilon \text{ ,به ازای } x \in F\} \subseteq \mathscr{E}.$$

مجموعهٔ $\mathscr{E}$ باز است در صورتی که هر تابع در $\mathscr{E}$، در درون $\mathscr{E}$ باشد.

(الف) بحث ۷.۱۳ را مرور کنید.

(ب) نشان دهید که خانوادهٔ مجموعه‌های باز که در بالا تعریف شده‌اند، یک توپولوژی بر $C(S)$ تشکیل می‌دهد: تذکّر: این توپولوژی غیر از توپولوژی ارائه شده به وسیلهٔ

متریک تعریف ۶.۲۲ است. در حقیقت، این توپولوژی، از هیچ متریکی حاصل نمی‌شود! این توپولوژی، توپولوژی همگرایی نقطه‌ای نامیده می‌شود و می‌توان از آن برای مطالعهٔ همگرایی در تعریف ۱.۲۴ استفاده کرد، درست به همان گونه که از متریک تعریف ۶.۲۲، می‌توان برای مطالعهٔ همگرایی در تعریف ۲.۲۴ استفاده کرد.

۱۳.۲۲. نشان دهید که تابعی مانند $f: R \longrightarrow R$ پیوسته است اگر و تنها اگر نمودار آن $G = \{(x, f(x)) : x \in R\}$ در R^2 همبند و بسته باشد. نگاه کنید به مقالهٔ برگس[۱]، تابعهای پیوسته و نمودارهای همبند.

(۱) Burgess, C.E. Continuous Functions and Connected Graphs, American Mathematical Monthly, vol. 97 (1990), pp. 337-339.

فصل ۴

دنباله‌ها و سریهای توابع

در این فصل برخی از خاصیتهای بنیادی سریهای توانی را بسط می‌دهیم. طیِّ این کار، همگرایی یکنواخت را معرفی می‌کنیم و اهمیت آن را شرح می‌دهیم. در بخش ۲۶، ثابت می‌کنیم که می‌توان از سریهای توانی جمله به جمله مشتقگیری یا انتگرالگیری کرد.

بخش ۲۳. سری توانی

با مفروض بودن دنبالهٔ $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ از اعداد حقیقی، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی نامیده می‌شود. توجه کنید که x متغیر است. بنابراین، سری توانی، تابعی از x است به شرط آنکه به ازای xای یا همهٔ xها همگرا باشد. البته، این سری به ازای $x = 0$، همگراست؛ به قرار داد $0^0 = 1$ توجه داشته باشید. اینکه سری به ازای سایر مقادیر همگرا باشد یا نباشد، به انتخاب ضرایب (a_n) بستگی دارد. چنین معلوم می‌شود که با مفروض گرفتن هر دنبالهٔ (a_n)، یکی از گزاره‌های زیر برای سری توانی مربوط به آن برقرار است:

(الف) سری توانی برای هر x در $\mathbf{R}$ همگراست؛

(ب) سری توانی تنها برای $x = 0$ همگراست؛

(پ) سری توانی برای هر x در بازه‌ای کراندار به مرکز 0 همگراست؛ این بازه ممکن است باز، نیم باز، یا بسته باشد.

این تذکرها، پیامدهای قضیهٔ مهم زیرند.

۱.۲۳ قضیه. برای سری توانی $\sum a_n x^n$، فرض کنید

$$\beta = \limsup |a_n|^{1/n} \quad \text{،} \quad R = \frac{1}{\beta}.$$

[اگر $\beta = 0$، قرار می‌دهیم $R = +\infty$ و اگر $\beta = +\infty$، قرار می‌دهیم $R = 0$.] در این صورت

(i) سری توانی، برای $|x| < R$، همگراست؛

(ii) سری توانی، برای $|x| > R$، واگراست.

R را شعاع همگرایی برای سری توانی نامیده می‌شود. توجه کنید که اگر $R = 0$، عبارت (۱) بیمعنی است و اگر $R = +\infty$ عبارت (ii) بیمعنی است. همچنین، توجه کنید که (الف) در بالا متناظر با حالت $R = +\infty$ و (ب) در بالا متناظر با حالت $R = 0$، و (پ) در بالا متناظر با حالت $0 < R < +\infty$ است.

برهان قضیه ۱.۲۳. برهان به سادگی از آزمون ریشهٔ ۹.۱۴ نتیجه می‌شود. جزئیات بدین قرار است. می‌خواهیم آزمون ریشه را برای سری $\sum a_n x^n$ به کار ببریم. بنابراین، به ازای هر $x \in \mathbf{R}$، فرض کنید α_x عدد یا نمادی باشد که در ۹.۱۴ برای سری $\sum a_n x^n$ تعریف شده است. چون، nامین جملهٔ این سری $a_n x^n$ است، داریم

$$\alpha_x = \limsup |a_n x^n|^{1/n} = \limsup |x|\ |a_n|^{1/n}$$
$$= |x| \cdot \limsup |a_n|^{1/n} = \beta |x| .$$

سومین تساوی، بنابر تمرین ۶.۱۲ (الف) قابل توجیه است. اینک، حالتهایی را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. فرض کنید $0 < R < +\infty$. در این حالت $\alpha_x = \beta|x| = |x|/R$. اگر $|x| < R$ آنگاه $\alpha_x < 1$ و لذا، بنابر آزمون ریشه، سری همگراست. به همین نحو، اگر $|x| > R$، آنگاه $\alpha_x > 1$، و سری واگراست.

حالت ۲. فرض کنید $R = +\infty$. در این صورت، $\beta = 0$، و صرف نظر از اینکه x چه باشد، $\alpha_x = 0$. در نتیجه، بنابر آزمون ریشه، سری توانی به ازای هر x همگراست.

حالت ۳. فرض کنید $R = 0$. در این صورت $\beta = +\infty$ و به ازای $x \neq 0$، $\alpha_x = +\infty$. در نتیجه، بنابر آزمون ریشه، سری برای $x \neq 0$ واگراست. □

یادآوری می‌کنیم که اگر $\lim|a_{n+1}/a_n|$ موجود باشد، آنگاه این حد بنابر نتیجهٔ ۳.۱۲، برابر با βی قضیهٔ قبلی است. اغلب، محاسبهٔ این حد ساده‌تر از محاسبهٔ $\limsup |a_n|^{1/n}$ است. نگاه کنید به مثال ۳.

مثال ۱. $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)x^n$ را در نظر بگیرید. اگر $a_n = 1/n!$، آنگاه $a_{n+1}/a_n = 1/(n+1)$، و بنابراین، $\lim|a_{n+1}/a_n| = 0$. در نتیجه، $\beta = 0$ و $R = +\infty$، و این سری دارای شعاع همگرایی $+\infty$ است، یعنی این سری به ازای هر x در $\mathbb{R}$ همگراست. در حقیقت، این سری به ازای هر x به e^x همگرا می‌شود. اما این، بحث دیگری است؛ نگاه کنید به مثال ۱ در بخش ۳۱ و همچنین، بخش ۳۷.

مثال ۲. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ را در نظر بگیرید. در این صورت، $\beta = 1$ و $R = 1$. توجه کنید که این سری به ازای $x = 1$ یا $x = -1$ همگرانیست. بنابراین، بازهٔ همگرایی آن دقیقاً $(-1, 1)$ است. [منظور از بازهٔ همگرایی، مجموعهٔ همه xهایی است که سری توانی برای آنها همگراست.] بنابر فرمول (۲) از مثال ۱، در بخش ۱۴، این سری به $1/(1-x)$ همگراست.

مثال ۳. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})x^n$ را در نظر می‌گیریم. چون $\lim|(1/(n+1))/(1/n)| = 1$، مجدداً داریم $\beta = 1$ و $R = 1$. این سری، برای $x = 1$، واگراست [نگاه کنید به مثال ۱، از بخش ۱۵]. امّا، بنابر قضیهٔ سری متناوب ۳.۱۵، سری برای $x = -1$ همگراست. بنابراین، بازهٔ همگرایی دقیقاً $[-1, 1)$ است.

مثال ۴. $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)x^n$ را در نظر بگیرید. بار دیگر، $\beta = 1$ و $R = 1$. این سری در هر دو نقطهٔ $x = 1$ و $x = -1$ همگراست. بنابراین بازهٔ همگرایی آن دقیقاً $[-1, 1]$ است.

مثال ۵. سری $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ دارای شعاع همگرایی $R=0$ است. زیرا، $\lim|(n+1)!/n!| = +\infty$. سری برای هر $x \neq 0$، واگراست.

مثال ۶. $\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}x^{3n}$ را در نظر بگیرید. این سری گول زننده است و وسوسه می‌شویم که

$1/2 = (2^{-n})^{1/n}$ $\beta = \limsup$ را محاسبه کنیم و نتیجه بگیریم که $R = 2$. این نتیجه نادرست است. زیرا، 2^{-n} ضریب x^{3n} است و نه x^n و محاسبه β باید مربوط به ضریب a_n از x^n باشد. باید این سری را با دقت بیشتری مورد بحث قرار دهیم. این سری را می‌توان به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نوشت، که در آن، $a_{3k} = 2^{-k}$، و اگر n مضربی از ۳ نباشد، $a_n = 0$. β را با استفاده از زیر دنبالهٔ همه جمله‌های ناصفر؛ یعنی، زیر دنباله داده شده به وسیله $\sigma(k) = 3k$، محاسبه می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$\beta = \limsup |a_n|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} |a_{3k}|^{1/3k} = \lim(2^{-k})^{1/3k} = 2^{-1/3}$$

بنابراین، شعاع همگرایی برابر $R = 1/\beta = 2^{1/3}$ است.

می‌توان سریهای توانی کلیتری به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (*)$$

را مورد بررسی قرار داد، که در آن، x_0 عدد حقیقی ثابتی است. امّا، با تغییر متغیر $y = x - x_0$ این سریها به سریهایی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ تبدیل می‌شوند. بازهٔ همگرایی برای سری (*) بازه‌ای به مرکز x_0 خواهد بود.

مثال ۷. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x - 1)^n \qquad (1)$$

را در نظر بگیرید. شعاع همگرایی برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1}/n)y^n$ برابر $R = 1$ است، و لذا بازهٔ همگرایی برای سری (۱)، بازهٔ (۰ , ۲)، شاید به انضمام یک یا دو نقطهٔ انتهایی است. جایگذاری مستقیم نشان می‌دهد که سری (۱) در $x = 2$ همگراست [این سری یک سری متناوب است] و در $x = 0$ به $-\infty$ واگراست. بنابراین، بازهٔ همگرایی دقیق آن بازهٔ (۰ , ۲] است. چنین نتیجه می‌شود که سری (۱) نمایش تابع $\log x$ بر (۰ , ۲] است. نگاه کنید به مثالهای ۱ و ۲ بخش ۲۶.

یکی از هدفهای عمدهٔ ما فهم تابعی است که از یک سری توانی حاصل می‌شود:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ , \ |x| < R.$$

به پرسشهایی از این نوع علاقه‌مندیم: آیا f پیوسته است؟ آیا f مشتقپذیر است؟ اگر چنین است آیا می‌توانیم از f جمله به جمله مشتق بگیریم:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

آیا می‌توانیم جمله به جمله از f انتگرال بگیریم؟

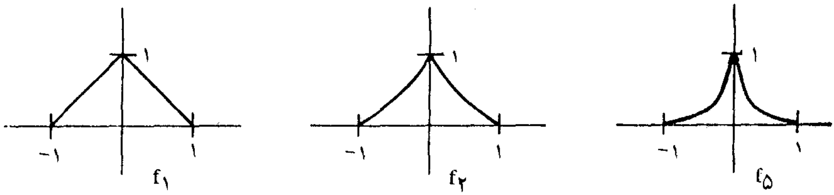
با بازگشت به سئوال پیوستگی چه دلیلی در دست است که باور کنیم f باید پیوسته باشد؟ مجموعهای جزئی آن؛ یعنی، $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ پیوسته‌اند. زیرا، این مجموعها از نوع چند جمله‌ای‌اند. به علاوه، برای $|x| < R$، داریم $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. بنابراین، f پیوسته خواهد بود در صورتی که نتیجه‌ای نظیر نتیجهٔ زیر درست باشد: اگر (f_n) دنباله‌ای از تابعهای پیوسته بر (a , b) باشد و اگر برای هر x در (a , b)، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ آنگاه f بر (a , b) پیوسته است. با این حال، این نتیجهٔ خوش ظاهر، نادرست است!

مثال ۸. فرض کنید به ازای $x \in (-1 , 1)$، $f_n(x) = (1 - |x|)^n$؛ نگاه کنید به شکل ۱.۲۳. فرض کنید به ازای $x \neq 0$، $f(x) = 0$ و فرض کنید $f(0) = 1$. در این صورت، برای هر x در $(-1 , 1)$ داریم، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. زیرا، اگر $|a| < 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. هر f_n، تابعی پیوسته است. امّا، آشکار است که تابع حدی f در $x = 0$ ناپیوسته است.

این مثال، به علاوهٔ تمرینهای ۷.۲۳ و ۹.۲۳، ممکن است نا امید کننده باشند. اما، چنین معلوم می‌شود که سریهای توانی، به تابعهایی پیوسته همگرا هستند. این بدان دلیل است که بر مجموعه‌هایی به صورت $[-R_1 , R_1]$ به طوری که $R_1 < R$،

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ به طور یکنواخت به } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ همگراست.}$$

تعریف همگرایی یکنواخت در بخش بعدی ارائه خواهد شد و دو بخش بعدی به این مفاهیم مهم اختصاص داده شده‌اند. ما، در بخش ۲۶ به سری توانی باز می‌گردیم.



شکل ۱.۲۳

تمرینها

۱.۲۳. در هر یک از سریهای توانی زیر، شعاع همگرایی را پیدا کنید و بازهٔ همگرایی را دقیقاً تعیین کنید.

(الف) $\sum n^{۲}x^n$ (ب) $\sum (x/n)^n$

(پ) $\sum (۲^n/n^{۲})\, x^n$ (ت) $\sum (n^{۳}/۳^n)\, x^n$

(ث) $\sum (۲^n/n!)\, x^n$ (ج) $\sum (۱/(n+۱)^{۲}۲^n)\, x^n$

(چ) $\sum(۳^n/n\ .\ ۴^n)x^n$ (ح) $\sum((-۱)^n/n^{۲}\ .\ ۴)^n x^n$

۲.۲۳. تمرینهای ۱.۲۳ را برای سریهای زیر تکرار کنید.

(الف) $\sum \sqrt{n}x^n$ (ب) $\sum (۱/n^{\sqrt{n}})x^n$

(پ) $\sum x^{n!}$ (ت) $\sum (۳^n/\sqrt{n})x^{۲n+۱}$

۴.۲۳. بازهٔ همگرایی دقیق را برای سری مثال ۶ پیدا کنید.

۴.۲۳. برای $n = ۰\,,\,۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,...$، فرض کنید $a_n = [(۴ + ۲(-۱)^n/۵]^n$.

(الف) $\limsup(a_n)^{۱/n}$، $\liminf(a_n)^{۱/n}$، $\limsup|a_{n+۱}/a_n|$، و $\liminf|a_{n+۱}/a_n|$ را پیدا کنید.

(ب) آیا سریهای $\sum a_n$ و $\sum(-۱)^n a_n$ همگرا هستند؟ به طور مختصر شرح دهید.

(پ) حال سری توانی $\sum a_n x^n$، با ضرایب a_n به صورت فوق را در نظر بگیرید. شعاع همگرایی را پیدا کنید و بازهٔ همگرایی دقیق را برای این سری تعیین کنید.

۵.۲۳. یک سری توانی مانند $\sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید که اگر همهٔ ضرایب a_n اعداد صحیح باشند و اگر تعدادی نامتناهی از آنها ناصفر باشند، آنگاه $R \leq 1$.

(ب) ثابت کنید که اگر $\limsup |a_n| > 0$، آنگاه $R \leq 1$.

۶.۲۳. (الف) فرض کنید $\sum a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی متناهی R باشد و اینکه به ازای هر n، $a_n \geq 0$. نشان دهید که اگر سری در R همگرا باشد، آنگاه در $-R$ نیز همگراست.

(ب) مثالی از یک سری توانی ارائه دهید که بازهٔ همگرایی آن دقیقاً $[-1, 1)$ باشد. سه تمرین بعدی برای بیان این منظور طراحی شده‌اند که نشان دهند مفهوم همگرایی تابعهایی که قبل از مثال ۸ مورد بحث قرار گرفته است، دارای کاستیهای بسیاری است.

۷.۲۳. برای هر $n \in \mathbf{N}$، فرض کنید $f_n(x) = (\cos x)^n$. هر f_n پیوسته است. با این حال، نشان دهید که

(الف) $\lim f_n(x) = 0$، مگر آنکه x مضربی از π باشد،

(ب) $\lim f_n(x) = 1$، در صورتی که x مضرب زوجی از π باشد،

(پ) $\lim f_n(x)$ موجود نیست، در صورتی که x مضرب فردی از π باشد.

۸.۲۳. برای هر $n \in \mathbf{N}$، فرض کنید $f_n(x) = (1/n) \sin nx$. هر f_n مشتقپذیر است. نشان دهید که

(الف) برای هر $x \in \mathbf{R}$، $\lim f_n(x) = 0$،

(ب) اما لازم نیست که $\lim f_n'(x)$ موجود باشد [مثلاً، در $x = \pi$].

۹.۲۳. فرض کنید که برای $x \in [0, 1]$ و $n \in \mathbf{N}$، $f_n(x) = nx^n$. نشان دهید که

(الف) برای $x \in [0, 1)$، $\lim f_n(x) = 0$. راهنمایی: از تمرین ۱۲.۹ استفاده کنید.

(ب) با این حال، $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$.

بخش ۲۴. همگرایی یکنواخت

ابتدا، مفهوم همگرایی بحث شده پیش از مثال ۸ در بخش پیشین را رسمیت می‌بخشیم.

۱.۲۴ تعریف. فرض کنید که (f_n) دنباله‌ای از تابعهای حقیقی مقدار باشد که بر مجموعه‌ای مانند

$\mathbf{R} \supseteq S$ تعریف شده است. دنبالهٔ (f_n) همگرای نقطه به نقطه [یعنی در هر نقطه] به تابعی مانند f است که بر S تعریف شده است در صورتی که

برای هر $x \in S$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

اغلب می‌نویسیم، نقطه به نقطه [بر S] $\lim f_n = f$ یا نقطه به نقطه [بر S]، $f_n \longrightarrow f$.

مثال ۱. همهٔ تابعهای f که در بخش پیشین به عنوان حدی برای دنباله‌ای از تابعها به دست آمده‌اند، حدهای نقطه به نقطه بودند. مثال ۸ از بخش ۲۳ و تمرینهای ۷.۲۳ - ۹.۲۳ را ببینید. در تمرین ۸.۲۳ داریم، نقطه به نقطه بر $\mathbf{R}$، $f_n \to 0$، و در تمرین ۹.۲۳ داریم، نقطه به نقطه بر $[0,1)$، $f_n \to f$.

مثال ۲. فرض کنید که برای $x \in [0, 1]$، $f_n(x) = x^n$. در این صورت، نقطه به نقطه بر $[0, 1]$، $f_n \to f$، که در آن برای $x \in [0, 1)$، $f(x) = 0$، $f(1) = 1$.

اینک، مشاهده می‌کنیم که، نقطه به نقطه بر S، $f_n \to f$، دقیقاً به معنی زیر است:

به ازای هر $\varepsilon > 0$ و $x \in S$، عددی مانند N موجود است به طوری که

به ازای $n > N$، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

توجه کنید که مقدار N به $\varepsilon > 0$ و $x \in S$ هر دو بستگی دارد. اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توانستیم عدد N را به گونه‌ای پیدا کنیم که

برای هر $x \in S$ و $n > N$، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$،

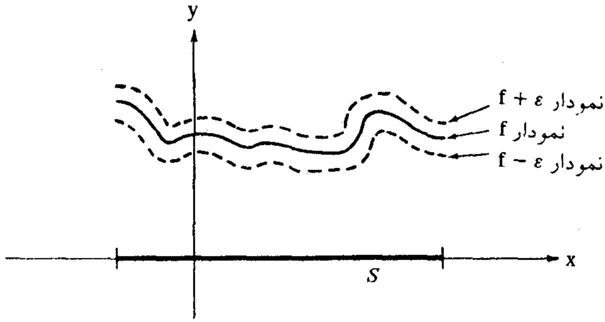
در این صورت، مقادیر $f_n(x)$ «به طور یکنواخت» به مقادیر $f(x)$ نزدیک خواهند بود. در اینجا، N به ε بستگی دارد، اما به x وابسته نیست. این مفهوم، فوق العاده مفید است.

۲.۲۴ تعریف. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از تابعهای حقیقی مقدار باشد که بر مجموعه‌ای مانند $\mathbf{R} \supseteq S$ تعریف شده است. دنبالهٔ (f_n) همگرای یکنواخت بر S به تابعی مانند f است در صورتی که

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود باشد به طوری که

به ازای هر $x \in S$ و هر $n > N$، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

می‌نویسیم به طور یکنواخت بر S، $\lim f_n = f$ یا به طور یکنواخت بر S، $f_n \to f$.



شکل ۱.۲۴

توجه کنید که اگر به طور یکنواخت بر S، $f_n \to f$، و اگر $\varepsilon > ۰$، آنگاه عددی مانند N موجود است که برای هر $x \in S$ و $n > N$، $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$. به عبارت دیگر، برای $n > N$، نمودار f_n در نواری بین نمودارهای $f - \varepsilon$ و $f + \varepsilon$ قرار می‌گیرد. در شکل ۱.۲۴، نمودارهای f_n به ازای $n > N$، همه بین دو خط نقطه چین قرار می‌گیرند.

به مثالهای قبلی خود باز می‌گردیم.

مثال ۳. فرض کنید که برای $x \in (-۱ , ۱)$، $f_n(x) = (۱ - |x|)^n$. همچنین، فرض کنید که برای $x \neq ۰$، $f(x) = ۰$ و $f(۰) = ۱$. هم چنان که در تمرین ۸ از بخش ۲۳ متذکر شدیم، نقطه به نقطه بر $(-۱ , ۱)$، $f_n \to f$. با توجه به قضیهٔ بعدی چنین معلوم می‌شود که دنبالهٔ (f_n) به طور یکنواخت بر $(-۱ , ۱)$ به f همگرا نیست. می‌توان این نتیجه را به طور مستقیم هم نشان داد. برای انجام این کار، فرض کنید که به طور یکنواخت بر $(-۱ , ۱)$، $f_n \to f$. در این صورت، [با در نظر گرفتن $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$] ملاحضه می‌کنیم که عددی مانند N در N موجود است به طوری که برای هر $x \in (-۱ , ۱)$ و $n > N$، $|f(x) - f_n(x)| < ۱/۲$. پس

$x \in (۰ , ۱)$ و $n > N$ مستلزم آن است که $|(۱ - x)^n| < \frac{۱}{۲}$

به ویژه،

$x \in (۰ , ۱)$ مستلزم آن است که $(۱ - x)^{N+۱} < \frac{۱}{۲}$.

با این حال، این حکم برای مقادیر به قدر کافی کوچک x، نادرست است؛ به عنوان مثال، اگر $x = 1 - 2^{-1/(N+1)}$، آنگاه $1 - x = 2^{-1/(N+1)}$ و $(1 - x)^{N+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. این تناقض نشان می‌دهد که، برخلاف فرض، (f_n) به طور یکنواخت بر $(-1, 1)$ به f همگرانیست.

مثال ۴. فرض کنید که برای $x \in \mathbf{R}$ ، $f_n(x) = (1/n)\sin nx$. در این صورت، به طوری که در تمرین ۸.۲۳ نشان داده شده است، نقطه به نقطه بر $\mathbf{R}$ ، $f_n \to 0$. در حقیقت، به طور یکنواخت بر $\mathbf{R}$ ، $f_n \to 0$. برای اثبات این حکم، فرض کنید $\varepsilon > 0$ و فرض کنید $N = 1/\varepsilon$. در این صورت، برای $n > N$ و هر $x \in \mathbf{R}$، داریم

$$|f_n(x) - 0| = |\frac{1}{n}\sin nx| \le 1/n < 1/N = \varepsilon \ .$$

مثال ۵. فرض کنید که برای $x \in [0, 1)$ ، $f_n(x) = nx^n$. چون $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$ عدد ۱ را از حوزهٔ تعریف مورد بحث، حذف کرده‌ایم. در این صورت، به طوری که در تمرین ۹.۲۳ داده شده است، نقطه به نقطه بر $[0, 1)$، $f_n \to 0$. نشان می‌دهیم که همگرایی یکنواخت نیست. اگر همگرایی یکنواخت می‌بود، عددی مانند N در $\mathbf{N}$ وجود می‌داشت به طوری که برای هر $x \in [0, 1)$ و $n > N$، $|nx^n - 0| < 1$.

به ویژه، برای هر $x \in [0, 1)$، باید داشته باشیم $(N + 1)x^{N+1} < 1$. اما، این نابرابری برای x های به قدر کافی نزدیک به ۱، نادرست است. مثلاً، عکس $(N + 1)^{1/(N+1)}$ را برای x در نظر بگیرید.

مثال ۶. مانند مثال ۲، فرض کنید که برای $x \in [0, 1]$، $f_n(x) = x^n$؛ برای $x \in [0, 1)$، $f(x) = 0$، $f(1) = 1$. در این صورت، نقطه به نقطه بر $[0, 1]$، $f_n \to f$، ولی همان طور که می‌توان مستقیماً یا با استفاده از قضیهٔ بعدی ثابت کرد، f_n به طور یکنواخت بر $[0, 1]$ به f همگرا نیست.

۳.۲۴ قضیه. حد یکنواخت تابعهای پیوسته، تابعی پیوسته است. به عبارت دقیقتر، فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از تابعها بر زیر مجموعه‌ای مانند $S \subseteq \mathbf{R}$ باشد، فرض کنید به طور یکنواخت بر S، $f_n \to f$ ، و فرض کنید که $S = \mathrm{dom}(f)$. ۱ اگر هر f_n در x_0 از S پیوسته باشد، آنگاه f در x_0 پیوسته است. [بنابراین، ۱ اگر هر f_n بر S پیوسته باشد آنگاه f بر S پیوسته است.]

برهان. این برهان، «بحث $\varepsilon/3$» مشهور را به کار می‌گیرد. نابرابری اصلی چنین است:

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \,. \qquad (1)$$

اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، اولین و سومین جملهٔ سمت راست (۱) کوچک خواهند شد. زیرا، به طور یکنواخت، $f_n \to f$. به محض انتخاب چنین nای، پیوستگی f_n مستلزم آن است که جملهٔ میانی کوچک شود به شرط آنکه x نزدیک به x_0 باشد.

برای برهان صوری، فرض کنید $\varepsilon > 0$. عددی مانند N در $\mathbf{N}$ موجود است به طوری که

$n > N$ مستلزم آن است که برای هر $x \in S$، $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

به ویژه،

$$\text{به ازای هر } x \in S\text{،}\quad |f_{N+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \,. \qquad (2)$$

چون f_{N+1} در x_0 پیوسته است، عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

$$x \in S \text{ و } |x - x_0| < \delta \text{ مستلزم آن است که } |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \,; \qquad (3)$$

قضیهٔ ۲.۱۷ را ببینید. اینک (۱) را با $n = N + 1$، (۲) را دوبار [یک بار برای x و بار دیگر برای x_0] و (۳) را به کار می‌بریم تا نتیجه بگیریم که

$$x \in S \text{ و } |x - x_0| < \delta \text{ مستلزم آن است که } |f(x) - f(x_0)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,.$$

این حکم ثابت می‌کند که f در x_0 پیوسته است. □

شاید چنین تصور شود که این قضیه در عمل به درد نخواهد خورد. زیرا، نشان دادن اینکه تنها یک تابع مانند f پیوسته است، ساده‌تر از این است که نشان دهیم دنباله‌ای مانند (f_n) متشکل از تابعها، پیوسته است و اینکه دنباله، به طور یکنواخت، به f همگراست. این نکته بدون تردید درست است به شرطی که f با فرمول ساده‌ای داده شده باشد. اما، به عنوان مثال، تابعهای

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \text{،} \quad \text{برای } x \in [-1, 1]$$

یا

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\frac{1}{2}x)^{2n}}{(n!)^2} \text{،} \quad \text{برای } x \in \mathbf{R}$$

را در نظر بگیرید. مجموعهای جزئی به وضوح پیوسته‌اند. امّا، هیچ یک از دو تابع f و J_0 با

فرمول ساده‌ای داده نشده‌اند. به علاوه، بسیاری از تابعهایی که در ریاضیات و در جاهای دیگر پیش می‌آیند، مانند تابع بِسل J_0، به کمک سریهای توانی تعریف شده‌اند. بسیار مفید خواهد بود که بدانیم سریهای توانی، کی و در کجا به طور یکنواخت همگرا هستند، در بخش ۲۶، پاسخی به این سؤال داده می‌شود.

۴.۲۴ تذکر. همگرایی یکنواخت را می‌توان به صورت زیر از نو فرمولبندی کرد:

دنباله‌ای مانند (f_n) از تابعها بر مجموعه‌ای مانند $S \subseteq \mathbf{R}$، به طور یکنواخت به تابعی مانند f بر S همگراست اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty} [\sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in S\} = 0 . \qquad (1)$$

برهان سر راست آن را به عنوان تمرین ۱۲.۲۴ واگذار می‌کنیم.

بر طبق (۱)، می‌توان با محاسبهٔ $\sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in S\}$، برای هر n، تصمیم گرفت که آیا دنباله‌ای مانند (f_n) به طور یکنواخت به f همگراست یا خیر. اگر $f - f_n$ مشتقپذیر باشد، می‌توان با استفاده از حسابان سوپرمم را پیدا کرد.

مثال ۷. فرض کنید که برای $x \in \mathbf{R}$، $f_n(x)= x/(1 + nx^2)$. به وضوح، داریم $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ اگر $x \neq 0$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} (1 + nx^2) = +\infty$. بنابراین، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. در نتیجه، نقطه به نقطه بر $\mathbf{R}$، $f_n \to 0$. برای پیدا کردن ماکسیمم و مینیمم f_n، $f'_n(x)$ را محاسبه می‌کنیم و آن را برابر 0 قرار می‌دهیم. این کار به معادلهٔ $(1 + nx^2) \cdot 1 - x(2nx) = 0$ یا $1 - nx^2 = 0$ منجر می‌شود. در نتیجه، $f'_n(x) = 0$، اگر و تنها اگر $x = \pm 1/\sqrt{n}$. تجزیه و تحلیل بیشتر با رسم f_n، ما را به این نتیجه‌گیری رهنمون می‌کند که f_n ماکسیمم خود را در $1/\sqrt{n}$ و مینیمم خود را در $-1/\sqrt{n}$ اختیار می‌کند. چون $f_n(\pm 1/\sqrt{n}) = \pm\frac{1}{2}/\sqrt{n}$، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} [\sup\{|f_n(x)| : x \in S\}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2}{\sqrt{n}} = 0 .$$

لذا، بنابر تذکر ۴.۲۴، به طور یکنواخت بر $\mathbf{R}$، $f_n \to 0$.

مثال ۸. فرض کنید که برای $x \in [0, 1]$، $f_n(x) = n^2x^n(1 - x)$. به وضوح، داریم $\lim_{n\to\infty}f_n(1) = 0$. برای $x \in [0, 1)$، با به کاربردن تمرین ۱۲.۹، داریم $\lim_{n\to\infty}n^2x^n = 0$. [زیرا،

$$\frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2x^n} = (\frac{n+1}{n})^2 x \to x] ,$$

و از این رو، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. در نتیجه، نقطه به نقطه بر $[0, 1]$، $f_n \to 0$. مجدداً، برای پیدا کردن ماکسیمم و مینیمم f_n، مشتق آن را مساوی ۰ قرار می‌دهیم. معادله $x^n(-1) + (1 - x)nx^{n-1} = 0$ یا $x^{n-1}[n - (n+1)x] = 0$ را به دست می‌آوریم. چون f_n مقدار ۰ را در دو انتهای بازهٔ $[0, 1]$ اختیار می‌کند، نتیجه می‌شود که f_n ماکسیمم خود را در $n/(n+1)$ اختیار می‌کند. بنابراین، داریم

$$f_n(\frac{n}{n+1}) = n^2(\frac{n}{n+1})^n(1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{n^2}{n+1} (\frac{n}{n+1})^n . \qquad (1)$$

معکوس $(n/(n+1))^n$ برابر $(1 + \frac{1}{n})^n$، یعنی، nامین جملهٔ دنباله‌ای است که حد آن e است. این را در مثال ۳ در بخش ۷، خاطر نشان کرده‌ایم، ولی آن را ثابت نکرده‌ایم؛ برهانی برای آن در قضیهٔ ۱۱.۳۷ ارائه می‌شود. بنابراین، داریم $\lim(n/(n+1))^n = 1/e$. چون $\lim[n^2/(n+1)] = +\infty$، از (۱) نتیجه می‌گیریم که $\lim f_n(n/(n+1)) = +\infty$؛ تمرین ۹.۱۲ (الف) را ببینید. به ویژه، (f_n) به طور یکنواخت به ۰ همگرا نیست.

تمرینها

۱.۲۴. فرض کنید $f_n(x) = [1 + 2\cos^2 nx]/\sqrt{n}$. به دقت ثابت کنید که (f_n) به طور یکنواخت بر $\mathbf{R}$ به ۰ همگراست.

۲.۲۴. برای $x \in [0, \infty)$، فرض کنید $f_n(x) = x/n$.

(الف) $f(x) = \lim f_n(x)$ را پیدا کنید.

(ب) تعیین کنید که آیا به طور یکنواخت بر $[0, 1]$، $f_n \to f$؟

(پ) تعیین کنید که آیا به طور یکنواخت بر $[0, \infty)$، $f_n \to f$؟

۳.۲۴. تمرین ۲.۲۴ را برای $f_n(x) = 1/(1 + x^n)$ تکرار کنید.

۴.۲۴. تمرین ۲.۲۴ را برای $f_n(x) = x^n/(1 + x^n)$ تکرار کنید.

۵.۲۴. تمرین ۲.۲۴ را برای $f_n(x) = x^n/(n + x^n)$ تکرار کنید.

۶.۲۴. فرض کنید که برای $x \in [0, 1]$، $f_n(x) = (x - 1/n)^2$.

(الف) آیا (f_n) نقطه به نقطه بر مجموعهٔ $[0, 1]$ همگراست؟ اگر چنین است، تابع حدی را ارائه دهید.

(ب) آیا دنبالهٔ (f_n) به طور یکنواخت بر $[0, 1]$ همگراست؟ حکم خود را ثابت کنید.

۷.۲۴. تمرین ۶.۲۴ را برای $f_n(x) = x - x^n$ تکرار کنید.

۸.۲۴. تمرین ۶.۲۴ را برای $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ تکرار کنید.

۹.۲۴. برای $x \in [0, 1]$، $f_n(x) = nx^n(1 - x)$ را در نظر بگیرید.

(الف) $f(x) = \lim f_n(x)$ را پیدا کنید.

(ب) آیا به طور یکنواخت بر $[0, 1]$، $f_n \to 0$؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

(پ) آیا $\int_0^1 f_n(x)\, dx$ به $\int_0^1 f(x)\, dx$ همگراست؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۱۰.۲۴. (الف) ثابت کنید که اگر به طور یکنواخت بر مجموعه‌ای مانند S، $f_n \to f$، و اگر به طور یکنواخت بر S، $g_n \to g$ آنگاه به طور یکنواخت بر S، $f_n + g_n \to f + g$.

(ب) به گمان شما آیا نظیر حکم (الف) برای حاصل ضربها برقرار است؟ اگر چنین است، به تمرین بعدی نگاه کنید.

۱۱.۲۴. فرض کنید به ازای $x \in \mathbf{R}$، $f_n(x) = x$ و $g_n(x) = 1/n$. فرض کنید به ازای $x \in \mathbf{R}$، $f(x) = x$ و $g(x) = 0$.

(الف) بررسی کنید که به طور یکنواخت بر $\mathbf{R}$، $f_n \to f$ [بدیهی است!] و اینکه به طور یکنواخت بر $\mathbf{R}$، $g_n \to g$ [تقریباً بدیهی است].

(ب) بررسی کنید که دنبالهٔ $(f_n g_n)$ به طور یکنواخت بر S به fg همگرا نیست، با تمرین ۲.۲۴ مقایسه کنید.

۱۲.۲۴. حکم تذکر ۴.۲۴ را ثابت کنید.

۱۳.۲۴. ثابت کنید که اگر (f_n) دنباله‌ای از تابعهای پیوستهٔ یکنواخت بر بازه‌ای مانند (a, b) باشد، و اگر به طور یکنواخت بر (a, b)، $f_n \to f$، در این صورت، f نیز بر (a, b) پیوستهٔ یکنواخت است. راهنمایی: مانند برهان قضیهٔ ۳.۲۴، استدلال $\varepsilon/3$ای را امتحان کنید.

۱۴.۲۴. فرض کنید $f_n(x) = nx/(1 + n^2x^2)$.

(الف) نشان دهید که نقطه به نقطه بر $\mathbf{R}$، $f_n \to 0$.

(ب) آیا به طور یکنواخت بر $[0 , 1]$، $f_n \to 0$؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

(پ) آیا به طور یکنواخت بر $[1 , \infty)$، $f_n \to 0$؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۱۵.۲۴. فرض کنید برای $x \in [0 , \infty)$، $f_n(x) = nx/(1 + nx)$.

(الف) $f(x) = \lim f_n(x)$ را پیدا کنید.

(ب) آیا به طور یکنواخت بر $[0 , 1]$، $f_n \to f$؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

(پ) آیا به طور یکنواخت بر $[1 , \infty)$، $f_n \to f$؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۱۶.۲۴. تمرین ۱۵.۲۴ را برای $f_n(x) = nx/(1 + nx^2)$ تکرار کنید.

۱۷.۲۴. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از تابعهای پیوسته بر $[a , b]$ باشد که به طور یکنواخت به f همگراست. نشان دهید که اگر (x_n) دنباله‌ای در $[a , b]$ باشد و اگر $x_n \to x$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x) .$$

بخش ۲۵. مطالب بیشتری دربارهٔ همگرایی یکنواخت

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که می‌توان جای حدهای یکنواخت و انتگرالها را تعویض کرد. در اینجا صفت «یکنواخت» مهم است؛ با تمرین ۹.۲۳ مقایسه کنید.

۱.۲۵ بحث. برای اثبات قضیهٔ ۲.۲۵ زیر، صرفاً برخی نتایج اساسی دربارهٔ انتگرالها را که احتمالاً با آنها آشنا هستید [یا نتایجی که قابل قبول‌اند]، به کار می‌بریم؛ حتی اگر حسابان در ذهن شما کم رنگ هم شده باشد، مهم نیست. به ویژه از نتیجهٔ زیر استفاده خواهیم کرد:

(الف) اگر g و h بر $[a , b]$ انتگرالپذیر باشند و اگر برای هر $x \in [a , b]$، $g(x) \le h(x)$، آنگاه $\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b h(x)\, dx$. قضیهٔ ۴.۳۳ را ببینید.

همچنین از نتیجه زیر استفاده می‌کنیم:

(ب) اگر g بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه

$$|\int_a^b g(x)dx| \leq \int_a^b |g(x)|\ dx\ . \qquad (1)$$

بنابر آنچه در بحث ۳.۱۹ متذکر شدیم و در قضیهٔ ۲.۳۳ ثابت می‌شود، تابعهای پیوسته بر بازه‌های بسته انتگرالپذیرند.

۲.۲۵ قضیه. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از تابعهای پیوسته بر $[a\ ,\ b]$ باشد و فرض کنید که، به طور یکنواخت بر $[a\ ,\ b]$، $f_n \to f$. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)\ dx\ . \qquad (1)$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۳.۲۴، f پیوسته است و بنابراین $f_n - f$ ها هم بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیرند. فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون، به طور یکنواخت بر $[a\ ,\ b]$، $f_n \to f$، عددی مانند N موجود است به طوری که برای هر $x \in [a\ ,\ b]$ و هر $n > N$، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$. در نتیجه، $n > N$ مستلزم آن است که

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx\right| &= \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\ dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\ dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a}\ dx = \varepsilon\ . \end{aligned}$$

اولین $\leq$ با به‌کاربردن ۱.۲۵ (ب) در مورد $g = f_n - f$ نتیجه می‌شود و دومین $\leq$ با به‌کاربردن ۱.۲۵ (الف) در مورد $g = |f_n - f|$ و $h = \varepsilon/(b - a)$ نتیجه می‌شود؛ h تابع ثابتی از کار در می‌آید، ولی مشکلی ایجاد نمی‌کند.

آخرین پاراگراف نشان می‌دهد که به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی مانند N موجود است به طوری که برای $n > N$، $\left|\int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \varepsilon$. بنابراین، (۱) برقرار است. □

یکی از مزیتهای مفهوم دنبالهٔ کوشی را یادآوری می‌کنیم: می‌توان صرفاً با تحقیق اینکه دنباله‌ای مانند (s_n) از اعداد حقیقی یک دنبالهٔ کوشی است، بدون دانستن حد آن، نشان داد که این

دنباله همگراست. آشکار است که نتیجهٔ مشابهی برای دنباله‌ای از تابعها نیز ارزشمند خواهد بود. زیرا، محتملاً تابع حدی را از پیش نمی‌دانیم. آنچه بدان نیاز داریم ایدهٔ «به طور یکنواخت کوشی» است.

۳.۲۵ تعریف. دنباله‌ای مانند (f_n) از تابعها که بر مجموعه‌ای مانند $S \subseteq \mathbf{R}$ تعریف شده‌اند، به طور یکنواخت بر S کوشی است در صورتی که

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود است به طوری که

برای هر $x \in S$ و هر $m, n > N$، $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

این تعریف را با تعریف دنباله‌ای کوشی از اعداد حقیقی [تعریف ۸.۱۰] و تعریف همگرایی یکنواخت [تعریف ۲.۲۴] مقایسه کنید. تمرین ساده‌ای خواهد بود که نشان دهیم دنباله‌های همگرای یکنواخت از تابعها، به طور یکنواخت کوشی هستند؛ تمرین ۴.۲۵ را ببینید. دقیقاً مانند حالت دنباله‌های اعداد حقیقی، نتیجه جالب و مفید، نتیجه عکس آن است.

۴.۲۵ قضیه. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از تابعها باشد که بر مجموعه‌ای مانند $S \subseteq \mathbf{R}$ تعریف شده است و بر آن به طور یکنواخت کوشی است. در این صورت، تابعی مانند f بر S موجود است به طوری که، به طور یکنواخت بر S، $f_n \to f$.

برهان. ابتدا باید f را «پیدا کنیم». کار را با اثبات حکم زیر شروع می‌کنیم:

(۱) به ازای هر $x_0 \in S$، دنباله $(f_n(x_0))$ دنباله‌ای کوشی از اعداد حقیقی است.

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود است به طوری که

برای هر $x \in S$ و $m, n > N$، $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

به ویژه، داریم

برای $m, n > N$، $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$.

این، نشان می‌دهد که $(f_n(x_0))$ یک دنبالهٔ کوشی است، و بنابراین، (۱) برقرار است.

اینک، برای هر $x_0 \in S$، حکم (۱) مستلزم این است که حد $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ باید موجود باشد؛ این حکم در قضیهٔ ۱۱.۱۰، که نهایتاً به اصل موضوع کمال ۴.۴ بستگی دارد، ثابت شده است. پس، تعریف می‌کنیم $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. با این کار تابعی مانند f بر S تعریف می‌شود

به طوری که، نقطه به نقطه بر S، $f_n \to f$.

حال که f را «پیدا کرده‌ایم»، باید ثابت کنیم که، به طور یکنواخت بر S، $f_n \to f$. فرض کنید $\varepsilon > 0$. عددی مانند N موجود است به طوری که

(۲) برای هر $x \in S$ و هر $m , n > N$، $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

$x \in S$ و $m > N$ را در نظر بگیرید. حکم (۲) حاکی از آن است که $f_n(x)$، به ازای هر $n > N$ در بازهٔ باز $(f_m(x) - \frac{1}{2}\varepsilon, f_m(x) + \frac{1}{2}\varepsilon)$ قرار دارد. بنابراین، همان طور که در تمرین ۹.۸ متذکر شده‌ایم، حد $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ باید در بازهٔ بسته $[f_m(x) - \frac{1}{2}\varepsilon , f_m(x) + \frac{1}{2}\varepsilon]$ قرار داشته باشد. به عبارت دیگر،

برای هر $x \in S$ و $m > N$، $|f(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

در این صورت، نسبتاً بدیهی است که

برای هر $x \in S$ و $m > N$، $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

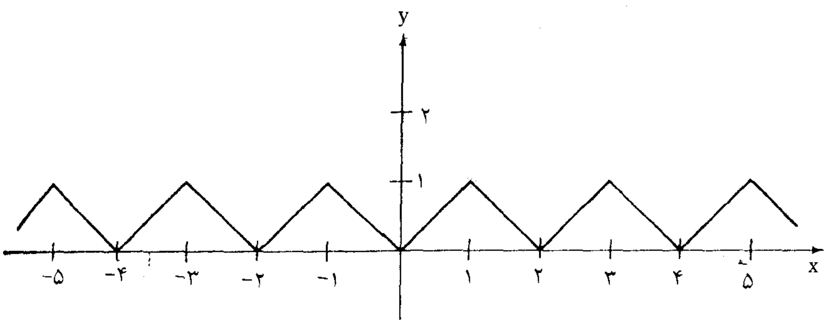
این حکم نشان می‌دهد که به طور یکنواخت بر S، $f_n \to f$ و این همان است که باید ثابت می‌کردیم. □

قضیهٔ ۴.۲۵ به ویژه در مورد «سریهای تابعها» سودمند است. بهتر می‌دانیم معنی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ را یادآوری کنیم که در آن، a_k ها اعداد حقیقی‌اند. این، به معنی $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ است مشروط بر آنکه این حد [به عنوان یک عدد حقیقی، $+\infty$ یا $-\infty$] موجود باشد. در غیر این صورت، نماد $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ فاقد معنی است. بنابراین، سری نامتناهی، حد دنباله‌ای از مجموعهای جزئی $\sum_{k=1}^{n} a_k$ است. تذکرات مشابهی در مورد سریهای تابعها صادق است. یک سری از تابعها، عبارتی به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ یا $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ است که دارای معنی است مشروط بر آنکه دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\sum_{k=0}^{n} g_k$، نقطه به نقطه، همگرا باشد یا نقطه به نقطه به $+\infty$ یا $-\infty$ واگرا باشد. اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی بر مجموعه‌ای مانند S؛ به طور یکنواخت به $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ همگرا باشد، آنگاه گوییم که سری بر S همگرای یکنواخت است.

مثال ۱. هر سری توانی یک سری از توابع است. زیرا $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ است که در آن، $g_k(x) = a_k x^k$.

مثال ۲. $\sum_{k=۰}^{\infty} x^k/(۱ + x^k)$ یک سری از تابعهاست، اما یک سری توانی نیست؛ حداقل در صورت فعلی چنین نیست. این سری مانند $\sum_{k=۰}^{\infty} g_k$ است که در آن، برای هر x، $g_۰(x) = \frac{۱}{۲}$؛ برای هر x، $g_۱(x) = x/(۱ + x)$؛ برای هر x، $g_۲(x) = x^۲/(۱ + x^۲)$؛ و غیره.

مثال ۳. فرض کنید که g تابعی باشد که در شکل ۱.۲۵ رسم شده است، و فرض کنید که برای هر $x \in \mathbf{R}$، $g_n(x) = g(۴^n x)$. در این صورت، $\sum_{n=۰}^{\infty} (۳/۴)^n g_n(x)$ یک سری از تابعهاست. تابع حدی آن f، بر **R** پیوسته است، ولی دارای این خاصیت شگفت آور است که در هیچ نقطه‌ای مشتقپذیر نیست! برهان مشتقناپذیری f تا اندازه‌ای ظریف است؛ ۱۸.۷ از [۱۹] را ببینید.



شکل ۱.۲۵

قضایای مربوط به دنباله‌های تابعها را می‌توان به سادگی به قضیه‌هایی درباره سریهای تابعها، برگرداند. مثالی ارائه می‌کنیم.

۵.۲۵ قضیه. سری ای مانند $\sum_{k=۰}^{\infty} g_k$ از تابعها بر مجموعه‌ای مانند $S \subseteq \mathbf{R}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که هر g_k بر S پیوسته باشد و سری به طور یکنواخت بر S همگرا باشد. در این صورت، سری $\sum_{k=۰}^{\infty} g_k$، نمایش تابع پیوسته‌ای بر S است.

برهان. هر مجموع جزئی $f_n = \sum_{k=۰}^{n} g_k$ پیوسته است و دنبالهٔ (f_n) به طور یکنواخت بر S همگراست. لذا، بنابر قضیهٔ ۳.۲۴، تابع حدی آن پیوسته است. □

معیار کوشی برای سری $\sum a_k$ را، که در تعریف ۳.۱۴ ارائه شده است، به خاطر آورید:

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود است به طوری که
$n \geq m > N$ مستلزم آن است که $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.

مشابه این معیار برای سریهای تابعها نیز مفید است. دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری‌ای مانند $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ از تابعها، بر مجموعه S، به طور یکنواخت کوشی است اگر و تنها اگر این سری در معیار کوشی [به طور یکنواخت] صدق کند:

به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود است به طوری که
$n \geq m > N$ مستلزم آن است که برای هر $x \in S$، $\left|\sum_{k=m}^{n} g_k(x)\right| < \varepsilon$.

۶.۲۵ قضیه. اگر سری ای مانند $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ از تابعها بر مجموعهٔ S به طور یکنواخت در معیار کوشی صدق کند، آنگاه سری بر S همگرای یکنواخت است.

برهان. فرض کنید $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$. دنبالهٔ (f_n) از مجموعهای جزئی بر S به طور یکنواخت کوشی است و در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۴.۲۵، همگرای یکنواخت بر S است. □

نتیجه‌ای مفید از این قضیهٔ، چنین است:

۷.۲۵ *آزمون M– وایرشتراس.* فرض کنید (M_k) دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد به طوری که $\sum M_k < \infty$. اگر برای هر x در مجموعه‌ای مانند S، $|g_k(x)| \leq M_k$، آنگاه $\sum g_k$ همگرای یکنواخت بر S است.

برهان. برای تحقیق درستی معیار کوشی بر S، فرض کنید که $\varepsilon > 0$. چون سری $\sum M_k$ همگراست، پس این سری در معیار کوشی ۳.۱۴ صدق می‌کند. بنابراین، عددی مانند N موجود است به طوری که

$n \geq m > N$ مستلزم آن است که $\left|\sum_{k=m}^{n} M_k\right| < \varepsilon$.

در نتیجه، اگر $n \geq m > N$ و $x \in S$، آنگاه

$$\left|\sum_{k=m}^{n} g_k(x)\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |g_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} M_k < \varepsilon$$

بنابراین، سری $\sum g_k$ به طور یکنواخت در معیار کوشی بر S صدق می‌کند و قضیهٔ ۶.۲۵ نشان می‌دهد که این سری همگرای یکنواخت بر S است. □

مثال ۴. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x^n$ نمایش تابع پیوسته‌ای مانند f بر $(-2\ ,\ 2)$ است. امّا، همگرای یکنواخت نیست.

حل. این، یک سری توانی با شعاع همگرایی ۲ است. واضح است که این سری در $x = 2$ یا در $x = -2$ همگرا نیست. بنابراین، بازهٔ همگرایی آن $(-2\ ,\ 2)$ است.

فرض کنید که $0 < a < 2$ و توجه کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}a^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a}{2})^n$ همگراست. زیرا، برای $x \in [-a\ ,\ a]$، $|2^{-n}x^n| \leq 2^{-n}a^n = (a/2)^n$؛ آزمون M– وایرشتراس ۷.۲۵ نشان می‌دهد که سری $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n}x^n$ به تابعی مانند f بر $[-a\ ,\ a]$ همگرای یکنواخت است. بنابر قضیهٔ ۵.۲۵، تابع حدی در هر نقطهٔ از مجموعهٔ $[-a\ ,\ a]$ پیوسته است. چون a می‌تواند هر عددی کوچکتر از ۲ باشد، نتیجه می‌گیریم که f نمایش تابع پیوسته‌ای بر $(-2\ ,\ 2)$ است.

چون برای هر n، $\sup\{|2^{-n}x^n| : x \in (-2\ ,\ 2)\} = 1$، با توجه به مثال بعدی، همگرایی این سری بر $(-2\ ,\ 2)$ نمی‌تواند یکنواخت باشد.

مثال ۵. نشان دهید که اگر سری $\sum g_n$ همگرای یکنواخت بر مجموعه‌ای مانند S باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} [\sup\{|g_n(x)| : x \in S\}] = 0\ . \qquad (1)$$

حل. فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون سری $\sum g_n$ در معیار کوشی صدق می‌کند، N ای موجود است به طوری که

$n \geq m > N$ مستلزم آن است که به ازای هر $x \in S$، $|\sum_{k=m}^{n} g_k(x)| < \varepsilon$.

به ویژه،

$n > N$ مستلزم آن است که به ازای هر $x \in S$، $|g_n(x)| < \varepsilon$.

بنابراین،

$n > N$ مستلزم آن است که $\sup\ \{|g_n(x)| : x \in S\} \leq \varepsilon$.

این، (۱) را برقرار می‌کند.

تمرینها

۱.۲۵. ۱.۲۵ (ب) را از ۱.۲۵ (الف) نتیجه بگیرید. راهنمایی: (الف) را دوبار به کار ببرید، یک بار برای g و |g|، و یک بار برای |g|− و g.

۲.۲۵. فرض کنید $f_n(x) = x^n/n$. نشان دهید که (f_n) بر $[-1, 1]$ همگرای یکنواخت است و تابع حدی را معین کنید.

۳.۲۵. فرض کنید که برای هر عدد حقیقی x، $f_n(x) = (n + \cos x)/(2n + \sin^2 x)$.

(الف) نشان دهید که (f_n) همگرای یکنواخت بر $\mathbf{R}$ است. راهنمایی: ابتدا، معین کنید که تابع حدی چیست؛ سپس، نشان دهید که (f_n) به آن حد، همگرای یکنواخت است.

(ب) حاصل $\lim_{n\to\infty} \int_2^7 f_n(x)\, dx$ را محاسبه کنید. راهنمایی: از f_n انتگرال نگیرید.

۴.۲۵. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از تابعها بر مجموعه‌ای مانند $S \subseteq \mathbf{R}$ باشد و فرض کنید که به طور یکنواخت بر S، $f_n \to f$. ثابت کنید که (f_n) به طور یکنواخت کوشی بر S است. راهنمایی: به عنوان الگو از برهان لم ۹.۱۰ استفاده کنید، اما دقت کنید.

۵.۲۵. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از تابعهای کراندار بر مجموعه‌ای مانند S باشد و فرض کنید که به طور یکنواخت بر S، $f_n \to f$. ثابت کنید f تابعی کراندار بر S است.

۶.۲۵. (الف) نشان دهید که اگر $\sum |a_k| < \infty$، آنگاه $\sum a_k x^k$ بر $[-1, 1]$ به تابع پیوسته‌ای همگرای یکنواخت است.

(ب) آیا $\sum_{k=1}^{\infty} (1/n^2)x^n$ نمایش تابعی پیوسته بر $[-1, 1]$ است؟

۷.۲۵. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)\cos nx$ به تابع پیوسته‌ای بر $\mathbf{R}$ همگرای یکنواخت است.

۸.۲۵. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/(n^2 2^n)$ دارای شعاع همگرایی ۲ است و اینکه این سری به تابع پیوسته‌ای بر $[-2, 2]$ همگرای یکنواخت است.

۹.۲۵. (الف) فرض کنید $0 < a < 1$. نشان دهید که سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ بر $[-a, a]$ همگرای یکنواخت به $1/(1 - x)$ است.

(ب) آیا سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ بر $(-1, 1)$ به $1/(1 - x)$ همگرای یکنواخت است؟

۱۰.۲۵. (الف) نشان دهید که برای $x \in [0, 1)$، $\sum x^n/(1 + x^n)$ همگراست.

(ب) نشان دهید که برای هر a که $0 < a < 1$، این سری بر $[0, a]$ همگرای

یکنواخت است.

(پ) آیا این سری همگرای یکنواخت بر $[۰ , ۱]$ است؟ توضیح دهید.

۱۱.۲۵. (الف) نمودار تابعهای $g_۰$، $g_۱$، $g_۲$ و $g_۳$ در مثال ۳، را رسم کنید.

(ب) ثابت کنید که تابع f در مثال ۳، پیوسته است.

۱۲.۲۵. فرض کنید که $\sum_{k=۱}^{\infty} g_k$ سری‌ای از تابعهای پیوستهٔ g_k بر $[a , b]$ باشد که به طور یکنواخت بر $[a , b]$ همگرا به g است. ثابت کنید که

$$\int_a^b g(x)\ dx = \sum_{k=۱}^{\infty} \int_a^b g_k(x)\ dx .$$

۱۳.۲۵. فرض کنید که $\sum_{k=۱}^{\infty} g_k$ و $\sum_{k=۱}^{\infty} h_k$ بر مجموعه‌ای مانند S همگرای یکنواخت باشند. نشان دهید که $\sum_{k=۱}^{\infty} (g_k + h_k)$ بر S همگرای یکنواخت است.

۱۴.۲۵. ثابت کنید که اگر $\sum g_k$ همگرای یکنواخت بر مجموعه‌ای مانند S باشد و h تابعی کراندار بر S باشد، آنگاه $\sum hg_k$ همگرای یکنواخت بر S است.

۱۵.۲۵. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از تابعهای پیوسته بر $[a , b]$ باشد. فرض کنید که، برای هر $x \in [a , b]$، $(f_n(x))$ دنباله‌ای غیر صعودی از اعداد حقیقی باشد.

(الف) ثابت کنید که اگر نقطه به نقطه بر $[a , b]$، $f_n \to ۰$، آنگاه به طور یکنواخت بر بازهٔ بسته $[a , b]$، $f_n \to ۰$. راهنمایی: اگر چنین نباشد، $\varepsilon > ۰$ای و دنباله‌ای در $[a , b]$ مانند x_n موجود است به طوری که برای هر n، $f_n(x_n) \geq \varepsilon$. تناقضی را به دست آورید.

(ب) ثابت کنید که اگر نقطه به نقطه بر $[a , b]$، $f_n \to f$، و اگر f بر $[a , b]$ پیوسته باشد آنگاه به طور یکنواخت بر $[a , b]$، $f_n \to f$. این، قضیه دینی [۱] است.

(۱) Dini's theorem

بخش ۲۶. مشتقگیری و انتگرالگیری از سریهای توانی

از نتیجه زیر در بخش ۲۳ بعد از مثال ۸، یاد شده است.

۱.۲۶ قضیه. فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$ باشد [ممکن است $R = +\infty$]. اگر $0 < R_1 < R$، آنگاه سری توانی بر $[-R_1 , R_1]$ به طور یکنواخت به تابعی پیوسته همگراست.

برهان. $0 < R_1 < R$ را در نظر بگیرید. نظری اجمالی به قضیهٔ ۱.۲۳، نشان می‌دهد که سریهای $\sum a_n x^n$ و $\sum |a_n| x^n$ شعاع همگرایی یکسانی دارند. زیرا، β و R برحسب $|a_n|$ تعریف شده‌اند. چون $|R_1| < R$، باید داشته باشیم $\sum |a_n| R_1^n < \infty$. به وضوح، برای هر $x \in [-R_1 , R_1]$ داریم، $|a_n x^n| \le |a_n| R_1^n$، و لذا، بنابر آزمون M- وایرشتراس ۷.۲۵، سری $\sum a_n x^n$ همگرای یکنواخت بر $[-R_1 , R_1]$ است. بنابر قضیهٔ ۵.۲۵، تابع حدی در هر نقطهٔ $[-R_1 , R_1]$ پیوسته است. □

۲.۲۶ نتیجه. سری توانی $\sum a_n x^n$ بر بازهٔ باز $(-R , R)$، همگرای یکنواخت به تابعی پیوسته است.

برهان. اگر $x_0 \in (-R , R)$، آنگاه برای $R_1 < R$ ای، $x_0 \in (-R_1 , R_1)$. قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که حد این سری در x_0 پیوسته است. □

تأکید می‌کنیم که لزومی ندارد که یک سری توانی همگرای یکنواخت بر بازهٔ همگرایی خود باشد. گرچه ممکن است چنین باشد. نگاه کنید به مثال ۴ از بخش ۲۵ و تمرین ۸.۲۵.

می‌خواهیم جمله به جمله از سری توانی انتگرال و مشتق بگیریم، بنابراین، به وضوح مهم است بدانیم که سریهای جدید درکجا همگرا هستند. پاسخ در لم بعدی داده می‌شود.

۳.۲۶ لم. اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی R باشد، آنگاه سریهای

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

دارای شعاع همگرایی R اند.

برهان. ابتدا، ملاحظه می‌کنیم که سری $\sum n a_n x^{n-1}$ و $\sum n a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی یکسانی هستند: این سریها دقیقاً برای مقادیر یکسان x همگرا هستند. به همین نحو، $\sum a_n/(n+1)\, x^{n+1}$ و $\sum a_n/(n+1) x^n$ شعاع همگرایی یکسانی دارند.

حال، به خاطر آورید که $R = 1/\beta$، که در آن $\beta = \limsup |a_n|^{1/n}$. برای سری $\sum n a_n x^n$، عبارت $\limsup (n|a_n|)^{1/n} = \limsup n^{1/n}|a_n|^{1/n}$ را در نظر می‌گیریم. بنابر ۷.۹ (پ)، داریم $\lim n^{1/n} = 1$، و بنابراین طبق قضیهٔ ۱.۱۲، $\limsup (n|a_n|)^{1/n} = \beta$. پس، سری $\sum n a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی R است.

برای سری $\sum a_n/(n+1) x^n$، عبارت $\limsup (|a_n|/(n+1))^{1/n}$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان نشان داد که $\lim (n+1)^{1/n} = 1$ و بنابراین $\lim (1/(n+1))^{1/n} = 1$. در نتیجه، بنابر قضیه ۱.۱۲، داریم $\limsup (|a_n|/(n+1))^{1/n} = \beta$، و بنابراین، سری $\sum a_n/(n+1) x^n$ دارای شعاع همگرایی R است. □

۴.۲۶ قضیه. فرض کنید که $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی $R > 0$ باشد. در این صورت،

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad , \quad |x| < R \tag{1}$$

برهان.

x را ثابت می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $x < 0$؛ حالت $x > 0$ مشابه همین است. [تمرین ۱.۲۶].
بر بازهٔ $[x, 0]$، دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$، بنابر قضیهٔ ۱.۲۶، به $f(t)$ همگرای یکنواخت است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۲.۲۵، داریم

$$\int_x^0 f(t)\,dt = \lim_{n=\infty} \int_x^0 \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\Big)\,dt = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \int_x^0 t^k dt$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{k=\circ}^{n} a_k \left[\frac{\circ^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}\right] = -\sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} . \qquad (2)$$

دومین تساوی برقرار است؛ زیرا، می‌توانیم جای مجموع متناهی و انتگرال را تعویض بکنیم. این یک خاصیت اساسی انتگرالهاست [قضیهٔ ۳.۳۳]. چون $\int_\circ^x f(t)dt = -\int_x^\circ f(t)dt$ تساوی (۲) مستلزم تساوی (۱) است. □

قضیه‌ای که هم اکنون ثابت کردیم، نشان می‌دهد که می‌توان از یک سری توانی در بازهٔ همگرایی آن، جمله به جمله انتگرال گرفت. مشتقگیری جمله به جمله از آن نیز مجاز است.

۵.۲۶ قضیه. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی $R > \circ$ باشد. در این صورت، f بر $(-R, R)$ مشتقپذیر است و

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ ، } |x| < R \text{ به ازای } . \qquad (1)$$

برهان قضیهٔ ۴.۲۶، کاربرد مستقیمی از قضیهٔ ۲.۲۵ بود. امّا، مشابه قضیهٔ ۲.۲۵ برای مشتقگیری مستقیماً برقرار نیست [تمرین ۸.۲۳ و مثال ۴ از بخش ۲۴ را ببینید.] بنابراین، برهان غیر مستقیمی را برای این قضیه ارائه می‌دهیم.

برهان. کار را با سری $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ شروع می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که بنابر لم ۳.۲۶، برای $|x| < R$ ، این سری همگراست. قضیهٔ ۴.۲۶ نشان می‌دهد که می‌توانیم از g جمله به جمله انتگرال بگیریم:

$$\int_\circ^x g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_\circ \ , \ \ |x| < R .$$

بنابراین، اگر $\circ < R_1 < R$ ، آنگاه

$$f(x) = \int_{-R_1}^{x} g(t)\, dt + k \ , \ \ |x| < R_1$$

که در آن ، k عددی ثابت است؛ در حقیقت، $k = a_\circ - \int_{-R_1}^{\circ} g(t)dt$. چون g پیوسته است، یکی از صورتهای قضیهٔ اصلی حسابان [قضیهٔ ۳.۳۴] نشان می‌دهد که f مشتقپذیر است و اینکه $f'(x) = g(x)$. در نتیجه،

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} , \ \ |x| < R . \qquad \square$$

مثال ۱. یادآوری می‌کنیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \quad |x| < 1 . \tag{1}$$

با مشتقگیری جمله به جمله، خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad |x| < 1 .$$

با انتگرالگیری جمله به جمله از (۱)، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\log(1-x) \quad ,$$

یا

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad , \quad |x| < 1 . \tag{2}$$

با جایگذاری x به جای $-x$، به دست می‌آوریم

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad |x| < 1 . \tag{3}$$

چنین نتیجه می‌شود که این تساوی برای $x = 1$ نیز برقرار است [مثال ۲ را ببینید.] و بنابراین اتحاد جالب زیر را داریم

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots . \tag{4}$$

در معادلهٔ (۲)، قرار می‌دهیم $x = (m-1)/m$. در این صورت،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{m-1}{m}\right)^n = -\log\left(1 - \frac{m-1}{m}\right) = -\log(1/m) = \log m .$$

پس، برای هر m داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{m-1}{m}\right)^n = \log m .$$

در عین حال، این برهان دیگری برای آن است که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

برای اثبات (۴)، به قضیهٔ نسبتاً مشکلی دربارهٔ همگرایی یک سری توانی در نقاط انتهایی

بازهٔ همگرایی آن، نیاز داریم.

۶.۲۶ *قضیهٔ آبل*. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی مثبت متناهی R باشد. اگر این سری در $x = R$ همگرا باشد، آنگاه f در $x = R$ پیوسته است. اگر سری در $x = -R$ همگرا باشد، آنگاه f در $x = -R$ پیوسته است.

مثال ۲. هم چنان که وعده داده بودیم، به (۳) از مثال (۱) باز می‌گردیم.

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \ , \quad |x| < 1 \ .$$

برای $x = 1$، بنابر قضیهٔ سریهای متناوب ۳.۱۵، سری همگراست. در نتیجه، بنابر قضیهٔ آبل، این سری تابعی مانند f بر $(-1 , 1)$ را نمایش می‌دهد به طوری که در $x = 1$ پیوسته است. تابع $\log(1 + x)$ نیز در $x = 1$ پیوسته است و بنابراین، تابعها در $x = 1$ برهم منطبق‌اند. [به طور تفصیلی، اگر (x_n) دنباله‌ای در $(-1 , 1)$ همگرا به ۱ باشد، در این صورت، $f(1) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty}\log(1 + x_n) = \log 2$] بنابراین، داریم

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \ .$$

برهان دیگری برای این اتحاد، در مثال ۲ از بخش ۳۱، داده شده است.

مثال ۳. یادآوری می‌کنیم که برای $|x| < R$، $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1 - x)$. توجه کنید که در $x = -1$ تابع $1/(1 - x)$ پیوسته است و مقدار ۱/۲ را اختیار می‌کند. با وجود این، سری در $x = -1$ همگرا نیست. بنابراین، قضیه آبل مورد استعمال ندارد.

برهان قضیهٔ آبل. جان کلام برهان در حالت ۱ است.

حالت ۱. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی ۱ باشد و اینکه سری در $x = 1$ همگرا باشد. لازم است ثابت کنیم که f در نقطه $x = 1$ پیوسته است.

فرض کنید که برای $n = 0 , 1 , 2 , \dots$، $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ و $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = f_n(1)$، و

گیرید که $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = f(1)$، به طوری که $\lim s_n = s$. برای $0 < x < 1$، داریم

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = s_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\, x^k$$

$$= s_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x^k - x \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} x^{k-1}$$

$$= s_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x^k - x \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k$$

$$= s_0 + s_n x^n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (1 - x) x^k - x s_0$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} s_k (1 - x) x^k + s_n x^n .$$

اینک، وقتی که n به ∞ میل می‌کند، حد می‌گیریم. داریم $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ و $\lim_{n\to\infty} s_n x^n = \lim s_n . \lim x^n = s.0 = 0$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (1 - x) \quad , \quad 0 < x < 1 .$$

چون $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1 - x)$، همچنین داریم

$$f(1) = s = \sum_{n=0}^{\infty} s (1 - x) x^n .$$

لذا، خواهیم داشت

$$f(1) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_n)\, (1 - x) x^n . \qquad (1)$$

حال، فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون $\lim s_n = s$، عددی مانند N در N موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|s - s_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. فرض کنید $g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} |s - s_n|\, (1 - x) x^n$. از (۱)، به ازای $0 < x < 1$، به دست می‌آوریم:

$$|f(1) - f(x)| \leq g_N(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} |s - s_n|\, (1 - x) x^n$$

$$\leq g_N(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon (1 - x) x^n < g_N(x) + \frac{1}{2} \varepsilon . \qquad (2)$$

تابع g_N پیوسته است و $g_N(1) = 0$. بنابراین، $\delta > 0$ای موجود است به طوری که $1 - \delta < x < 1$ مستلزم آن است که $g_N(x) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

در این صورت، از (۲) نتیجه می‌گیریم که

$1 > x > 1 - \delta$ مستلزم آن است که $|f(1) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.
این ثابت می‌کند که f در $x = 1$ پیوسته است. [حالت $x > 1$ را در نظر نمی‌گیریم. زیرا، $\mathrm{dom}(f) \subseteq [-1, 1]$].

حالت ۲. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی R باشد، $0 < R < \infty$، و اینکه سری در $x = R$ همگراست. فرض کنید $g(x) = f(Rx)$ و توجه کنید که

برای $|x| < 1$، $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n x^n$.

این سری دارای شعاع همگرایی ۱ است و در $x = 1$ همگراست. بنابر حالت (۱)، تابع g در $x = 1$ پیوسته است. چون $f(x) = g(x/R)$، نتیجه می‌شود که f در $x = R$ پیوسته است.

حالت ۳. فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی R باشد، $0 < R < \infty$، و اینکه سری در $x = -R$ همگرا باشد. فرض کنید $h(x) = f(-x)$ و توجه کنید که

برای $|x| < R$، $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$.

سری متناظر h، در $x = R$، همگراست. بنابراین، h در $x = R$، بنابر حالت ۲، پیوسته است. نتیجه می‌شود که $f(x) = h(-x)$، در $x = -R$، پیوسته است. □

دیدگاه ما در این مقدمهٔ بسیار کوتاه بر سریهای توانی این بوده است: برای یک سری توانی مفروضی مانند $\sum a_n x^n$، دربارهٔ تابع $f(x) = \sum a_n x^n$ چه می‌توان گفت؟ این دیدگاه گمراه کننده است. اغلب، در عمل کار را با تابعی مانند f شروع می‌کنیم و در صدد پیدا کردن سری توانی‌ای بر می‌آییم که نمایش این تابع برای برخی یا همه مقادیر x باشد. این بدان دلیل است که سری توانی که حدهای چند جمله‌ایها هستند. از جهتی از مفاهیم پایه‌ای هستند.

اگر برای $|x| < R$ داشته باشیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، در این صورت می‌توانیم از f الی غیر النهایه جمله به جمله مشتق بگیریم. در هر مرحله، می‌توانیم k امین مشتق f را در ۰ که به صورت $f^{(k)}(0)$ نوشته می‌شود، محاسبه کنیم. به سادگی نشان داده می‌شود که برای $k \geq 0$، $f^{(k)}(0) = k! a_k$. این نتیجه حاکی از آن است که اگر بتوان f را به صورت یک سری توانی نمایش

داد، آنگاه سری توانی باید به صورت $\sum_{k=0}^{\infty}(f^{(k)}(0)/k!)x^k$ باشد. این، سری تیلور برای f حول ۰ است. اغلب، امّا نه همیشه، سری تیلور دربازهٔ همگرایی‌اش بر f منطبق خواهد شد. این حکم برای بسیاری از تابعهای مأنوس درست از کار در می‌آید. مثلاً، می‌توان رابطه‌های زیر را، برای هر x در R، ثابت کرد:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad , \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} ,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

مطالعهٔ مفصلتر سریهای تیلور در بخش ۳۱ ارائه شده است.

تمرینها

۱.۲۶. قضیهٔ ۴.۲۶ را برای $x < 0$ ثابت کنید.

۲.۲۶. (الف) ثابت کنید که برای $|x| < 1$، $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x/(1-x)^2$؛ نگاه کنید به مثال ۱.

(ب) مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ را تعیین کنید. با تمرین ۱۳.۱۴ (ت) مقایسه کنید.

(پ) مقدارهای $\sum_{n=1}^{\infty} n/3^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n/3^n$ را تعیین کنید.

۳.۲۶. (الف) از تمرین ۲.۲۶ استفاده کنید و فرمول صریحی برای $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ به دست آورید.

(ب) مقادیر $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/2^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/3^n$ را تعیین کنید.

۴.۲۶. (الف) چون برای $x \in \mathbf{R}$، $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)x^n$. ثابت کنید که برای $x \in \mathbf{R}$، باید $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n/n!)x^{2n}$.

(ب) عبارت $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ را به صورت یک سری توانی بیان کنید.

۵.۲۶. فرض کنید که برای $x \in \mathbf{R}$، $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)x^n$. ثابت کنید که $f' = f$. از این امر که $f(x) = e^x$، استفاده نکنید. این حکم برقرار است ولی تاکنون در این کتاب ثابت نشده است.

۶.۲۶. فرض کنید که برای $x \in \mathbf{R}$، $s(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + \dots$،

$$c(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots$$

(الف) ثابت کنید که $s' = c$ و $c' = -s$.

(ب) ثابت کنید که $(s^2 + c^2)' = 0$.

(پ) ثابت کنید که $s^2 + c^2 = 1$.

در واقع $s(x) = \sin x$ و $c(x) = \cos x$. اما، شما به این نتایج نیازی ندارید.

۷.۲۶. فرض کنید که برای $x \in \mathbf{R}$، $f(x) = |x|$. آیا یک سری توانی مانند $\sum a_n x^n$ موجود است به طوری که برای هر x، $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$؟ بحث کنید.

۸.۲۶. (الف) نشان دهید که برای هر $x \in (-1, 1)$، $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1/(1 + x^2)$.

راهنمایی: $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = 1/(1 - y)$. فرض کنید $y = -x^2$.

(ب) نشان دهید که برای هر $x \in (-1, 1)$، $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$.

(پ) نشان دهید که تساوی در (ب) برای $x = 1$ نیز برقرار است. از این نتیجه استفاده کنید و فرمول مناسبی برای π به دست آورید.

(ت) در $x = -1$ چه اتفاق می‌افتد؟

بخش ۲۷. قضیهٔ تقریب وایرشتراس

فرض کنید شعاع همگرایی یک سری توانی بزرگتر از ۱ باشد، و فرض کنید f معرّف تابعی باشد که به وسیلهٔ این سری توانی داده شده است. قضیهٔ ۱.۲۶ حاکی از آن است که مجموعهای جزئی سری توانی، به طور یکنواخت بر بازهٔ $[-1, 1]$، به تابع f نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر، f را می‌توان بر $[-1, 1]$ به طور یکنواخت برحسب چند جمله‌ایها تعریف کرد. قضیهٔ تقریب وایرشتراس تعمیمی از همین نتیجهٔ اخیر است. زیرا، این قضیه، حاکی از آن است که می‌توان هر تابع پیوسته بر $[-1, 1]$ را به طور یکنواخت برحسب چند جمله‌ایهایی بر $[-1, 1]$ تقریب زد. این، نتیجه‌ای کاملاً متفاوت است. زیرا، نیازی نیست که این تابع به وسیلهٔ یک سری توانی داده شده باشد، تمرین ۷.۲۶ را ببینید. این قضیهٔ تقریب برای هر بازهٔ بسته $[a, b]$ برقرار است و می‌توان آن را از حالت $[0, 1]$ نتیجه گرفت. تمرین ۱.۲۷ را ببینید.

اینک، برهان زیبای منسوب به برنشتاین[1] را ارائه می‌دهیم. انگیزهٔ برنشتاین تأملاتی در

(1) S.N Bernstein.

برخی از مسائل احتمالاتی بود، ولی، ما در اینجا به هیچ وجه از احتمال استفاده نخواهیم کرد. یکی از جنبه‌های جذاب برهان برنشتاین در این است که در آن چند جمله‌ایهای تقریب کننده صراحتاً ارائه می‌شوند. برهانهای مجردتری موجودند که در آنها، این چند جمله‌ایها صراحتاً داده نمی‌شوند. از طرف دیگر، برهانهای مجرد، منجر به تعمیمهای مهم و گسترده‌تر می‌شوند. نحوه عمل با این قضیه را در [۱۲] یا [۱۹] ملاحظه کنید.

به چند نتیجهٔ مقدماتی دربارهٔ چند جمله‌ایهای متضمن ضرایب دو جمله‌ای، نیاز داریم.

۲۷.۱ لم. برای هر $x \in \mathbf{R}$ و $n \geq 0$، داریم،

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 .$$

برهان. این دقیقاً همان قضیهٔ دو جمله‌ای است [تمرین ۱۲.۱]که در مورد $a = x$ و $b = 1 - x$ به کار برده شده است. زیرا، در این حالت $(a+b)^n = 1^n = 1$. □

۲۷.۲ لم. برای $x \in \mathbf{R}$ و $n \geq 0$، داریم

$$\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leq \frac{n}{4} . \tag{1}$$

برهان. چون برای $k \geq 1$، $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$، داریم

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = nx . \tag{2}$$

چون به ازای $k \geq 2$، $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$، پس داریم

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)\, x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j}$$

$$= n(n-1)x^2 \tag{3}$$

با برهم افزودن نتایج (۲) و (۳)، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx = n^2x^2 + nx(1-x) . \qquad (4)$$

چون $(nx-k)^2 = n^2x^2 - 2nx \cdot k + k^2$، از لم ۱.۲۷، (۲) و (۴) استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= n^2x^2 - 2nx(nx) + [n^2x^2 + nx(1-x)] \\ &= nx(1-x) .\end{aligned}$$

این، تساوی (۱) را برقرار می‌کند. نابرابری (۱) صرفاً بیانی از نابرابری $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ است که این خود معادل است با $4x^2 - 4x + 1 \ge 0$ یا $(2x-1)^2 \ge 0$. □

۳.۲۷ تعریف. فرض کنید که f تابعی باشد که بر $[0 , 1]$ تعریف شده است. چند جمله‌ایهای B_nf که با ضابطهٔ

$$B_nf(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

تعریف شده‌اند، چند جمله‌ایهای برنشتاین برای تابع f نامیده می‌شوند.

بیان برنشتاین برای قضیهٔ تقریب وایرشتراس چنین است.

۴.۲۷ قضیه. برای هر تابع پیوستهٔ f بر $[0 , 1]$، داریم

به طور یکنواخت بر $[0 , 1]$، $B_nf \longrightarrow f$.

برهان. فرض می‌کنیم که f متحد با صفر نباشد و $M = \sup\{|f(x)| : x \in [0 , 1]\}$. $\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. چون بنابر قضیهٔ ۲.۱۹، f پیوستهٔ یکنواخت است، $\delta > 0$ ای موجود است به طوری که

(۱) $x , y \in [0 , 1]$، $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

فرض کنید $N = M/(\varepsilon\delta^2)$. در این مرحله انگیزه‌ای برای انتخاب N به این صورت نداریم، اما تأکید می‌کنیم که مقدار N به مقدار x بستگی ندارد. نشان خواهیم داد که

(۲) برای هر $x \in [0 , 1]$ و هر $n > N$ ، $|B_nf(x) - f(x)| < \varepsilon$.

که برهان قضیه را تکمیل می‌کند.

برای اثبات (۲)، x ثابتی در $[۰ , ۱]$ و $n > N$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به لم ۱.۲۷ ، داریم

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n} f(x)\binom{n}{k} x^k (۱ - x)^{n-k}$$

و لذا،

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \sum_{k=۰}^{n} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \cdot \binom{n}{k} x^k(۱ - x)^{n-k} \qquad (۳)$$

برای برآورد این مجموع، مجموعهٔ $\{۰ , ۱ , ۲ , ... , n\}$ را به دو مجموعه افراز می‌کنیم:

$k \in A$ در صورتی که $|\frac{k}{n} - x| < \delta$ در حالی که $k \in B$ در صورتی که $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$.

برای $k \in A$، بنابر (۱) داریم، $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon/۲$ و بنابراین، با استفاده از لم ۱.۲۷،

$$\sum_{k\in A} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \cdot \binom{n}{k} x^k(۱ - x)^{n-k} \leq \sum_{k\in A} \frac{\varepsilon}{۲} \binom{n}{k} x^k(۱ - x)^{n-k} \leq \varepsilon/۲ . \qquad (۴)$$

برای $k \in B$، داریم $|(k - nx)/n| \geq \delta$ یا $(k - nx)^۲ \geq n^۲\delta^۲$، و بنابراین

$$\sum_{k\in B} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \cdot \binom{n}{k} x^k (۱ - x)^{n-k} \leq ۲M \sum_{k\in B} \binom{n}{k} x^k (۱ - x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{۲M}{n^۲d^۲} \sum_{k\in B} (k - nx)^۲ \binom{n}{k} x^k(۱ - x)^{n-k} .$$

بنابر لم ۲.۲۷، این عبارت به وسیلهٔ

$$\frac{۲M}{n^۲\delta^۲} \cdot \frac{n}{۴} = \frac{M}{۲n\delta^۲} < \frac{M}{۲N\delta^۲} = \frac{\varepsilon}{۲}$$

کراندار می‌شود. این نتیجه، و (۴) و (۳) نشان می‌دهند که

$$|B_n f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

یعنی، (۲) برقرار است. □

۵.۲۷ قضیه ***[قضیه تقریب وایرشتراس]***. هر تابع پیوسته بر بازه‌ای بسته مانند $[a , b]$ را می‌توان به طور یکنواخت برحسب چند جمله‌ایهایی بر $[a , b]$ تقریب زد.

به عبارت دیگر، با مفروض بودن تابع پیوسته‌ای مانند f بر $[a, b]$، دنباله‌ای مانند (p_n) از چند جمله‌ایها موجود است به طوری که، به طور یکنواخت بر $[a, b]$، $p_n \to f$.

تمرینها

۱.۲۷. قضیهٔ ۵.۲۷ را به کمک قضیهٔ ۴.۲۷ ثابت کنید. راهنمایی: فرض کنید $\phi(x) = (b-a)x + a$ به طوری که ϕ بازهٔ $[۰ , ۱]$ را به روی $[a , b]$ بنگارد. اگر f بر $[a , b]$ پیوسته باشد، آنگاه $f \circ \phi$ بر $[۰ , ۱]$ پیوسته است.

۲.۲۷. نشان دهید که اگر f بر $\mathbf{R}$ پیوسته باشد، آنگاه دنباله‌ای مانند (p_n) از چند جمله‌ایها موجود است به طوری که به طور یکنواخت بر هر زیر مجموعهٔ کراندار $\mathbf{R}$، $p_n \to f$. راهنمایی: برای $|x| < n$، نابرابری $|f(x) - p_n(x)| < \frac{۱}{n}$ را تدارک ببینید.

۳.۲۷. نشان دهید که دنباله‌ای از چند جمله‌ایها موجود نیست که به طور یکنواخت بر $\mathbf{R}$ به تابع f همگرا باشد در صورتی که

(الف) $f(x) = \sin x$، (ب) $f(x) = e^x$.

۴.۲۷. فرض کنید که f تابعی پیوسته بر $[a , b]$ باشد. نشان دهید که دنباله‌ای مانند (p_n) از چند جمله‌ایها موجود است به طوری که به طور یکنواخت بر $[a , b]$، $p_n \to f$ و به طوری که برای هر n، $p_n(a) = f(a)$.

۵.۲۷. دنبالهٔ $(B_n f)$ از چند جمله‌ایهای برنشتاین را پیدا کنید، در صورتی که

(الف) $f(x) = x$، (ب) $f(x) = x^۲$.

۶.۲۷. چند جمله‌ایهای برنشتاین را برای هر تابع f بر $[۰ , ۱]$ تعریف کردیم. نشان دهید که اگر به طور یکنواخت بر $[۰ , ۱]$، $B_n f \to f$، آنگاه f بر $[۰ , ۱]$ پیوسته است.

۷.۲۷. فرض کنید f تابعی کراندار بر $[۰ , ۱]$ باشد؛ مثلاً، برای هر $x \in [۰ , ۱]$، $|f(x)| \le M$. نشان دهید که کلیه چند جمله‌ایهای برنشتاین $B_n f$، به وسیلهٔ M کراندارند.

فصل ۵

مشتقگیری

در این فصل بحثی نظری از مشتقگیری و مفاهیم وابسته را ارائه می‌کنیم که با اغلب یا همهٔ آنها از درسهای استاندهٔ حسابان آشنا هستیم. سه مورد از سودمندترین نتایج عبارت‌اند از قضیهٔ مقدار میانگین، که در بخش ۲۹ بحث می‌شود، قاعدهٔ هوپیتال، که در بخش ۳۰ بحث می‌شود، و قضیهٔ تیلور، که در بخش ۳۱ ارائه می‌شود.

بخش ۲۸. خاصیتهای اساسی مشتق

شاید بهتر باشد خواننده نظریهٔ حدهای مورد بحث در بخش ۲۰ را مرور کند.

۱.۲۸ تعریف. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که بر بازهٔ بازی شامل نقطه‌ای مانند a تعریف شده است. گوییم که f در a مشتقپذیر است، یا f مشتقی در a دارد، اگر حد

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

موجود و متناهی باشد. به نشانهٔ مشتق f در a خواهیم نوشت $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (۱)$$

در صورتی که این حد موجود و متناهی باشد.

به طور کلی، به f' به نوبهٔ خود به عنوان یک تابع توجه خواهیم کرد. حوزهٔ f' مجموعهٔ نقاطی است که f در آنها مشتقپذیر است؛ بنابراین $\mathrm{dom}(f') \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

مثال ۱. مشتق تابع $g(x) = x^۲$ در $x = ۲$ در مثال ۲ی بخش ۲۰ حساب شد.

$$g'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} (x + ۲) = ۴.$$

می‌توانیم $g'(a)$ را نیز به همین آسانی محاسبه کنیم:

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^۲ - a^۲}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = ۲a\ .$$

این محاسبه حتی برای $a = ۰$ نیز معتبر است. چون نام متغیر a یا x اهمیتی ندارد، می‌توانیم بنویسیم $g'(x) = ۲a$. بنابراین مشتق تابع داده شده با $g(x) = x^۲$ تابعی است که با $g'(x) = ۲x$ داده می‌شود و این را هر دانشجویی که حسابان خوانده، می‌داند.

مثال ۲. مشتق $h(x) = \sqrt{x}$ در $x = ۱$ در مثال ۳ی بخش ۲۰ حساب شد. $h'(۱) = \frac{۱}{۲}$. در واقع برای $x \geq ۰$، $h(x) = x^{۱/۲}$ و برای $x > ۰$، $h'(x) = \frac{۱}{۲} x^{-۱/۲}$؛ نگاه کنید به تمرین ۳.۲۸.

مثال ۳. فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد و فرض کنید که برای هر x در $\mathbb{R}$، $f(x) = x^n$. نشان می‌دهیم که برای هر x در $\mathbb{R}$، $f'(x) = nx^{n-۱}$. a را در $\mathbb{R}$ ثابت بگیرید و ملاحظه کنید که

$$f(x) - f(a) = x^n - a^n = (x - a)\ (x^{n-۱} + ax^{n-۲} + a^۲x^{n-۳} + \dots + a^{n-۲}x + a^{n-۱})$$

و بنابراین برای $x \neq a$،

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x^{n-۱} + ax^{n-۲} + a^۲x^{n-۳} + \dots + a^{n-۲}x + a^{n-۱}$$

نتیجه می‌شود که

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a^{n-۱} + aa^{n-۲} + a^۲a^{n-۳} + \dots + a^{n-۲}a + a^{n-۱}$$

$$= na^{n-۱}\ \ ;$$

در اینجا از قضیهٔ ۴.۲۰ و این حقیقت استفاده کرده‌ایم که برای $k \in \mathbb{N}$، $\lim_{x \to a} x^k = a^k$.

ابتدا ثابت می‌کنیم که مشتقپذیری در هر نقطه، مستلزم پیوستگی در آن نقطه است. این امر

ممکن است از کلیهٔ تصویرهای مربوط به تابعهای مشتقپذیری رایج، بدیهی به نظر برسد. با این حال تمرین ۸.۲۸ شامل مثالی از یک تابع است که در ۰ مشتقپذیر و البته در ۰ [بنابر قضیهٔ آتی] پیوسته است، اما در کلیهٔ نقاط دیگر ناپیوسته است.

۲.۲۸. قضیه. اگر f در نقطه‌ای مانند a مشتقپذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

برهان. فرض کرده‌ایم که $f'(\mathrm{a})=\lim_{x\to \mathrm{a}} (f(x) - f(\mathrm{a})/(x - \mathrm{a})$ و باید ثابت کنیم که $\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$. برای x در حوزهٔ تعریف f، $x \neq \mathrm{a}$ داریم

$$f(x) = (x - \mathrm{a}) \frac{f(x) - f(\mathrm{a})}{x - \mathrm{a}} + f(\mathrm{a}) .$$

چون $\lim_{x\to \mathrm{a}} (x - \mathrm{a}) = 0$ و $\lim_{x\to \mathrm{a}} (f(x) - f(\mathrm{a}))/(x - \mathrm{a})$ موجود و متناهی است، قضیهٔ ۴.۲۰ (ii) نشان می‌دهد که $\lim_{x\to \mathrm{a}} (x - \mathrm{a}) . (f(x) - f(\mathrm{a}))/(x - \mathrm{a}) = 0$. بنابراین $\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$. که همان حکم مطلوب است. □

اینک نتایجی دربارهٔ مجموعها، حاصل ضربها، و مانند آنها را برای مشتقها ثابت می‌کنیم. ابتدا به یاد می‌آوریم که چرا قاعدهٔ حاصل ضرب [برخلاف میل بسیاری از دانشجویان ساده‌نگر درس حسابان!] به صورت $(fg)' = f'g'$ نیست، گرچه حاصل ضرب حدها به گونه‌ای است که از آن انتظار داریم:

$$\lim_{x\to \mathrm{a}} (f_1 f_2)(x) = [\lim_{x\to \mathrm{a}} f_1(x)][\lim_{x\to \mathrm{a}} f_2(x_1)] ,$$

مشروط براینکه حدهای سمت راست موجود و متناهی باشند؛ نگاه کنید به قضیهٔ ۴.۲۰ (ii). مشکل در این است که حد مربوط به مشتق حاصل ضرب برابر با حاصل ضرب حدها برای مشتقها نیست، یعنی

$$\frac{f(x)\, g(x) - f(\mathrm{a})g(\mathrm{a})}{x - \mathrm{a}} \neq \frac{f(x) - f(\mathrm{a})}{x - \mathrm{a}} . \frac{g(x) - g(\mathrm{a})}{x - \mathrm{a}} .$$

قاعده صحیح حاصل ضرب از زیرکانه نوشتن عبارت سمت چپ برحسب $(f(x) - f(\mathrm{a})/(x - \mathrm{a})$ و $(g(x) - g(\mathrm{a}))/(x - \mathrm{a})$ ، نظیر برهانِ ۳.۲۸ (iii) در زیر، حاصل می‌شود.

۳.۲۸ قضیه. فرض کنید f و g تابعهایی باشند که در نقطهٔ a مشتقپذیرند. هر یک از تابعهای cf [c عددی

ثابت]، $f + g$ ، fg ، f/g نیز در a مشتقپذیر است، بجز در مورد f/g در صورتی که $g(a) = 0$؛ چون در این صورت f/g در این حالت در a تعریف شده نیست. فرمولها عبارت اند از

(i) $(cf)'(a) = c.f'(a)$؛

(ii) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$؛

(iii) [قاعدهٔ حاصل ضرب] $(fg)'(a) = f(a)\, g'(a) + f'(a)g(a)$؛

(iv) [قاعده خارج قسمت] $(f/g)'(a) = [g(a)f'(a) - f(a)g'(a)]/g^2(a)$ هرگاه $g(a) \neq 0$.

برهان.

(i) بنابر تعریف cf برای هر x در حوزهٔ تعریف f داریم، $(cf)(x) = c.f(x)$، بنابراین

$$(cf)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} c \,.\, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c \,.\, f'(a)\,.$$

(ii) این نتیجه از اتحاد

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

با گرفتن حد، وقتی $x \longrightarrow a$، و به کاربردن قضیهٔ ۴.۲۰ (i) حاصل می‌شود.

(iii) ملاحظه کنید که برای x در حوزهٔ تعریف $f(g)$، $x \neq a$،

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = f(x)\, \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a)\, \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

وقتی $x \to a$، حد می‌گیریم و توجه می‌کنیم که بنابر قضیهٔ ۲.۲۸، $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. نتیجه می‌گیریم [مجدداً با استفاده از قضیهٔ ۴.۲۰]که

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)\,.$$

(iv) چون $g(a) \neq 0$ و g در a پیوسته است، بازه‌ای باز مانند I شامل a موجود است به طوری که برای هر x در I، $g(x) \neq 0$. برای $x \in I$، می‌توانیم بنویسیم:

$$(f/g)(x) - (f/g)(a) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{g(a)f(x) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}$$

$$= \frac{g(a)f(x) - g(a)f(a) + g(a)f(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}$$

و بنابراین برای x در I، $x \neq a$،

$$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x - a} = \left\{g(a)\,\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a)\,\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right\}\frac{1}{g(x)g(a)}\,.$$

اینک می‌توانیم، وقتی $x \to a$، حد بگیریم و (iv) را به دست آوریم؛ توجه کنید که

$$\lim_{x\to a} 1/(g(x)g(a)) = 1/g^2(a)\,. \qquad \square$$

مثال ۴. فرض کنید m عدد صحیح مثبتی باشد و فرض کنید که برای $x \neq 0$، $h(x) = x^{-m}$. در این صورت $h(x) = f(x)/g(x)$ که در آن برای هر x، $f(x) = 1$ و $g(x) = x^m$. بنابر قاعدهٔ خارج قسمت، برای $a \neq 0$،

$$h'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} = \frac{a^m \cdot 0 - 1 \cdot ma^{m-1}}{a^{2m}}$$

$$= \frac{-m}{a^{m+1}} = -ma^{-m-1}\,.$$

اگر به جای $-m$ بنویسیم n، در این صورت ملاحظه می‌کنیم که مشتق x^n برای عددهای صحیح منفی n نیز مانند اعداد صحیح مثبت برابر nx^{n-1} است. نتیجه به طور بدیهی برای $n = 0$ نیز برقرار است. برای ملاحظهٔ نماهای کسری نگاه کنید به تمرین ۱۵.۲۹.

۴.۲۸ قضیه [*قاعدهٔ زنجیری*]. اگر f در a مشتقپذیر و g در f(a) مشتقپذیر باشد، آنگاه تابع مرکب gof در a مشتقپذیر است و $(gof)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

بحث. در زیر «برهان» مخلوطی ارائه می‌کنیم که در عین حال لب کلام برهان معتبری را در بردارد. برای $x \neq a$ می‌نویسیم،

$$\frac{gof(x) - gof(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,. \qquad (1)$$

چون $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$، داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{y\to f(a)}\frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g(f'(a)). \qquad (2)$$

همچنین، $\lim_{x\to a} (f(x) - f(a))/(x - a) = f'(a)$ و بنابراین (۱) نشان می‌دهد که

$$(gof)'(a) = g'(f(a)) . f'(a) .$$

این «برهان» را می‌توان به صورت دقیق در آورد، مشروط بر اینکه برای $x \neq a$، $f(x) \neq f(a)$. در این حالت، تنها بخش مبهم «برهان»، نخستین تساوی در (۲) است که بنابر تمرین ۲۸ با $h(y)=(g(y)-g(f(a)))/(y-f(a))$ قابل توجیه است. اگر برای برخی xهای نزدیک a، $f(x)=f(a)$، در این صورت «برهان» را نمی‌توان با استفاده از (۲) مرمت کرد. در واقع، تمرین ۵.۲۸ مثالی از تابعهای مشتقپذیر f و g را می‌هد که برای آنها $\lim_{x\to 0} (g(f(x)) - g(f(0)))/(f(x) - f(0))$ بیمعنی است. در برهان رسمی، ما از نوشتن $f(x) - f(a)$ در مخرج اجتناب می‌کنیم و به جای تمرین ناهنجار ۱۶.۲۸ به قضیهٔ ۵.۲۰ توسل می‌جوییم.

برهان. می‌توان به آسانی تحقیق کرد که gof بر بازهٔ بازی شامل a تعریف شده است، نگاه کنید به تمرین ۱۳.۲۸ . فرض کنید که برای y در حوزهٔ تعریف g و $y \neq f(a)$،

$$h(y) = \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} ,$$

و فرض کنید $h(f(a)) = g'(f(a))$. چون $\lim_{y\to 0} h(y) = h(f(a))$، تابع h در f(a) پیوسته است. توجه کنید که برای هر y در حوزهٔ تعریف g، $g(y) - g(f(a)) = h(y)[y - f(a)]$ و بنابراین برای x در حوزهٔ تعریف gof،

$$gof(x) - gof(a) = h(f(x))[f(x) - f(a)] .$$

بنابراین برای x در حوزهٔ تعریف gof و $x \neq a$،

$$\frac{gof(x) - gof(a)}{x - a} = h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} . \qquad (۳)$$

چون $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ و h در f(a) پیوسته است، قضیهٔ ۵.۲۰ نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to a} h(f(x)) = h(f(a)) = g'(f(a))$$

البته، $\lim_{x\to a} (f(x) - f(a))/(x - a) = f'(a)$ و با گرفتن حد در (۳)، وقتی $x \to a$، تساوی $(gof)'(a) = g'(f(a)) . f'(a)$ را به دست می‌آوریم. □

تأکید بر این نکته حائز اهمیت است که اگر f در بازه‌ای مانند I مشتقپذیر و اگر g بر $\{f(x):x \in I\}$ مشتقپذیر باشد، آنگاه $(gof)'$ دقیقاً تابع f' . $(g'of)$ بر I است.

مثال ۵. فرض کنید که برای x در R، $h(x) = \sin(x^۳ + ۷x)$. خواننده بی شک می‌تواند با استفاده از فن سر راستی که در حسابان آموخته است تحقیق کند که برای x در R، $h'(x) = (۳x^۲ + ۷) \cos(x^۳ + ۷x)$. صرف نظر از اینکه فن سر راست مزبور چه باشد، این نتیجه را می‌توان به کمک قاعدهٔ زنجیری توجیه کرد. در این حالت، $h = gof$ که در آن $f(x) = x^۳ + ۷x$ و $g(y) = \sin\ y$. در این صورت $f'(x) = ۳x^۲ + ۷$ و $g'(y) = \cos y$، بنابراین

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = [\cos f(x)] \cdot f'(x) = [\cos(x^۳ + ۷x)] \cdot (۳x^۲ + ۷) \cdot$$

ما از خواننده نمی‌خواهیم که آن فن سر راست را از ذهن بیرون کند، اما خواننده باید آگاه باشد که این فن متکی بر قاعدهٔ زنجیری است.

تمرینها

۱.۲۸. برای هر یک از تابعهای زیر که بر R تعرف شده‌اند، مجموعهٔ نقاطی را ارائه کنید که تابع در آنها مشتقپذیر نیست. رسم شکل مفید خواهد بود.

(الف) $e^{|x|}$ (ب) $\sin\ |x|$

(پ) $|\sin x|$ (ت) $|x| + |x - ۱|$

(ث) $|x^۲ - ۱|$ (ج) $|x^۳ - ۸|$

۲.۲۸. از تعریف مشتق استفاده کرده مشتقهای تابعهای زیر را در نقاط مشخص شده محاسبه کنید.

(الف) $f(x) = x^۳$ در $x = ۲$؛

(ب) $g(x) = x + ۲$ در $x = a$؛

(پ) $f(x) = x^۲\cos x$ در $x = ۰$ ؛

(ت) $r(x) = (۳x + ۴)/(۲x - ۱)$ در $x = ۱$.

۳.۲۸. (الف) فرض کنید که برای $x \geq ۰$، $h(x) = \sqrt{x} = x^{۱/۲}$. از تعریف مشتق استفاده کرده

ثابت کنید که برای $x > 0$، $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$.

(ب) فرض کنید که برای $x \in R$، $f(x) = x^{1/3}$. از تعریف مشتق استفاده کرده ثابت کنید که برای $x \neq 0$، $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$.

(پ) آیا تابع f در قسمت (ب) در $x = 0$ مشتقپذیر است؟ توضیح دهید.

۴.۲۸. فرض کنید که برای $x \neq 0$، $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$ و $f(0) = 0$.

(الف) از قضیه‌های ۳.۲۸ و ۴.۲۸ استفاده کرده نشان دهید که f در هر $a \neq 0$ مشتقپذیر است و $f'(a)$ را محاسبه کنید. از این حقیقت که $\sin x$ مشتقپذیر است و $\cos x$ مشتق آن است، بدون اثبات آنها، استفاده کنید.

(ب) از تعریف استفاده کرده نشان دهید که f در $x = 0$ مشتقپذیر است و $f'(0) = 0$.

(پ) نشان دهید که f' در $x = 0$ پیوسته نیست.

۵.۲۸. فرض کنید که برای $x \neq 0$، $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$ و $f(0) = 0$، و برای $x \in R$، $g(x) = x$.

(الف) بررسی کنید که f و g بر R مشتقپذیرند.

(ب) $f(x)$ را برای $x = (\pi n)^{-1}$، ... ، $n = \pm 1 , \pm 2 ,$ محاسبه کنید.

(پ) توضیح دهید که چرا $\lim_{x\to 0}(g(f(x)) - g(f(0)))/(f(x) - f(0))$ بیمعنی است.

۶.۲۸. فرض کنید که برای $x \neq 0$، $f(x) = x\sin(1/x)$ و $f(0) = 0$.

(الف) بررسی کنید که بنابر تمرین ۹.۱۷ (پ)، f در $x = 0$ پیوسته است.

(ب) آیا f در $x = 0$ مشتقپذیر است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۷.۲۸. فرض کنید که برای $x \geq 0$، $f(x) = x^2$ و برای $x < 0$، $f(x) = 0$.

(الف) f را رسم کنید.

(ب) نشان دهید که f در $x = 0$ مشتقپذیر است. راهنمایی: لازم است از تعریف مشتق استفاده کنید.

(پ) f' را بر R حساب و آن را رسم کنید.

(ت) آیا f' بر R پیوسته است؟ بر R مشتقپذیر است؟

۸.۲۸. فرض کنید که برای xهای گویا $f(x) = x^2$ و برای xهای گنگ $f(x) = 0$.

(الف) ثابت کنید که f در $x = 0$ پیوسته است.

(ب) ثابت کنید که f در کلیهٔ نقاط $x \neq 0$ ناپیوسته است.

(ت) ثابت کنید که f در $x = 0$ مشتقپذیر است. هشدار: نمی‌توانید صرفاً ادعا کنید که

$.f'(x) = ۲x$

۹.۲۸. فرض کنید که $.h(x) = (x^۴ + ۱۳x)^۷$

(الف) $h'(x)$ را حساب کنید.

(ب) با نوشتن $h = gof$ برای f و g ی مناسب، نشان دهید که چگونه قاعدهٔ زنجیری محاسبهٔ شما در (الف) را قابل توجیه می‌کند.

۱۰.۲۸. تمرین ۹.۲۸ را برای تابع $h(x) = [\cos x + e^x]^{۱۲}$ تکرار کنید.

۱۱.۲۸. فرض کنید f در a مشتقپذیر باشد، g در f(a) مشتقپذیر باشد، و h در gof(a) مشتقپذیر باشد. قاعدهٔ زنجیری را برای $(hogof)'(a)$ بیان و ثابت کنید. راهنمایی: قضیهٔ ۴.۲۸ را دوبار به کار برید.

۱۲.۲۸. (الف) از تابعی که مقدار آن در x به صورت $\cos(e^{x^۵-۳x})$ است، مشتق بگیرید.

(ب) از تمرین ۱۱.۲۸ یا قضیهٔ ۴.۲۸ برای توجیه محاسبهٔ خود در (الف) استفاده کنید.

۱۳.۲۸. نشان دهید که اگر f بر بازه‌ای باز شامل a تعریف شده باشد، اگر g در بازه‌ای باز شامل f(a) تعریف شده باشد، و اگر f در a پیوسته باشد، آنگاه gof بر بازه‌ای باز شامل a تعریف شده است.

۱۴.۲۸. فرض کنید f در a مشتقپذیر باشد. ثابت کنید

(الف) $.\lim_{h\to ۰} (f(a + h) - f(a))/h = f'(a)$

(ب) $.\lim_{h\to ۰} (f(a + h) - f(a - h))/۲h = f'(a)$

۱۵.۲۸. قاعدهٔ لایبنیس

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$$

را ثابت کنید مشروط بر اینکه f و g دارای مشتقهای nام در a باشند. در اینجا $h^{(j)}$ مشتق jام h را نشان می‌دهد به طوری که $h^{(۰)} = ۰$، $h^{(۱)} = h'$، $h^{(۲)} = h''$، و غیره. همچنین، $\binom{n}{k}$ ضریب دو جمله‌ای است که در بسط دو جمله‌ای ظاهر می‌شود؛ نگاه کنید به تمرین ۱۲.۱. راهنمایی: از استقرای ریاضی استفاده کنید، برای $n = ۱$، قضیهٔ ۳.۲۸ (iii) را به کار برید.

۱۶.۲۸. فرض کنید f تابعی تعریف شده بر بازه‌ای باز مانند I شامل a باشد. گیرید h تابعی تعریف شده بر بازه‌ای باز مانند J شامل f(a)، بجز در f(a) باشد، و فرض کنید که برای $x \in I/\{a\}$، $f(x) \in J$ و $f(x) \neq f(a)$. در این صورت hog بر $I\backslash\{a\}$ تعریف شده است. از

نتیجهٔ ۷.۲۰ استفاده کرده ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ و اگر $\lim_{y\to f(a)} h(y)$ موجود و متناهی باشد، آنگاه $\lim_{x\to a} hof(x) = \lim_{y\to f(a)} h(y)$.

بخش ۲۹. قضیهٔ مقدار میانگین

نخستین نتیجهٔ ما استراتژی زیر در حسابان را توجیه می‌کند: برای یافتن ماکسیمم و مینیمم تابعی پیوسته بر بازه‌ای مانند $[a , b]$، کافی است این موارد را در نظر گیریم (الف) نقاط x که در آنها $f'(x) = 0$؛ (ب) نقاطی که f در آنها مشتقپذیر نیست؛ و (پ) نقاط انتهایی a و b. این نقطه‌ها، نقاط ممکن برای ماکسیممها و مینیممها هستند.

۱.۲۹. قضیه. اگر f بر بازه‌ای باز شامل x_0 تعریف شده باشد، هرگاه f ماکسیمم یا مینیمم خود را در x_0 اختیار کند، و اگر f در x_0 مشتقپذیر باشد، آنگاه $f'(x_0) = 0$.

برهان. فرض می‌کنیم که f بر (a , b) تعریف شده باشد که در آن $a < x_0 < b$. چون یا f یا $-f$ ماکسیمم خود را در x_0 اختیار می‌کند، می‌توانیم فرض کنیم که f ماکسیمم خود را در x_0 می‌گیرد.

نخست فرض کنید که $f'(x_0) > 0$. چون

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$\delta > 0$ ای موجود است به طوری که $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ و

(۱) $0 < |x - x_0| < \delta$ مستلزم آن است که $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$؛

نگاه کنید به نتیجهٔ ۷.۲۰. اگر x را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $x_0 < x < x_0 + \delta$، آنگاه (۱) نشان می‌دهد که $f(x) > f(x_0)$ که برخلاف این فرض است که f ماکسیمم خود را در x_0 می‌گیرد. به همین نحو، اگر $f'(x_0) < 0$، $\delta > 0$ ای موجود است به طوری که

(۲) $0 < |x - x_0| < \delta$ مستلزم آن است که $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$.

اگر x را طوری انتخاب کنیم که $x_0 - \delta < x < x_0$، آنگاه (۲) نشان می‌دهد که $f(x) > f(x_0)$، که دوباره یک تناقض است. بنابراین باید داشته باشیم $f'(x_0) = 0$. □

نتیجهٔ بعدی ما نسبتاً بدیهی است، مگر از جهت این نکتهٔ ظریف که: خواننده باید بداند یا باور کند که تابعی پیوسته بر یک بازهٔ بسته، ماکسیمم یا مینیمم خود را می‌گیرد. این نکته را در قضیهٔ ۱.۱۸ با استفاده از قضیهٔ بولتسانو - وایرشتراس ثابت کردیم.

۲.۲۹ *قضیه رول.* فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a, b]$ باشد که بر (a, b) مشتقپذیر است و در $f(a) = f(b)$ صدق می‌کند. xای [دست کم یکی] در (a, b) موجود است به طوری که $f'(x) = 0$.

شکل ۱.۲۹

برهان. بنابر قضیهٔ ۱.۱۸، x_0 و y_0ای در $[a, b]$ موجود است به طوری که برای هر x در $[a, b]$، $f(x_0) \le f(x) \le f(y_0)$. اگر x_0 و y_0 هر دو نقطه‌های انتهایی $[a, b]$ باشند، آنگاه f تابعی ثابت است [چون $f(a) = f(b)$] و برای هر x در (a, b)، $f'(x) = 0$. در غیر این صورت، f یا ماکسیمم یا مینیمم خود را در نقطه‌ای مانند x در (a, b) اختیار می‌کند که در این صورت بنابر قضیهٔ ۱.۲۹، $f'(x) = 0$. □

قضیهٔ مقدار میانگین به ما می‌گوید که تابعی مشتقپذیر بر $[a, b]$ باید مشتقش در جایی برابر با شیب خط واصل $(a, f(a))$ به $(b, f(b))$، یعنی برابر $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ باشد. نگاه کنید به شکل ۱.۲۹.

۳.۲۹ قضیه مقدار میانگین. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a, b]$ باشد که بر (a, b) مشتقپذیر است. در این صورت xای [حداقل یکی] در (a, b) موجود است به طوری که

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad . \qquad (1)$$

توجه کنید که قضیهٔ رول، حالتی خاص از قضیهٔ مقدار میانگین است که در آن $f(a) = f(b)$.

برهان. فرض کنید L تابعی باشد که نمودار آن خط مستقیمی است که $(a, f(a))$ را به $(b, f(b))$ وصل می‌کند، یعنی همان خط نقطه چین در شکل ۱.۲۹. توجه کنید که $L(a) = f(a)$، $L(b) = f(b)$ و برای هر x، $L'(x) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. فرض کنید که برای $x \in [a, b]$، $g(x) = f(x) - L(x)$. آشکار است که g بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتقپذیر است. همچنین $g(a) = 0 = g(b)$، و بنابراین طبق قضیهٔ رول ۲.۲۹ برای xای در (a, b)، $g'(x) = 0$. برای این x داریم، $f'(x) = L'(x) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. □

۴.۲۹ نتیجه. فرض کنید f تابعی مشتقپذیر بر (a, b) باشد به طوری که برای هر x در (a, b)، $f'(x) = 0$. در این صورت f تابعی ثابت بر (a, b) است.

برهان. اگر f بر (a, b) ثابت نباشد، آنگاه x_1 و x_2ای موجودند به طوری که $a < x_1 < x_2 < b$ و $f(x_1) \neq f(x_2)$. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، برای xای در (x_1, x_2)، داریم

$$f'(x) = [f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1) \neq 0 ,$$

که یک تناقض است. □

۵.۲۹ نتیجه. فرض کنید f و g تابعهایی مشتقپذیر بر (a, b) باشند به طوری که بر (a, b)، $f' = g'$. در این صورت ثابتی مانند c موجود است به طوری که برای هر x در (a, b)، $f(x) = g(x) + c$.

برهان. نتیجهٔ ۴.۲۹ را در مورد تابع $f - g$ به کار برید. □

نتیجه ۵.۲۹ در حساب انتگرال مهم است، زیرا تضمین می‌کند که اختلاف بین همهٔ پاد مشتقها، یا با نام دیگر انتگرالهای معین، برای یک تابع مقداری ثابت است. جدولهای انتگرال شامل فرمولهایی است نظیر

$$\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C .$$

اثبات اینکه مشتق هر یک از تابعهای $2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x + C$ برابر $x^2\cos x$ است، کاری است سر راست. نتیجهٔ ۵.۲۹ نشان می‌دهد که این تابعها باید تنها پاد مشتقهای $x^2\cos x$ باشند.

برای اینکه نتیجهٔ دیگری از قضیهٔ مقدار میانگین را ارائه دهیم، به چند اصطلاح نیاز داریم.

۶.۲۹ تعریف. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که بر بازه‌ای مانند I تعریف شده است. گوییم f اکیداً صعودی بر I است هرگاه

$x_1 , x_2 \in I$ و $x_1 < x_2$ مستلزم آن باشند که $f(x_1) < f(x_2)$،

اکیداً نزولی بر I است هرگاه

$x_1 , x_2 \in I$ و $x_1 < x_2$ مستلزم آن باشند که $f(x_1) > f(x_2)$،

صعودی بر I است هرگاه

$x_1 , x_2 \in I$ و $x_1 < x_2$ مستلزم آن باشند که $f(x_1) \leq f(x_2)$،

نزولی بر I است هرگاه

$x_1 , x_2 \in I$ و $x_1 < x_2$ مستلزم آن باشند که $f(x_1) \geq f(x_2)$.

مثال ۱. تابعهای e^x بر R و $\sqrt{x}$ بر $[0 , \infty)$ اکیداً صعودی‌اند. تابع $\cos x$ بر $[0 , \pi]$ اکیداً نزولی است. تابع علامت و تابع تمبر پستی در تمرین ۱۰.۱۷ تابعهایی صعودی‌اند، ولی اکیداً صعودی نیستند.

۷.۲۹ نتیجه. فرض کنید f تابعی مشتقپذیر بر بازهٔ (a , b) باشد. در این صورت

(i) f اکیداً صعودی است هرگاه برای هر x در (a , b)، $f'(x) > 0$؛

(ii) f اکیداً نزولی است هرگاه برای هر x در (a , b)، $f'(x) < 0$؛

(iii) f صعودی است هرگاه برای هر x در (a , b)، $f'(x) \geq 0$؛

(iv) f نزولی است هرگاه برای هر x در (a , b)، $f'(x) \leq 0$.

برهان. (۱) $x_۱$، $x_۲$را در نظر بگیرید که در آن $a < x_۱ < x_۲ < b$. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، برای xای در $(x_۱ , x_۲)$ داریم

$$\frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱} = f'(x) > ۰ .$$

چون $۰ < x_۲ - x_۱$، ملاحظه می‌کنیم که $f(x_۲) - f(x_۱) > ۰$ یا $f(x_۲) > f(x_۱)$.

حالتهای دیگر به عنوان تمرین ۸.۲۹ واگذار می‌شوند. □

تمرین ۴.۲۸ نشان می‌دهد که مشتق f' تابعی مشتقپذیر مانند f، لزوماً پیوسته نیست. با این حال، مانند یک تابع پیوسته، f' خاصیت مقدار میانی را دارد [نگاه کنید به قضیهٔ ۲.۱۸].

۸.۲۹ قضیه [قضیهٔ مقدار میانی برای مشتقها]. فرض کنید f تابعی مشتقپذیر بر (a , b) باشد. هرگاه $a < x_۱ < x_۲ < b$ و c بین $f'(x_۱)$ و $f'(x_۲)$ قرار داشته باشد، xای [حداقل یکی] در $(x_۱ , x_۲)$ موجود است به طوری که $f'(x) = c$.

برهان. می‌توانیم فرض کنیم که $f'(x_۱) < c < f'(x_۲)$. گیرید که برای $x \in (a , b)$، $g(x) = f(x) - cx$. در این صورت داریم، $g'(x_۱) < ۰ < g'(x_۲)$. قضیهٔ ۱.۱۸ نشان می‌دهد که g ماکسیمم خود را بر $[x_۱ , x_۲]$ در نقطه‌ای مانند $x_۰ \in [x_۱ , x_۲]$ اختیار می‌کند. چون

$$g'(x) = \lim_{y \to x_۱} \frac{g(y) - g(x_۱)}{y - x_۱} < ۰ ,$$

$g(y) - g(x_۱)$ باید برای yهای نزدیک به $x_۱$ و بزرگتر از آن منفی باشد. به ویژه، $y_۱ \in (x_۱ , x_۲)$ای موجود است به طوری که $g(y_۱) < g(x_۱)$. بنابراین باید داشته باشیم $x_۰ \neq x_۱$. به همین نحو، $y_۲ \in (x_۱ , x_۲)$ای موجود است به طوری که $g(y_۲) < g(x_۲)$ و بنابراین $x_۰ \neq x_۲$. نشان داده‌ایم که $x_۰ \in (x_۱ , x_۲)$ و بنابراین طبق قضیهٔ ۱.۲۹، $g'(x_۰) = ۰$. در نتیجه $f'(x_۰) = g'(x_۰)+c = c$. □

اینک نشان می‌دهیم که چگونه باید از وارون یک تابع مشتقپذیر، مشتق گرفت. فرض کنید f تابع مشتقپذیر یک به یکی بر یک بازهٔ باز مانند I باشد. بنابر قضیهٔ ۶.۱۸، f بر I اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است و بنابر نتیجهٔ ۳.۱۸، تصویر $f(I)$ بازه‌ای مانند J است. مجموعهٔ J حوزهٔ تعریف $f^{-۱}$ است و

$$f^{-1}\circ f(x) = x \ , \ x \in I \quad ; \quad f\circ f^{-1}(y) = y \quad , \quad y \in J$$

می‌توان به آسانی فرمول مربوط به مشتق f^{-1} را از قاعدهٔ زنجیری به دست آورد [یا حفظ کرد]: $x = f^{-1}\circ f(x)$ و بنابراین به ازای هر x در I،

$$1 = (f^{-1})'(f(x)) \,.\, f'(x) \,.$$

اگر $x_0 \in I$ و $y_0 = f(x_0)$، در این صورت می‌توانیم بنویسیم $(f^{-1})'(y_0).f'(x_0) = 1$، یا

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

که در آن $y_0 = f(x_0)$. آنچه در بالا آمده یک برهان نیست زیرا لازمهٔ استفاده از قاعدهٔ زنجیری آن است که تابعهای f^{-1} و f مشتقپذیر باشند. فرض می‌کنیم که f مشتقپذیر است، اما باید ثابت کنیم که f^{-1} نیز چنین است. به علاوه، توجه کنید که $f'(x_0)$ ممکن است ۰ باشد [تابع $f(x) = x^3$ را در $x_0 = 0$ در نظر بگیرید]. لذا در نتیجهٔ نهایی باید از چنین امکانی، اجتناب شود.

۹.۲۹ قضیه. فرض کنید f تابع یک به یک پیوسته‌ای بر بازه‌ای باز مانند I باشد و فرض کنید که $J = f(I)$. اگر f در $x_0 \in I$ مشتقپذیر باشد و اگر $f'(x_0) \neq 0$، آنگاه f^{-1} در $y_0 = f(x_0)$ مشتقپذیر است و

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \,.$$

برهان. توجه کنید که J نیز بازه‌ای باز است. داریم $\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0) = f'(x_0)$. چون $f'(x_0) \neq 0$ و چون برای $x \neq x_0$، $f(x) \neq f(x_0)$، می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x)}; \tag{1}$$

نگاه کنید به قضیهٔ ۴.۲۰ (iii). فرض کنید $\varepsilon > 0$. بنابر (۱) و نتیجهٔ ۷.۲۰، $\delta > 0$ای موجود است به طوری که

(۲) $0 < |x - x_0| < \delta$ مستلزم آن است که $\left|\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right| < \varepsilon$

فرض کنید $g = f^{-1}$ و توجه کنید که g بنابر قضیه‌های ۶.۱۸ و ۴.۱۸ [یا تمرین ۱۱.۱۸] در y_0 پیوسته است. بنابراین $\mu > 0$ای موجود است به طوری که

(۳) $0 < |y - y_0| < \mu$ مستلزم آن است که $|g(y) - x(y_0)| < \delta$، یا $|g(y) - x_0| < \delta$.

با ترکیب (۳) و (۲) به دست می‌آوریم

$0 < |y - y_0| < \mu$ مستلزم آن است که $\left|\frac{g(y) - x_0}{f(g(y)) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right| < \varepsilon$.

چون $(g(y) - x_\circ)/(f(g(y)) - f(x_\circ)) = (g(y) - g(y_\circ))/(y - y_\circ)$، این تساوی نشان می‌دهد که

$$\lim_{y\to y_\circ} \frac{g(y) - g(y_\circ)}{y - y_\circ} = \frac{1}{f'(x_\circ)} .$$

بنابراین $g'(y_\circ)$ موجود و برابر است با $1/f'(x_\circ)$. □

مثال ۲. فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد و $g(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$. اگر n زوج باشد، حوزهٔ تعریف g عبارت است از $[0 , \infty)$، و اگر n فرد باشد، حوزهٔ تعریف آن $\mathbf{R}$ است. در هر حالت، g اکیداً صعودی است و وارون آن $f(x) = x^n$ است. در اینجا $dom(f) = [0 , \infty)$، به شرطی که n زوج باشد. $y_\circ$ را با $y_\circ \in dom(g)$ و $y_\circ \neq 0$ در نظر بگیرید و بنویسید $y_\circ = x_\circ^n$ که در آن $x_\circ \in dom(f)$. چون $f'(x_\circ) = nx_\circ^{n-1}$، قضیهٔ ۹.۲۹ نشان می‌دهد که

$$g'(y_\circ) = \frac{1}{nx_\circ^{n-1}} = \frac{1}{ny_\circ^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n} y_\circ^{1/n-1} .$$

این تساوی نشان می‌دهد که g برای $y \neq 0$ مشتقپذیر است و قاعدهٔ مشتقگیری از x^n برای نماهای به شکل $1/n$ برقرار است؛ نیز نگاه کنید به تمرین ۱۵.۲۹.

قضیهٔ ۹.۲۹ در مورد تابعهای وارون مختلف که در حسابان با آنها روبه رو می‌شویم، قابل به کارگیری است. مثالی را ارائه می‌دهیم.

مثال ۳. تابع $f(x) = \sin x$ بر $[-\pi/2 , \pi/2]$ یک به یک است و رسم بر این است که از وارون g ی f در این حوزه استفاده شود؛ g معمولاً با $\sin^{-1}$ یا Arcsin نشان داده می‌شود. توجه کنید که $dom(g) = [-1 , 1]$ برای $y_\circ = \sin x_\circ \in (-1 , 1)$ که در آن $x_\circ \in (-\pi/2 , \pi/2)$، قضیهٔ ۹.۲۹ نشان می‌دهد که $g'(y_\circ) = 1/\cos x_\circ$. چون $1 = \sin^2 x_\circ + \cos^2 x_\circ = y_\circ^2 + \cos^2 x_\circ$ و $\cos x_\circ > 0$، برای $y_\circ \in (-1 , 1)$ می‌توانیم بنویسیم

$$g'(y_\circ) = \frac{1}{\sqrt{1 - y_\circ^2}} .$$

تمرینها

۱.۲۹. تعیین کنید که آیا حکم قضیهٔ مقدار میانگین برای تابعهای زیر در بازه‌های مشخص شده برقرار است یا خیر. اگر حکم برقرار باشد، مثالی از نقطه‌ای مانند xارائه دهید که (۱) در قضیه ۳.۲۹ را برآورده کند. اگر حکم صادق نباشد، بیان کنید که کدام یک از فرضهای قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست.

(الف) $x^{۲}$ بر $[-۱ , ۲]$ (ب) $\sin x$ بر $[\circ , \pi]$

(پ) $|x|$ بر $[-۱ , ۲]$ (ت) $۱/x$ بر $[-۱ , ۱]$

(ث) $۱/x$ بر $[۱ , ۳]$ (ج) $\mathrm{sgn}(x)$ بر $[-۲ . ۲]$؛

sgn در تمرین ۱۰.۱۷ تعریف شده است.

۲.۲۹. ثابت کنید که برای هر xو y در R، $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$.

۳.۲۹. فرض کنید f بر R مشتقپذیر باشد و $f(\circ) = \circ$، $f(۱) = ۱$ و $f(۲) = ۱$.

(الف) نشان دهید که برای $x \in (\circ , ۲)$ای، $f'(x) = \frac{۱}{۲}$.

(ب) نشان دهید که برای $x \in (\circ , ۲)$ای، $f'(x) = \frac{۱}{۷}$.

۴.۲۹. فرض کنید که f و g تابعهایی مشتقپذیر بر بازهٔ باز I باشند. فرض کنید $a , b \in I$، $a < b$ و $f(a) = f(b) = \circ$. نشان دهید که برای xدر بازهٔ (a , b)، $f'(x) + f(x)g'(x) = \circ$.

راهنمایی: تابع $h(x) = f(x)e^{g(x)}$ را در نظر بگیرید.

۵.۲۹. گیرید که f بر R تعریف شده است و فرض کنید که برای هر x، y در R، $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^{۲}$، ثابت کنید که f تابعی ثابت است.

۶.۲۹. معادلهٔ خط راست به‌کار رفته در برهان قضیهٔ مقدار میانگین ۳.۲۹ را ارائه دهید.

۷.۲۹. (الف) فرض کنید که f بر بازهٔ بازی مانند I دوبار مشتقپذیر باشد و برای هر xدر I، $f''(x) = \circ$. نشان دهید که برای مقادیر ثابت مناسب a و b، $f(x) = ax + b$.

(ب) فرض کنید که f بر بازهٔ باز I سه بار مشتقپذیر باشد و بر I، $f''' = \circ$. تابع f چه شکلی خواهد داشت؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۸.۲۹. احکام (ii) − (iv) در نتیجهٔ ۷.۲۹ را ثابت کنید.

۹.۲۹. نشان دهید که برای هر xدر R، $ex \le e^{x}$.

۱۰.۲۹. فرض کنید که برای $x \neq 0$، $f(x) = x^2\sin(1/x) + \frac{1}{2}x$ و $f(0) = 0$.

(الف) نشان دهید که $f'(0) > 0$؛ نگاه کنید به تمرین ۴.۲۸.

(ب) نشان دهید که f بر هیچ بازهٔ بازی شامل ۰ صعودی نیست.

(پ) این مثال را با نتیجهٔ ۷.۲۹ (i) مقایسه کنید.

۱۱.۲۹. نشان دهید که برای هر $x \geq 0$، $\sin x \leq x$. راهنمایی: نشان دهید که $f(x) = x - \sin x$ بر $[0, \infty)$ صعودی است.

۱۲.۲۹. (الف) نشان دهید که برای هر x در $(0, \pi/2)$، $x < \tan x$.

(ب) نشان دهید که $x/(\sin x)$ تابعی اکیداً صعودی بر $(0, \pi/2)$ است.

(پ) نشان دهید که برای $x \in [0, \pi/2]$، $x \leq (\pi/2)\sin x$.

۱۳.۲۹. ثابت کنید که اگر f و g بر R مشتقپذیر باشند، اگر $f(0) = g(0)$ و اگر برای هر x در R، $f'(x) \leq g'(x)$، آنگاه برای $x \geq 0$، $f(x) \leq g(x)$.

۱۴.۲۹. فرض کنید که f بر R مشتقپذیر باشد و برای هر x در R، $1 \leq f'(x) \leq 2$، و $f(0) = 0$. ثابت کنید که برای هر $x \geq 0$، $x \leq f(x) \leq 2x$.

۱۵.۲۹. فرض کنید که r عدد گویای ناصفری مانند m/n باشد که در آن n یک عدد صحیح مثبت و m عدد صحیح ناصفر دلخواهی است، و m و n عامل مشترک ندارند. فرض کنید $h(x) = x^r$ که در آن $\mathrm{dom}(h) = [0, \infty)$ هرگاه n زوج باشد و $m > 0$، $\mathrm{dom}(h) = (0, \infty)$ هرگاه n زوج باشد و $m < 0$، $\mathrm{dom}(h) = R$ هرگاه n فرد باشد و $m > 0$، و $\mathrm{dom}(h) = R\setminus\{0\}$ هرگاه n فرد باشد و $m < 0$. نشان دهید که برای $x \in \mathrm{dom}(h)$، $x \neq 0$، $h'(x) = rx^{r-1}$. راهنمایی: از مثال ۲ استفاده کنید.

۱۶.۲۹. از قضیهٔ ۹.۲۹ استفاده کرده مشتق تابع وارون $g = \mathrm{Arctan}$ از تابع f را به دست آورید که در آن برای $x \in (-\pi/2, \pi/2)$، $f(x) = \tan x$.

۱۷.۲۹. فرض کنید f و g بر بازهٔ بازی مانند I مشتقپذیر باشند و a را در I در نظر بگیرید. h را بر I به کمک دستورهای $h(x) = f(x)$ برای $x < a$، $h(x) = g(x)$ برای $x \geq a$ تعریف کنید. ثابت کنید که h در a مشتقپذیر است اگر و تنها اگر هر دو تساوی $f(a) = g(a)$ و $f'(a) = g'(a)$ برقرار باشند. پیشنهاد: شکلی بکشید تا ببینید وضع از چه قرار است.

۱۸.۲۹. فرض کنید f بر R مشتقپذیر باشد و $a = \sup\{|f'(x)| : x \in \mathbf{R}\} < 1$. عدد s_0 را در R انتخاب و برای $n \geq 1$، تعریف کنید $s_n = f(s_{n-1})$. به عنوان مثال، $s_1 = f(s_0)$،

$s_2 = f(s_1)$، و غیره. ثابت کنید که (s_n) دنباله‌ای همگراست. راهنمایی: برای اینکه نشان دهید (s_n) یک دنبالهٔ کوشی است، نخست نشان دهید که برای $n \geq 1$،

$$|s_{n+1} - s_n| \leq a|s_n - s_{n-1}| .$$

بخش ۳۰*. قاعدهٔ هوپیتال

در آنالیز اغلب به حدهایی به شکل

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)}$$

بر می‌خوریم که در آن s به نشانهٔ a، a^+، a^-، ∞ یا $-\infty$ است. نگاه کنید به تعریف ۳.۲۰ دربارهٔ چنین حدهایی. حد موجود و صرفاً برابر $[\lim_{x\to s} f(x)]/[\lim_{x\to s} g(x)]$ است مشروط بر اینکه حدهای $\lim_{x\to s} f(x)$ و $\lim_{x\to s} f(x)$ موجود و متناهی باشند و مشروط بر اینکه $\lim_{x\to s} g(x) \neq 0$؛ نگاه کنید به قضیهٔ ۴.۲۰. اگر این حدها به صورت مبهمی مانند $0/0$ یا ∞/∞ منجر شوند، در این صورت اغلب می‌توان قاعدهٔ هوپیتال را به کاربرد. به علاوه، دیگر صورتهای مبهم، نظیر $\infty - \infty$، 1^∞، 0^0، ∞^0، یا $0 . \infty$ را معمولاً می‌توان صورتبندی مجددی داد به طوری که به شکل $0/0$ یا ∞/∞ در آیند؛ نگاه کنید به مثالهای ۵-۹. قبل از اینکه قاعدهٔ هوپیتال را بیان و ثابت کنیم، قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته‌ای را ثابت می‌کنیم.

۱.۳۰ قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته. فرض کنید f و g تابعهایی پیوسته بر $[a , b]$ باشند که بر (a , b) مشتقپذیرند. در این صورت xای [حداقل یکی] در (a , b) موجود است به طوری که

$$f'(x)[g(b) - g(a)] = g'(x)[f(b) - f(a)] . \qquad (1)$$

این نتیجه هنگامی که g تابعی داده شده با $g(x) = x$ برای هر x باشد، به قضیهٔ مقدار میانگین استاندارد ۳.۲۹ تبدیل می‌شود.

برهان. حیلهٔ لازم این است که تفاضل دو کمیت موجود در (۱) را مورد ملاحظه قرار دهیم و

امیدوار باشیم که قضیهٔ رول به یاری ما بیاید. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)] \ .$$

کافی است نشان دهیم که برای xای در (a , b)، $h'(x) = 0$. توجه کنید که

$$h(a) = f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)] = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$

و

$$h(b) = f(b)[g(b) - g(a)] - g(b)[f(b) - f(a)] = -f(b)g(a) + g(b)f(a)$$
$$= h(a)$$

روشن است که h بر $[a , b]$ پیوسته و بر (a , b) مشتقپذیر است، و لذا قضیهٔ رول نشان می‌دهد که حداقل برای یک x در (a , b)، $h'(x) = 0$. □

برهان‌ما از قاعدهٔ هوپیتال‌در زیر تا حدی‌توصیفی، اما سر راست‌است. این برهان بر عرضه - داشت زیبایی درکتاب رودین [۱۹] استوار است. اغلب کتابهای درسی، برهانهای پیچیده‌تری را ارائه می‌کنند.

۲.۳۰ *قاعدهٔ هوپیتال.* فرض کنید s به نشانهٔ a، a^+، a^-، ∞، یا $-\infty$ باشد که در آن $a \in R$. فرض کنید f و g تابعهایی مشتقپذیر باشند که برای آنها حد زیر موجود است:

$$\lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \ . \qquad (۱)$$

اگر

$$\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0 \qquad (۲)$$

یا اگر

$$\lim_{x\to s} |g(x)| = +\infty \quad , \qquad (۳)$$

آنگاه

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ . \qquad (۴)$$

توجه کنید که فرض (۱) مشتمل بر چند فرض ضمنی است: f و g باید «نزدیک» s تعریف شده و مشتقپذیر باشند و $g'(x)$ باید «نزدیک» s ناصفر باشد. مثلاً، اگر $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ موجود باشد، آنگاه باید بازه‌ای مانند (a , b) موجود باشد که f و g بر آن مشتقپذیرند و g' ناصفر است. این شرط که g' ناصفر باشد، جنبه‌ای اساسی دارد؛ نگاه کنید به تمرین ۷.۳۰.

برهان. ابتدا تحویلهایی را انجام می‌دهیم. حالت $\lim_{x\to a}$ از حالت $\lim_{x\to a^+}$ و $\lim_{x\to a^-}$ نتیجه می‌شود، چون $\lim_{x\to a} h(x)$ موجود است اگر و تنها اگر حدهای $\lim_{x\to a^+} h(x)$ و $\lim_{x\to a^-} h(x)$ موجود و برابر باشند؛ نگاه کنید به قضیهٔ ۱۰.۲۰. در واقع، ما توجه خود را به $\lim_{x\to a^+}$ و $\lim_{x\to -\infty}$ معطوف می‌کنیم، زیرا با دو حالت دیگر به شیوه‌ای کاملاً نظیر رفتار می‌شود. سرانجام اینکه می‌توانیم این دو حالت را با توجه به تذکر ۱۱.۲۰ مورد رسیدگی قرار دهیم.

فرض می‌کنیم که $a \in R$ یا $a = -\infty$. نشان خواهیم داد که اگر $-\infty \leq L < \infty$ و $L_۱ > L$ آنگاه $\alpha_۱ > a$ای موجود است به طوری که

$$a < x < \alpha_۱ \text{ مستلزم آن است که } \frac{f(x)}{g(x)} < L_۱. \qquad (۵)$$

استدلال مشابهی [که از آن صرف نظر می‌کنیم] نشان می‌دهد که اگر $-\infty < L \leq \infty$ و $L_۲ < L$، آنگاه $\alpha_۲ > a$ای موجود است به طوری که

$$a < x < \alpha_۲ \text{ مستلزم آن است که } \frac{f(x)}{g(x)} > L_۲. \qquad (۶)$$

اینک نشان می‌دهیم که چگونه باید برهان را با استفاده از (۵) و (۶) کامل کرد؛ (۵) را در بند بعدی ثابت می‌کنیم. اگر L متناهی باشد و $\varepsilon > ۰$، می‌توانیم (۵) را در مورد $L_۱ = L + \varepsilon$ و (۶) را در مورد $L_۲ = L - \varepsilon$ به کار بریم تا $\alpha_۱ > a$ و $\alpha_۲ > a$ای به دست آوریم که در گزاره‌های زیر صادق باشند.

$$a < x < \alpha_۱ \text{ مستلزم آن است که } \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon.$$

$$a < x < \alpha_۲ \text{ مستلزم آن است که } \frac{f(x)}{g(x)} > L - \varepsilon.$$

در نتیجه اگر $\alpha = \min\{\alpha_۱ , \alpha_۲\}$، آنگاه

$$a < x < \alpha \text{ مستلزم آن است که } \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| > \varepsilon;$$

با توجه به تذکر ۱۱.۲۰، گزارهٔ اخیر نشان می‌دهد که $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = L$ [اگر $a = -\infty$، آنگاه $a^+ = -\infty$]. اگر $L = -\infty$، آنگاه (۵) و این حقیقت که $L_۱$ دلخواه است، نشان می‌دهد که $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = -\infty$. اگر $L = \infty$، آنگاه (۶) و این حقیقت که $L_۲$ دلخواه است نشان می‌دهد که $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = \infty$.

باقی می‌ماند اینکه در نظر گیریم $-\infty \leq L < L_1$ و نشان دهیم که $\alpha_1 > a$ای موجود است که در (۵) صدق می‌کند. فرض کنید (a, b) بازه‌ای باشد که f و g بر آن مشتقپذیرند و g' بر آن هرگز صفر نمی‌شود. قضیهٔ ۸.۲۹ نشان می‌دهد که یا g' بر (a, b) مثبت است یا اینکه g' بر (a, b) منفی است. حالت اول را می‌توان با قرار دادن $-g$ به جای g به حالت دوم تبدیل کرد. بنابراین فرض می‌کنیم که برای $x \in (a, b)$، $g'(x) < 0$، به طوری که بنابر نتیجهٔ ۷.۲۹، g بر (a, b) اکیداً نزولی است. چون g بر (a, b) یک به یک است، $g(x)$ می‌تواند حداکثر برای یک x در (a, b) صفر شود. با کوچکتر انتخاب کردن b در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم که g هرگز بر (a, b) صفر نمی‌شود. حال K را طوری انتخاب کنید که $L < K < L_1$. بنابر (۱)، $\alpha > a$ای وجود دارد به طوری که

$$a < x < \alpha \text{ مستلزم آن است که } \frac{f'(x)}{g'(x)} < K.$$

اگر $a < x < y < \alpha$، آنگاه قضیهٔ ۱.۳۰ نشان می‌دهد که برای zای در (x, y)،

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} .$$

در این صورت،

$$a < x < y < \alpha \text{ مستلزم آن است که، } \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < K. \tag{۷}$$

اگر فرض (۲) برقرار باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} ,$$

و بنابراین (۷) نشان می‌دهد که برای $a < y < \alpha$،

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq K < L_1 .$$

بنابراین (۵) در این حالت برقرار است. اگر فرض (۳) برقرار باشد، آنگاه $\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$، زیرا g بر (a, b) اکیداً نزولی است. همچنین برای $x \in (a, b)$، $g(x) > 0$، زیرا g هرگز بر (a, b) صفر نمی‌شود. هر دو طرف (۷) را در $[g(x) - g(y)]/g(x)$، که مثبت است، ضرب می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که

$$a < x < y < \alpha \text{ مستلزم آن است که } \frac{f(x) - f(y)}{g(x)} < K \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)},$$

و بنابراین

$$\frac{f(x)}{g(x)} < K \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} = K + \frac{f(y)-Kg(y)}{g(x)}$$

y را ثابت تلقی و ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(y)-Kg(y)}{g(x)} = 0 \quad .$$

بنابراین $a < \alpha_2$ ای موجود است به طوری که $\alpha_2 \le y < \alpha$ و $a < x < \alpha_2$ مستلزم آن است که $\frac{f(x)}{g(x)} < L_1$.

پس مجدداً (۵) برقرار است. □

مثال ۱. اگر خاصیتهای آشنای تابعهای مثلثاتی را دانسته بگیریم، در این صورت محاسبهٔ $\lim_{x\to 0} (\sin x)/x$ به کمک قاعدهٔ هوپیتال آسان است:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1 \quad . \tag{1}$$

توجه کنید که $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ در فرضهای قضیهٔ ۲.۳۰ صدق می‌کند. این محاسبهٔ خاص در واقع با تقلب آمیخته است، زیرا حد (۱) نیاز به اثبات این مطلب دارد که مشتق $\sin x$ برابر $\cos x$ است. حکم بالا بدل به این حکم می‌شود که مشتق $\sin x$ در ۰ برابر ۱ است، یعنی به این حکم که

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad .$$

مثال ۲. $\lim_{x\to 0} (\cos x - 1)/x^2$ را حساب می‌کنیم. قاعده هوپیتال را می‌توان به کاربرد مشروط بر اینکه $\lim_{x\to 0} (-\sin x)/(2x)$ موجود باشد. اما $(-\sin x)/2x = -\frac{1}{2}(\sin x/x)$ و حد آن بنابر مثال ۱ برابر $-\frac{1}{2}$ است. نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \, .$$

مثال ۳. نشان می‌دهیم که $\lim_{x\to\infty} x^2/e^{3x} = 0$. این عبارت به صورت فعلی آن صورت مبهمی به شکل ∞/∞ است. بنابر قاعدهٔ هوپیتال، این حد موجود خواهد بود به شرطی که $\lim_{x\to\infty} 2x/(3e^{3x})$ موجود باشد، و مجدداً بنابر قاعدهٔ هوپیتال، این حد موجود خواهد بود هرگاه $\lim_{x\to\infty} 2/(9e^{3x})$ موجود باشد. حد اخیر ۰ است، بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to\infty} x^2/(e^{3x})$.

مثال ۴. حد $\lim_{x\to 0^+} (\log x)/x$ را در صورت وجود در نظر بگیرید. بنابر قاعدهٔ هوپیتال، این حد ظاهراً عبارت است از

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty \ .$$

با این حال، این نتیجه نادرست است. مشکل در این است که باید فرضها را امتحان می‌کردیم. چون $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} x = 0$، هیچ یک از فرضهای (۲) یا (۳) در قضیهٔ ۲.۳۰ برقرار نیستند. برای پیدا کردن حد، عبارت $(\log x)/x$ را به صورت $-\log(1/x)/x$ می‌نویسیم. می‌توان به آسانی نشان داد که $\lim_{x\to 0^+} \log(1/x)/x$ با $\lim_{y\to\infty} y\log y$ مطابقت خواهد کرد مشروط بر اینکه حد اخیر موجود باشد، نگاه کنید به تمرین ۴.۳۰. نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to 0^+} (\log x)/x = -\lim_{y\to\infty} y\log y = -\infty$.

پنج مثال بعدی روشن می‌کنند که چگونه حدهای صورتهای مبهم مختلف را می‌توان به گونه‌ای در آورد که قاعدهٔ هوپیتال را بشود به کار گرفت.

مثال ۵. حد $\lim_{x\to 0^+} x\log x$ را در نظر بگیرید. این عبارت به شکل فعلی، از صورت مبهم $0\cdot(-\infty)$ است زیرا، $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$. با نوشتن $x\log x$ به صورت $(\log x)/(1/x)$، صورت مبهمی به شکل $-\infty/\infty$ به دست می‌آوریم و لذا می‌توانیم قاعدهٔ هوپیتال را به کار بریم:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

همچنین می‌توانستیم $x\log x$ را به صورت $x/(1/\log x)$ بنویسیم تا صورت مبهمی به شکل $0/0$ را به دست آوریم. با این حال، تلاش برای به کاربردن قاعدهٔ هوپیتال، تنها مسأله را پیچیده‌تر می‌کند:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x(\log x)^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^2 \ .$$

مثال ۶. حد $\lim_{x\to 0^+} x^x$ از صورت مبهم 0^0 است. x^x را به صورت $e^{x\log x}$ می‌نویسیم [به خاطر بیاورید که $x = e^{\log x}$] و توجه می‌کنیم که بنابر مثال ۵، $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$. چون $g(x) = e^x$ در 0

پیوسته است، قضیهٔ ۵.۲۰ نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = e^0 = 1 \ .$$

مثال ۷. حد $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ از صورت مبهم ∞^0 است. $x^{1/x}$ را به صورت $e^{(\log x)/x}$ می‌نویسیم. بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \ .$$

قضیهٔ ۵.۲۰ اینک نشان می‌دهد که $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$.

مثال ۸. حد $\lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x})^x$ صورت مبهمی به شکل 1^∞ است. چون

$$(1 - \frac{1}{x})^x = e^{x\log(1-1/x)} \ ,$$

عبارت

$$\lim_{x\to\infty} x\log(1 - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1 - \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1 - \frac{1}{x})^{-1} x^{-2}}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} -(1 - \frac{1}{x})^{-1} = -1$$

را محاسبه می‌کنیم. بنابراین طبق قضیهٔ ۵.۲۰ داریم

$$\lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x})^x = e^{-1} \ .$$

که همان است که باید انتظارش را می‌داشتیم زیرا، $\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = e^{-1}$.

مثال ۹. حد $\lim_{x\to 0} h(x)$ را در نظر بگیرید که در آن

$$h(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = (e^x - 1)^{-1} - x^{-1} \quad , \quad x \neq 0 \ .$$

هیچ یک از حدهای $\lim_{x\to 0} (e^x - 1)^{-1}$ یا $\lim_{x\to 0} x^{-1}$ موجود نیستند و بنابراین $\lim_{x\to 0} h(x)$ به شکلی فعلی جزو صور مبهم نیست. با این حال، $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ صورت مبهمی به شکل $\infty - \infty$ و $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ صورت مبهمی به شکل $(-\infty) - (-\infty)$ است. با نوشتن

$$h(x) = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \ .$$

حد $\lim_{x\to 0} h(x)$ به صورت مبهمی به شکل ۰/۰ در می‌آید. بنابر قاعدهٔ هوپیتال این عبارت باید برابر

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{xe^x + e^x - 1}$$

باشد که هنوز هم از صورت مبهم ۰/۰ است. توجه کنید که برای $x \neq 0$، $xe^x + e^x - 1 \neq 0$. در نتیجه فرضهای قضیهٔ ۲.۳۰ برقرارند. با به کاربرد مجدّد قاعدهٔ هوپیتال، به دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{xe^x - 2e^x} = -\frac{1}{2}$$

توجه کنید که برای $x \in (-2, \infty)$، $xe^x + 2e^x \neq 0$. نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to 0} h(x) = -\frac{1}{2}$.

تمرینها

۱.۳۰. حدهای زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

(الف) $\lim_{x\to 0} (e^{2x} - \cos x)/x$ (ب) $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)/x^2$

(پ) $\lim_{x\to\infty} x^2/e^{2x}$ (ت) $\lim_{x\to 0} (\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})/x$

۲.۳۰. حدهای زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

(الف) $\lim_{x\to 0} x^3/(\sin x - x)$ (ب) $\lim_{x\to 0} (\tan x - x)/x^3$

(پ) $\lim_{x\to 0} [1/(\sin x) - 1/x]$ (ت) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

۳.۳۰. حدهای زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

(الف) $\lim_{x\to\infty} (x - \sin x)/x$ (ب) $\lim_{x\to\infty} x^{\sin(1/x)}$

(پ) $\lim_{x\to 0^+} (1 + \cos x)/(e^x - 1)$ (ت) $\lim_{x\to 0} (1 - \cos 2x - 2x^2)/x^4$

۴.۳۰. فرض کنید f تابعی باشد که بر بازه‌ای مانند $(0, a)$ تعریف شده است و برای $y \in (a^{-1}, \infty)$ تعریف کنید $g(y) = f(1/y)$؛ در اینجا اگر $a = \infty$، قرار می‌دهیم $a^{-1} = 0$.

نشان دهید که $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ موجود است اگر و تنها اگر $\lim_{y\to\infty} g(y)$ موجود باشد که در این صورت حدها برابرند.

۵.۳۰. حدهای زیر را پیدا کنید.

(الف) $\lim_{x\to 0} (1 + 2x)^{1/x}$ (ب) $\lim_{y\to\infty} (1 + 2/y)^y$

(پ) $\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$

۶.۳۰. فرض کنید که f بر بازه‌ای مانند (c, ∞) مشتقپذیر باشد و فرض کنید $\lim_{x\to\infty} [f(x) + f'(x)] = L$. ثابت کنید $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ و اینکه $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
راهنمایی: $f(x) = f(x)e^x/e^x$.

۷.۳۰. این مثال از مرجع [۲۰] اقتباس شده و منسوب است به اوتو استولتس[1]. این شرط در قضیهٔ ۲.۳۰ که برای x«نزدیک» s، باید $g'(x) \neq 0$، حائز اهمیت است. در کاربرد بدون دقت قاعدهٔ هوپیتال که در آن صفرهای g' با صفرهای f' «حذف» می‌شوند، نتایج مغلوطی را می‌توان به دست آورد. به ازای $x \in R$، فرض کنید

$$f(x) = x + \cos x \sin x \quad , \quad g(x) = e^{\sin x} (x + \cos x \sin x)$$

(الف) نشان دهید که $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$.

(ب) نشان دهید $f'(x) = 2(\cos x)^2$ و $g'(x) = [e^{\sin x} \cos x][2\cos x + f(x)]$

(پ) نشان دهید که $f'(x)/g'(x)=(2e^{-\sin x} \cos x)/(2\cos x + f(x))$ هرگاه $\cos x \neq 0$ و $x > 3$.

(ت) نشان دهید که $\lim_{x\to\infty} (2e^{-\sin x} \cos x)/(2\cos x + f(x)) = 0$ اما در حالی که حد $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ موجود نیست.

بخش ۳۱. قضیهٔ تیلور

۱.۳۱ بحث. یک سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$ را در نظر بگیرید [R می‌تواند $+\infty$ باشد]:

(۱) Otto Stolz , *Math Annalen* 15 (1879) , 556 - 559.

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k x^k . \qquad (۱)$$

تابع f بنابر قضیهٔ ۵.۲۶ در بازهٔ $|x| < R$ مشتقپذیر است و

$$f'(x) = \sum_{k=۱}^{\infty} k a_x x^{k-۱} .$$

همین قضیه نشان می‌دهد که f' برای $|x| < R$ مشتقپذیر است و

$$f''(x) = \sum_{k=۲}^{\infty} k(k-۱) a_k x^{k-۲} .$$

با ادامهٔ کار به همین طریق، در می‌یابیم که مشتق nام یعنی $f^{(n)}$ برای $|x| < R$ موجود است و

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-۱) \ldots (k-n+۱) a_k x^{k-n} .$$

به ویژه،

$$f^{(n)}(\circ) = n(n-۱) \ldots (n-n+۱) a_n = n! a_n .$$

این رابطه حتی برای $n = \circ$ برقرار است. در صورتی که این قرار داد را بپذیریم که $f^{(\circ)} = f$ و قرار داد $\circ! = ۱$ را به یاد داشته باشیم. چون $f^{(k)}(\circ) = k! a_k$، سری توانی اصلی (۱) به شکل

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\circ)}{k!} x^k \quad , \quad |x| < R \qquad (۲)$$

است.

همان گونه که در پایان بخش ۲۶ مطرح شد، اینک با تابعی مانند f شروع می‌کنیم و به جستجوی یک سری توانی برای f بر می‌آییم. بند آخر نشان می‌دهد که f باید دارای مشتقهای همهٔ مراتب در ۰ باشد، یعنی $f'(\circ)$ ، $f''(\circ)$ ، ... ، $f^{(n)}(\circ)$ ، ...، همگی موجود باشند. برای چنین fای فرمول (۲) ممکن است برای $R > \circ$ ای برقرار باشد که در این صورت یک سری توانی برای f پیدا کرده‌ایم.

۲.۳۱ تعریف. فرض کنید f تابعی تعریف شده بر بازهٔ بازی شامل ۰ باشد. اگر f دارای مشتقهای همهٔ مراتب در ۰ باشد، در این صورت سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{1}$$

یک سری تیلور برای f حول ۰ نامیده می‌شود. باقیماندهٔ $R_n(x)$ به وسیلهٔ

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{2}$$

تعریف می‌شود.

البته باقیماندهٔ R_n به f بستگی دارد، لذا نماد دقیقتری باید چیزی نظیر $R_n(f\,;\,x)$ باشد. این باقیمانده مهم است زیرا برای هر x،

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

در مثال ۳ نشان خواهیم داد که لزومی ندارد f به توسط سری تیلورش داده شود، یعنی اینکه ممکن است $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ صادق نباشد. چون می‌خواهیم بدانیم که f چه موقع به توسط سری تیلورش داده می‌شود، صورتهای مختلفی که برای قضیهٔ تیلور ارائه می‌کنیم همه به ماهیت باقیماندهٔ R_n توجه دارند.

۳.۳۱ قضیهٔ *تیلور*. فرض کنید که f بر $(a\,,\,b)$ تعریف شده باشد که در آن $a < 0 < b$ و فرض کنید که مشتق nام، $f^{(n)}$، بر $(a\,,\,b)$ موجود باشد. در این صورت برای کلیهٔ xهای ناصفر در $(a\,,\,b)$، برای y ای بین ۰ و x داریم

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} x^n \; .$$

برهانی که ارائه می‌کنیم منسوب به جیمزولف[1] [f] است؛ با تمرین ۶.۳۱ مقایسه کنید.

برهان. $x \neq 0$ را ثابت بگیرید. فرض کنید M جواب یکتای

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{Mx^n}{n!} \tag{1}$$

باشد و توجه کنید که تنها نیاز به آن داریم که نشان دهیم که

(۱) James Wolfe

(۲) برای y ای بین ∘ و x، $f^{(n)}(y) = M$

[برای ملاحظهٔ درستی این ادعا، به جای M در معادلهٔ (۱) قرار دهید، $f^{(n)}(y)$ و تعریف $R_n(x)$ را به خاطر بیاورید.] برای اثبات (۲)، تفاضل

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k + \frac{Mt^n}{n!} - f(t) \qquad (۳)$$

را در نظر بگیرید. محاسبهٔ مستقیمی نشان می‌دهد که $g(0) = 0$ و اینکه برای $k < n$، $g^{(k)}(0) = 0$. همچنین با توجه به نحوهٔ انتخاب M در (۱) داریم، $g(x) = 0$. بنابر قضیهٔ رول ۲.۲۹، برای x_1 بین ∘ و x داریم $g'(x_1) = 0$. چون $g'(0) = 0$، کاربرد دیگری از قضیهٔ رول نشان می‌دهد که برای x_2 ای بین ∘ و x_1، $g''(x_2) = 0$. مجدداً، چون $g''(0) = 0$، برای x_3 ای بین ∘ و x_2، $g'''(x_3) = 0$. این فرایند ادامه می‌یابد تا اینکه x_n ای بین ∘ و x_{n-1} به دست آوریم به طوری که $g^{(n)}(x_n) = 0$. از (۳) نتیجه می‌شود که برای هر t در بازهٔ (a, b)، $g^{(n)}(t) = M - f^{(n)}(t)$ و لذا (۲) با $y = x_n$ برقرار است. □

۴.۳۱ نتیجه. فرض کنید f بر (a, b) تعریف شده باشد که در آن $a < 0 < b$. اگر همهٔ مشتقهای $f^{(n)}$ بر (a, b) موجود و همه به وسیلهٔ ثابت واحدی مانند C کراندار باشند، در این صورت

برای هر x در بازهٔ (a, b)، $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

برهان. x را در (a, b) در نظر بگیرید. از قضیهٔ ۳.۳۱ ملاحظه می‌کنیم که برای هر n،

$$|R_n(x)| \le \frac{C}{n!}\, |x|^n .$$

چون بنابر تمرین ۱۵.۹، $\lim_{n\to\infty} |x^n|/n! = 0$، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. □

مثال ۱. خواص آشنای مشتقگیری از e^x، $\sin x$، و غیره را دانسته می‌گیریم.

(الف) فرض کنید که برای $x \in R$، $f(x) = e^x$. در این صورت برای هر n، $n = 0, 1, 2, \ldots$ داریم $f^{(n)}(x) = e^x$ و بنابراین برای هر n، $f^{(n)}(0) = 1$. سری تیلور برای e^x حول ∘ عبارت است از

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k .$$

برای هر بازهٔ کرانداز $(-M\ ,\ M)$ در R، کلیهٔ مشتقهای f کراندارند [در واقع به وسیلهٔ e^M] و لذا نتیجهٔ ۴.۳۱ نشان می‌دهد که برای هر x در R،

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k .$$

(ب) اگر برای هر x در R، $f(x) = \sin x$، در این صورت

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n = 1\ ,\ 5\ ,\ 9\ ,\ \ldots \\ -\sin x & n = 2\ ,\ 6\ ,\ 10\ ,\ \ldots \\ -\cos x & n = 3\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ \ldots \\ \sin x & n = 0\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 12\ ,\ \ldots \end{cases}$$

و لذا

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n = 1\ ,\ 5\ ,\ 9\ ,\ \ldots \\ -1 & n = 3\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ \ldots \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین سری تیلور برای $\sin x$ عبارت است از

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} .$$

مشتقهای f همه به وسیلهٔ ۱ کراندارند و بنابراین برای هر x در R،

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} .$$

مثال ۲. در مثال ۲ی بخش ۲۶ از قضیهٔ آبل استفاده کردیم تا ثابت کنیم که

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots . \qquad (1)$$

اینجا برهان دیگری، بر مبنای قضیهٔ تیلور ارائه می‌کنیم. فرض کنید که برای x در $(-1\ ,\ \infty)$، $f(x) = \log(1+x)$. با مشتقگیری به دست می‌آوریم،

$$f'(x) = (1+x)^{-1} \quad , \quad f''(x) = -(1+x)^{-2} \quad , \quad f'''(x) = 2(1+x)^{-3} .$$

و به همین قیاس الی آخر. استدلال استقرائی ساده‌ای نشان می‌دهد که

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} \;. \qquad (۲)$$

به ویژه، $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ و لذا سری تیلور برای f حول ۰ عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \;.$$

می‌توانستیم این سری تیلور را با استفاده از مثال ۱ بخش ۲۶ نیز به دست آوریم، اما در هر صورت به فرمول (۲) نیاز داریم. اینک قضیهٔ ۳.۳۱ را با $a = -1$، $b = +\infty$ و $x = 1$ به کار می‌بریم. بنابراین برای هر n، y_nای در $(0, 1)$ موجود است به طوری که $R_n(1) = f^{(n)}(y_n)/n!$. معادلهٔ (۲) نشان می‌دهد که

$$R_n(1) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(1+y_n)^n n!} \;,$$

و بنابراین برای هر x،

$$|R_n(1)| = \frac{1}{(1+y_n)^n n} < \frac{1}{n} \;.$$

در نتیجه، $\lim_{n\to\infty} R_n(1) = 0$ و لذا (۱) برقرار است.

صورت دیگر قضیهٔ تیلور، باقیمانده را به شکل انتگرال می‌دهد. برهان آن نتایجی از نظریهٔ انتگرالگیری را به کار می‌برد که خواننده از حسابان با آنها آشناست؛ این نتایج در فصل آتی نیز دیده می‌شوند.

۵.۳۱ قضیهٔ تیلور. فرض کنید که f بر (a, b) تعریف شده باشد که در آن $a < 0 < b$ و فرض کنید که مشتق nام، $f^{(n)}$، بر (a, b) موجود و پیوسته باشد. در این صورت برای x در (a, b) داریم

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt \;. \qquad (۱)$$

برهان. برای $n = 1$، معادلهٔ (۱) حکم می‌کند که

$$R_1(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt \;.$$

این نتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۳۴ برقرار است. برای $n \geq 2$، مکرراً انتگرالگیری جزء به جزء را به کار می‌بریم، یعنی از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. بنابراین، فرض کنید که (۱) برای

$n \geq ۱$ ای برقرار باشد.

انتگرال در (۱) را به کمک قضیهٔ ۲.۳۴، با استفاده از $u(t) = f^{(n)}(t)$ و

$$v'(t) = (x - t)^{n-1}/(n - 1)!$$

به کار می‌بریم، به طوری که $u'(t) = f^{(n+1)}(t)$ و $v(t) = -(x-t)^n/n!$. حاصل می‌شود:

$$R_n(x) = u(x)\, v(x) - u(0)\, v(0) - \int_0^x v(t)u'(t)\, dt$$

$$= f^{(n)}(x) \cdot 0 + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \; . \qquad (۲)$$

تعریف R_{n+1} در تعریف ۲.۳۱ نشان می‌دهد که

$$R_{n+1}(x) = R_n(x) - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \; ; \qquad (۳)$$

بنابراین از (۲) ملاحظه می‌کنیم که (۱) برای $n + 1$ برقرار است. □

۶.۳۱ نتیجه. اگر f تابعی باشد که در قضیهٔ ۵.۳۱ داده شده و x در (a , b) مخالف صفر باشد، آنگاه برای y ای بین ۰ و x،

$$R_n(x) = \frac{(x - y)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(y) \cdot x \, . \qquad (۱)$$

این شکل R_n به شکل کوشی باقیمانده موسوم است.

برهان. فرض می‌کنیم که $x > 0$، حالت $x < 0$ مشابه همین است. قضیهٔ مقدار میانی برای انتگرالها، ۹.۳۳، نشان می‌دهد که برای y ای در $(0 , x)$،

$$\int_x^0 \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(t)dt = [0 - x]\, \frac{(x - y)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(y) \; . \qquad (۲)$$

چون انتگرال موجود در (۲) بنابر قضیهٔ ۵.۳۱ برابر $-R_n(x)$ است، فرمول (۱) برقرار است.

به خاطر بیاورید که قضیهٔ دو جمله‌ای بیان می‌کند که

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \, .$$

که در آن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad , \quad 1 \le k \le n .$$

فرض کنید $a = x$ و $b = 1$؛ در این صورت

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^k .$$

این نتیجه برای مقادیری از x برقرار است حتی اگر در آن، n عددی صحیح نباشد، مشروط بر اینکه اجازه دهیم این سری یک سری نامتناهی باشد. اینک نتیجهٔ مزبور را با استفاده از قضیهٔ تیلور ۵.۳۱ ثابت می‌کنیم. برهان ما از برهان داده شده در [۱۸] پیروی می‌کند.

۷.۳۱ قضیهٔ *سری دو جمله‌ای.* اگر $\alpha \in R$ و $|x| < 1$، آنگاه

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k . \qquad (1)$$

برهان. برای $k = 1, 2, 3, \dots$، فرض کنید $a_k = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)/k!$. اگر α عددی صحیح و نامنفی باشد، آنگاه برای $k > \alpha$، $a_k = 0$ و همان طور که در بحث خود، پیش از این قضیه متذکر شدیم، (۱) برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که α عددی صحیح و نامنفی نیست به طوری که برای هر k، $a_k \neq 0$. چون

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = 1 ,$$

سری در (۱) دارای شعاع همگرایی ۱ است؛ نگاه کنید به قضیهٔ ۱.۲۳ و نتیجهٔ ۳.۱۲. به همین نحو $\sum k a_k x^{k-1}$ برای $|x| < 1$ همگراست و بنابراین

$$\text{برای } |x| < 1 ,\ \lim_{n\to\infty} n a_n x^{n-1} = 0 . \qquad (2)$$

فرض کنید که برای $|x| < 1$، $f(x) = (1+x)^\alpha$. برای $n = 1, 2, \dots$ داریم،

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} = n! a_n (1+x)^{\alpha-n} .$$

بنابراین برای هر n، $n \ge 1$، $f^{(n)}(0) = n! a_n$، و سری موجود در (۱)، سری تیلور f است. همچنین، بنابر قضیهٔ ۵.۳۱ برای $|x| < 1$ داریم

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, n!\, a_n(1+t)^{\alpha-n}\, dt$$

$$= \int_0^x n a_n \left[\frac{x-t}{1+t}\right]^{n-1} (1+t)^{\alpha-1}\, dt \quad . \qquad (۳)$$

می‌توان به آسانی نشان داد که اگر $0 \le t \le x < 1$ یا $-1 < x \le t \le 0$، آنگاه

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \le |x| \; .$$

برای اثبات این مطلب، توجه کنید که برای y ای در $[0 , 1]$، $t = xy$ و بنابراین

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = \left|\frac{x-xy}{1+xy}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1-y}{1+xy}\right| \le |x| \quad ,$$

زیرا $1 - y \le 1 + xy$. نتیجه می‌شود که تابع زیر علامت انتگرال در (۳) به وسیلهٔ

$$n|a_n| \cdot |x|^{n-1} (1+t)^{\alpha-1}$$

کراندار است و بنابراین

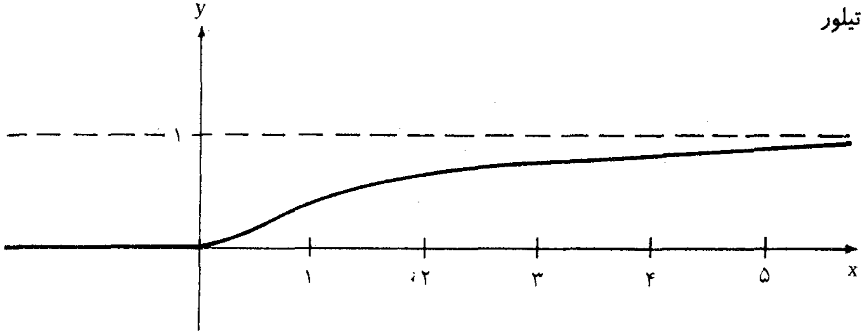
$$|R_n(x)| \le n|a_n| \cdot |x|^{n-1} \int_{-|x|}^{|x|} (1+t)^{\alpha-1}\, dt \; .$$

با به کاربردن (۲)، اینک ملاحظه می‌کنیم که برای $|x| < 1$، $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$، و بنابراین (۱) برقرار است. □

اینک مثالی از یک تابع، مانند f، ارائه می‌کنیم که سری تیلور آن موجود است ولی معرف آن تابع نیست. تابع f بر R بینهایت بار مشتقپذیر است؛ یعنی مشتقهای همهٔ مراتب در هر نقطهٔ R موجودند. این مثال شاید ساختگی به نظر آید ولی وجود چنین تابعهایی [نیز نگاه کنید به تمرین ۴.۳۱] در نظریهٔ توزیعها جنبهٔ حیاتی دارد. نظریهٔ توزیعها نظریه‌ای مهم است که به پیشرفتهای اخیر در معادلات دیفرانسیل و آنالیز فوریه مربوط می‌شود.

مثال ۳. فرض کنید که برای $x > 0$، $f(x) = e^{-1/x}$ و برای $x \le 0$، $f(x) = 0$؛ نگاه کنید به شکل ۱.۳۱. روشن است که f دارای مشتقهای همهٔ مراتب در هر نقطهٔ $x \neq 0$ است. ثابت خواهیم کرد که برای هر n، $n = 0 , 1 , 2 , \ldots$،

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad . \qquad (۱)$$



$f(x) = e^{-1/x}$ برای $x > 0$.

شکل ۱.۳۱

بنابراین سری تیلور برای f متحداً صفر است و لذا f در هیچ بازهٔ بازی شامل ۰ با f تطبیق نمی‌کند.

ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر n یک چند جمله‌ای مانند p_n از درجهٔ $2n$ موجود است به طوری که برای $x > 0$،

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x} p_n(1/x) \quad . \tag{2}$$

این حکم برای $n = 0$ بدیهی است؛ فقط کافی است برای هر t قرار دهید $p_0(t) = 1$. این کار برای $n = 1$ و $n = 2$ نیز آسان است؛ خواننده باید تحقیق کنید که (۲) با $n = 1$ و $p_1(t) = t^2$ برقرار است و اینکه (۲) برای $n = 2$ با $p_2(t) = t^4 - 2t^3$ برقرار است. برای استفاده از استقرا، فرض می‌کنیم که نتیجه برای n برقرار است و می‌نویسیم

$$p_n(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{2n} t^{2n} \quad , \quad a_{2n} \neq 0$$

در این صورت برای $x > 0$، داریم

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x} \left[\sum_{k=0}^{2n} \frac{a_k}{x^k}\right] .$$

و با یک بار مشتقگیری نتیجه می‌شود که

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-1/x}\left[0 - \sum_{k=1}^{2n} \frac{ka_k}{x^{k+1}}\right] + \left[\sum_{k=0}^{2n} \frac{a_k}{x^k}\right] e^{-1/n} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) .$$

حکم (۲) اینک برای $n + 1$ آشکار است؛ در واقع چند جمله‌ای p_{n+1} آشکارا عبارت است از

$$p_{n+1}(t) = -\sum_{k=1}^{2n} ka_k t^{k+1} + \left[\sum_{k=0}^{2n} a_k t^k\right] \cdot (-t^2) ,$$

که از درجهٔ $2n + 2$ است.

اینک (۱) را به استقرا ثابت می‌کنیم. فرض کنید که برای $n \geq 0$ ای، $f^{(n)}(0) = 0$. لازم است ثابت کنیم که

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} f^{(n)}(x) = 0 .$$

بدیهی است که $\lim_{x\to 0^-}(1/x)\, f^{(x)}(x) = 0$ زیرا برای هر $x < 0$، $f^{(n)}(x) = 0$. بنابر قضیهٔ ۱۰.۲۰ کافی است تحقیق کنیم که

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} f^{(n)}(x) = 0 .$$

با توجه به (۲) کافی است نشان دهیم که برای هر چند جمله‌ای q

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} q(\frac{1}{x}) = 0 .$$

در واقع، چون $q(1/x)$ مجموعی متناهی از جملاتی به شکل $b_k(1/x)^k$ است، کافی است نشان دهیم که برای $k \geq 0$ ثابت گرفته شده،

$$\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^k e^{-1/x} = 0 .$$

بنا بر تعریف ۱.۲۰ ، دنباله‌ای مانند (x_n) از اعداد مثبت را در نظر می‌گیریم به طوری که $\lim x_n = 0$ و نشان می‌دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{x_n})^k e^{-1/x_n} = 0 .$$

اگر $y_n = 1/x$، آنگاه $\lim y_n = +\infty$ [بنابر قضیهٔ ۱۰.۹] و لازم است نشان دهیم که $\lim_{n\to\infty} y_n^k\ e^{-y_n} = 0$ یا

$$\lim_{y\to\infty} y^k e^{-y} = 0 . \qquad (۳)$$

برای ملاحظهٔ درست بودن (۳)، توجه کنید که بنابر مثال ۱ (الف) برای $y > 0$، $e^y \geq y^{k+1}/(k+1)!$ و بنابراین برای $y > 0$،

$$y^k e^{-y} \leq y^k (k+1)! y^{-k-1} = \frac{(k+1)!}{y} .$$

درستی حد (۳) را می‌توان با k بار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال ۲.۳۰ تحقیق کرد.

همان طور که در مورد سریهای توانی عمل می‌شود، می‌توان سریهای تیلوری را در نظر گرفت که حول ۰ تمرکز داشته باشند.

۸.۳۱ تعریف. فرض کنید f تابعی تعریف شده بر بازهٔ بازی شامل $x_\circ \in \mathrm{R}$ باشد. اگر f دارای مشتقهای همهٔ مراتب در $x_\circ$ باشد، آنگاه سری

$$\sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_\circ)}{k!}(x - x_\circ)^k$$

سری تیلور برای f حول $x_\circ$ نامیده می‌شود.

قضیه‌های این بخش را می‌توان به آسانی به سریهای تیلور کلی که هم اکنون تعریف کردیم، تبدیل کرد.

تمرینها

۱.۳۱. سری تیلور برای $\cos x$ را پیدا و مشخص کنید چرا برای هر $x \in \mathrm{R}$ به $\cos x$ همگراست.

۲.۳۱. تمرین ۱.۳۱ را برای $\sinh x = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x})$ و $\cosh x = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x})$ تکرار کنید.

۳.۳۱. در مثال ۲، چرا قضیهٔ ۳.۳۱ را به جای نتیجهٔ ۴.۳۱ به کار بردیم؟

۴.۳۱. a و b را در R با $a < b$ در نظر بگیرید. نشان دهید که تابعهای بینهایت بار مشتقپذیر f_a، g_b، $h_{a,b}$ و $h^*_{a,b}$ بر R با خاصیتهای زیر موجودند. می‌توانید، بدون برهان، فرض کنید که مجموع، حاصل ضرب، و غیره از توابع بینهایت بار مشتقپذیر مجدداً بینهایت بار مشتقپذیرند. همین قلم در مورد خارج قسمت صادق است مشروط بر اینکه مخرج هرگز صفر نشود.

(الف) برای $x \le a$، $f_a(x) = \circ$ و برای $x > \circ$، $f_a(x) > \circ$. راهنمایی: فرض کنید $f_a(x) = f(x - a)$ که در آن f تابع داده شده در مثال ۳ است.

(ب) برای $x \ge b$، $g_b(x) = \circ$ و برای $x < b$، $g_b(x) > \circ$.

(پ) برای $x \in (a, b)$، $h_{a,b}(x) > \circ$ و برای $x \notin (a, b)$، $h_{a,b}(x) = \circ$.

(ت) برای $x \leq a$، $h^*_{a,b}(x) = 0$ و برای $x \geq b$، $h^*_{a,b}(x) = 1$. راهنمایی: از $f_a/(f_a + g_a)$ استفاده کنید.

۳۱.۵. فرض کنید که برای $x \neq 0$، $g(x) = e^{-1/x^2}$ و $g(0) = 0$.

(الف) نشان دهید که برای هر $n = 0, 1, 2, \dots$، $g^{(n)}(0) = 0$. راهنمایی: از مثال ۳ استفاده کنید.

(ب) نشان دهید که سری تیلور برای g حول ۰ تنها در $x = 0$ با g مطابقت می‌کند.

۳۱.۶. برهان استانداردی برای قضیهٔ ۳۱.۳ به ترتیب زیر است. فرض کنید $x > 0$ و M به صورتی باشد که در برهان قضیهٔ ۳۱.۳ داده شد، و گیرید که برای $t \in [0, x]$

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) + M \cdot \frac{(x-t)^n}{n!}$$

(الف) نشان دهید که F بر $[0, x]$ مشتقپذیر است و اینکه

$$F'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - M] .$$

(ب) نشان دهید که $F(0) = F(x)$.

(پ) قضیهٔ رول ۲۹.۲ را در مورد F به کار برید تا yای در $(0, x)$ به دست آورید به طوری که $f^{(n)}(y) = M$.

فصل ۶

انتگرالگیری

این فصل به دو منظور است: شامل بسطی دقیق از انتگرال ریمان است که انتگرالی است که در درسهای حسابان استاندارد مطالعه می‌شود. همچنین مشتمل بر معرفی تعمیمی از انتگرال ریمان به نام انتگرال ریمان - استیلتْ یِس است. این تعمیم، ساده و طبیعی است. به علاوه انتگرال ریمان - استیلت یس ابزاری مهم در احتمال و آمار، و سایر زمینه‌های ریاضیات است.

بخش ۳۲. انتگرال ریمان

نظریهٔ انتگرال ریمان مشکلتر از چندین مبحث دیگری که در این کتاب به آنها پرداخته‌ایم، نیست. تنها اشکال در این است که این نظریه متضمن برخی نمادگذاریها و اصطلاحات فنی است.

۱.۳۲ تعریف. فرض کنید f تابع کرانداری بر بازهٔ بسته $[a , b]$ باشد. برای $S \subseteq [a , b]$، از نماد

$$M(f , S) = \sup\{f(x): x \in S\} \text{ و } m(f , s) = \inf\{t(x): x \in S\}$$

استفاده می‌کنیم. یک افراز $[a , b]$ عبارت از هر مجموعهٔ مرتب متناهی به شکل

$$P = \{a = t_۰ < t_۱ < ... < t_n = b\}$$

است. مجموع داربوی بالای $U (f , P)$ ی تابع f نسبت به P عبارت است از مجموع

$$U(f , P) = \sum_{k=۱}^{n} M(f , [t_{k-۱} , t_k]) . (t_k - t_{k-۱})$$

و مجموع داربوی پایین $L(f , P)$ عبارت است از

$$L(f , P) = \sum_{k=۱}^{n} m(f , [t_{k-۱} , t_k]) . (t_k - t_{k-۱}) .$$

توجه کنید که

$$U(f , p) \le \sum_{k=1}^{n} M(f , [a , b]) . (t_k - t_{k-1}) = M(f , [a , b])(b - a) .$$

به همین ترتیب $L(f , P) \ge m(f , [a , b]) . (b - a)$ و بنابراین

$$m(f , [a , b]) . (b - a) \le L(f , P) \le U(f , P) \le M(f , [a , b]) (b - a) . \qquad (۱)$$

انتگرال داربوی بالای $U(f)$ تابع f روی $[a , b]$ به توسط

$$U(f) = \inf\{U(f , P): \text{است } [a , b] \text{ افرازی از } P\}$$

تعریف می‌شود و انتگرال داربوی پایین عبارت است از

$$L(f) = \sup\{L(f , P) : \text{است } [a , b] \text{ افرازی از } P\} .$$

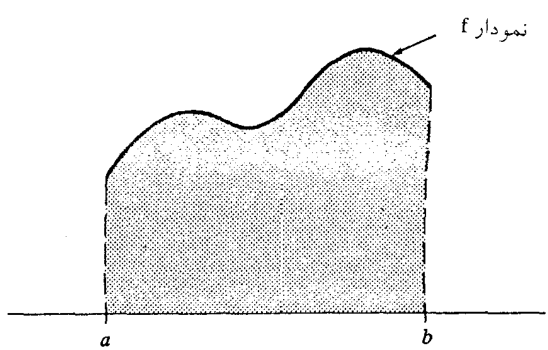
با توجه به (۱) ، $U(f)$ و $L(f)$ عددهای حقیقی‌اند.

در قضیهٔ ۴.۳۲ ثابت خواهیم کرد که $L(f) \le U(f)$. این نابرابری از روی (۱) بدیهی نیست. [چرا؟] گوییم f بر $[a , b]$ انتگرالپذیر است مشروط بر اینکه $L(f) = U(f)$. در این حالت به نشانهٔ این مقدار مشترک می‌نویسیم $\int_a^b f$ یا $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = L(f) = U(f) . \qquad (۲)$$

متخصصان، این انتگرال را انتگرال داربو می‌نامند. تعریف ریمان از انتگرال، اندکی متفاوت است [تعریف ۸.۳۲] ، اما در قضیهٔ ۹.۳۲ نشان خواهیم داد که این تعریفها معادل‌اند. به این دلیل، از اصطلاح رایج استفاده می‌کنیم و انتگرال تعریف شده در بالا را انتگرال ریمان می‌نامیم.

برای تابعهای نامنفی، $\int_a^b f$ به دلیل زیر به عنوان مساحت ناحیهٔ زیر نمودار f تعبیر می‌شود [نگاه کنید به شکل ۱.۳۲] . هر مجموع داربوی پایین نمایندهٔ مساحت اجتماعی از مستطیلهای



شکل ۱.۳۲

درون ناحیه است و هر مجموع داربوی بالا نمایندهٔ مساحت اجتماعی از مستطیلهایی است که این ناحیه را در بردارد. به علاوه، $\int_a^b f$ عدد یکتایی است که بزرگتر از همهٔ مجموعهای داربوی پایین یا برابر آنها است و کوچکتر از همهٔ مجموعهای داربوی بالا یا برابر آنهاست. شکل ۲.۱۹ در بخش ۱۹ چنین وضعیتی را برای $[a, b] = [۰, ۱]$ تشریح می‌کند و

$$P = \{۰ < \frac{۱}{n} < \frac{۲}{n} < \dots < \frac{n-۱}{n} < ۱\} .$$

مثال ۱. ساده‌ترین تابعی که انتگرال آن بدیهی نیست، تابع $f(x) = x^۲$ است. تابع f را بر بازهٔ $[۰, b]$ در نظر بگیرید که در آن $b > ۰$. برای افرازی مانند

$$P = \{۰ = t_۰ < t_۱ < \dots < t_n = b\}$$

داریم

$$U(f, P) = \sum_{k=۱}^{n} \sup\{x^۲ : x \in [t_{k-۱}, t_k]\} . (t_k - t_{k-۱}) = \sum_{k=۱}^{n} t_k^۲(t_k - t_{k-۱}) .$$

اگر t_k را به صورت $t_k = kb/n$ برگزینیم، در این صورت می‌توانیم از تمرین ۱.۱ استفاده و عبارت

$$U(f, P) = \sum_{k=۱}^{n} \frac{k^۲b^۲}{n^۲}(\frac{b}{n}) = \frac{b^۳}{n^۳}\sum_{k=۱}^{n} k^۲ = \frac{b^۳}{n^۳} . \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

را محاسبه کنیم. برای nهای بزرگ، این عبارت به $b^۳/۳$ نزدیک است و بنابراین نتیجه می‌گیریم که $U(f) \le b^۳/۳$. برای همین افراز به دست می‌آوریم

$$L(f, P) = \sum_{k=۱}^{n} \frac{(k-۱)^۲b^۲}{n^۲}(\frac{b}{n}) = \frac{b^۳}{n^۳} . \frac{(n-۱)(n)(۲n-۱)}{۶} ,$$

و بنابراین $L(f) \ge b^۳/۳$. بنابراین $f(x) = x^۲$ بر $[۰, b]$ انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b x^۲dx = \frac{b^۳}{۳} .$$

البته هر دانشجو که درس حسابان خوانده است، می‌تواند این انتگرال را با استفاده از فرمولی که بر قضیهٔ اساسی حسابان مبتنی است، محاسبه کند؛ نگاه کنید به مثال ۱ بخش ۳۴.

مثال ۲. بازهٔ $[۰, b]$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که برای xهای گویا در $[۰, b]$، $f(x) = ۱$ و برای xهای گنگ در $[۰, b]$، $f(x) = ۰$. برای هر افراز

$$P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < b\}$$

داریم

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M(f, [t_{k-1}, t_k]) \cdot (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (t_k - t_{k-1}) = b$$

و

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (t_k - t_{k-1}) = 0 \ .$$

نتیجه می‌شود که $U(f) = b$ و $L(f) = 0$. انتگرالهای داربوی بالا و پایین برای f با یکدیگر موافقت ندارند و لذا f انتگرالپذیر نیست!

اینک برخی خاصیتهای انتگرال را بسط می‌دهیم.

۲.۳۲ لم. فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a, b]$ باشد. اگر P و Q افرازهایی از $[a, b]$ باشند و $P \subseteq Q$، آنگاه

$$L(f, P) \le L(f, Q) \le U(f, Q) \le U(f, P) \ . \qquad (1)$$

برهان. نابرابری وسطی بدیهی است. برهانهای نخستین و سومین نابرابریها مثل هم است، لذا ثابت می‌کنیم که

$$L(f, P) \le L(f, Q) \ . \qquad (2)$$

یک استدلال استقرائی [تمرین ۴.۳۲] نشان می‌دهد که می‌توانیم فرض کنیم که Q تنها یک نقطه بیشتر از P، مانند u، دارد. اگر

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \ ,$$

آنگاه برای $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ای

$$Q = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < u < t_k < \dots < t_n = b\} \ .$$

مجموعهای داربوی پایین برای P و Q، بجز برای جمله‌های شامل t_{k-1} یا t_k، یکی هستند. در واقع تفاضل آنها عبارت است از

$$L(f, Q) - L(f, P) = m(f, [t_{k-1}, u]) \cdot (u - t_{k-1}) + m(f, [u, t_k]) \cdot (t_k - u)$$
$$- m(f, [t_{k-1}, t_k]) \cdot (t_k - t_{k-1}) \ . \qquad (3)$$

برای اثبات (۲)، کافی است نشان دهیم که این کمیت نامنفی است. با استفاده از تمرین ۷.۴ (۱)،

ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} & m(f, [t_{k-1}, t_k])(t_k - t_{k-1}) \\ &= m(f, [t_{k-1}, t_k]) . \{(t_k - u) + (u - t_{k-1})\} \\ &\leq m(f . [u, t_k) . (t_k - u) + m(f, [t_{k-1}, u]) . (u - t_{k-1}) . \end{aligned}$$ □

۳.۳۲ لم. اگر f تابعی کراندار بر $[a, b]$ باشد، و اگر P و Q افرازهایی از $[a, b]$ باشند، آنگاه $L(f, P) \leq U(f, Q)$.

برهان. مجموعهٔ $P \cup Q$ نیز یک افراز $[a, b]$ است. چون $P \subseteq P \cup Q$ و $Q \subseteq P \cup Q$، می‌توانیم لم ۲.۳۲ را به کار بریم و به دست آوریم

$$L(f, P) \leq L(f, P \cup Q) \leq U(f, P \cup Q) \leq U(f, Q) .$$ □

۴.۳۲ قضیه. اگر f تابعی کراندار بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $L(f) \leq U(f)$.

برهان. افرازی از $[a, b]$ مانند P را تثبیت کنید. لم ۳.۳۲ نشان می‌دهد که $L(f, P)$ یک کران پایین برای مجموعهٔ

$$\{U(f, Q) : \text{افرازی از } [a, b] \text{ است } Q\}$$

است. بنابراین $L(f, P)$ باید کمتر از یا برابر بزرگترین کران پایین [اینفیمم!] این مجموعه باشد، یعنی

$$L(f, P) \leq U(f) . \qquad (1)$$

حال (۱) نشان می‌دهد که $U(f)$ یک کران بالای مجموعهٔ

$$\{L(f, P) : \text{افرازی از } [a, b] \text{ است } P\}$$

است و لذا $U(f) \geq L(f)$. □

توجه کنید که قضیهٔ ۴.۳۲ از لم ۳.۳۲ و تمرین ۸.۴ نتیجه می‌شود، نگاه کنید به تمرین ۵.۳۲

قضیهٔ بعدی یک «معیار کوشی» برای انتگرالپذیری می‌دهد.

۵.۳۲ قضیه. تابعی کراندار مانند f بر [a , b] انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، افرازی از [a , b] مانند P موجود باشد به طوری که

$$U(f , P) - L(f , P) < \varepsilon \quad . \tag{۱}$$

برهان. نخست فرض کنید که f انتگرالپذیر باشد و $\varepsilon > 0$ را در نظر بگیرید. افرازهایی مانند P_1 و P_2 از [a , b] موجودند که در

$$L(f , P_1) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad U(f , P_2) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

صدق می‌کنند. برای $P = P_1 \cup P_2$، لم ۳.۳۲ را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} U(f , P) - L(f , P) &\le U(f , P_2) - L(f , P_1) \\ &< U(f) + \frac{\varepsilon}{2} - [L(f) - \frac{\varepsilon}{2}] = U(f) - L(f) + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

چون f انتگرالپذیر است، $U(f) = L(f)$ و بنابراین (۱) برقرار است.

به عکس، فرض کنید که برای هر $\varepsilon > 0$، نابرابری (۱) برای افرازی مانند P برقرار باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} U(f) \le U(f , P) &= U(f , P) - L(f , P) + L(f , P) \\ &< \varepsilon + L(f , P) \le \varepsilon + L(f) \end{aligned}$$

چون ε دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $U(f) \le L(f)$. بنابراین طبق قضیهٔ ۴.۳۲ داریم $U(f) = L(f)$ ؛ یعنی، f انتگرالپذیر است. □

باقیماندهٔ این بخش به اثبات معادل بودن تعریفهای ریمان و داربو برای انتگرالپذیری اختصاص دارد. بنابراین خواننده‌ای که به انتگرال داربوی تعریف ۱.۳۲ قناعت بورزد، می‌تواند مستقیماً به بخش بعدی برود.

۶.۳۲ تعریف. روزنه [mesh =] افرازی مانند P عبارت است از ماکسیمم طول زیر بازه‌هایی که P را می‌سازند. بنابراین اگر

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \quad ,$$

آنگاه

$$\text{mesh } (P) = \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1 , 2 , \dots , n\} \quad .$$

ذیلاً «معیار کوشی» دیگری برای انتگرالپذیری ارائه می‌شود.

۷.۳۲ قضیه. تابعی کراندار مانند f بر $[a , b]$ انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر افراز P از $[a , b]$،

(۱) $\qquad$ $\text{mesh}(P) < \delta$ مستلزم آن باشد که $U(f , P) - L(f , P) < \varepsilon$

برهان. قضیهٔ ۵.۳۲ نشان می‌دهد که شرط $\varepsilon - \delta$ در (۱) مستلزم انتگرالپدیری است.

به عکس، فرض کنید که f بر $[a , b]$ انتگرالپذیر باشد. گیرید $\varepsilon > 0$ و افرازی مانند

$$P_0 = \{a = u_0 < u_1 < \dots < u_m = b\}$$

از $[a , b]$ را انتخاب کنید به طوری که

$$U(f , P) - L(f , P_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (۲)$$

چون f کراندار است، $B > 0$ ای موجود است به طوری که برای هر x در $[a , b]$، $|f(x)| \le B$.

فرض کنید $\delta = \varepsilon/(8mB)$؛ m تعداد بازه‌هایی است که P_0 را تشکیل می‌دهند.

برای تحقیق درستی (۱)، افرازی دلخواه مانند

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

را با $\text{mesh}(P) < \delta$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $Q = P \cup P_0$. اگر Q یک عضو بیشتر از P داشته باشد، آنگاه نگاهی به (۳) در برهان لم ۲.۳۲ ما را رهنمون می‌کند به اینکه

$$L(f , Q) - L(f , P) \le B \,.\, \text{mesh}(P) - (-B) \,.\, \text{mesh}(P) = 2B \,.\, \text{mesh}(P).$$

چون Q حداکثر m عضو دارد که در P نیستند، یک استدلال استقرائی نشان می‌دهد که

$$L(f , Q) - L(f , P) \le 2mB \,.\, \text{mesh}(P) < 2mB\delta = \frac{\varepsilon}{4}.$$

بنابر لم ۲.۳۲ ، داریم $L(f , P_0) \le L(f , Q)$ و لذا

$$L(f , P_0) - L(f , P) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

به همین نحو

$$U(f , P) - U(f , P_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

بنابراین

$$U(f , P) - L(f , P) < U(f , P_0) - L(f , P_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

حال (۲) نشان می‌دهد که $U(f , P) - L(f , P) < \varepsilon$ و به این ترتیب درستی (۱) را محقق کرده‌ایم. □

اینک تعریف ریمان را از انتگرالپذیری ارائه می‌دهیم.

۸.۳۲ تعریف. فرض کنید f تابعی کراندار بر [a , b] باشد، و فرض کنید

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

افرازی از [a , b] باشد. یک مجموع ریمان f وابسته به افراز P مجموعی است به شکل

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(t - t_{k-1})$$

که در آن برای $k = 1 , 2 , \dots , n$، $x_k \in [t_{k-1} , t_k]$. انتخاب x_kها کاملاً دلخواه است و بنابراین بینهایت مجموع ریمان وابسته به یک تابع و یک افراز موجود است.

تابع f بر [a , b] ریمان انتگرالپذیر است هرگاه عددی مانند r با خاصیت زیر موجود باشد. به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر مجموع ریمان S تابع f . وابسته به افرازی مانند P با $\text{mesh}\ (P) < \delta$،

$$|S - r| < \varepsilon . \qquad (1)$$

عدد r *انتگرال ریمان* f بر [a , b] است و موقتاً به صورت $\mathscr{R} \int_a^b f$ نوشته می‌شود.

۹.۳۲ قضیه. تابعی مانند f بر [a , b] ریمان انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر [داربو] انتگرالپذیر باشد، که در این صورت مقدار انتگرالها یکی هستند.

برهان. نخست فرض کنید که f بر [a , b] به معنی تعریف ۱.۳۲ [داربو] انتگرالپذیر باشد. فرض کنید $\varepsilon > 0$، و گیرید که $\delta > 0$ چنان انتخاب شده باشد که (۱) در قضیهٔ ۷.۳۲ برقرار باشد. نشان می‌دهیم که برای هر مجموع ریمان

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(t_k - t_{k-1}) \qquad (1)$$

وابسته به افرازی مانند P با $\text{mesh}\ (P) < \delta$،

$$|S - \textstyle\int_a^b f| < \varepsilon \ . \qquad (1)$$

آشکارا داریم، $L(f , P) \le S \le U(f , P)$ و بنابراین (۱) از نابرابریهای

$$U(f , P) < L(f , P) + \varepsilon \le L(f) + \varepsilon = \int_a^b f + \varepsilon$$

و

$$L(f , P) > U(f , P) - \varepsilon \ge U(f) - \varepsilon = \int_a^b f - \varepsilon$$

نتیجه می‌شود. این مطلب، (۱) را ثابت می‌کند، بنابراین f ریمان انتگرالپذیر است و

$$\mathscr{R} \int_a^b f = \int_a^b f$$

اینک فرض کنید که f ریمان انتگرالپذیر به معنی تعریف ۸.۳۲ باشد، و گیرید $\varepsilon > 0$. فرض کنید $\delta > 0$ و r به صورتی باشند که در تعریف ۸.۳۲ داده شده‌اند. هر افرازی مانند

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

را با $\text{mesh}(P) < \delta$ انتخاب و برای هر $k = 1, 2, \dots, n$، x_k را در $[t_{k-1}, t_k]$ چنان انتخاب کنید که

$$f(x_k) < m(f, [t_{k-1}, t_k]) + \varepsilon \quad .$$

مجموع ریمان S برای این انتخاب x_kها در

$$S \le L(f, P) + \varepsilon(b - a)$$

و نیز در

$$|S - r| < \varepsilon$$

صدق می‌کند. نتیجه می‌شود که

$$L(f) \ge L(f, P) \ge S - \varepsilon(b - a) > r - \varepsilon - \varepsilon(b - a) .$$

چون ε دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $L(f) \ge r$. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $U(f) \le r$. چون $L(f) \le U(f)$، ملاحظه می‌کنیم که $L(f) = U(f) = r$. این تساوی نشان می‌دهد که f [داربو] انتگرالپذیر است و اینکه

$$\int_a^b f = r = \mathscr{R} \int_a^b f .$$

□

تمرینها

۱.۳۲. انتگرالهای داربوی بالا و پایین را برای $f(x) = x^3$ بر بازهٔ $[0, b]$ پیدا کنید. راهنمایی: تمرین ۳.۱ و مثال ۱ در بخش ۱ سودمند خواهند بود.

۲.۳۲. فرض کنید که برای xگویا، $f(x) = x$ و برای xگنگ، $f(x) = 0$.

(الف) انتگرالهای داربوی بالا و پایین برای f را در بازهٔ $[0, b]$ پیدا کنید.

(ب) آیا f بر $[0, b]$ انتگرالپذیر است؟

۳.۳۲. تمرین ۲.۳۲ را برای تابع g تکرار کنید که در آن برای xگویا، $g(x) = x^2$؛ و برای xگنگ، $g(x) = 0$.

۴.۳۲. استدلالی استقرائی را که در برهان لم ۲.۳۲ لازم است، تدارک ببینید.

۵.۳۲. از تمرین ۸.۴ استفاده کرده قضیهٔ ۴.۳۲ را ثابت کنید. مجموعه‌های S و T را در این حالت مشخص کنید.

۶.۳۲. گیرید f تابعی کراندار بر $[a\ ,\ b]$ باشد. فرض کنید دنباله‌هایی مانند (U_n) و (L_n) از مجموعهای داربوی بالا و پایین موجود باشند به طوری که $\lim(U_n - L_n) = 0$. نشان دهید که f انتگرالپذیر است و اینکه $\int_a^b f = \lim U_n = \lim L_n$.

۷.۳۲. گیرید f بر $[a\ ,\ b]$، انتگرالپذیر باشد و فرض کنید که g تابعی بر $[a\ ,\ b]$ باشد به طوری که بجز برای تعدادی متناهی از نقاط x در $[a\ ,\ b]$، $f(x) = g(x)$. نشان دهید که g انتگرالپذیر است و $\int_a^b f = \int_a^b g$.

۸.۳۲. نشان دهید که اگر f بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه f بر هر بازهٔ $[c\ ,\ d] \subseteq [a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر است.

بخش ۳۳. خاصیتهای انتگرال ریمان

در این بخش برخی خاصیتهای اساسی انتگرال ریمان را ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که بسیاری از تابعهای آشنا، از جمله تابعهای تکه‌ای پیوسته و تابعهای تکه‌ای یکنوا، انتگرالپذیرند.

یک تابع بر بازه‌ای یکنوا است هرگاه، بر این بازه یا صعودی یا نزولی باشد؛ نگاه کنید به تعریف ۶.۲۹.

۱.۳۳ قضیه. هر تابع یکنوای f بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر است.

برهان. فرض می‌کنیم که f بر $[a\ ,\ b]$ صعودی است و حالت نزولی را به عنوان تمرین ۱.۳۳ واگذار می‌کنیم. چون برای هر $x \in [a\ ,\ b]$، $f(a) \le f(x) \le f(b)$، f آشکارا بر $[a\ ,\ b]$ کراندار است. برای به کاربردن قضیهٔ ۵.۳۲، فرض کنید که $\varepsilon > 0$، و $n \in N$ ای را انتخاب کنید به طوری که $[f(b) - f(a)](b - a)/n < \varepsilon$. برای افراز

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

که در آن به ازای هر k، $t_k - t_{k-1} = (b-a)/n$، داریم

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M(f, [t_{k-1}, t_k]) \cdot (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \frac{b-a}{n}$$

و

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) \frac{b-a}{n} ,$$

به طوری که

$$U(f, P) - L(f, P) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_{k-1})] = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] < \varepsilon .$$

حال قضیهٔ ۵.۳۲ نشان می‌دهد که f انتگرالپذیر است. □

۲.۳۳ قضیه. هر تابع پیوسته مانند f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است. .

برهان. مجدداً، برای به کارگیری قضیهٔ ۵.۳۲، گیرید که $\varepsilon > 0$. چون بنابر قضیهٔ ۱۹.۲ ، f بر $[a, b]$ پیوستهٔ یکنواخت است، $\delta > 0$ای موجود است به طوری که

(۱) $x, y \in [a, b]$ و $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

افراز دلخواهی مانند $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ را در نظر بگیرید که در آن

$$\max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\} < \delta .$$

چون بنابر قضیهٔ ۱.۱۸ ، f ماکسیمم و مینیمم خود را بر هر بازهٔ $[t_{k-1}, t_k]$ به خود می‌گیرد، از (۱) نتیجه می‌شود که برای هر k

$$M(f, [t_{k-1}, t_k]) - m(f, [t_{k-1} - t_k]) < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

بنابراین داریم

$$U(f, P) - L(f, P) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon .$$

و قضیهٔ ۵.۳۲ نشان می‌دهد که f انتگرالپذیر است. □

۵.۳۳ قضیه. فرض کنید که f و g تابعهای انتگرالپذیری بر $[a, b]$ باشند و c عددی حقیقی باشد. در این صورت

(i) cf انتگرالپذیر است و $\int_a^b cf = c\int_a^b f$ ؛

(ii) $f + g$ انتگرالپذیر است و $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

تمرین ۸.۳۳ نشان می‌دهد که fg ، $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ نیز انتگرالپذیرند، اما فرمولهایی وجود ندارند که انتگرالهای آنها را بر حسب $\int_a^b f$ و $\int_a^b g$ بدهند.

برهان. برهان (i) سه حالت را شامل می‌شود: $c > 0$ ، $c = -1$ ، $c < 0$. البته، (i) برای $c = 0$ بدیهی است.

فرض کنید $c > 0$ و افراز

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

از $[a, b]$ را در نظر بگیرید. تمرینی ساده [تمرین ۲.۳۳] نشان می‌دهد که برای هر k

$$M(cf, [t_{k-1}, t_k]) = cM(f, [t_{k-1}, t_k]) ,$$

و بنابراین $U(cf, P) = cU(f, P)$. کاربرد دیگری از همین تمرین نشان می‌دهد که $U(cf) = cU(f)$. استدلالهای مشابهی نشان می‌دهند که $L(cf) = cL(f)$. چون f انتگرالپذیر است، داریم $L(cf) = cL(f) = cU(f) = U(cf)$. بنابراین cf انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b cf = U(cf) = cU(f) = c\int_a^b f \quad , \quad c > 0 . \qquad (1)$$

اینک به حالت $c = -1$ می‌پردازیم. تمرین ۴.۵ مستلزم آن است که برای کلیهٔ افرازهای P از $[a, b]$ ، $U(-f, P) = -L(f, P)$. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} U(-f) &= \inf\{U(-f, P) : P \text{ افرازی از } [a, b] \text{ است}\} \\ &= \inf\{-L(f, P) : P \text{ افرازی از } [a, b] \text{ است}\} \\ &= -\sup\{L(f, P) : P \text{ افرازی از } [a, b] \text{ است}\} = -L(f) . \end{aligned}$$

با قرار دادن $-f$ به جای f ، همچنین به دست می‌آوریم $L(-f) = -U(f)$. چون f انتگرالپذیر است، $U(-f) = -L(f) = -U(f) = L(-f)$ ؛ بنابراین $-f$ انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f . \qquad (2)$$

حالت $c < 0$ با به‌کارگیری (۲) و سپس (۱) برای $-c$ حل و فصل می‌شود:

$$\int_a^b cf = -\int_a^b (-c)f = -(-c)\int_a^b f = c\int_a^b f\,.$$

برای اثبات (ii) دوباره از قضیهٔ ۵.۳۲ استفاده می‌کنیم. بنابر قضیهٔ ۵.۳۲ افرازهایی مانند $P_۱$ و $P_۲$ از $[a\,,\,b]$ موجودند به طوری که

$$U(f\,,P_۱) - L(f\,,P_۱) < \frac{\varepsilon}{۲}\ ,\quad U(g\,,P_۲) - L(g\,,P_۲) < \frac{\varepsilon}{۲}\,.$$

لم ۲.۳۲ نشان می‌دهد که اگر $P = P_۱ \cup P_۲$، آنگاه

$$U(f\,,P) - L(f\,,P) < \frac{\varepsilon}{۲}\,,\ U(g\,,P) - L(g\,,P) < \frac{\varepsilon}{۲}\,. \tag{۳}$$

به ازای هر زیر مجموعهٔ S از $[a\,,\,b]$، داریم

$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in S\} \geq \inf\{f(x) : x \in S\} + \inf\{g(x) : x \in S\}\,,$$

یعنی، $m(f + g\,,S) \geq m(f\,,S) + m(g\,,S)$. نتیجه می‌شود که

$$L(f + g\,,P) \geq L(f\,,P) + L(g\,,P)\ ,$$

و به همین نحو داریم

$$U(f + g\,,P) \leq U(f\,,P) + U(g\,,P)\,.$$

بنابراین از (۳) به دست می‌آوریم

$$U(f + g\,,P) - L(f\,,g\,,P) < \varepsilon\,.$$

اینک قضیهٔ ۵.۳۲ نشان می‌دهد که $f + g$ انتگرالپذیر است. چون

$$\begin{aligned}\int_a^b (f + g) &= U(f + g) \leq U(f + g\,,P) \leq U(f\,,P) + U(g\,,P)\\ &< L(f\,,P) + L(g\,,P) + \varepsilon \leq L(f) + L(g) + \varepsilon\\ &= \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\int_a^b (f + g) &= L(f + g) \geq L(f + g\,,P) \geq L(f\,,P) + L(g\,,P)\\ &> L(f\,,P) + L(g\,,P) - \varepsilon \geq U(f) + U(g) - \varepsilon\\ &= \int_a^b f + \int_a^b g - \varepsilon\,,\end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \,.$$
□

۴.۳۲ قضیه. اگر f و g بر $[a\,,\,b]$ انتگرالپذیر باشند و اگر برای هر x در $[a\,,\,b]$، $f(x) \leq g(x)$، آنگاه $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

برهان. بنابر قضیهٔ ۳.۳۳، $h = g - f$ بر $[a\,,\,b]$ انتگرالپذیر است. چون برای هر x در $[a\,,\,b]$، $h(x) \geq 0$، آشکار است که برای کلیهٔ افرازهای P ی $[a\,,\,b]$، $L(h\,,\,P) \geq 0$ و لذا $\int_a^b h = L(h) \geq 0$. با به کارگیری مجدد قضیهٔ ۳.۳۳، ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b h \geq 0 \,.$$
□

۵.۳۳ قضیهٔ. اگر f بر $[a\,,\,b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه $|f|$ نیز بر $[a\,,\,b]$ انتگرالپذیر است و

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \,. \tag{1}$$

برهان. این حکم به آسانی از قضیهٔ ۴.۳۳ نتیجه می‌شود مشروط بر اینکه بدانیم $|f|$ بر $[a\,,\,b]$ انتگرالپذیر است. در واقع $-|f| \leq f \leq |f|$ و بنابراین

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \,,$$

که مستلزم (۱) است.

اینک نشان می‌دهیم که $|f|$ انتگرالپذیر است، و این نکته‌ای است که در تمرین ۱.۲۵ به سادگی از آن گذشتیم. برای هر زیر مجموعهٔ S از $[a\,,\,b]$، بنابر تمرین ۶.۳۳ داریم،

$$M(|f|\,,\,S) - m(|f|\,,\,S) \leq M(f\,,\,S) - m(f\,,\,S) \,. \tag{2}$$

از (۲) نتیجه می‌شود که برای کلیهٔ افرازهای P ی $[a\,,\,b]$،

$$U(|f|\,,\,P) - L(|f|\,,\,P) \leq U(f\,,\,P) - L(f\,,\,P) \,. \tag{3}$$

بنابر قضیهٔ ۵.۳۲، برای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P موجود است به طوری که

$$U(f\,,\,P) - L(f\,,\,P) < \varepsilon \,.$$

با توجه به (۳)، همین تذکر در مورد $|f|$ نیز صادق است و لذا $|f|$ بنابر قضیهٔ ۵.۳۲ انتگرالپذیر است.
□

۶.۳۳ قضیه. فرض کنید f تابعی باشد که بر $[a\ ,\ b]$ تعریف شده است. اگر $a < c < b$ و f بر $[a\ ,\ c]$ و بر $[c\ ,\ b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه f بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\ . \qquad (۱)$$

برهان. چون f بر هر دوی $[a\ ,\ c]$ و $[c\ ,\ b]$ کراندار است، f بر $[a\ ,\ b]$ کراندار است. در این برهان مجموعهای بالا و پایین را چنان نشانه گذاری خواهیم کرد که روشن باشد با کدام بازه‌ها سروکار داریم. فرض کنید $\varepsilon > 0$. بنابر قضیهٔ ۵.۳۲، افرازهایی مانند P_1 و P_2 از $[a\ ,\ c]$ و $[c\ ,\ b]$ موجودند به طوری که

$$U_a^c(f\ ,\ P_1) - L_a^c(f\ ,\ P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad U_c^b(f\ ,\ P_2) - L_c^b(f\ ,\ P_2) < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

مجموعهٔ $P = P_1 \cup P_2$ یک افراز $[a\ ,\ b]$ است و بدیهی است که

$$U_a^b(f\ ,\ P) = U_a^c(f\ ,\ P_1) + U_c^b(f\ ,\ P_2)\ . \qquad (۲)$$

و تساوی مشابهی برای مجموعهای پایین موجود است. نتیجه می‌شود که

$$U_a^b(f\ ,\ P) - L_a^b(f\ ,\ P) < \varepsilon\ ,$$

و بنابراین طبق قضیهٔ ۵.۳۲، f بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر است. همچنین (۱) برقرار است، زیرا

$$\int_a^b f \le U_a^b(f\ ,\ P) = U_a^c(f\ ,\ P_1) + U_c^b(f\ ,\ P_2)$$

$$< L_a^c(f\ ,\ P_1) + L_c^b(f\ ,\ P_2) + \varepsilon \le \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon \quad ,$$

و به همین نحو

$$\int_a^b f > \int_a^c f + \int_c^b f - \varepsilon\ .$$

□

اغلب تابعهایی که در حسابان و آنالیز با آنها روبرو می‌شویم، مشمول تعریف بعدی‌اند. با این حال، نگاه کنید به تمرینهای ۱۰.۳۳ - ۱۲.۳۳ .

۷.۳۳ تعریف. تابعی مانند f بر $[a\ ,\ b]$ تکه‌ای یکنواست هرگاه افرازی مانند

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

از $[a\ ,\ b]$ موجود باشد به طوری که f بر هر بازهٔ $(t_{k-1}\ ,\ t_k)$ یکنوا باشد. تابع f تکه‌ای پیوسته است هرگاه افرازی مانند P از $[a\ ,\ b]$ موجود باشد به طوری که f بر هر بازهٔ $(t_{k-1}\ ,\ t_k)$ پیوستهٔ یکنواخت باشد.

۸.۳۳ قضیه. اگر f یک تابع تکه‌ای پیوسته یا یک تابع تکه‌ای یکنوا بر $[a\ ,\ b]$ باشد، آنگاه f بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر است.

برهان. فرض کنید که P افراز توصیف شده در تعریف ۷.۳۳ باشد. بازه‌ای ثابت مانند $[t_{k-1}\ ,\ t_k]$ را در نظر بگیرید. اگر f تکه‌ای پیوسته باشد، آنگاه بنا بر قضیهٔ ۵.۱۹، تحدید آن بر $(t_{k-1}\ ,\ t_k)$ را می‌توان به تابعی پیوسته مانند f_k بر $[t_{k-1}\ ,\ t_k]$ توسیع داد. اگر f تکه‌ای یکنوا باشد، آنگاه تحدید آن بر $(t_{k-1}\ ,\ t_k)$ را می‌توان به تابعی یکنوا مانند f_k بر $[t_{k-1}\ ,\ t_k]$ توسیع داد؛ مثلاً اگر f بر $(t_{k-1}\ ,\ t_k)$ صعودی باشد، صرفاً تعریف کنید

$$f_k(t_k) = \sup\{f(x) : x \in (t_{k-1}\ ,\ t_k)\}$$

و

$$f_k(t_{k-1}) = \inf\{f(x) : x \in (t_{k-1}\ ,\ t_k)\}\ .$$

در هر یک از دو حالت، بنابر قضیهٔ ۱.۳۳ یا ۲.۳۲، f_k بر $[t_{k-1}\ ,\ t_k]$ انتگرالپذیر است. چون f بر $[t_{k-1}\ ,\ t_k]$، بجز احتمالاً در نقاط انتهایی، با f_k مطابقت دارد، تمرین ۷.۳۲ نشان می‌دهد که f نیز بر $[t_{k-1}\ ,\ t_k]$ انتگرالپذیر است. حال قضیهٔ ۶.۳۳ و یک استدلال استقرائی بدیهی نشان می‌دهند که f بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر است. □

این بخش را با نتیجه‌ای ساده ولی سودمند به پایان می‌بریم.

۹.۳۳ قضیهٔ *مقدار میانی برای انتگرالها*. اگر f تابعی پیوسته بر $[a\ ,\ b]$ باشد، آنگاه حداقل برای یک x در $[a\ ,\ b]$، داریم

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\ .$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۱.۱۸، تابع f مقدار ماکسیمم M خود و مقدار مینیمم m خود بر $[a\ ,\ b]$ را

اختیار می‌کند. چون

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M \ .$$

قضیهٔ حاضر از قضیهٔ مقدار میانی ۲.۱۸ نتیجه می‌شود. □

تمرینها

۱.۳۳. برهان قضیهٔ ۱.۳۳ را با نشان دادن اینکه یک تابع نزولی بر $[a , b]$، انتگرالپذیر است، کامل کنید.

۲.۳۳. این تمرین را می‌شد بدون اشکال در بخش ۴ هم آورد. فرض کنید S مجموعهٔ ناتهی کرانداری از $\mathbb{R}$ باشد. برای c ی ثابت، فرض کنید $cS = \{cs : s \in S\}$. نشان دهید که $\sup(cS) = c \,.\, \sup(S)$ و $\inf(cS) = c \,.\, \inf(S)$.

۳.۳۳. تابعی مانند f بر $[a , b]$ یک تابع پله‌ای نامیده می‌شود اگر افرازی مانند $P = \{a = u_0 < u_1 < \dots , u_m = b\}$ از $[a , b]$ موجود باشد به طوری که f بر هر یک از بازه‌های (u_{j-1} , u_j) ثابت باشد؛ مثلاً برای $x \in (u_{j-1} , u_j)$، $f(x) = c_j$.

(الف) نشان دهید که یک تابع پله‌ای مانند f انتگرالپذیر است و $\int_a^b f$ را محاسبه کنید.

(ب) $\int_0^4 P(x)\, dx$ را برای تابع تمبر پستی P در تمرین ۱۰.۱۷ محاسبه کنید.

۴.۳۳. مثالی از یک تابع مانند f بر $[0 , 1]$ ارائه دهید که انتگرالپذیر نباشد اما $|f|$ انتگرالپذیر باشد. راهنمایی: مثال ۲ در بخش ۳۲ را جرح و تعدیل کنید.

۵.۳۳. نشان دهید که $|\int_{-2\pi}^{2\pi} x^2 \sin^8(e^x)\, dx| \leq 16\pi^3/3$.

۶.۳۳. (۲) را در برهان قضیهٔ ۵.۳۳ ثابت کنید. راهنمایی: برای x_0 و y_0 در S،

$$|f(x_0)| - |f(y_0)| \leq |f(x_0) - f(y_0)| \leq M(f , S) - m(f , S) \ .$$

۷.۳۳. فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a , b]$ باشد به طوری که $B > 0$ ای موجود باشد چنان که برای هر x در $[a , b]$، $|f(x)| \leq B$.

(الف) نشان دهید که برای کلیهٔ افرازهای P از $[a , b]$،

$$U(f^2 , P) - L(f^2 , P) \leq 2B[U(f , P) - L(f , P)] \ .$$

راهنمایی: $f(x)^2 - f(y)^2 = [f(x) + f(y)] \,.\, [f(x) - f(y)]$

۸.۳۳. فرض کنید f و g تابعهای انتگرالپذیر بر [a , b] باشند.

(الف) نشان دهید که fg بر [a , b] انتگرالپذیر است. راهنمایی:

$$۴fg = (f + g)^۲ - (f - g)^۲$$

نگاه کنید به تمرین ۷.۳۳.

(ب) نشان دهید که $\max(f , g)$ و $\min(f , g)$ بر [a , b] انتگرالپذیرند. راهنمایی: تمرین ۸.۱۷.

۹.۳۳. گیرید (f_n) دنباله‌ای از تابعهای انتگرالپذیر بر [a , b] باشد و فرض کنید که به طور یکنواخت بر [a , b]، $f_n \to f$. ثابت کنید که f انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n .$$

این نتیجه را با قضیهٔ ۲.۲۵ مقایسه کنید.

۱۰.۳۳. فرض کنید که برای $x \neq ۰$، $f(x) = \sin(۱/x)$ و $f(۰) = ۰$. نشان دهید که f بر [۱ , ۱−] انتگرالپذیر است. راهنمایی: نگاه کنید به پاسخ تمرین ۱۱.۳۲ (پ).

۱۱.۳۳. فرض کنید که برای $x \neq ۰$، $f(x) = x\,\mathrm{sgn}(\sin(۱/x))$ و $f(۰) = ۰$.

(الف) نشان دهید که f بر [۱ , ۱−] تکه‌ای پیوسته نیست.

(ب) نشان دهید که f بر [۱ , ۱−] تکه‌ای یکنوا نیست.

(پ) نشان دهید که f بر [۱ , ۱−] انتگرالپذیر است.

۱۲.۳۳. فرض کنید که f تابع توصیف شده در تمرین ۱۴.۱۷ باشد.

(الف) نشان دهید که f بر هیچ بازه‌ای مانند [a , b] تکه‌ای پیوسته یا تکه‌ای یکنوا نیست.

(ب) نشان دهید که f بر هر بازهٔ [a , b] انتگرالپذیر است و $\int_a^b f = ۰$.

۱۳.۳۳. فرض کنید که f و g تابعهای پیوسته‌ای بر [a , b] باشند به طوری که $\int_a^b f = \int_a^b g$. نشان دهید که $x \in [a , b]$ای موجودی است به طوری که $f(x) = g(x)$.

۱۴.۳۳. (الف) فرض کنید که f و g تابعهایی پیوسته بر [a , b] باشند و برای هر x در [a , b]، $g(x) \geq ۰$. ثابت کنید که $x \in [a , b]$ای موجود است به طوری که

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(x) \int_a^b g(t)\,dt .$$

(ب) نشان دهید که قضیهٔ ۹.۳۳ حالتی خاص از بخش (۱) است.

بخش ۳۴. قضیهٔ بنیادی حسابان

قضیهٔ بنیادی حسابان دو صورت دارد. هر کدام از آنها، به بیانی کلی، حاکی از این است که مشتقگیری و انتگرالگیری اعمالی عکس یکدیگرند. در واقع نخستین صورت آن در این کتاب [قضیهٔ ۱.۳۴] بیان می‌کند که «انتگرال مشتق یک تابع، خود همان تابع است» و صورت دوم [قضیهٔ ۳.۳۴] می‌گوید که «مشتق انتگرال تابعی پیوسته، خودِ همان تابع است». تا حدی در کتابها به صورت سنت در آمده است که ابتدا صورت دوم قضیهٔ را ثابت کنند و از آن برای اثبات صورت نخستین استفاده کنند، گر چه در برخی کتابها از این رهیافت اجتناب می‌شود. کانینگهام جونیور[۱] [b] دلایل خوبی برای اجتناب از رهیافت سنتی ارائه می‌کند:

(الف) قضیهٔ ۳.۳۴ تنها برای تابعهای g یی که برای آنها g' پیوسته باشد، مستلزم ۱.۳۴ است؛ نگاه کنید به تمرین ۱.۳۴.

(ب) وابسته کردن قضیهٔ ۱.۳۴ به قضیهٔ ۳.۳۴، بر این حقیقت که دو قضیه چیزهایی مختلف را بیان می‌کنند و کاربردهای متفاوت دارند، سایه ابهام می‌افکند، و ممکن است این تصور را به وجود آورد که قضیهٔ ۳.۳۴ قضیهٔ اساسی است.

(پ) نیاز به قضیهٔ ۱.۳۴ در حسابان بی درنگ به وجود می‌آید و انگیزه‌های آسانی دارد.

در آنچه در زیر می‌آید، گوییم که تابع h که بر (a , b) تعریف شده است بر $[a , b]$ انتگرالپذیر است، هرگاه هر توسیع h بر $[a , b]$ انتگرالپذیر باشد. با توجه به تمرین ۲.۳۳، مقدار $\int_a^b h$ به مقادیر توسیعها در a و b بستگی نخواهد داشت.

۱.۳۴ قضیه [***قضیهٔ بنیادی حسابان*** I]. اگر g تابعی پیوسته بر $[a , b]$ باشد که بر (a , b) مشتقپذیر است و اگر g' بر $[a , b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه

$$\int_a^b g' = g(b) - g(a) . \qquad (۱)$$

برهان. فرض کنید $\varepsilon > 0$. بنابر قضیهٔ ۵.۳۲، افرازی مانند $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$

---
(۱) F.Cunningham, Jr.

t از [a , b] موجود است به طوری که

$$U(g' , P) - L(g' , P) < \varepsilon \quad . \tag{۲}$$

قضیهٔ مقدار میانگین ۳.۲۹ را در مورد هر بازهٔ $[t_{k-1} , t_k]$ به کار می‌بریم تا x_kای در (t_{k-1} , t_k) به دست آوریم که برای آن

$$(t_k - t_{k-1})\, g'(x_k) = g(t_k) - g(t_{k-1}) \quad .$$

بنابراین داریم

$$g(b) - g(a) = \sum_{k=1}^{n} [g(t_k) - g(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} g'(x_k)(t_k - t_{k-1}) \quad .$$

نتیجه می‌شود که

$$L(g' , P) \le g(b) - g(a) \le U(g' , P) \; . \tag{۳}$$

نگاه کنید به تمرین ۱.۳۲. چون

$$L(g' , P) \le \int_a^b g' \le U(g' , P) \quad ,$$

نابرابریهای (۲) و (۳) ایجاب می‌کنند که

$$\left| \int_a^b g' - [g(b) - g(a)] \right| < \varepsilon \quad .$$

چون $\varepsilon > 0$ اختیاری است، (۱) برقرار است. □

فرمولهای انتگرالگیری در حسابان همه در نهایت به این قضیه متکی هستند.

مثال ۱. اگر $g(x) = x^{n+1}/(n + 1)$، آنگاه $g'(x) = x^n$، و بنابراین

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n + 1} - \frac{a^{n+1}}{n + 1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n + 1} \quad . \tag{۱}$$

به ویژه،

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \quad .$$

فرمول (۱) برای هر توان n که برای آن $g(x) = x^{n+1}/(n + 1)$ بر [a , b] تعریف شده‌است، معتبر است. نگاه کنید به مثالهای ۳ و ۴ در بخش ۲۸ و تمرینهای ۱۵.۲۹ و ۵.۳۷. مثلاً برای $0 \le a < b$،

$$\int_a^b \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} (b^{3/2} - a^{3/2}) \quad .$$

۲.۳۴ قضیهٔ ***[انتگرالگیری جزء به جزء].*** اگر u و v تابعهایی پیوسته بر $[a\ ,\ b]$ باشند که بر $(a\ ,\ b)$ مشتقپذیرند، و اگر u' و v' بر $[a\ ,\ b]$ مشتقپذیر باشند، آنگاه

$$\int_a^b u(x)\ v'(x)dx + \int_a^b u'(x)\ v(x)dx = u(b)\ v(b) - u(a)\ v(a)\ . \qquad (۱)$$

برهان. فرض کنید $g = uv$، در این صورت بنابر قضیهٔ ۳.۲۸، $g' = uv' + u'v$. تمرین ۸.۳۳ نشان می‌دهد که g' انتگرالپذیر است. حال، قضیهٔ ۱.۳۴ نشان می‌دهد که

$$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a) = u(b)\ v(b) - u(a)\ v(a)$$

و لذا (۱) برقرار است. □

توجه کنید که می‌توان از استفاده از تمرین ۸.۳۳ ی بالا اجتناب کرد در صورتی که u' و v' پیوسته باشند که معمولاً چنین هم هست.

مثال ۲. در زیر کاربردی ساده از انتگرالگیری جزء به جزء ارائه می‌شود. برای محاسبهٔ $\int_\circ^\pi x\cos x\ dx$، توجه می‌کنیم که انتگرال به شکل $u(x)\ v'(x)$ است که در آن $u(x) = x$ و $v(x) = \sin x$. بنابراین

$$\int_\circ^\pi x\cos x\ dx = u(\pi)\ v(\pi) - u(\circ)\ v(\circ) - \int_\circ^\pi ۱.\sin x dx = -\int_\circ^\pi \sin x dx = -۲\ .$$

در آنچه در زیر می‌آید، از قرار داد $\int_a^b f = -\int_b^a f$ برای $a > b$ استفاده می‌کنیم.

۳.۳۴ قضیه ***[قضیهٔ بنیادی حسابان II]*** . فرض کنید f تابعی انتگرالپذیر بر $[a\ ,\ b]$ باشد. برای x در $[a\ ,\ b]$، فرض کنید

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\ .$$

در این صورت F بر $[a\ ,\ b]$ پیوسته است. اگر f در $x_\circ \in (a\ ,\ b)$ پیوسته باشد، در این صورت F در $x_\circ$ مشتقذیر است و

$$F'(x_\circ) = f(x_\circ)\ .$$

برهان. $B > \circ$ را چنان انتخاب کنید که برای هر $x \in [a\ ,\ b]$، $|f(x)| \le B$. گر x و y در $[a\ ,\ b]$ باشند و $|x - y| < \varepsilon/B$ که در آن، مثلاً، $x < y$، آنگاه

$$|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \le \int_x^y |f(t)|\ dt \le \int_x^y B\ dt = B(y - x) < \varepsilon\ .$$

از این، نتیجه می‌شود که F بر $[a\ ,\ b]$ پیوستهٔ [یکنواخت] است.

فرض کنید که f در $x_\circ \in (a\ ,\ b)$ پیوسته است. مشاهده کنید که برای $x \neq x_\circ$،

$$\frac{F(x) - F(x_\circ)}{x - x_\circ} = \frac{1}{x - x_\circ} \int_{x_\circ}^x f(t)\ dt\ .$$

شگرد کار در این است که ملاحظه کنیم که

$$f(x_\circ) = \frac{1}{x - x_\circ} \int_{x_\circ}^x f(x_\circ)\ dt$$

و بنابراین

$$\frac{F(x) - F(x_\circ)}{x - x_\circ} - f(x_\circ) = \frac{1}{x - x_\circ} \int_{x_\circ}^x [f(t) - f(x_\circ)]\ dt\ . \qquad (1)$$

فرض کنید $\varepsilon > \circ$. چون f در $x_\circ$ پیوسته است، $\delta > \circ$ ای موجود است به طوری که

$t \in (a\ ,\ b)$ و $|t - x_\circ| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(t) - f(x_\circ)| < \varepsilon$؛

نگاه کنید به قضیهٔ ۲.۱۷. از (۱) نتیجه می‌شود که برای $x \in (a\ ,\ b)$ که در $|x - x_\circ| < \delta$ صدق می‌کند،

$$\left|\frac{F(x) - F(x_\circ)}{x - x_\circ} - f(x_\circ)\right| \le \varepsilon\ \ ;$$

حالتهای $x > x_\circ$ و $x < x_\circ$ به استدلالهای جداگانه‌ای نیاز دارند. در بالا نشان داده‌ایم که

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{F(x) - F(x_\circ)}{x - x_\circ} = f(x_\circ)\ .$$

به عبارت دیگر، $F'(x_\circ) = f(x_\circ)$. □

یک فن انتگرالگیری سودمند به «جانشینی» موسوم است. توصیفی دقیقتر از این فرایند، «تعویض متغیر» نام دارد. این فن، عکس قاعدهٔ زنجیری است.

۴.۳۴ قضیه [تعویض متغیر]. فرض کنید u تابعی مشتقپذیر بر یک بازهٔ باز مانند J باشد به طوری که u' پیوسته است و فرض کنید که I بازه‌ای باز باشد به طوری که برای هر x در J، $u(x) \in I$. ۱اگر f بر I پیوسته

باشد، آنگاه fou بر J پیوسته است و برای $a , b \in J$،

$$\int_a^b fou(x)\ u'(x)\ dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du . \qquad (۱)$$

توجه کنید که لزومی ندارد $u(a)$ کمتر از $u(b)$ باشد، حتی اگر $a < b$.

برهان. پیوستگی fou از قضیهٔ ۵.۱۷ نتیجه می‌شود. عدد c را در I ثابت بگیرید و فرض کنید که $F(u) = \int_c^u f(t)dt$. در این صورت بنابر قضیهٔ ۳.۳۴ برای هر u در I، $F'(u) = f(u)$. فرض کنید $g = Fou$. بنابر قاعدهٔ زنجیری ۴.۲۸ ، داریم

$$g'(x) = F'(u(x))\ .\ u'(x) = f(u(x))\ .\ u'(x)\ ,$$

و لذا بنابر قضیهٔ ۱.۳۴

$$\int_a^b fou(x)\ u'(x)dx = \int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a) = F(u(b)) - F(u(a))$$

$$= \int_a^{u(b)} f(t)\ dt - \int_c^{u(a)} f(t)\ dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\ dt\ .$$

که (۱) را ثابت می‌کند. □

مثال ۳. فرض کنید g تابع مشتق‌پذیر یک به یکی بر بازهٔ باز I باشد. در این صورت، $J = g(I)$ یک بازهٔ باز است و تابع وارون g^{-1} بنابر قضیهٔ ۹.۲۹ بر J مشتق‌پذیر است. نشان می‌دهیم که برای $a , b \in I$،

$$\int_a^b g(x)\ dx + \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(u)du = bg(b) - ag(a)\ . \qquad (۱)$$

در فرمول تعویض متغیر قرار می‌دهیم $f = g^{-1}$ و $u = g$ و به دست می‌آوریم

$$\int_a^b g^{-1}og(x)\ g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(u)du\ .$$

چون برای x در I، $g^{-1}og(x) = x$، به دست می‌آوریم

$$\int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(u)du = \int_a^b xg'(x)dx\ .$$

حال با $u(x) = x$ و $v(x) = g(x)$، جزء به جزء انتگرال بگیرید:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(u)du = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx\ .$$

و این همان فرمول (۱) است.

تمرینها

۱.۳۴. از قضیهٔ ۳.۳۴ استفاده کرده قضیهٔ ۱.۳۴ را برای حالتی که g' پیوسته است، ثابت کنید.
راهنمایی: فرض کنید $F(x) = \int_a^x g'$؛ در این صورت $F' = g'$. نتیجهٔ ۵.۲۹ را به کار برید.

۲.۳۴. حساب کنید

(الف) $\lim_{x\to ۰} (۱/x) \int_۰^x e^{t^۲}\, dt$ (ب) $\lim_{h\to ۰} (۱/h) \int_۳^{۳+h} e^{t^۲}\, dt$

۳.۳۴. فرض کنید که f به صورت زیر تعریف شده باشد: برای $t < ۰$، $f(t) = ۰$؛ برای $۰ \leq t \leq ۱$، $f(t) = t$؛ برای $t > ۱$، $f(t) = ۴$.

(الف) تابع $F(x) = \int_۰^x f(t)\, dt$ را معین کنید.

(ب) F را رسم کنید. آیا F پیوسته است؟

(پ) F در کجا مشتقپذیر است؟ F' را در نقاط مشتقپذیری محاسبه کنید.

۴.۳۴. تمرین ۳.۳۴ را برای f تکرار کنید که در آن برای $t < ۰$، $f(t) = t$؛ برای $۰ \leq t \leq ۲$، $f(t) = t^۲ + ۱$؛ برای $t > ۲$، $f(t) = ۰$.

۵.۳۴. فرض کنید f تابعی پیوسته بر R باشد و تعریف کنید،

$$F(x) = \int_{x-۱}^{x+۱} f(t)dt \quad , \quad x \in R .$$

نشان دهید که F بر R مشتقپذیر است و F' را محاسبه کنید.

۶.۳۴. فرض کنید f تابعی پیوسته بر R باشد و تعریف کنید.

$$G(x) = \int_۰^{\sin x} f(t)dt \, , x \in R \; .$$

نشان دهید که G بر R مشتقپذیر است و G' را محاسبه کنید.

۷.۳۴. از تعویض متغیرها استفاده کرده، $\int_۰^۱ x\sqrt{۱-x^۲}\, dx$ را محاسبه کنید.

۸.۳۴. (الف) از انتگرالگیری جزء به جزء استفاده کرده، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_۰^۱ x(\text{Arc } \tan x)dx \; .$$

راهنمایی: فرض کنید $u(x) = \text{Arc } \tan x$ به طوری که $u'(x) = ۱/(۱ + x^۲)$.

(ب) اگر در قسمت (الف) از $v(x) = x^۲/۲$ استفاده کرده‌اید، محاسبه را مجدداً با $v(x) = (x^۲ + ۱)/۲$ انجام دهید. این مثال جالب از بورمن[۱] [a] اقتباس شده است.

۹.۳۴. از مثال ۳ استفاده کرده نشان دهید که $\int_۰^{۱/۲} \text{Arc} \sin x dx = \pi/۱۲ + \sqrt{۳}/۲ - ۱$.

۱۰.۳۴. فرض کنید g یک تابع پیوستهٔ اکیداً صعودی باشد که [۰ , ۱] را به روی [۰ , ۱] می‌نگارد. یک استدلال هندسی ارائه کنید که نشان دهد که

$$\int_۰^۱ g(x)\, dx + \int_۰^۱ g^{-۱}(u)du = ۱ .$$

۱۱.۳۴. فرض کنید که f تابعی پیوسته بر [a , b] باشد و برای هر x در [a , b]، $f(x) \geq ۰$. نشان دهید که اگر $\int_a^b f(x)\, dx = ۰$، آنگاه برای هر x در [a , b]، $f(x) = ۰$.

۱۲.۳۴. نشان دهید که اگر f تابع حقیقی مقدار پیوسته‌ای بر [a , b] باشد که برای هر تابع پیوستهٔ g بر [a , b] در $\int_a^b f(x)g(x)dx = ۰$ صدق می‌کند، آنگاه برای هر x در [a , b]، $f(x) = ۰$.

بخش ۳۵*. انتگرالهای ریمان - استیلت یس

در این بخش طولانی، تعمیم سودمندی از انتگرال ریمان را معرفی می‌کنیم. در انتگرال ریمان، به همهٔ بازه‌های همطول، وزنی یکسان داده می‌شود. به عنوان مثال، در تعریف ما از مجموعهای بالای

$$U(f , P) = \sum_{k=۱}^{n} M(f , [t_{k-۱} , t_k]) \cdot (t_k - t_{k-۱}) \ , \qquad (*)$$

عاملهای $(t_k - t_{k-۱})$، طولهای بازه‌های مورد بحث‌اند. در کاربردهایی نظیر احتمال و آمار، مطلوبتر است که تعریف را چنان جرح و تعدیل کنیم که بازه‌ها را مطابق با تابعی صعودی مانند F وزن گذاری کنیم. به عبارت دیگر، ایده این است که به جای عاملهای $(t_k - t_{k-۱})$ در (*)، $[F(t_k) - F(t_{k-۱})]$ را قرار دهیم. انتگرال ریمان، حالتی خاص از این است که در آن برای هر t، $F(t) = t$.

همچنین مطلوبتر است که اجازه دهیم برخی نقاط وزنهایی مثبت داشته باشند. این کار،

(۱) J.L.Borman

متناظر با وضعیتی است که در آن F دارای جهشهایی است، یعنی، موقعی که حدهای سمت چپ و سمت راست F متفاوت هستند. در واقع، اگر (c_k) دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که برای آن $\sum c_k < \infty$ و اگر (u_k) دنباله‌ای در R باشد، در این صورت می‌توان به مجموعهای

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, f(u_k)$$

به عنوان انتگرال تعمیم یافته‌ای برای یک F مناسب، نگریست [تمرین ۱۴.۳۶]. در این حالت، F جهشی در هر u_k دارد.

در بحث سنتی در کلیهٔ کتابهایی که از آنها آگاهی دارم، به جای عاملهای $(t_k - t_{k-1})$ در (*)، $[F(t_k) - F(t_{k-1})]$ قرار داده می‌شود و نظریه از اینجا بسط می‌یابد. گرچه برخی از مؤلفان بر مجموعهای بالا و پایین تأکید دارند، برخی دیگر بر مجموعهای ریمان تعمیم یافته تأکید می‌ورزند. در این بخش، ما بحثی تا حدی متفاوت ارائه می‌کنیم و بنابراین

هشدار. قضیه‌های این بخش لزوماً با قضیه‌های سایر کتابها متناظر نیستند.

ما اندکی از سنت رایج منحرف می‌شویم: (الف) بحث ما کلیتر است. تابعهایی که در مفهوم سنتی، انتگرالپذیر ریمان - استیلت یس هستند، به مفهوم مورد نظر ما هم انتگرالپذیر [قضیهٔ ۲۰.۳۵] هستند. (ب) در نظریهٔ سنتی، اگر f و F ناپیوستگی مشترکی داشته باشند، آنگاه f در صورت استفاده از F انتگرالپذیر نیست. این نوع نتایج نامطلوب در رهیافت ما، از بین می‌رود. نشان خواهیم داد که تابعهای تکه‌ای پیوسته و تکه‌ای یکنوا با استفاده از F همواره انتگرالپذیرند. [قضیهٔ ۱۷.۳۵]. همچنین مشاهده خواهیم کرد که اگر F یک تابع پله‌ای باشد، در این صورت کلیهٔ تابعهای کراندار، انتگرالپذیرند؛ نگاه کنید به مثال ۱. (پ) ما تعریفی در برگیرندهٔ مجموعهای ریمان - استیلت یس ارائه می‌کنیم که با تعریف ما که در برگیرندهٔ مجموعهای بالا و پایین است، معادل است [قضیهٔ ۲۵.۳۵]. تعریفهای استاندارد متناظر، معادل نیستند.

بسیاری از نتایج این بخش تعمیمهایی سر راست از نتایج بخشهای ۳۲ و ۳۳ هستند. از این رو، بسیاری از برهانها کوتاه خواهند بود یا حذف خواهند شد.

۱.۳۵ نمادگذاری. در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم که F یک تابع صعودی بر بازهٔ بستهٔ

$[a\ ,\ b]$ است. برای اجتناب از موارد بدیهی، فرض می‌کنیم $F(a) < F(b)$. کلیهٔ حدهای سمت چپ و سمت راست موجودند؛ نگاه کنید به تعریف ۳.۲۰ و تمرین ۱.۳۵. ما از نماد

$$F(t^-) = \lim_{x\to t^-} F(x) \quad , \quad F(t^+) = \lim_{x\to t^+} F(x)$$

استفاده می‌کنیم. برای نقاط انتهایی مقرر می‌کنیم که

$$F(a^-) = F(a) \quad , \quad F(b^+) = F(b) \ .$$

توجه کنید که برای هر t در $[a\ ,\ b]$، $F(t^-) \le F(t^+)$. اگر F در t پیوسته باشد، در این صورت $F(t^-) = F(t) = F(t^+)$. در غیر این صورت $F(t^-) < F(t^+)$ و تفاضل $F(t^+) - F(t^-)$، جهش F در t نامیده می‌شود. در آنچه در زیر می‌آید، مقدار واقعی $F(t)$ در نقاط جهش t، نقشی نخواهد داشت.

در تعریف بعدی، برخی از نمادگذاریهای ایجاد شده در تعریف ۱.۳۲ را به کار می‌بریم.

۲.۳۵ تعریف. برای تابعی مانند f بر $(a\ ,\ b)$ و افرازی مانند $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$، می‌نویسیم

$$J_F(f\ ,\ P) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k)\ .\ [F(t_k^+) - F(t_k^-)]\ .$$

مجموع داربو ـ استیلت‌یس بالا عبارت است از

$$U_F(f\ ,\ P) = J_F(f\ ,\ P) + \sum_{k=1}^{n} M(f\ ,\ (t_{k-1}\ ,\ t_k))\ .\ [F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)] \ ,$$

و مجموع داربو ـ استیلت یس پایین عبارت است از

$$L_F(f\ ,\ P) = J_F(f\ ,\ P) + \sum_{k=1}^{n} m(f\ ,\ (t_{k-1}\ ,\ t_k))\ .\ [F(t_k^-) + F(t_{k-1}^+)] \ ,$$

این تعریفها اثرات جهشی را به طور صریح به حساب می‌آورند. توجه کنید که

$$U_F(f\ ,\ P) - L_P(f\ ,\ P)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [M(f\ ,\ (t_{k-1}\ ,\ t_k)) - m(f\ ,\ (t_{k-1}\ ,\ t_k))][F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)] \ , \qquad (1)$$

و

$$m(f\ ,\ [a\ ,\ b])\ .\ [F(b) - F(a)] \le L_F\ (f\ ,\ P) \le U_F\ (f\ ,\ P)$$

$$\leq M(f, [a, b]) . [F(b) - F(a)] \ . \tag{۲}$$

در بررسی (۲)، ملاحظه می‌کنیم که

$$\sum_{k=0}^{n} [F(t_k^+) - F(t_k^-)] + \sum_{k=1}^{n} [F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)]$$

$$= F(t_n^+) - F(t_0^-) = F(b^+) - F(a^-) = F(b) - F(a) \ . \tag{۳}$$

انتگرال داربو ـ استیلت یس بالا عبارت است از

$$U_F(f) = \inf \{U_F(f, p): \text{است } [a, b] \text{ افرازی از } P\}$$

و انتگرال داربو ـ استیلت یس پایین عبارت است از

$$L_F(f) = \sup\{L_F(f, P) : \text{است } [a, b] \text{ افرازی از } P\}$$

قضیهٔ ۵.۳۵ نشان می‌دهد که $L_F(f) \leq U_F(f)$. از این رو، گوییم f بر $[a, b]$ نسبت به F داربو ـ استیلت یس انتگرالپذیر است یا، به اختصار، $F-$ انتگرالپذیر بر $[a, b]$ است، مشروط بر اینکه $L_F(f) = U_F(f)$. در این حالت می‌نویسیم

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f(x)\, dF(x) = L_F(f) = U_F(f) \ .$$

مثال ۱. برای هر $u \in [a, b]$، فرض کنید J_u یک تابع پله‌ای صعودی با جهش ۱ در u باشد. مثلاً می‌توانیم برای $u > a$ قرار دهیم

$$J_u(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < u \\ 1 & , \quad t \geq u \end{cases}$$

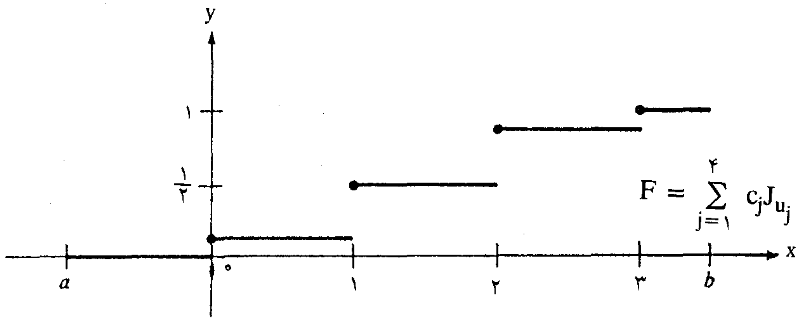
و می‌توانیم فرض کنیم

$$J_a(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t = a \\ 1 & , \quad t > a \end{cases}$$

در این صورت هر تابع کراندار f بر $[a, b]$، J_u- انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b f dJ_u = f(u) \ .$$

به طور کلی، اگر u_1 ، u_2 ، ... ، u_m نقاط متمایزی در $[a , b]$ باشند و c_1 ، c_2 ، ... ، c_m



شکل ۱.۳۵

اعدادی مثبت باشند، در این صورت

$$F = \sum_{j=1}^{m} c_j J_{u_j}$$

یک تابع پله‌ای صعودی با جهشهای c_j در u_j است. برای ملاحظهٔ حالتی خاص، نگاه کنید به شکل ۱.۳۵.

هر تابع کراندار مانند f بر $[a , b]$ ، F- انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b F dF = \sum_{j=1}^{m} c_j f(u_j) \quad . \tag{1}$$

برای تحقیق درستی (۱)، فرض کنید که P افرازی از $[a , b]$ متشکل از a ، b ، و کلیهٔ u_1 ، u_2 ، ... ، u_m ها باشد. برای این محاسبه، می‌توانیم بی آنکه از کلیت کاسته شود، فرض کنیم که $a = u_1 < u_2 < \dots < u_m = b$. در این صورت برای $j = 1 , 2 , \dots , m$ ، $F(u_j^+) - F(u_j^-) = c_j$ و برای $j = 2 , 3 , \dots , m$ ، $F(u_j^-) - F(u_{j-1}^+) = 0$. در این صورت برای هر تابع کراندار f بر $[a , b]$ ،

$$U_F(f , P) = L_F(f , P) = J_F(f , P) = \sum_{j=1}^{m} f(u_j) \cdot c_j \, .$$

با توجه به قضیهٔ ۵.۳۵ ، نتیجه می‌شود که

$$U_F(f) = L_F(f) = \sum_{j=1}^{m} f(u_j) \cdot c_j \;\; ;$$

بنابراین f ، F- انتگرالپذیر است و (۱) برقرار است.

مثال ۲. صورت خاص مثال ۱ را در حالت $u_1 = ۰$ ، $u_2 = ۱$ ، $u_3 = ۲$ ، $u_4 = ۳$ ؛ $c_1 = c_4 = \frac{۱}{۸}$ ، $c_2 = c_3 = \frac{۳}{۸}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت باید داشته باشیم $a \leq ۰$ و $b \geq ۳$ ؛ نگاه کنید به شکل ۱.۳۵. برای هر تابع کراندار مانند f بر $[a , b]$ ، داریم

$$\int_a^b f dF = \frac{۱}{۸} f(۰) + \frac{۳}{۸} f(۱) + \frac{۳}{۸} f(۲) + \frac{۱}{۸} f(۳) \ .$$

۳.۳۵ لم. فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a , b]$ باشد، و فرض کنید که P و Q افرازهایی از $[a , b]$ باشند به طوری که $P \subseteq Q$. در این صورت

$$L_F(f , P) \leq L_F(f , Q) \leq U_F(f , Q) \leq U_F(f , P) \ . \qquad (۱)$$

برهان. برهان لم ۲.۳۲ را تا فرمول (۳)، اما بدون شامل شدن این فرمول، تکرار می‌کنیم. در حالت اخیر، تفاضل $L_F(f , Q) - L_F(f , P)$ برابر است با

$$f(u) \ . \ [F(u^+) - F(u^-)] + m(f , (t_{k-۱} , u)) \ . \ [F(u^-) - F(t_{k-۱}^+)] + m(f , (u , t_k))$$
$$. \ [F(t_k^-) - F(u^+)] - m(f , (t_{k-۱} , t_k)) \ . \ [F(t_k^-) - F(t_{k-۱}^+)] \qquad (۳)$$

و این عبارت نامنفی است، زیرا

$$\begin{aligned} & m(f , (t_{k-۱} , t_k)). \ [F(t_k^-) - F(t_{k-۱}^+)] \\ & = m(f , (t_{k-۱} , t_k)) \ . \ [F(t_k^-) - F(u^+) + F(u^+) - F(u^-) \\ & \qquad + F(u^-) - F(t_{k-۱}^+)] \\ & \leq m(f , (u , t_k)) \ . \ [F(t_k^-) - F(u^+)] + f(u)[F(u^+) - F(u^-)] \\ & \quad + m(f , (t_{k-۱} , u)) \ . \ [F(u^-) - F(t_{k-۱}^+)] \ . \end{aligned}$$
□

۴.۳۵ لم. اگر f تابعی کراندار بر $[a , b]$ باشد و اگر P و Q افرازهایی از $[a , b]$ باشند، در این صورت، $L_F(f , P) \leq U_F(f , Q)$.

برهان. تقلید برهان قضیهٔ ۳.۳۲ است. □

۵.۳۵ قضیه. برای هر تابع کراندار f بر $[a , b]$ ، داریم $L_F(f) \leq u_F(f)$.

برهان. از برهان قضیه ۴.۳۲ تقلید کنید. □

۶.۳۵ قضیه. تابع کرانداری مانند f بر [a , b]، F− انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، افرازی مانند P موجود باشد به طوری که

$$u_F(f, P) - L_F(f, P) < \varepsilon .$$

برهان. از برهان قضیه ۵.۳۲ تقلید کنید. □

اینک مشابه نتایج بخش ۳۳ را بسط می‌دهیم، بعداً برای تعمیمهایی از ۶.۳۲ و ۹.۳۳ باز می‌گردیم. مشابه قضیهٔ ۱.۳۳ درست است، اما برهان نیاز به مقداری آماده سازی دارد و لذا آن را به قضیهٔ ۱۶.۳۵ موکول می‌کنیم.

۷.۳۵ قضیهٔ. هر تابع پیوسته مانند f بر [a , b]، F− انتگرالپذیر است.

برهان. برای به‌کاربردن قضیهٔ ۶.۳۵، فرض کنید $\varepsilon>0$. چون f پیوستهٔ یکنواخت است، $\delta>0$ای موجود است به طوری که

$x, y \in [a, b]$ و $|x - y| < \delta$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{F(b) - F(a)}$.

درست مانند برهان قضیهٔ ۲.۳۳، افرازی مانند P از [a,b] موجود است به طوری که برای هر k،

$$M(f, (t_{k-1}, t_k)) - m(f, (_{k-1}, t_k)) < \frac{\varepsilon}{F(b) - F(a)} .$$

لذا بنابر (۱) تعریف ۲.۳۵ داریم

$$U_F(f, P) - L_F(f, P) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{F(b) - F(a)} [F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)] \leq \varepsilon .$$

اینک قضیهٔ ۶.۳۵ نشان می‌دهد که f، F− انتگرالپذیر است. □

۸.۳۵ قضیه. فرض کنید f و g تابعهایی F− انتگرالپذیر بر [a , b] باشند و فرض کنید که c عددی حقیقی باشد. در این صورت

(i) cf، $F-$ انتگرالپذیر است و $\int_a^b (cf)\, dF = c \int_a^b f dF$.

(ii) $f + g$، $F-$ انتگرالپذیر است و $\int_a^b (f + g) dF = \int_a^b f dF + \int_a^b g dF$.

برهان. از برهان قضیهٔ ۳.۳۳، با استفاده از قضیهٔ ۶.۳۵ به جای قضیهٔ ۵.۳۲ تقلید کنید. □

۹.۳۵ قضیه. اگر f و g بر $[a , b]$، $F-$ انتگرالپذیر باشند و اگر برای هر x در $[a , b]$، $f(x) \le g(x)$، آنگاه $\int_a^b f dF \le \int_a^b g dF$.

برهان. از برهان قضیهٔ ۴.۳۳ تقلید کنید. □

۱۰.۳۵ قضیه. اگر f بر $[a , b]$، $F-$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه $|f|$، $F-$ انتگرالپذیر است و

$$\left|\int_a^b f dF\right| \le \int_a^b |f| dF .$$

برهان. تقلیدی از برهان قضیهٔ ۵.۳۳ است و در آن از فرمول (۱) تعریف ۲.۳۵ استفاده می‌شود. □

۱۱.۳۵ قضیه. فرض کنید که f تابعی تعریف شده بر $[a , b]$ باشد. اگر $a < c < b$، و اگر f بر $[a , c]$، $F-$ و بر $[c , b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه f بر $[a , b]$، $F-$ انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b f dF = \int_a^c f dF + \int_c^b f dF . \qquad (۱)$$

برهان. تقلید برهان قضیهٔ ۶.۳۳ است. توجه کنید که یک مجموع بالا یا پایین بر $[a , c]$ شامل جملهٔ $f(c)[F(c) - F(c^-)]$ خواهد بود در حالی که یک مجموع بالا یا پایین بر $[c , b]$ شامل جملهٔ $f(c)[F(c^+) - F(c)]$ خواهد بود. □

روشن است که نتیجهٔ بعدی، مشابهی در بخش ۳۲ یا بخش ۳۳ ندارد.

۱۲.۳۵ قضیه. فرض کنید F_1 و F_2 تابعهایی صعودی بر $[a , b]$ باشند. اگر f بر $[a , b]$، F_1- انتگرالپذیر و

$F_۲$– انتگرالپذیر باشد و اگر $c > ۰$، آنگاه f، $cF_۱$– انتگرالپذیر است، f، $(F_۱ + F_۲)$– انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b fd(cF_۱) = c\int_a^b fdF_۱ , \qquad (۱)$$

و

$$\int_a^b fd(F_۱ + F_۲) = \int_a^b fdF_۱ + \int_a^b fdF_۲ . \qquad (۲)$$

برهان. از قضیهٔ ۴.۲۰ ملاحظه می‌کنیم که

$$(F_۱ + F_۲)(t^+) = \lim_{x\to t^+} [F_۱(x) + F_۲(x)] = \lim_{x\to t^+} F_۱(x) + \lim_{x\to t^+} F_۲(x)$$

$$= F_۱(t^+) + F_۲(t^+) ,$$

و اتحادهای مشابهی برای $(F_۱ + F_۲)(t^-)$، $(cF_۱)(t^+)$ و $(cF_۱)(t^-)$ صادق است. بنابراین برای هر افراز P از $[a , b]$، داریم

$$U_{F_۱+F_۲} (f , P) = U_{F_۱}(f , P) + U_{F_۲}(f , P) \qquad (۳)$$

$$L_{F_۱+F_۲}(f , P) = L_{F_۱}(f , P) + L_{F_۲}(f , P) .$$

$U_{cF_۱}(f , P) = cU_{F_۱}(f , P)$ و $L_{cF_۱}(f , P) = cL_{F_۱}(f , P)$. اینک روشن است که f، $cF_۱$– انتگرالپذیر است و (۱) برقرار است. برای تحقیق در درستی (۲)، فرض کنید $\varepsilon > ۰$. بنابر قضیهٔ ۶.۳۵ و لم ۳.۳۵، افرازی مانند P از $[a , b]$ موجود است به طوری که

$$U_{F_۱}(f , P) - L_{F_۱}(f , P) < \frac{\varepsilon}{۲} , U_{F_۲}(f , P) - L_{F_۲}(f , P) < \frac{\varepsilon}{۲} .$$

لذا بنابر (۳) داریم

$$U_{F_۱+F_۲}(f , P) - L_{F_۱+F_۲}(f , P) < \varepsilon .$$

این نابرابری و قضیهٔ ۶.۳۵ مستلزم آن است که f، $(F_۱ + F_۲)$– انتگرالپذیر است. اتحاد (۲) از

$$\int_a^b fd(F_۱ + F_۲) \le U_{F_۱+F_۲} (f , P) < L_{F_۱+F_۲}(f , P) + \varepsilon$$

$$= L_{F_۱}(f , P) + L_{F_۲}(f , P) + \varepsilon \le \int_a^b fdF_۱ + \int_a^b fdF_۲ + \varepsilon$$

و اتحاد مشابه زیر نتیجه می‌شود

$$\int_a^b fd(F_1 + F_2) > \int_a^b fdF_1 + \int_a^b fdF_2 - \varepsilon \quad . \qquad \square$$

مثال ۳. فرض کنید (u_n) دنباله‌ای از نقاط متمایز در $[a , b]$ باشد و فرض کنید (c_n) دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که $\sum c_n < \infty$. با استفاده از نمادگذاری مثال (۱)، تعریف می‌کنیم

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{u_n} \quad .$$

در این صورت F تابعی صعودی بر $[a , b]$ است؛ توجه کنید که $F(a) = 0$ و $F(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. هر تابع کراندار f بر $[a , b]$، $F-$ انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b fdF = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(u_n) \quad . \tag{1}$$

برای تحقیق درست بودن (۱)، f را تثبیت کنید و فرض کنید که $B > 0$ کرانی برای $|f|$ باشد، یعنی برای هر x در $[a , b]$، $|f(x)| \le B$. $\varepsilon > 0$ را در نظر بگیرید و عددی صحیح مانند m را چنان انتخاب کنید که $\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n < \varepsilon/4B$. فرض کنید

$$F_1 = \sum_{n=1}^{m} c_n J_{u_n} \quad , \quad F_2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n J_{u_n}$$

به طوری که $F = F_1 + F_2$. همان طور که در مثال ۱ متذکر شدیم،

$$\int_a^b fdF_1 = \sum_{n=1}^{m} c_n f(u_n) \, . \tag{2}$$

چون

$$F_2(b) - F_2(a) = F_2(b) = \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n < \frac{\varepsilon}{(4B)} \, ,$$

نابرابری (۲) در تعریف ۲.۳۵ منجر می‌شود به

$$-\frac{\varepsilon}{4} \le L_{F_2}(f , P) \le U_{F_2}(f , P) \le \frac{\varepsilon}{4} \, , \tag{3}$$

و بنابراین برای کلیهٔ افرازهای P از $[a , b]$،

$$U_{F_۲}(f , P) - L_{F_۱}(f , P) \leq \frac{\varepsilon}{۲} .$$

اگر P را به گونه‌ای انتخاب کنیم که

$$U_{F_۱}(f , P) - L_{F_۱}(f , P) < \frac{\varepsilon}{۲} ,$$

در این صورت (۳) در برهان قضیهٔ ۱۲.۳۵ و تساوی $F = F_۱ + F_۲$ مستلزم آن است که

$$U_F(f , P) - L_F(f , P) < \varepsilon .$$

قضیهٔ ۶.۳۵، حالا نشان می‌دهد که f، F− انتگرالپذیر است. از (۳) به سرعت نتیجه می‌گیریم که

$$|\int_a^b f dF_۲| \leq \frac{\varepsilon}{۴} . \qquad (۴)$$

بنابر قضیهٔ ۱۲.۳۵ و (۲) داریم

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f dF_۱ + \int_a^b f dF_۲ = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n f(u_n) - \sum_{n=m+۱}^{\infty} c_n f(u_n) + \int_a^b f dF_۲ .$$

چون

$$|\sum_{n=m+۱}^{\infty} c_n f(u_n)| \leq B \sum_{n=m+۱}^{\infty} c_n < \frac{\varepsilon}{۴} ,$$

از (۴) استفاده می‌کنیم تا نتیجه بگیریم که

$$|\int_a^b f dF - \sum_{n=۱}^{\infty} c_n f(u_n)| < \frac{\varepsilon}{۲} .$$

چون ε دلخواه است، درستی (۱) محقق می‌شود.

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که F− انتگرالها را می‌توان اغلب با استفاده از انتگرالهای ریمان معمولی محاسبه کرد. در واقع، اغلب F− انتگرالهایی که در عمل با آنها رو به رو می‌شویم، یا مشمول مثال ۱ هستند یا همین قضیه.

۱۳.۳۵ قضیه. فرض کنید که F بر [a , b] مشتقپذیر و F′ بر [a , b] پیوسته باشد. اگر f بر [a , b] پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f(x) F'(x) dx . \qquad (۱)$$

برهان. توجه کنید که fF' بنابر قضیهٔ ۲.۳۳ ریمان انتگرالپذیر است و بنابر قضیهٔ ۷.۳۵، f ، F-انتگرالپذیر است. بنابر قضیه‌های ۵.۳۲ و ۶.۳۵ ، افرازی مانند

$$P = \{a = t_0 < t_1 < .. < t_n = b\}$$

موجود است به طوری که

$$U(fF', P) - L(fF', P) < \frac{\varepsilon}{2}, U_F(f, P) - L_F(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

بنابر قضیهٔ مقدار میانگین ۳.۲۹ که بر هر $[t_{k-1}, t_k]$ در مورد F به کار گرفته شود، x_kای در (t_{k-1}, t_k) موجود است به طوری که

$$F(t_k) - F(t_{k-1}) = F'(x_k)(t_k - t_{k-1}) ,$$

و بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) . [F(t_k) - F(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)F'(x_k) . (t_k - t_{k-1}) . \qquad (3)$$

چون F پیوسته است، هیچ جهشی ندارد و لذا بنابر (۳) ،

$$L_F(f, P) \le U(fF', P) \quad , \quad L(fF', P) \le U_F(f, P) .$$

حال بنابر (۲) داریم

$$\int_a^b fdF \le U_F(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} + L_F(f, P) \le \frac{\varepsilon}{2} + U(fF', P)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + L(fF', P) \le \varepsilon + \int_a^b f(x) F'(x) dx ,$$

و به همین نحو $\int_a^b fdF > \int_a^b f(x)F'(x)dx - \varepsilon$. چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، (۱) برقرار است. □

توسیعی از قضیهٔ ۱۳.۳۵ در تمرین ۱۰.۳۵ آمده است.

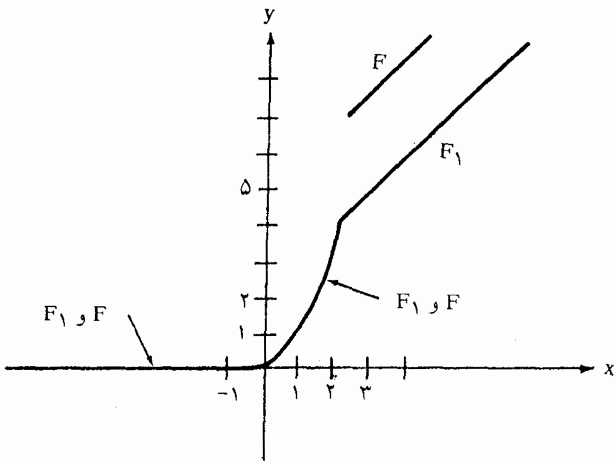
مثال ۴. فرض کنید که برای $t < 0$ ، $F(t) = 0$، برای $0 \le t < 2$ ، $F(t) = t^2$، و برای $t \ge 2$ ، $F(t) = t + 5$؛ نگاه کنید به شکل ۲.۳۵. می‌توانیم بنویسیم $F = F_1 + 3J_2$ که در آن F_1 پیوسته است. تابع F_1 بجز در $t = 2$ مشتقپذیر است؛ مشتقپذیری F_1 در $t = 0$ در تمرین ۷.۲۸ نشان داده شده است. فرض کنید مثلاً f بر $[-3, 3]$ پیوسته باشد. روشن است که $\int_{-3}^{0} fdF_1 = 0$. چون F_1 با تابع مشتقپذیر t^2 بر $[0, 2]$ مطابقت می‌کند، می‌توانیم قضیهٔ ۱۳.۳۵

را به کار برده به دست آوریم

$$\int_{0}^{2} f dF_1 = \int_{0}^{2} f(x) \cdot 2x dx = 2\int_{0}^{2} x f(x)\, dx .$$

به همین نحو داریم

$$\int_{2}^{3} f dF_1 = \int_{2}^{3} f(x) \cdot 1 dx = \int_{2}^{3} f(x)\, dx .$$



شکل ۲.۳۵

قضیهٔ ۱۱.۳۵ حالا نشان می‌دهد که

$$\int_{-3}^{3} f dF_1 = 2\int_{0}^{2} x f(x)\, dx + \int_{2}^{3} f(x) dx \quad ,$$

و در این صورت قضیهٔ ۱۲.۳۵ نشان می‌دهد که

$$\int_{-3}^{3} f dF = \int_{-3}^{3} f dF_1 + 3\int_{-3}^{3} f dJ_2 = 2\int_{0}^{2} x f(x) dx + \int_{2}^{3} f(x)\, dx + 3f(2) .$$

به عنوان مثالی خاص، اگر $f(x) = x^2$، آنگاه

$$\int_{-3}^{3} f dF = 2\int_{0}^{2} x^4 dx + \int_{2}^{3} x^3 dx + 3 \times 8 = \frac{1061}{20} = 53{,}05 .$$

برای نتیجه‌های باقیماندهٔ این بخش، به تحلیل دقیقتری از تابعهای صعودی نیاز داریم. برخی خوانندگان می‌توانند از برهانها صرف نظر کنند و به بخش آتی بروند. خواهیم نوشت $s_n \uparrow s$ تا مشخص کند که (s_n) یک دنبالهٔ نانزولی است که به s میل می‌کند، $s_n \downarrow s$ هرگاه (s_n) دنباله‌ای ناصعودی با حد s باشد.

۱۴.۳۵ لم. فرض کنید g تابعی صعودی بر $[a , b]$ باشد.

(i) اگر $u_n \uparrow u$، آنگاه $g(u_n^-) \uparrow g(u^-)$.

(ii) اگر $u_n \downarrow u$، آنگاه $g(u_n^+) \downarrow g(u^+)$.

برهان. فرض کنید $u_n \uparrow u$ و گیرید که $\varepsilon > 0$؛ در اینجا $u \in [a , b]$. $v < u$ای موجود است به طوری که $v \in [a , b]$ و $g(v) > g(u^-) - \varepsilon$. N را در N به گونه‌ای انتخاب کنید که $n > N$ مستلزم آن باشد که $u_n > v$. در این صورت

$n > N$ مستلزم آن است که، $g(u_n^-) \geq g(v) > g(u^-) - \varepsilon$.

چون برای هر n، $g(u_n^-) \leq g(u^-)$، نتیجه می‌گیریم که $g(u_n^-) \uparrow g(u^-)$. این، (i) را ثابت می‌کند و برهان (ii) مشابه همین است. □

۱۵.۳۵ لم. اگر g تابعی صعودی بر $[a , b]$ باشد و اگر $\varepsilon > 0$، افرازی مانند

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

موجود است به طوری که برای $k = 1 , 2 , \dots , n$،

$$g(t_k^-) - g(t_{k-1}^+) < \varepsilon \qquad (1)$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که افرازی مانند

$$Q = \{a = s_0 < s_1 < .. < s_m = b\}$$

موجود است به طوری که

$$g(u^+) - g(u^-) < \varepsilon \quad , \quad u \notin Q . \qquad (2)$$

کافی است نشان دهیم که

$$S = \{s \in (a , b) : g(s^+) - g(s^-) \geq \varepsilon\}$$

متناهی است. r را در N به گونه‌ای انتخاب کنید که $r\varepsilon > g(b) - g(a)$. اگر S بیش از $r - 1$ عضو داشته باشد، می‌توانیم

$$a < t_1 < t_2 < \dots < t_r < b$$

را به گونه‌ای انتخاب کنیم که برای $k = 1 , 2 , .. , r$، $g(t_k^+) - g(t_k^-) \geq \varepsilon$. اما این نتیجه مستلزم آن است که

$$g(b) - g(a) \ge g(t_r^+) - g(t_1^+) \ge \sum_{k=1}^{r} [g(t_k^+) - g(t_k^-)] \ge r\varepsilon > g(b) - g(a) .$$

بنابراین S متناهی است و Q را می‌توان طوری انتخاب کرد که در (۲) صدق کند.

اینک نشان می‌دهیم $\delta > 0$ای موجود است به طوری که

(۳) $u , v \in [s_{j-1} , s_j]$ ، $u < v$ ، $v - u < \delta$ ، مستلزم آن است که $g(v^-) - g(u^+) < \varepsilon$.

اگر (۳) برقرار نباشد، در این صورت برای زای، دنباله‌هایی مانند (u_n) و (v_n) در $[s_{j-1} , s_j]$ موجودند که در آن $u_n < v_n$ ، $v_n - u_n < \frac{1}{n}$ و $g(v_n^-) - g(u_n^+) \ge \varepsilon$. با گذر به زیر دنباله‌ها، می‌توانیم فرض کنیم که بنابر قضیهٔ ۳.۱۱ ، (u_n) و (v_n) یکنوا هستند. فرض کنید $u = \lim u_n = \lim v_n$. برای رسیدن به یک تناقض، چهار حالت را در نظر می‌گیریم.

اگر $u_n \uparrow u$ و $v_n \uparrow v$ ، آنگاه بنابر لم ۱۴.۳۵ ، داریم $g(u_n^-) \longrightarrow g(u^-)$ و $g(v_n^-) \longrightarrow g(u^-)$ و بنابراین، $[g(v_n^-) - g(u_n^-)] \longrightarrow 0$. چون برای هر n ،

$$g(v_n^-) - g(u_n^-) \ge g(v_n^-) - g(u_n^+) \ge \varepsilon \quad ,$$

تناقض حاصل می‌شود.

اگر $u_n \downarrow u$ و $v_n \downarrow v$ ، در این صورت لم ۱۴.۳۵ نشان می‌دهد که $g(u_n^+) \longrightarrow g(u^+)$ و $g(v_n^+) \longrightarrow g(u^+)$ و لذا $[g(v_n^+) - g(u_n^+)] \longrightarrow 0$. از سوی دیگر، برای هر n ، داریم

$$g(v_n^+) - g(u_n^+) \ge g(v_n^-) - g(u_n^+) \ge \varepsilon \quad .$$

که یک تناقض است.

حالت $u_n \downarrow u$ و $v_n \uparrow u$ غیر ممکن است زیرا مستلزم آن خواهند بود که $u \le u_n < v_n \le u$.

سرانجام، فرض کنید که $u_n \uparrow u$ و $v_n \downarrow u$. در این صورت $s_{j-1} < u < s_j$ ؛ در غیر این صورت (u_n) یا (v_n) دنباله‌ای ثابت خواهد بود و می‌توانیم به یکی از حالتهای قبلی توسل جوییم. این بار، لم ۱۴.۳۵ نشان می‌دهد که $g(u_n^-) \longrightarrow g(u^-)$ و $g(v_n^+) \longrightarrow g(u^+)$ ، و بنابراین

$$g(u^+) - g(u^-) = \lim_{n\to\infty} [g(v_n^+) - g(u_n^-)] \ge \lim\inf[g(v_n^-) - g(u_n^+)] \ge \varepsilon .$$

چون $u \notin Q$ ، این نتیجه، (۲) را نقض می‌کند. به این ترتیب (۳) را ثابت کرده‌ایم.

با افزودن نقاطی بر افراز Q، می‌توانیم افرازی مانند $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ به دست آوریم به طوری که $P \supseteq Q$ ، و به طوری که برای هر $k = 1 , 2 , \dots , n$ ، $t_k - t_{k-1} < \delta$.

اگر k در $\{1 , 2 , \dots , n\}$ باشد، در این صورت t_{k-1} و t_k هر دو به $[s_{j-1} , s_j]$ ای تعلق دارند و بنابراین طبق (۳)، $g(t_k^-) - g(t_{k-1}^+) \le \varepsilon$. □

۱۶.۳۵ قضیه. هر تابع یکنوا مانند f بر [a , b]، F− انتگرالپذیر است.

برهان. می‌توانیم فرض کنیم که f صعودی است. چون برای هر x در [a,b]، $f(a) \le f(x) \le f(b)$، f بر [a , b] کراندار است. برای $\varepsilon > 0$، لم ۱۵.۳۵ را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\},$$

که در آن برای $k = 1 , 2 , \ldots , n$،

$$f(t_k^-) - f(t_{k-1}^+) < \frac{\varepsilon}{F(b) - F(a)} .$$

چون

$$M(f , (t_{k-1} , t_k)) = f(t_k^-) \ , \ m(f , (t_{k-1} , t_k)) = f(t_{k-1}^+) ,$$

داریم

$$\begin{aligned} U_F(f , P) - L_F(f , P) &= \sum_{k=1}^{n} [f(t_k^-) - f(t_{k-1}^+)] \cdot [F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)] \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{F(b) - F(a)} [F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)] \le \varepsilon . \end{aligned}$$

چون ε دلخواه است، قضیه ۶.۳۵ نشان می‌دهد که f، F− انتگرالپذیر است. □

۱۴.۳۵ قضیه. اگر f بر [a , b] تکه‌ای پیوسته یا تکه‌ای یکنوای کراندار باشد، آنگاه f، F− انتگرالپذیر است.

برهان. درست مانند برهان قضیهٔ ۸.۳۳، این قضیهٔ از قضیه‌های ۷.۳۵ و ۱۶.۳۵، و ۱۱.۳۵ نتیجه می‌شود، مشروط بر اینکه تعمیم زیر از تمرین ۷.۳۲ را داشته باشیم.

۱۸.۳۵ قضیهٔ فرعی. اگر f بر [a,b]، F− انتگرالپذیر باشد و بجز برای تعدادی متناهی نقطه، $g(x)=f(x)$، آنگاه g، F− انتگرالپذیر است. توجه کنید که ادعا نمی‌کنیم که $\int_a^b f dF = \int_a^b g dF$.

برهان. یک استدلال استقرائی نشان می‌دهد که می‌توانیم فرض کنیم که بجز برای یک نقطه

مانند $\mathrm{u} = x$ در $[\mathrm{a}\,,\,\mathrm{b}]$، $g(x) = f(x)$. برای $\varepsilon > ۰$، قضیهٔ ۶.۳۵ نشان می‌دهد که برای افرازی مانند $P = \{a = t_۰ < t_۱ < \dots < t_n = b\}$،

$$U_F(f\,,\,P) - L_F(f\,,\,P) < \varepsilon\,. \qquad (۱)$$

با توجه به لم ۳.۳۵، می‌توانیم u را به P اضافه کنیم بدون اینکه (۱) از اعتبار ساقط شود. در این صورت برای l ای در $\{۰\,,\,۱\,,\,۲\,,\,\dots\,,\,n\}$، $u = t_l$. مجموعهای بالا برای f و g، بجز برای جملهٔ $k = l$ در J_F، یکی هستند و بنابراین

$$U_F(f\,,\,P) - U_F(g\,,\,P) = f(u)[F(u^+) - F(u^-)] - g(u)[F(u^+) - F(u^-)]\,.$$

همین تذکر در مورد مجموعهای پایین نیز مصداق دارد و بنابراین

$$L_F(f\,,\,P) - L_F(g\,,\,P) = U_F(f\,,\,P) - U_F(g\,,P)\,.$$

در نتیجه

$$U_F(g\,,\,P) - L_F(g\,,\,P) = U_F(f\,,\,P) - L_F(f\,,\,P) < \varepsilon$$

و لذا قضیهٔ ۶.۳۵ نشان می‌دهد که g، F− انتگرالپذیر است. □

اگر $F_۱$ و $F_۲$ تابعهایی صعودی با مشتقهای پیوسته باشند، در این صورت قضیهٔ ۱۳.۳۵ این امکان را فراهم می‌کند که فرمول انتگرالگیری جزء به جزء [قضیهٔ ۲.۳۴] را به صورت

$$\int_a^b F_۱ dF_۲ + \int_a^b F_۲ dF_۱ = F_۱(b)F_۲(b) - F_۱(a)\,F_۲(a)$$

مجدداً طرحریزی کنیم. هیچ امیدی برای آن نیست که این نتیجه را بتوان در حالت کلی ثابت کرد زیرا اگر برای $t < ۰\,,\,۰ = F(t)$ و برای $t \geq ۰$، $F(t) = ۱$، آنگاه

$$\int_{-۱}^{۱} FdF + \int_{۱}^{۱} FdF = ۲ \neq ۱ = F(۱)F(۱) - F(-۱)F(-۱)\,.$$

به طوری که ذیلاً ثابت می‌کنیم، این تعمیم بر قرار است به شرطی که تابعهای زیر علامت انتگرال در هر یک از جهشهایشان مقدارهای میانی را اختیار کنند. این نتیجه حالتی خاص از قضیه‌ای است که ادوین هیوویت[۱] [d] ارائه کرده است.

۱۹.۳۵ قضیه [انتگرالگیری جزء به جزء]. فرض کنید که $F_۱$ و $F_۲$ تابعهایی صعودی بر $[a\,,\,b]$ باشند.

---

(۱) Edwin Hewitt

برای هر t در [a , b] تعریف کنید،

$$F_1^*(t) = \frac{1}{2}[F_1(t^-) + F_1(t^+)] \quad , \quad F_2^*(t) = \frac{1}{2}[F_2(t^-) + F_2(t^+)] .$$

در این صورت

$$\int_a^b F_1^* dF_2 + \int_a^b F_2^* dF_1 = F_1(b)\, F_2(b) - F_1(a) F_2(a) . \qquad (1)$$

مانند همیشه، مقرر می‌کنیم که $F_1(b^+) = F_1(b)$، $F_1(a^-) = F_1(a)$، و غیره.

برهان. هر دو انتگرال در (۱) با توجه به قضیهٔ ۱۶.۳۵ موجودند. برای $\varepsilon > 0$ای افرازی مانند

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

موجود است به طوری که

$$U_{F_1}(F_2^*, P) - L_{F_1}(F_2^*, P) < \varepsilon .$$

مقداری اعمال جبری [که در بند بعدی مورد بحث قرار می‌گیرند] نشان می‌دهد که

$$U_{F_2}(F_1^*, P) + L_{F_1}(F_2^*, P) = F_1(b)\, F_2(b) - F_1(a)\, F_2(a) , \qquad (2)$$

و بنابراین همچنین

$$U_{F_1}(F_2^*, P) + L_{F_2}(F_1^*, P) = F_1(b) F_2(b) - F_1(a) F_2(a) . \qquad (3)$$

از (۲) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_a^b F_1^* dF_2 + \int_a^b F_2^* dF_1 &\le U_{F_2}(F_1^*, P) + U_{F_1}(F_2^*, P) \\ &< U_{F_2}(F_1^*, P) + L_{F_1}(F_2^*, P) + \varepsilon \\ &= F_1(b) F_2(b) - F_1(a) F_2(a) + \varepsilon , \end{aligned}$$

در حالی که (۳) منجر می‌شود به

$$\int_a^b F_1^* dF_2 + \int_a^b F_2^* dF_1 > F_1(b) F_2(b) - F_1(a) F_2(a) - \varepsilon .$$

چون ε دلخواه است، (۱) برقرار است.

برای تحقیق در درستی (۲) ملاحظه کنید که

$$\begin{aligned} U_{F_2}(F_1^*, P) + L_{F_1}(F_2^*, P) = &\sum_{k=0}^{n} F_1^*(t_k) \cdot [F_2(t_k^+) - F_2(t_k^-)] \\ &+ \sum_{k=1}^{n} M(F_1^*, (t_{k-1}, t_k)) \cdot [F_2(t_k^-) - F_2(t_{k-1}^+)] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} F_2^*(t_k) \cdot [F_1(t_k^+) - F_1(t_k^-)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} m(F_2^*, (t_{k-1}, t_k)) \cdot [F_1(t_k^-) - F_1(t_{k-1}^+)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}[F_1(t_k^-) + F_1(t_k^+)] \cdot [F_2(t_k^+) - F_2(t_k^-)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_1(t_k^-) \cdot [F_2(t_k^-) - F_2(t_{k-1}^+)]$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}[F_2(t_k^-) + F_2(t_k^+)] \cdot [F_1(t_k^+) - F_1(t_k^-)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_2(t_{k-1}^+) \cdot [F_1(t_k^-) - F_1(t_{k-1}^+)] .$$

حاصل جمع اولین و سومین مجموع عبارت است از

$$\sum_{k=0}^{n} [F_1(t_k^+)F_2(t_k^+)) - F_1(t_k^-)\, F_2(t_k^-)] \tag{۴}$$

در حالی که حاصل جمع دومین و چهارمین مجموع عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{n} [F_1(t_k^-)F_2(t_k^-) - F_1(t_{k-1}^+)F_2(t_{k-1}^+)] . \tag{۵}$$

چون حاصل جمع مجموعهای داده شده در (۴) و (۵) عبارت است از $F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a)$، تساوی (۲) برقرار است. البته، در صورتی که F_1 و F_2 پیوسته باشند، این اعمال جبری تا حد زیادی ساده می‌شوند. □

اینک رهیافت خود به انتگرالپذیری ریمان - استیلت یس را با رهیافت رایج مقایسه می‌کنیم. برای تابع کرانداری مانند f بر $[a, b]$، انتگرال داربو - استیلت یس رایج از طریق مجموعهای بالای

$$\tilde{U}_F(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M(f, [t_{k-1}, t_k]) \cdot [F(t_k) - F(t_{k-1})]$$

و مجموعهای پایین

$$\tilde{L}_F(f, P) = \sum_{k=۱}^{n} m(f, [t_{k-۱}, t_k]) \cdot [F(t_k) - F(t_{k-۱})]$$

تعریف می‌شوند. عبارتهای $\tilde{L}_F(f)$ ، $\tilde{U}_F(f)$، و $\tilde{\int}_a^b fdF$ مشابه با عبارتهای نظیر در تعریف ۲.۳۵ داده می‌شوند. انتگرال ریمان - استیلت یس از طریق مجموعهای

$$\tilde{S}_F(f, P) = \sum_{k=۱}^{n} f(x_k)[F(t_k) - F(t_{k-۱})]$$

تعریف می‌شوند که در آن $x_k \in [t_{k-۱}, t_k]$ و روزنه در تعریف ۶.۳۲ داده شده است؛ مقایسه کنید با تعریف ۲۴.۳۵.

معیار انتگرالپذیری ریمان - استیلت یس رایج، مستلزم معیار انتگرالپذیری داربو - استیلت یس رایج است؛ این معیارها در حالت کلی معادل نیستند، اما اگر F پیوسته باشد، معادل‌اند. نگاه کنید، به عنوان نمونه، به [۱۷]، بخش ۲.۱۲؛ [۱۸]، فصل ۸؛ یا [۱۹]، بخش ۶، کاملترین بحث در [۱۸] به عمل آمده است.

۲۰.۳۵ قضیهٔ. اگر f بر $[a, b]$ نسبت به F به معنی رایج، ریمان ـ استیلت یس انتگرالپذیر باشد، آنگاه f، F- انتگرالپذیر است و دو انتگرال بر هم منطبق‌اند.

برهان. برای هر افراز P، $\tilde{L}_F(f, P)$ برابر است با

$$\sum_{k=۱}^{n} m(f, [t_{k-۱}, t_k]) \cdot [F(t_k) - F(t_k^-) + F(t_k^-) - F(t_{k-۱}^+)$$
$$+ F(t_{k-۱}^+) - F(t_{k-۱})]$$
$$\le \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)[F(t_k) - F(t_k^-)]$$
$$+ \sum_{k=۱}^{n} m(f, (t_{k-۱}, t_k)) \cdot [F(t_k^-) - F(t_{k-۱}^+)]$$
$$+ \sum_{k=۱}^{n} f(t_{k-۱}) [F(t_{k-۱}^+) - F(t_{k-۱})] .$$

حاصل جمع اولین و سومین مجموع عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)[F(t_k) - F(t_k^-)] + \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\,[F(t_k^+) - F(t_k)]$$

$$= f(t_n)[F(t_n) - F(t_n^-)] + \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)[F(t_k^+) - F(t_k^-)]$$

$$+ f(t_0)[F(t_0^+) - F(t_0)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(t_k)[F(t_k^+) - F(t_k^-)] = J_F(f, P) .$$

این مشاهدات و نگاهی به تعریف $L_F(f, P)$، اینک نشان می‌دهد که $\tilde{L}_F(f, P) \le L_F(f, P)$. به همین نحو داریم $\tilde{U}_F(f, P) \ge U_F(f, P)$، و بنابراین

$$U_F(f, P) - L_F(f, P) \le \tilde{U}_F(f, P) - \tilde{L}_F(f, P) . \qquad (1)$$

اگر $\varepsilon > 0$، نظریهٔ رایج نشان می‌دهد که افرازی مانند P موجود است به طوری که $\tilde{U}_F(f, P) - \tilde{L}_F(f, P) < \varepsilon$. بنابر (۱)، همچنین داریم $U_F(f, P) - L_F(f, P) < \varepsilon$ و بنابراین طبق قضیهٔ ۶.۳۵ تابع f، F- انتگرالپذیر است.

برای ملاحظه برابر بودن انتگرالها، صرفاً توجه کنید که

$$\bar{\int_a^b} fdF \le \tilde{U}_F(f, P) < \tilde{L}_F(f, P) + \varepsilon \le L_F(f, P) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} fdF + \varepsilon$$

و به همین نحو

$$\underline{\int_a^b} fdF > \bar{\int_a^b} fdF - \varepsilon$$
□

ما انتگرالهای ریمان - استیلت یس را با استفاده از روزنهٔ تعریف شده برحسب F به جای روزنهٔ رایج داده شده در تعریف ۶.۳۲ تعریف خواهیم کرد.

۲۱.۳۵ تعریف. F- روزنهٔ [F - mesh =] افرازی مانند P عبارت است از

$$F - \text{mesh}(P) = \max\{F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+) : k = 1, 2, \ldots, n\} .$$

مناسبتر است که لم ۱۵.۳۵ را برای F مجدداً بیان کنیم.

۲۲.۳۵ لم. اگر $\delta > 0$، افرازی مانند P موجود است به طوری که $F - \mathrm{mesh}(P) < \delta$.

۲۳.۳۵ قضیه. تابعی کراندار مانند f بر $[a , b]$، F– انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که برای کلیهٔ افرازهای P از $[a , b]$،

$$F - \mathrm{mesh}(P) < \delta \text{ مستلزم آن است که } U_F(f , P) - L_F(f , P) < \varepsilon . \quad (1)$$

برهان. فرض کنید که شرط $\varepsilon - \delta$ی بیان شده در قضیه برقرار باشد. اگر $\varepsilon > 0$، آنگاه بنابر لم ۲۲.۳۵، (۱) برای افرازی مانند P معتبر است و بنابراین، $U_F(f , P) - L_F(f , P) < \varepsilon$. چون این تذکر در مورد هر $\varepsilon > 0$ معتبر است، قضیهٔ ۶.۳۵ مستلزم آن است که f، F– انتگرالپذیر است.

عکس قضیه درست مانند قضیه ۷.۳۲ با قرار دادن «F – mesh» به جای «mesh» و ارجاع به لم ۳.۳۵ به جای لم ۲.۳۲ ثابت می‌شود. □

۲۴.۳۵ تعریف. فرض کنید f بر $[a , b]$ کراندار باشد و گیرید که

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} .$$

یک مجموع ریمان ـ استیلت یس f وابسته به P و F، مجموعی است به شکل

$$J_F(f , P) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[F(t_k^-) - F(t_{k-1}^+)]$$

که در آن برای هر k، $k = 1 , 2 , \dots , n$، $x_k \in (t_{k-1} , t_k)$.

تابع f بر $[a , b]$ ریمان ـ استیلت یس انتگرالپذیر نامیده می‌شود هرگاه r ای در R با خاصیت زیر موجود باشد. به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ای موجود باشد به طوری که برای هر مجموع ریمان – استیلت یس S از f وابسته به افراز P با $F - \mathrm{mesh}(P) < \delta$،

$$|S - r| < \varepsilon . \quad (1)$$

r را انتگرال ریمان ـ استیلت یس f می‌نامیم و آن را موقتاً به صورت

$$\mathscr{RS} \int_a^b f dF$$

می‌نویسیم.

۲۵.۳۵ قضیه. تابعی کراندار مانند f بر $[a , b]$، F– انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر ریمان ـ استیلت یس انتگرالپذیر باشد، که در این حالت انتگرالها برابرند.

برهان. برهان اینکه F- انتگرالپذیر مستلزم ریمان - استیلت یس انتگرالپذیری است، تقلید برهان متناظر در قضیهٔ ۹.۳۲ است. برهان عکس نیز تقلید برهان متناظر است، اما به کمی دقت نیاز دارد و لذا آن را ارائه می‌کنیم.

فرض کنیم که f، ریمان - استیلت یس انتگرالپذیر باشد و گیرید که r به صورتی باشد که در تعریف ۲۴.۳۵ داده شده است. $\varepsilon > 0$ را در نظر گیرید و فرض کنید که $\delta > 0$ به صورتی باشد که در تعریف ۲۴.۳۵ داده می‌شود. بنابر لم ۲۲.۳۵ افرازی مانند $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ با $F-\text{mesh}(P) < \delta$ موجود است. برای هر k، $k = 1, 2, \dots, n$، x_kای را در (t_{k-1}, t_k) انتخاب کنید به طوری که

$$f(x_k) < m(f, (t_{k-1}, t_k)) + \varepsilon .$$

مجموع ریمان - استیلت یس S برای این انتخاب x_k، در

$$S \le L_F(f, P) + \varepsilon[F(b) - F(a)]$$

و نیز در

$$|S - r| < \varepsilon \quad ;$$

صدق می‌کند. بنابراین $L_F(f) \ge L_F(f, P) > r - \varepsilon - \varepsilon[F(b) - F(a)]$. نتیجه می‌شود که $L_F(f) \ge r$، و به همین نحو $U_F(f) \le r$. در نتیجه $L_F(f) = U_F(f) = r$ و بنابراین f، F- انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b f dF = r = \mathscr{RS} \int_a^b f dF .$$ □

تمرینها

۱.۳۵. فرض کنید که F تابعی صعودی بر $[a, b]$ باشد.

(الف) نشان دهید که برای $t \in [a, b]$، $\lim_{x \to t^-} F(x)$ موجود و برابر است با $\sup\{F(x): x \in (a, t)\}$.

(ب) نشان دهید که برای $t \in (a, b)$، $\lim_{x \to t^+} F(x)$ موجود و برابر است با $\inf\{F(x): x \in (t, b)\}$.

۲.۳۵. $\int_0^3 x^2 dF(x)$ را برای تابع F در مثال ۴ حساب کنید.

۳.۳۵. فرض کنید که F یک تابع پله‌ای باشد به طوری که برای $t \in [n, n+۱)$، n صحیح، $F(t) = n$. حساب کنید،

(الف) $\int_۰^۶ x dF(x)$،

(ب) $\int_۰^۳ x^۲ dF(x)$،

(پ) $\int_{۱/۴}^{\pi/۴} \cos(e^{x^۲})\, dF(x)$.

۴.۳۵. فرض کنید که برای $t \in [-\pi/۲, \pi/۲]$، $F(t) = t$. حساب کنید

(الف) $\int_۰^{\pi/۲} x dF(x)$ (ب) $\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} x dF(x)$.

۵.۳۵. فرض کنید که برای xگویا، $f(x) = ۱$ و برای xگنگ، $f(x) = ۰$.

(الف) نشان دهید که اگر F بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $F(a) < F(b)$، آنگاه f بر $[a, b)$ $F-$ انتگرالپذیر نیست.

(ب) بررسی کنید که f، $F-$ انتگرالپذیر است هرگاه F به صورتی باشد که در مثال ۱ یا ۳ توصیف شده است.

۶.۳۵. گیرید (f_n) دنباله‌ای از تابعهای $F-$ انتگرالپذیر بر $[a, b]$ باشد و فرض کنید که به طور یکنواخت بر $[a, b]$، $f_n \to f$. نشان دهید که f، $F-$ انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b f dF = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dF .$$

۷.۳۵. فرض کنید f و g بر $[a, b]$، $F-$ انتگرالپذیر باشند. نشان دهید که

(الف) $f^۲$، $F-$ انتگرالپذیر است.

(ب) fg، $F-$ انتگرالپذیر است.

(پ) $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$، $F-$ انتگرالپذیرند.

۸.۳۵. فرض کنید g بر $[a, b]$ پیوسته باشد که در آن برای هر xدر $[a, b]$، $g(x) \geq ۰$، و برای t در $[a, b]$ تعریف کنید $F(t) = \int_a^t g(x)dx$. نشان دهید که اگر f پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f dF = \int_a^b f(x)g(x)dx .$$

۹.۳۵. فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

(الف) نشان دهید که برای xای در $[a, b]$، $\int_a^b f dF = f(x)[F(b) - F(a)]$.

(ب) نشان دهید که تمرین ۱۴.۳۳ حالتی خاص از بخش (۱) است.

۱۰.۳۵. فرض کنید که F بر $[a\ ,\ b]$ مشتقپذیر و F' بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر ریمان باشد. گیرید f تابعی کراندار بر $[a\ ,\ b]$ باشد. ثابت کنید که f، F– انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر fF' ریمان انتگرالپذیر باشد که در این صورت

$$\int_a^b f dF = \int_a^b F(x)F'(x)\ dx\ .$$

تبصره: برهان، دشوار و ظریف است. می‌توانید راه حلی را از مؤلف بخواهید.

۱۱.۳۵. ذیلاً یک «فرمول تعویض متغیر» ارائه می‌شود. فرض کنید که f بر $[a\ ,\ b]$، F– انتگرالپذیر باشد. گیرید که ϕ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی بر بازهٔ $[c\ ,\ d]$ باشد به طوری که $\phi(c) = a$ و $\phi(d) = b$. برای $u \in [c\ ,\ d]$ تعریف کنید،

$$g(u) = f(\phi(u)) \quad , \quad G(u) = F(\phi(u))\ .$$

نشان دهید که g، G – انتگرالپذیر است و $\int_c^d g dG = \int_a^b f dF$.

بخش ۳۶*. انتگرالهای ناسره

انتگرال ریمان در بخش ۳۲ تنها برای تابعهایی تعریف شده است که بربازه‌ای بسته مانند $[a\ ,\ b]$ کراندار باشند. بهتر خواهد بود که بتوانیم از تابعهایی که کراندار نیستند یا بر بازه‌ای بیکران تعریف شده‌اند، انتگرالگیری کنیم.

۱.۳۶ تعریف. بازه‌ای مانند $[a\ ,\ b)$ را در نظر گیرید که در آن b متناهی یا $+\infty$ است. فرض کنید که f تابعی بر $[a\ ,\ b)$ باشد که در هر بازهٔ $[a\ ,\ d]$، $a < d < b$ انتگرالپذیر است و فرض کنید که حد

$$\lim_{d\to b^-} \int_a^d f(x)dx$$

به عنوان عددی متناهی، $+\infty$، یا $-\infty$ موجود باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to b^-} \int_a^d f(x)dx\ . \qquad (۱)$$

اگر b متناهی و f بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر باشد، این تعریف با تعریف ۱.۳۲ مطابقت می‌کند [تمرین

۱.۳۶]. اگر $b = +\infty$ یا اگر f بر $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر نباشد، اما حد (۱) موجود باشد، در این صورت (۱) یک انتگرال ناسره را تعریف می‌کند.

تعریف مشابهی را می‌توان به کار بست هرگاه f بر $(a\ ,\ b]$ تعریف شده باشد که در آن a متناهی یا $-\infty$ است و f بر هر بازهٔ $[c\ ,\ b]$، $a < c < b$، انتگرالپذیر است. در این صورت تعریف می‌کنیم،

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx \ , \qquad (۲)$$

در صورتی که حد موجود باشد.

اگر f بر $(a\ ,\ b)$ تعریف شده و بر کلیهٔ زیر بازه‌های بستهٔ $[c\ ,\ d]$ انتگرالپذیر باشد، در این صورت α را در $(a\ ,\ b)$ ثابت می‌گیریم و تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)\ dx \ , \qquad (۳)$$

مشروط بر اینکه انتگرالهای سمت راست موجود باشند و مجموع به شکل $+\infty + (-\infty)$ نباشد. در اینجا می‌پذیریم که $\infty = L + \infty$، هرگاه $L \neq -\infty$ و $-\infty = L + (-\infty)$، هرگاه $L \neq \infty$. می‌توان به آسانی ملاحظه کرد [تمرین ۲.۳۶] که این تعریف به انتخاب α بستگی ندارد.

هر زمان که انتگرالهای ناسرهٔ تعریف شده در بالا موجود و متناهی باشند، انتگرالها را همگرا می‌نامیم. در غیر این صورت انتگرالها به $+\infty$ یا $-\infty$ واگرا هستند.

مثال ۱. فرض کنید که برای $x \in (۰\ ,\ \infty)$، $f(x) = ۱/x$. برای $d > ۱$، داریم $\int_۱^d (۱/x)\ dx = \log(d)$ و بنابراین

$$\int_۱^\infty \frac{۱}{x}\ dx = \lim_{d\to\infty}\ [\log d] = +\infty \ .$$

این انتگرال ناسره به $+\infty$ واگراست. برای $۰ < c < ۱$، داریم $\int_c^۱ (۱/x)dx = -\log(c)$ و بنابراین

$$\int_۰^۱ \frac{۱}{x}\ dx = \lim_{c\to ۰^+}\ [-\log(c)] = +\infty \ .$$

همچنین داریم

$$\int_۰^\infty \frac{۱}{x}\ dx = +\infty \ .$$

مثال ۲. تابع $f(x) = x^{-p}$ را برای $x \in [۱\ ,\ \infty)$ و عدد مثبتی مانند p، $p \neq ۱$، را در نظر گیرید. برای $d > ۱$،

$$\int_{1}^{d} x^{-p}dx = \frac{1}{1-p}[d^{1-p}-1].$$

نتیجه می‌شود که

$$\text{اگر } p > 1، \int_{1}^{\infty} x^{-p}dx = \frac{1}{1-p}[0-1] = \frac{1}{1-p}$$

و

$$\text{اگر } 0 < p < 1، \int_{1}^{\infty} x^{-p}dx = +\infty$$

مثال ۳. برای هر d داریم، $\int_{0}^{d} \sin x dx = 1 - \cos d$. وقتی $d \to \infty$، مقدار $(1 - \cos d)$ بین ۰ و ۲ نوسان می‌کند، و بنابراین حد

$$\lim_{d\to\infty} \int_{0}^{d} \sin x dx$$

موجود نیست. در نتیجه، نماد $\int_{0}^{\infty} \sin\ x dx$ معنایی ندارد و یک انتگرال ناسره نیست. به همین نحو، $\int_{-\infty}^{0} \sin x dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\ dx$ معنی ندارند.

توجه کنید که حد

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \sin x dx$$

آشکارا موجود و برابر ۰ است. وقتی چنین حد «متقارنی» موجود است حتی با وجود اینکه انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{\infty}$ موجود نیست، آنچه را که یک مقدار اصلی کوشی برای $\int_{-\infty}^{\infty}$ نامیده می‌شود، خواهیم داشت. بنابراین ۰ مقدار اصلی کوشی $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ است، اما این یک انتگرال ناسره نیست.

به ویژه ارزشمند است که انتگرالهای ریمان - استیلت یس را به بازه‌های نامتناهی بسط دهیم؛ نگاه کنید به بحث پس از قضیهٔ ۴.۳۶. فرض کنید F یک تابع کراندار صعودی بر بازه‌ای مانند I باشد. تابع F را می‌توان به کمک تدبیر ساده‌ای به تمام **R** توسیع داد: اگر I از پایین کراندار باشد، تعریف کنید

$$F(t) = \inf\{F(u), u \in I\} \quad , \quad t < \inf I \quad ;$$

اگر I از بالا کراندار باشد، تعریف کنید

$$F(t) = \sup\{F(u): u \in I\}, t > \sup I.$$

به این دلیل، پس از این فرض می‌کنیم که F تابعی صعودی بر تمام **R** باشد. ما از نمادهای

$$F(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} F(t) \quad , \quad F(\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t)$$

استفاده خواهیم کرد. انتگرالهای ریمان - استیلت یس ناسره، شبیه به انتگرالهای ریمان ناسره تعریف می‌شوند.

۲.۳۶ تعریف. فرض کنید که f بر هر بازهٔ [a , b] در R ، F− انتگرالپذیر باشد. تعریفهای زیر را هر وقت که حدها موجود باشند، مطرح می‌کنیم

$$\int_{0}^{\infty} fdF = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} fdF \,;\, \int_{-\infty}^{0} fdF = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} fdF\,.$$

اگر هر دو حد موجود باشند و مجموع آنها به شکل $(-\infty) + \infty$ نباشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} fdF = \int_{-\infty}^{0} fdF + \int_{0}^{\infty} fdF\,.$$

اگر این مجموع متناهی باشد، گوییم که f بر R ، F− انتگرالپذیر است. اگر f بر R، برای $F(t)=t$ ، F− انتگرالپذیر باشد [یعنی، انتگرالها، انتگرالهای ریمان باشند]، گوییم که f بر R ، انتگرالپذیر است.

۳.۳۶ قضیه. اگر f بر هر بازهٔ [a , b] ، F− انتگرالپذیر باشد و اگر برای هر x در R ، $f(x) \geq 0$ ، آنگاه f بر R ، F− انتگرالپذیر است یا اینکه $\int_{-\infty}^{\infty} fdF = +\infty$.

برهان. نشان می‌دهیم که چرا $\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} fdF$ موجود است، و حالت $\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} fdF$ را به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنید که برای $a < 0$ ، $h(a) = \int_{a}^{0} fdF$ و توجه کنید که $a' < a < 0$ مستلزم آن است که $h(a') \geq h(a)$. این خاصیت مستلزم آن است که $\lim_{a\to-\infty} h(a)$ موجود است و

$$\lim_{a\to-\infty} h(a) = \sup\{h(a) : a \in (-\infty\,,\,0)\}\,.$$

از استدلال سادهٔ آن صرف نظر می‌کنیم. □

۶.۳۴ قضیه. فرض کنید که $-\infty < F(-\infty) < F(\infty) < \infty$ و فرض کنید که f تابعی کراندار بر R باشد که بر هر بازهٔ [a , b] ، F− انتگرالپذیر است. در این صورت f بر R ، F− انتگرالپذیر است.

برهان. ثابتی مانند B را انتخاب کنید به طوری که برای هر x در R، $|f(x)| \leq B$. چون $F(\infty) - F(-\infty) < \infty$، تابعهای ثابت، F- انتگرالپذیرند. چون $0 \leq f + B \leq 2B$، قضیهٔ ۳.۳۶ نشان می‌دهد که $f + B$، F- انتگرالپذیر است. نتیجه می‌شود [تمرین ۱۰.۳۶] که $f = (f + B) + (-B)$ نیز، F- انتگرالپذیر است. □

تابعهای صعودی F که بر R تعریف شده‌اند به صورت طبیعی در احتمال و آمار پیش می‌آیند. در این رشته‌ها، F یک تابع توزیع نامیده می‌شود هرگاه علاوه بر آن داشته باشیم $F(-\infty) = 0$ و $F(\infty) = 1$. البته تابع $F(t) = t$ که متناظر با انتگرال ریمان است، یک تابع توزیع نیست. تابع توزیع به صورت زیر در احتمال ظاهر می‌شود. یک آزمایش تصادفی با برآمدهای عددی را در نظر بگیرید؛ در این صورت $F(t)$ می‌تواند نشان دهندهٔ احتمال آن باشد که مقدار عددی نابیشتر از t است. به عنوان یک مثال ساده، فرض کنید که آزمایشی عبارت از پرتاب سه سکهٔ سالم و شمردن تعداد شیرها باشد. مقادیر عددی به ترتیب با احتمالهای $\frac{1}{8}$، $\frac{3}{8}$، $\frac{3}{8}$، و $\frac{1}{8}$ حاصل می‌شوند. تابع توزیع نظیر در مثال ۲ی بخش ۳۵ تعریف شده و در شکل ۱.۳۵ رسم شده است.

اغلب یک تابع توزیع، به شکل

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx$$

است که در آن g، تابع انتگرالپذیری است که برای هر x در R در $g(x) \geq 0$ صدق می‌کند. در این صورت g یک چگالی برای F نامیده می‌شود. توجه کنید که باید داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1 \quad .$$

همچنین، اگر g پیوسته باشد، در این صورت بنابر قضیهٔ ۳.۳۴، برای هر t، $g(t) = F'(t)$.

مثال ۴. می‌دانیم که $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ [تمرین ۷.۳۶] و بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} -e^{-x^2}/2 \ dx = \sqrt{\pi}$$

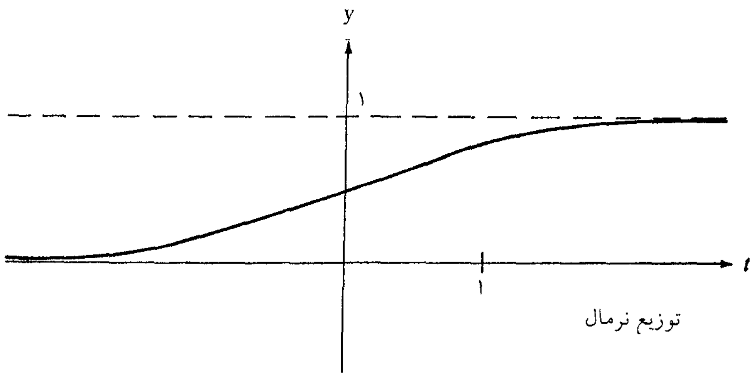
مهمترین چگالی در احتمال، چگالی نرمال

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

است که توزیع نرمال را به وجود می‌آورد:

$$F(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^۲/۲}\, dx\ ;$$

نگاه کنید به شکل ۱.۳۶ .



شکل ۱.۳۶

تمرینها

تمرینهای ۱.۳۶ - ۸.۳۶ تنها با انتگرالهای نرمال سروکار دارند.

۱.۳۶.   نشان دهید که اگر f مانند آنچه در تعریف ۱.۳۲ آمده، انتگرالپذیر باشد، آنگاه

$$\lim_{d\to b^-} \int_a^d f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

۲.۳۶.   نشان دهید که تعریف (۳) در تعریف ۱.۳۶ به انتخاب α بستگی ندارد.

۳.۳۶.   (الف) نشان دهید که

$$\int_۰^۱ x^{-p} dx = \frac{۱}{۱-p}$$ ، $۰ < p < ۱$ اگر

و

اگر $p > 1$، $\int_0^1 x^{-p}dx = +\infty$.

(ب) نشان دهید که برای هر $p > 0$، $\int_0^\infty x^{-p}dx = +\infty$،

۴.۳۶. حساب کنید

(الف) $\int_0^1 \log(x)\, dx$، (ب) $\int_2^\infty (\log x)/x\, dx$ ،

(پ) $\int_0^\infty (1 + x^2)^{-1}\, dx$.

۵.۳۶. فرض کنید که f تابعی پیوسته بر (a , b) باشد به طوری که برای هر x در (a , b)، $f(x) \geq 0$ ؛ a می‌تواند $-\infty$ باشد، b می‌تواند $+\infty$ باشد. نشان دهید که انتگرال ناسرهٔ $\int_a^b f(x)dx$ موجود و برابر است با

$$\sup\{\int_a^d f(x)dx : [c , d] \subseteq (a , b)\} \ .$$

۶.۳۶. آزمونهای مقایسهٔ زیر را ثابت کنید. فرض کنید که f و g تابعهای پیوسته بر (a , b) باشند به طوری برای هر x در (a , b)، $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ؛ a می‌تواند $-\infty$ باشد، b می‌تواند $+\infty$ باشد.

(الف) اگر $\int_a^b g(x)\, dx < \infty$، آنگاه $\int_a^b f(x)\, dx < \infty$.

(ب) اگر $\int_a^b f(x)\, dx = \infty$، آنگاه $\int_a^b g(x)dx = +\infty$.

۷.۳۶. (الف) از تمرین ۶.۳۶ استفاده کرده نشان دهید که $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx < \infty$.

(ب) نشان دهید که این انتگرال برابر $\sqrt{\pi}$ است. راهنمایی: انتگرال دوگانه $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} e^{-y^2}\, dxdy$ را با استفاده از مختصات قطبی حساب کنید.

۸.۳۶. فرض کنید که f بر (a , b) انتگرالپذیر باشد و $\int_a^b |f(x)dx| < \infty$ ؛ مجدداً a می‌تواند $-\infty$ باشد، b می‌تواند $+\infty$ باشد. نشان دهید که انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ موجود و متناهی است.

۹.۳۶. فرض کنید که F توزیع نرمال مثال ۴ باشد.

(الف) نشان دهید که اگر f بر R پیوسته و انتگرال ناسرهٔ $\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-x^2/2}dx$ موجود باشد، آنگاه انتگرال ناسرهٔ $\int_{-\infty}^\infty fdF$ موجود است و

$$\int_{-\infty}^\infty fdF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-x^2/2}dx \ .$$

حساب کنید

(ب) $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2}dF(x)$، (پ) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^{2}}dF(x)$،

(ت) $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\ dF(x)$، (ث) $\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$.

۱۰.۳۶. فرض کنید f و g بر R، F- انتگرالپذیر باشند. نشان دهید که $f + g$ بر R، F- انتگرالپذیر است و

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f + g)dF = \int_{-\infty}^{\infty} fdF + \int_{-\infty}^{\infty} gdF .$$

۱۱.۳۶. نشان دهید که اگر f و g بر R، F- انتگرالپذیر باشند و اگر برای هر x در R، $f(x)\leq g(x)$، آنگاه $\int_{-\infty}^{\infty} fdF \leq \int_{-\infty}^{\infty} gdF$.

۱۲.۳۶. تمرین ۶.۳۶ را در مورد F- انتگرالها بر R تعمیم دهید.

۱۳.۳۶. تمرین ۸.۳۸ را برای F- انتگرالها بر R تعمیم دهید.

۱۴.۳۶. فرض کنید (u_n) دنباله‌ای از نقطه‌های متمایز در R باشد و فرض کنید (c_n) دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که $\sum c_n < \infty$.

(الف) نشان دهید که $F = \sum_{n=1}^{\infty} c_nJ_{u_n}$ تابعی صعودی بر R است. راهنمایی: نگاه کنید به مثال ۳ در بخش ۳۵.

(ب) نشان دهید که هر تابع کراندار بر R، F- انتگرالپذیر است و

$$\int_{-\infty}^{\infty} fdF = \sum_{n=1}^{\infty} c_nf(u_n) .$$

(پ) نشان دهید که اگر (u_n) شمارشی از اعداد گویا باشد، در این صورت F بر R اکیداً صعودی است.

(ت) F چه موقع یک تابع توزیع است؟

۱۵.۳۶. (الف) مثالی از دنباله‌ای از تابعهای انتگرالپذیر بر R مانند (f_n) ارائه دهید به طوری که برای هر n، $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 1$، اما به طور یکنواخت بر R، $f_n \to 0$.

(ب) فرض کنید که F یک تابع توزیع بر R باشد. نشان دهید که (f_n) دنباله‌ای از تابعهای F- انتگرالپذیر بر R است و اگر به طور یکنواخت بر R، $f_n \to f$، آنگاه f بر R، F- انتگرالپذیر است و

$$\int_{-\infty}^{\infty} fdF = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_ndF .$$

بخش ۳۷*. بحثی دربارهٔ نماها و لگاریتمها

در این کتاب، نظریه را به دقت پرورده‌ایم اما در استفاده از تابعهای نمایی، لگاریتمی، و مثلثاتی در مثالها و تمرینها با اهمال برخورد کرده‌ایم. اغلب خوانندگان احتمالاً این رهیافت را قابل پذیرش یافته‌اند زیرا آنان با این تابعهای پایه‌ای مشکلی ندارند. در این بخش، سه راه برای تابعهای نمایی و لگاریتمی را تنها با مفروض گرفتن اصلهای فصل ۱ و نتایج نظری فصلهای پس از آن، بسط می‌دهیم. برهانهایی برای رهیافت سوم ارائه می‌کنیم.

به خاطر آورید که برای x در $\mathbf{R}$ و عدد صحیح مثبتی مانند n، x^n حاصل ضرب n بارِ x در خودش است و برای $x \neq 0$، قرار داد $x^0 = 1$ را داریم. و برای $x \neq 0$ و اعداد صحیح منفی $-n$، $n \in \mathbf{N}$، x^{-n} را به عنوان وارون x^n تعریف می‌کنیم؛ یعنی $x^{-n} = (x^n)^{-1}$.

۱.۳۷ رهیافت تدریجی. این رهیافت با مثال ۲ در بخش ۲۹ و تمرین ۱۵.۲۹ آغاز می‌شود که در آن نشان داده شد که x^r هر زمان که $x > 0$ و r گویا باشد، یعنی $r \in \mathbf{Q}$، دارای معنی است. به علاوه

اگر $h(x) = x^r$، آنگاه $h'(x) = rx^{r-1}$.

درستی خاصیتهای جبری $x^r x^s = x^{r+s}$ و $(xy)^r = x^r y^r$ را می‌توان برای $r, s \in \mathbf{Q}$ و اعداد مثبت x و y تحقیق کرد. برای t در $\mathbf{R}$ و $x \geq 1$، تعریف می‌کنیم

$$x^t = \sup\{x^r : r \in \mathbf{Q},\ r \leq t\}$$

و

$$(1/x)^t = (x^t)^{-1}.$$

با این کار، x^t برای $x > 0$ تعریف می‌شود. می‌توان نشان داد که با این تعریف، x^t متناهی است و خاصیتهای جبری ذکر شده در بالا هنوز هم برقرارند. به علاوه، می‌توان نشان داد که $h(x) = x^t$ مشتقپذیر است و $h'(x) = tx^{t-1}$.

حال می‌توانیم b ی مثبت ثابتی و تابع B را که به وسیلهٔ $B(x) = b^x$ برای $x \in \mathbf{R}$ تعریف شده است، در نظر بگیریم. تابع B مشتقپذیر است و برای ثابت مثبتی مانند c_b، $B'(x) = c_b B(x)$. جزئیات آخرین ادعا را می‌آوریم. با توجه به تمرین ۱۴.۲۸، می‌توانیم بنویسیم

$$B'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = b^x \,.\, \lim_{h\to 0} \frac{b_h - 1}{h}$$

مشروط بر اینکه این حدها موجود باشند. با کمی تجزیه و تحلیل معلوم می‌شود که آخرین حد موجود است و بنابراین

$$B'(x) = c_b B(x) \text{ که در آن } c_b = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,[e^h - 1]\,.$$

نتیجه این می‌شود که برای bای معین، که عموماً به e شهرت دارد، $c_b = 1$. چون B در صورتی که $b \neq 1$، یک به یک است، B وارونی مانند L دارد که $L(y) = \log_b y$ نامیده می‌شود. چون B مشتقپذیر است، قضیهٔ ۹.۲۹ را می‌توان به کاربرد و نشان داد که L مشتقپذیر است و

$$L'(y) = \frac{1}{c_b y}\,.$$

سرانجام، خاصیتهای آشنای $\log_b$ را می‌توان برای L برقرار کرد.

وقتی همهٔ جزئیات تکمیل شود، رهیافت بالا بسیار کسل کننده است. این رهیافت یک و تنها یک حسن دارد. این رهیافت سر راست است بدون اینکه هیچ شگردی در آن به کار گرفته شود. می‌توان آن را «رهیافت زورمدارانه» نامید. دو رهیافت دیگر با موجودات ریاضی خوشتعریفی [یک سری توانی یا یک انتگرال] آغاز می‌شود و سپس در مسیر عکس عمل می‌کند تا خاصیتهای آشنای نماها و لگاریتمها بسط داده شوند. در هر دو مورد، برای ایجادانگیزه، به نتایج پیشرفته‌تری متوسل می‌شویم که آنها را قبول کرده‌ایم اما هنوز در این کتاب ثابت نشده‌اند.

۲.۳۷ رهیافت سری توانی نمایی. این رهیافت در دو کتاب محبوب ما در پیش گرفته شده است. [۴]، بخش ۹.۴، و [۱۹]، فصل ۸. همان طور که در مثال ۱ بخش ۳۱ متذکر شده‌ایم، قبول داریم که

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

گرچه هنوز آن را ثابت نکرده‌ایم، زیرا هنوز نماها را تعریف نکرده‌ایم. در این رهیافت، تعریف می‌کنیم

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad (1)$$

و تعریف می‌کنیم $e = E(1)$. این سری دارای شعاع همگرایی $+\infty$ است [مثال ۱، بخش ۲۳] و E بر $\mathbf{R}$ مشتقپذیر است [قضیهٔ ۵.۲۶]. می‌توان به آسانی نشان داد [تمرین ۵.۲۶] که $E' = E$. خاصیت بنیادی

$$E(x + y) = E(x)E(y) , \qquad (۲)$$

را می‌توان تنها با استفاده از نتیجه‌های ذکر شده در بالا ثابت کرد. در واقع در [۱۹] از قضیه‌ای دربارهٔ ضرب سریهای مطلقاً همگرا استفاده می‌شود، اما در [۴] از این موضوع، اجتناب می‌شود. دیگر خاصیتهای E را می‌توان به سرعت ثابت کرد. به ویژه، E بر $\mathbf{R}$ اکیداً صعودی و دارای وارون L است. قضیهٔ ۹.۲۹ ما را مطمئن می‌سازد که L مشتقپذیر است و $L'(y) = 1/y$. برای عدد گویای r و $x > 0$، x^r در تمرین ۱۵.۲۹ تعریف شد. با به کاربردن آن تمرین و قاعدهٔ زنجیری در مورد $g(x) = L(x)^r - rL(x)$، در می‌یابیم که برای $x > 0$، $g'(x) = 0$. چون $g(1) = 0$، نتیجه می‌گیریم که

$$L(x^r) = rL(x) \quad \text{برای } r \in Q \text{ و } x > 0 . \qquad (۳)$$

برای $b > 0$ و عدد گویای r، (۳) مستلزم آن است که

$$b^r = E(L(b^r)) = E(rL(b)) .$$

براساس تساوی اخیر، تعریف می‌کنیم،

$$b^x = E(xL(b) , x \in R .$$

این خاصیتهای آشنای نماها و وارونهای آنها [لگاریتمها!] را می‌توان حالا به آسانی ثابت کرد.

انتخاب بین رهیافتی که هم اکنون شرح داده شد و رهیافت بعدی، حقیقتاً جنبهٔ سلیقه‌ای دارد و به میزان جذابیت سریهای توانی بستگی دارد. یک مزیت ذاتی رهیافت نمایی آن است که سری موجود در (۱) که E را تعریف می‌کند به همان اندازه، برای تعریف $E(z) = e^z$ برای اعداد مختلط z اعتبار دارد.

۳.۳۷ رهیافت انتگرال لگاریتمی. سعی می‌کنیم معادلهٔ $f' = f$ را حل کنیم که در آن f هرگز صفر نمی‌شود؛ انتظار داریم که $E(x) = e^x$ را به عنوان یکی از جوابها به دست آوریم. این معادلهٔ دیفرانسیل ساده را می‌توان به صورت

$$\frac{f'}{f} = 1 \qquad (۱)$$

نوشت. با توجه به قاعدهٔ زنجیری، اگر می‌توانستیم L ای را پیدا کنیم که در $L'(y) = 1/y$ صدق کند، آنگاه معادلهٔ (۱) به صورت

$$(L \circ f)' = 1$$

ساده می‌شود و بنابراین یکی از جوابها در

$$L \circ f(y) = y$$

صدق می‌کند. به عبارت دیگر، یکی از جوابهای f معادلهٔ (۱)، وارونی برای L خواهد بود که در آن $L'(y) = 1/y$. اما بنابر قضیهٔ اساسی حسابان II [قضیهٔ ۳.۳۴]، می‌دانیم که چنین تابع Lای موجود است. چون همچنین انتظار داریم که $L(1) = 0$، تعریف می‌کنیم.

$$L(y) = \int_1^y \frac{1}{t}\,dt \text{ ،} y \in (0, \infty) \text{ برای}$$

از این تعریف استفاده می‌کنیم تا حقایق اساسی دربارهٔ لگاریتمها و نماها را ثابت کنیم.

۴.۳۷ قضیه.

(i) تابع L بر $(0, \infty)$ اکیداً صعودی، پیوسته، و مشتق‌پذیر است. داریم

$$\text{برای } y \in (0, \infty) \text{، } L'(y) = \frac{1}{y}.$$

(ii) برای y، z در $(0, \infty)$، $L(yz) = L(y) + L(z)$.

(iii) برای y ، z در $(0, \infty)$، $L(y/z) = L(y) - L(z)$

(iv) $\lim_{y \to \infty} L(y) = +\infty$ و $\lim_{y \to 0^+} L(y) = -\infty$.

برهان. اثبات اینکه تابع $f(t) = t$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است، بدیهی است و لذا بنابر قضیهٔ ۴.۱۷، وارون آن $1/t$ بر $(0, \infty)$ پیوسته است. می‌توان به آسانی ملاحظه کرد که L اکیداً صعودی است و بقیهٔ (۱) بی‌درنگ از قضیهٔ ۳.۳۴ نتیجه می‌شود.

حکم (ii) را می‌توان مستقیماً ثابت کرد [تمرین ۱.۳۷]. به روشی دیگر، xرا تثبیت کنید و در نظر گیرید $g(y) = L(yz) - L(y) - L(z)$. چون $g(1) = 0$، کافی است نشان دهیم که برای y در $(0, \infty)$، $g'(y) = 0$ [نتیجهٔ ۴.۲۹]. اما چون z ثابت گرفته شده است، داریم

$$g'(y) = \frac{z}{yz} - \frac{1}{y} - 0 = 0.$$

برای تحقیق درستی (iii)، توجه کنید که $L(1/z) + L(z) = L((1/z) \cdot z) = 0$، که بنابراین

و $L(1/z) = -L(z)$

$$L(\frac{y}{z}) = L(y \cdot \frac{1}{z}) = L(y) + L(\frac{1}{z}) = L(y) - L(z) .$$

برای ملاحظهٔ صحت (iv)، ابتدا توجه کنید که $L(2) > 0$ و با توجه به (ii)،

$$L(2^n) = nL(2) .$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} L(2^n) = +\infty$. چون L صعودی است، نتیجه می‌شود که $\lim_{y\to\infty} L(y) = +\infty$. به همین نحو، $L(\frac{1}{2}) < 0$ و $L((\frac{1}{2})^n) = n \cdot L(\frac{1}{2})$ و لذا $\lim_{y\to 0^+} L(y) = -\infty$. □

قضیهٔ مقدار میانی ۲.۱۸ نشان می‌دهد که L بازهٔ $(0, \infty)$ را به روی **R** می‌نگارد. چون L اکیداً صعودی است، دارای وارون است و حوزهٔ تعریف این وارون، **R** است.

۵.۳۷ تعریف. تابع وارون L را با E نشان می‌دهیم. در نتیجه برای y در $(0, \infty)$،

$$E(L(y)) = y$$

و برای x در R،

$$L(E(x)) = x .$$

همچنین تعریف می‌کنیم $e = E(1)$ به طوری که $\int_1^e (1/t)\, dt = 1$.

۶.۳۷ قضیه.

(i) تابع E بر **R** اکیداً صعودی، پیوسته، و مشتقپذیر است. برای x در R داریم،

$$E'(x) = E(x) .$$

(ii) برای u، v در **R**، $E(u + v) = E(u)E(v)$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} E(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to -\infty} E(x) = 0$.

برهان. کلیهٔ حکمهای (۱) از قضیهٔ ۴.۳۷ همراه با قضیهٔ ۹.۲۹، نتیجه می‌شوند. به ویژه

$$E'(x) = \frac{1}{L'(E(x))} = \frac{1}{\frac{1}{E(x)}} = E(x) .$$

اگر $u , v \in R$، آنگاه برای y و z ای در $(0, \infty)$، $u = L(y)$ و $v = L(z)$. در این صورت بنابر

(ii) ی قضیهٔ ۴.۳۷، $u + v = L(yz)$ و بنابراین

$$E(u + v) = E(L(yz)) = yz = E(L(y))\, E(L(z)) = E(u)\,.\,E(v)\,.$$

حکم (iii) از (iv) قضیهٔ ۴.۳۷ نتیجه می‌شود [تمرین ۲.۳۷]. □

$b > 0$ و r را در Q، مثلاً به صورت $r = m/n$ با $m\,,\,n \in \mathbf{Z}$ و $n > 0$، در نظر بگیرید. رسم بر این است که b^r را به نشانه عدد مثبتی مانند a بنویسند به طوری که $a^n = b^m$. بنابر (ii) ی قضیهٔ ۴.۳۷، داریم $nL(a) = mL(b)$ و بنابراین

$$b^r = a = E(L(a)) = E(\frac{1}{n}\,.\,nL(a)) = E(\frac{1}{n}\,.\,mL(b)) = E(rL(b))\,.$$

این مطلب، انگیزهٔ تعریف بعدی ماست و نیز نشان می‌دهد که این تعریف با رسم متداول در جبر برای توانهای کسری سازگاری دارد.

۷.۳۷ تعریف. برای $b > 0$ و $x \in R$ داریم

$$b^x = E(xL(b))\,.$$

چون $L(e) = 1$، برای هر x در R داریم $e^x = E(x)$.

۸.۳۷ قضیه. $b > 0$ را ثابت بگیرید.

(i) تابع $B(x) = b^x$ بر R پیوسته و مشتقپذیر است.

(ii) اگر $b > 1$، آنگاه B اکیداً صعودی است؛ اگر $b < 1$، آنگاه B اکیداً نزولی است.

(iii) اگر $b \neq 1$، آنگاه B مجموعهٔ **R** را به توی $(0\,,\,\infty)$ می‌نگارد.

(iv) برای $u\,,\,v \in R$، $b^{u+v} = b^u b^v$.

برهان. تمرین ۲.۳۷. □

اگر $b \neq 1$، B دارای وارون است.

۹.۳۷ تعریف. برای $b > 0$ و $b \neq 1$، وارون $B(x) = b^x$ به صورت $\log_b$ نوشته می‌شود. حوزهٔ تعریف $\log_b$، بازهٔ $(0\,,\,\infty)$ است و

$\log_b y = x$ اگر و تنها اگر $b^x = y$.

توجه کنید که برای $y > ۰$، $\log_e y = L(y)$.

۱۰.۳۷. قضیه. $b > ۰$ را ثابت در نظر بگیرید، $b \neq ۱$.

(i) تابع $\log_b$ بر $(۰ , \infty)$ پیوسته و مشتقپذیر است.

(ii) اگر $b > ۱$، $\log_b$ اکیداً صعودی است؛ اگر $b < ۱$، $\log_b$ اکیداً نزولی است.

(iii) برای $y , z \in (۰ , \infty)$، $\log_b(yz) = \log_b(y) + \log_b(z)$.

(iv) برای $y , z \in (۰ , \infty)$، $\log(y/z) = \log_b y - \log_b z$.

برهان. این قضیه از قضیهٔ ۴.۳۷ و اتحاد $\log_b y = L(y)/L(b)$ نتیجه می‌شود [تمرین ۴.۳۷].
توجه کنید که اگر $b < ۱$، $L(b)$ منفی است. □

تابع $E(x)$ حالا به صورت دقیق ایجاد شده است و، همان طور که در مثال ۱ بخش ۳۱ توضیح داده شد، داریم

$$E(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!} x^k$$

به ویژه، $e = \sum_{k=۰}^{\infty} ۱/k!$. همچنین،

۱۱.۳۷ قضیه. $e = \lim_{h\to ۰} (۱ + h)^{۱/h} = \lim_{n\to\infty} (۱ + ۱/n)^n$.

برهان. کافی است درستی تساوی اول را تحقیق کنیم. چون $L'(۱) = ۱$، داریم

$$۱ = \lim_{h\to ۰} \frac{L(۱ + h) - L(۱)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h} L(۱ + h) = \lim_{h\to ۰} L((۱ + h)^{۱/h}) .$$

چون E پیوسته است، می‌توانیم قضیهٔ ۵.۲۰ را با $f(h) = L((۱ + h)^{۱/h})$ به کار ببریم و به دست آوریم،

$$\lim_{h\to ۰} (۱ + h)^{۱/h} = \lim_{h\to ۰} E(L((۱ + h)^{۱/h})) = E(۱) = e .$$ □

۱۲.۳۷ تابعهای مثلثاتی. هر یک از رهیافتهای ۲.۳۷ یا ۳.۳۷ را می‌توان برای بسط دقیق

تابعهای مثلثاتی مورد حک و اصلاح قرار داد. می‌توان این تابعها را با استفاده از تابعهای نمایی برای مقادیر مختلط نیز به وجود آورد، زیرا

$$\sin x = \frac{۱}{۲i}\,[e^{ix} - e^{-ix}]$$

و مانند آن برای تابعهای دیگر؛ نگاه کنید به [۱۹]، فصل ۸. برای ساختن تابعهای مثلثاتی با روشی مشابه رهیافت ۵.۳۷، می‌توان به صورت زیر عمل کرد. چون می‌پذیریم که

$$\mathrm{Arc}\sin x = \int_{۰}^{x} (۱ - t^{۲})^{-۱/۲}\, dt \quad ,$$

می‌توانیم $A(x)$ را به عنوان همین انتگرال تعریف کنیم و $\sin x$ را از آن به دست آوریم. در این صورت $\cos x$ و $\tan x$ را می‌توان به آسانی به دست می‌آورد. در این روش ساختمان، عدد π به عنوان $\int_{۰}^{۱} (۱ - t^{۲})^{-۱/۲} dt$ تعریف می‌شود.

تمرینها

از نتایج ثابت شده در قضیهٔ ۴.۳۷ و قضیه‌های بعدی استفاده کنید، اما از مطالب بحث شده در ۱.۳۷ و ۲.۳۷ استفاده نکنید.

۱.۳۷. مستقیماً ثابت کنید که برای $y , z \in (۰ , \infty)$

$$\int_{۱}^{yz} \frac{۱}{t}\, dt = \int_{۱}^{y} \frac{۱}{t}\, dt + \int_{۱}^{z} \frac{۱}{t}\, dt \, .$$

۲.۳۷. (iii)ی قضیهٔ ۶.۳۷ را ثابت کنید.

۳.۳۷. قضیهٔ ۸.۳۷ را ثابت کنید.

۴.۳۷. ثابت کنید که برای $y \in (۰ , \infty)$، $b > ۰$، $b \neq ۱$، $\log_b y = L(y)/L(b)$.

۵.۳۷. فرض کنید p عددی حقیقی باشد و برای $x > ۰$ تعریف کنید، $f(x) = x^p$. نشان دهید که f مشتقپذیر است و $f'(x) = px^{p-۱}$؛ با تمرین ۱۵.۲۹ مقایسه کنید. راهنمایی:

$$f(x) = E(pL(x)) \, .$$

۶.۳۷. نشان دهید که برای p در R، و x و y مثبت، $x^p y^p = (xy)^p$.

۷.۳۷. (الف) نشان دهید که اگر $B(x) = b^x$، آنگاه $B'(x) = (\log_e b)\, b^x$.

(ب) مشتق $\log_b$ را پیدا کنید.

۸.۳۷. برای $x > ۰$، فرض کنید $f(x) = x^x$. نشان دهید که

$$f'(x) = [۱ + \log_e x] \cdot x^x .$$

۹.۳۷. (الف) نشان دهید که برای $y > ۱$، $\log_e y < y$.

(ب) نشان دهید که برای $y > ۱$، $\frac{\log_e y}{y} < \frac{۲}{\sqrt{y}}$. راهنمایی: $\log_e y = ۲\log_e \sqrt{y}$.
این تمرین کوچک زیبا مبتنی بر مقالهٔ [c] است.

(پ) قسمت (ب) را برای اثبات اینکه $\lim_{y\to\infty} (۱/y) \log_e y = ۰$ به کار ببرید.

پیوست مربوط به نمادهای مجموعه‌ای

مجموعه‌ای مانند S را در نظر گیرید. نماد $x \in S$ به این معنی است که x عنصری از S است؛ همچنین می‌توانیم بگوییم که «x به S تعلق دارد» یا «x در S است». نماد $x \notin S$ نشان می‌دهد که x یک عنصر است، اما x به S تعلق ندارد. منظور از $T \subseteq S$ این است که هر عنصر T به S نیز تعلق دارد، به عنوان مثال

$$۱ \in \mathbf{N}\,,\ ۱۷ \in \mathbf{N}\,,\ -۳ \notin \mathbf{N}\,,\ \frac{۱}{۲} \notin \mathbf{N}\,,\ \sqrt{۲} \notin \mathbf{N}\,,$$
$$\frac{۱}{۲} \in \mathbf{Q}\,,\ \frac{۱}{۲} \in \mathbf{R}\,,\ \sqrt{۲} \in \mathbf{R}\,,\ \sqrt{۲} \in \mathbf{Q}\,,\ \pi \in \mathbf{R}\,.$$

همچنین $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$، $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$، و $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}$.

مجموعه‌های متناهی کوچک را می‌توان با استفاده از دو ابروی {   } فهرست کرد. مثلاً، {۷ , ۵ , ۳ , ۲} مجموعه‌ای چهار عضوی مرکب از همهٔ اعداد اول کمتر از ۱۰ است. مجموعه‌ها اغلب به وسیلهٔ ویژگیهای عناصر آنها با استفاده از نماد

$$\{\ :\ \}$$

توصیف می‌شوند. قبل از دو نقطه، متغیر [مثلاً، n یا x] مشخص می‌شود و پس از دو نقطه، ویژگیهای مورد بحث، داده می‌شود. مثلاً،

$$\{\mathrm{n} : \mathrm{n} \in \mathbf{N}\ \text{،}\ \mathrm{n}\ \text{فرد است}\} \qquad (۱)$$

معرف مجموعهٔ اعداد صحیح فرد مثبت است. دو نقطه همواره خوانده می‌شود «به طوری که» و بنابراین مجموعهٔ داده شده در (۱) خوانده می‌شود «مجموعهٔ همهٔ n ها به طوری که n در N است و n فرد است» به همین ترتیب،

$$\{x: x \in \mathbf{R}\,,\ ۱ \le x < ۳\} \qquad (۲)$$

معرف مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی است که بزرگتر از ۱ یا برابر آن و کوچکتر از ۳ اند. در بخش ۴، این مجموعه به صورت $[۱\,,\,۳)$ مختصر شده است. توجه کنید که $۱ \in [۱\,,\,۳)$، اما $۳ \notin [۱\,,\,۳)$. برای تسهیل در نمادگذاری، عبارتهای (۱) و (۲) را می‌توان به صورت

$$\{\mathrm{n} \in \mathrm{N} : \mathrm{n}\ \text{فرد است}\} \quad \text{و} \quad \{x \in \mathrm{R} : ۱ \le x < ۳\}$$

نوشت. در این صورت، نخستین مجموعه چنین خوانده می‌شود: «مجموعهٔ همهٔ nها در N به

طوری که n فرد است.»

راه دیگری برای فهرست کردن یک مجموعه، مشخص کردن قاعده‌ای برای به دست آوردن عناصر آن با استفاده از مجموعه‌ای دیگر از عناصر است. مثلاً، $\{n^۲ : n \in N\}$، معرف مجموعهٔ کلیهٔ اعداد صحیح است که مربع اعداد صحیح دیگرند، یعنی،

$$\{n^۲: n \in N\} = \{m \in N : \text{برای } n \text{ ای در } N \;\; m = n^۲\}$$

$$= \{۱ , ۴ , ۹ , ۱۶ , ۲۵ , ...\} .$$

به همین نحو $\{\sin(n\pi/۴) : n \in N\}$ معرف مجموعه‌ای است که با تعیین مقدار $\sin(n\pi/۴)$ برای هر عدد صحیح مثبت n، حاصل شده است. در واقع، این مجموعه متناهی است:

$$\{\sin(n\pi/۴): n \in N\} = \{\sqrt{۲}/۲ , ۱ , ۰ , -\sqrt{۲}/۲ , -۱\} .$$

مجموعهٔ داده شده در (۱) را می‌توان به صورت $\{۲n - ۱ : n \in N\}$ نیز ارائه داد. یک مثال دیگر: $\{x^۳ : x > ۳\}$، مجموعه توانهای سوم کلیهٔ اعداد حقیقی بزرگتر ۳، که البته برابر است با $\{y \in R: y > ۲۷\}$؛ یعنی $(۲۷ , \infty)$ در نمادگذاری بخش ۵.

برای مجموعه‌های S و T، $S \backslash T$، مجموعهٔ $\{x \in S : x \notin T\}$ را مشخص می‌کند. برای دنباله‌ای مانند (A_n) از مجموعه‌ها، اتحاد $\cup A_n$ و اشتراک $\cap A_n$ به وسیلهٔ

$$\cup A_n = \{x : x \in A_n \text{ ، برای یک } n \text{ دست کم}\} ,$$

$$\cap A_n = \{x : x \in A_n \text{ ، برای هر } n\} .$$

مجموعهٔ تهی ϕ، مجموعه‌ای است که اصلاً عنصری ندارد. به عنوان مثال،

$$\{n \in N : ۲ < n < ۳\} = \phi , \{r \in Q : r^۲ = ۲\} = \phi$$

$$\{x \in R: x^۲ < ۰\} = \phi \;\; , \;\; [۰ , ۲] \cap [۵ , \infty] = \phi .$$

برای تابعهای f و g، نمادگذاری $f + g$، fg، fog، و غیره در صفحهٔ ۱۴۱ توضیح داده شده است.

پایان برهانها با علامت □ مشخص شده است. این علامت جانشین QED[1] شده است.

(۱) QED مخفف اصطلاح لاتین quod erat demonstrandum به معنی «و این همان چیزی است که باید ثابت می‌شد» یا همان «فهوالمطلوب» است که در برخیِ نوشته‌های فارسی به کار می‌رود. م.

گزیده‌ای از راهنماییها و پاسخها

تبصره: تنها پس از تلاش جدی برای حل مسائل، می‌توان به این راهنماییها و پاسخها رجوع کرد. دانشجویانی که این توصیه را نادیده بگیرند، تنها خود را گول می‌زنند.

مسائل بسیاری را می‌توان به چند طریق حل کرد. لازم نیست که پاسخ شما با پاسخ داده شده در این کتاب، مطابقت کند. اغلب ممکن است راه حل شما استادانه‌تر باشد.

۱.۱ راهنمایی: اعمال جبری زیر برای تحقیق در درستی مرحلهٔ استقرا، لازم‌اند:

$$\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}+(n+۱)^۲ = (n+۱)\left[\frac{۲n^۲+n}{۶}+n+۱\right] = \dots$$

$$= \frac{(n+۱)(n+۲)(۲n+۳)}{۶}.$$

۳.۱ راهنمایی: فرض کنید که اتحاد برای n برقرار باشد. در این صورت روی طرف راست معادله با $n+۱$ به جای n کار کنید. چون $(x+y)^۲ = x^۲+۲xy+y^۲$،

$$(۱+۲+\dots+n+(n+۱))^۲ = (۱+۲+\dots+n)^۲ + ۲(n+۱)(۱+۲+\dots+n)+(n+۱)^۲.$$

از مثال ۱ استفاده کرده نشان دهید که مجموع سطر دوم $(n+۱)^۳$ است؛ بنابراین

$$(۱+۲+\dots+(n+۱))^۲=(۱+۲+\dots+n)^۲+(n+۱)^۳ = ۱^۳+۲^۳+\dots+(n+۱)^۳.$$

۵.۱ راهنمایی: $۲-۱/۲^n+۱/۲^{n+۱} = ۲-۱/۲^{n+۱}$.

۷.۱ راهنمایی: $۷^{n+۱}-۶(n+۱)-۱ = ۷(۷^n-۶n-۱)+۳۶n$.

۹.۱. (الف) $n \geq ۵$ و نیز $n=۱$.

(ب) آشکار است که نابرابری برای $n=۵$ برقرار است. فرض کنید که برای عددی مانند n، که $n \geq ۵$، $۲^n > n^۲$. در این صورت $۲^{n+۱} = ۲ \cdot ۲^n > ۲n^۲$ و بنابراین

$2^{n+1} > (n+1)^2$ مشروط بر اینکه برای $n \geq 5$، $2n^2 \geq (n+1)^2$ یا $n^2 \geq 2n+1$. در واقع این نابرابری برای $n \geq 3$ برقرار است، که می‌توان درستی آن را با استفاده از حسابان یا مستقیماً تحقیق کرد:

$$n^2 \geq 3n = 2n + n > 2n+1 .$$

۱.۱۱ (الف) راهنمایی: اگر $n^2 + 5n + 1$ زوج باشد، در این صورت $(n+1)^2 + 5(n+1) + 1 = n^2 + 5n + 1 + [2n+6]$ نیز چنین است.

(ب) P_n برای هر n نادرست است. پند: پایهٔ استقرای (I_1) در استقرای ریاضی جنبهٔ حیاتی دارد.

۱.۲ راهنمایی: از مثال ۳ تقلید کنید. البته باید در درستی ادعاهای خود دربارهٔ موارد غیر جواب تحقیق کنید. توجه کنید که شانزده کاندیدای گویا برای حل $x^2 - 24 = 0$ موجود است.

۳.۲ راهنمایی: $(\sqrt{2}+2)^{1/2}$ نمایش جوابی برای $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ است.

۵.۲ راهنمایی: $[\sqrt{2}+3]^{2/3}$ نمایش جوابی برای $x^6 - 22x^3 + 49 = 0$ است.

۱.۳ (الف) ۳A و ۴A برای $a \in N$ برقرارند، اما ۰ و $-a$ در N نیستند. به همین نحو، ۴M برای $a \in N$ برقرار است، اما a^{-1} در N نیست مگر اینکه $a = 1$. این سه ویژگی برای N برقرار نیستند، زیرا به طور ضمنی مستلزم آن هستند که اعداد ۰، $-a$، و a^{-1} در دستگاه تحت بررسی، یعنی N در این حالت، قرار داشته باشند.

(ب) ۴M به معنای مورد بحث در (الف) برقرار نیست.

۳.۳ (iv) بند (iii)، DL، ۲A، ۴A، (ii)، و ۴A را مجدداً به کار برید تا رابطهٔ

$$\begin{aligned}(-a)(-b) + (-ab) &= (-a)(-b) + (-a)(b) = (-a)[(-b) + b]\\ &= (-a)[b + (-b)] = (-a)\,.\,0 = 0 = ab + (-ab)\end{aligned}$$

را به دست آورید.

حال، بنابر (۱) نتیجه می‌گیریم که $(-a)(-b) = ab$.

(v) فرض کنید که $ac = bc$ و $c \neq 0$. بنابر ۴M عددی مانند c^{-1} موجود است به طوری که $c\,.\,c^{-1} = 1$. حال (دلایل را اقامه کنید)

$$a = a\,.\,1 = a(c\,.\,c^{-1}) = (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} = b(c\,.\,c^{-1}) = b\,.\,1 = b\,.$$

۵.۳ (الف) اگر $|b| \leq a$، آنگاه $-a \leq -|b|$ و بنابراین $-a \leq -|b| \leq b \leq |b| \leq a$.

حال فرض کنید که $-a \leq b \leq a$. اگر $b \geq 0$، آنگاه $|b| = b \leq a$. اگر $b < 0$، آنگاه

$|b| = -b \le a$ ؛ نابرابری آخر بنابر قضیهٔ ۲.۳ (i) برقرار است زیرا $-a \le b$.

(ب) بنابر (الف)، کافی است ثابت کنیم که $-|a - b| \le |a| - |b| \le |a - b|$. هر یک از این نابرابریها از نابرابری مثلث، نتیجه می‌شود: $|b| = |(b - a) + a| \le |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$ که مستلزم اولین نابرابری است؛ $|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|$ که مستلزم دومین نابرابری است.

۷.۳ (الف) از تمرین ۵.۳ (الف) تقلید کنید.

(ب) بنابر (الف)، $|a - b| < c$ اگر و تنها اگر $-c < a - b < c$ ، و این نابرابریها آشکارا برقرارند [نگاه کنید به O۴] اگر و تنها اگر $b - c < a < b + c$.

۱.۴ اگر مجموعه از بالا کراندار باشد، هر سه عدد دلخواه ناکمتر از سوپرمم مجموعه را به کار ببرید؛ نگاه کنید به پاسخهای تمرین ۳.۴. مجموعه‌های داده شده در (ح)، (ر)، (ف) از بالا کراندار نیستند. توجه کنید که مجموعهٔ داده شده در (خ) صرفاً همان [۰ , ۱] است.

۳.۴ (الف) ۱ ؛ (پ) ۷؛ (ث) ۱ ؛ (چ) ۳؛ (خ) ۱ ؛ (ز) سوپرمم ندارد؛ (س) ۲ ؛ (ص) ۰ ؛ (ط) ۱۶ ؛ (ع) $\frac{۱}{۲}$ ؛ (ف) سوپرمم ندارد؛ (ک) $\sqrt{۳}/۲$. در (ع) توجه کنید که ۱ اول نیست.

۵.۴ برهان. چون سوپرمم S کران بالایی برای S است، برای هر s در S داریم $\sup S \ge s$. همچنین بنابر فرض $\sup S \in S$. بنابراین $\sup S$ ماکسیمم S است؛ یعنی، $\sup S = \max S$.

۷.۴ (الف) فرض کنید $S \subseteq T$. چون به ازای هر t در T ، $\sup T \ge t$ ، آشکار است که به ازای هر s در S داریم $\sup T \ge s$. لذا $\sup T$ کران بالایی برای مجموعهٔ S است. بنابراین $\sup T$ باید بزرگتر یا مساوی کوچکترین کران بالا برای S باشد؛ یعنی $\sup T \ge \sup S$.
استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $\inf T \le \inf S$ ؛ این استدلال را ارائه دهید.

(ب) چون $S \subseteq S \cup T$ ، بنابر (الف) $\sup S \le \sup(S \cup T)$. به همین نحو $\sup T \le \sup(S \cup T)$ و لذا $\max\{\sup S , \sup T\} \le \sup(S \cup T)$ ، چون $\sup(S \cup T)$ کوچکترین کران بالا برای $S \cup T$ است، در اینجا تساوی را خواهیم داشت مشروط بر اینکه نشان دهیم: $\max\{\sup S , \sup T\}$ کران بالایی برای $S \cup T$ است. این کار آسان است. اگر $x \in S$، آنگاه $x \le \sup S \le \max\{\sup S , \sup T\}$ و اگر $x \in T$ ، آنگاه $x \le \sup T \le \max\{\sup S , \sup T\}$ ؛ یعنی برای هر x در $S \cup T$ ، $x \le \max \{\sup S , \sup T\}$.

۹.۴ (۱) اگر $x \in S$، آنگاه $-s \in -S$ و بنابراین $-s \leq s_\circ$. در نتیجه بنابر قضیه ۲.۳ (i)، $-s_\circ \geq s$.
(۲) برای هر s در S، فرض کنید $t \leq s$. در این صورت برای هر s در S، $-s \geq -t$؛ یعنی، برای هر x در $-S$، $-t \geq x$. بنابراین $-t$ کران بالایی برای مجموعهٔ $-S$ است. در نتیجه $-t \geq \sup(-S)$؛ یعنی $-t \geq s_\circ$ و بنابراین $t \leq -s_\circ$.

۱۱.۴ برهان. بنابر ۷.۴ عددی گویا مانند r_1 موجود است به طوری که $a < r_1 < b$. مجدداً بنابر ۷.۴، عددی گویا مانند r_2 موجود است به طوری که $a < r_2 < r_1$. کار را به استقرا ادامه می‌دهیم. اگر عددهای گویایی مانند r_1، ...، r_n، چنان انتخاب شده باشند که $a < r_n < r_{n-1} \dots < r_2 < r_1$، آنگاه می‌توان ۷.۴ را در مورد $a < r_n$ به کاربرد و عددی گویا مانند r_{n+1} به دست آورد به طوری که $a < r_{n+1} < r_n$. از این فرایند، مجموعه‌ای نامتناهی مانند $\{r_1, r_2, \dots\}$ در $Q \cap (a, b)$ حاصل می‌شود.

برهان دیگر. فرض کنید $Q \cap (a, b)$ متناهی باشد. بنابر ۷.۴، این مجموعه ناتهی است. فرض کنید $c = \min (Q \cap (a, b))$. در این صورت $a < c$ و لذا بنابر ۷.۴، عددی گویا مانند r موجود است به طوری که $a < r < c$. در این صورت r به $Q \cap (a, b)$ تعلق دارد و لذا $c \leq r$، که یک تناقض است.

۱۳.۴ بنابر تمرین ۷.۳ (ب)، معادل بودن (i) و (ii) را داریم. معادل بودن (ii) و (iii) از تعریف بازهٔ باز، بدیهی است.

۱۵.۴ فرض کنید که برای هر n در N، $a \leq b + \frac{1}{n}$ اما $a > b$. در این صورت $a - b > 0$ و بنابر خاصیت ارشمیدسی ۶.۴، برای $n_\circ$ای در N داریم، $n_\circ(a - b) > 1$. در این صورت $a > b + \frac{1}{n_\circ}$ و این خلاف فرض است.

۱.۵ (الف) $(-\infty, 0)$؛ (ب) $(-\infty, 2]$؛ (پ) $[0, \infty)$؛ (ت) $(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$

۳.۵ راهنمایی: مجموعه‌های بیکران عبارت‌اند از (ح)، (ر)، (ز)، (ص)، (غ)، و (ف).

۵.۵ برهان. $s_\circ$ را در S انتخاب کنید. در این صورت $\inf S \leq s_\circ \leq \sup S$ خواه این نمادها معرف $\pm\infty$ باشند یا نباشند.

۱.۶ (الف) اگر $t \leq s$، در این صورت آشکار است که $s^* \subseteq t^*$. به عکس، فرض کنید که $s^* \subseteq t^*$ اما $s > t$. در این صورت $t \in s^*$ اما $t \notin t^*$، که یک تناقض است.

(ب) $s = t$ اگر و تنها اگر $s \leq t$ و $t \leq s$ اگر و تنها اگر $s^* \subseteq t^*$ و $t^* \subseteq s^*$ اگر و تنها اگر $s^* = t^*$.

(پ) فرض کنید $r_1 \in s^*$ و $r_2 \in t^*$. در این صورت $r_1 < s$، $r_2 < t$ و بنابراین $r_1 + r_2 < s + t$؛ یعنی، $r_1 + r_2 \in (s+t)^*$. بنابراین $s^* + t^* \subseteq (s+t)^*$.

حال فرض کنید $r \in (s+t)^*$ به طوری که $r < s + t$. اگر $r_1 = \frac{1}{2}(s - t + r)$ و $r_2 = \frac{1}{2}(t - s + r)$، در این صورت $r_1 < \frac{1}{2}(s - t + s + t) = s$ و $r_2 < \frac{1}{2}(t - s + s + t) = t$. بنابراین $r_1 \in s^*$ و $r_2 \in t^*$. چون $r = r_1 + r_2$، داریم $r \in s^* + t^*$. بنابراین $(s+t)^* \subseteq s^* + t^*$.

۳.۶ (الف) اگر $r \in \alpha$ و $s \in 0^*$، آنگاه $r + s < r$ و بنابراین $r + s \in \alpha$. در نتیجه $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$. به عکس، فرض کنید $r \in \alpha$. چون α دارای بزرگترین عنصری نیست، عددی گویا مانند t در α موجود است به طوری که $t > r$. در این صورت $r - t \in 0^*$ و بنابراین $r = t + (r - t) \in \alpha + 0^*$. این نتیجه نشان می‌دهد که $\alpha \subseteq \alpha + 0^*$.

(ب) $-\alpha = \{r \in \mathbf{Q}:$ به ازای عددی گویا مانند s، $s < -r$، داشته باشیم، $s \notin \alpha\}$.

۵.۶ (ب) خیر؛ این برش متناظر است با $(2)^{1/3}$.

(پ) این همان برش ددکیند متناظر با $\sqrt{2}$ است.

۱.۷ (الف) $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{7}$، $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{13}$، $\frac{1}{16}$.

(پ) $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{9}$، $\frac{1}{9}$، $\frac{4}{81}$، $\frac{5}{243}$.

۳.۷ (الف) همگرا به ۱ است؛ (پ) همگرا به ۰ است؛ (ث) همگرا نیست؛ (چ) همگرا نیست؛ (خ) همگرا به ۰ است؛ (ذ) همگرا نیست؛ (ز) همگرا به ۰ است. [این دنباله، دنبالهٔ $(0, 0, 0, \ldots)$ است]؛ (س) همگرا به ۰ است؛ (ص) همگرا به ۰ است [نگاه کنید به تمرین ۱۵.۹]؛ (ط) همگرا به $\frac{4}{3}$ است.

۵.۷ (الف) دارای حد صفر است زیرا $s_n = 1/(\sqrt{n^2 + 1} + n)$.

(پ) $\sqrt{4n^2 + n} - 2n = n/(\sqrt{4n^2 + n} + 2n)$ و این عبارت برای nهای بزرگ به $n/(2n + 2n)$ نزدیک است. بنابراین به نظر می‌رسد حد $\frac{1}{4}$ باشد؛ چنین هم هست.

۱.۸ (الف) برهان صوری. فرض کنید که $\varepsilon > 0$. گیرید $N = 1/\varepsilon$. در این صورت $n > N$ مستلزم آن است که $|(-1)^n/n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(ب) بحث. می‌خواهیم $n^{-۱/۳} < \varepsilon$ یا $۱/n < \varepsilon^۳$ یا $n > ۱/\varepsilon^۳$. بنابراین برای هر $\varepsilon > ۰$، گیرید $N = ۱/\varepsilon^۳$. برهان صوری را خودتان باید به طور کامل بنویسید.

(پ) بحث. می‌خواهیم $|(۲n - ۱)/(۳n + ۲) - ۲/۳| < \varepsilon$ یا $|-۷/(۳(۳n+۲))| < \varepsilon$ یا $۷/۳(۳n + ۲) < \varepsilon$ یا $۷/۳\varepsilon < ۳n + ۲$ یا $n > ۷/۹\varepsilon - ۲/۳$. بنابراین N را برابر $۷/۹\varepsilon - ۲/۳$ بگیرید.

(ت) بحث. می‌خواهیم $(n + ۶)/(n^۲ - ۶) < \varepsilon$؛ فرض می‌کنیم $n > ۲$ به طوری که بتوان قدر مطلقها را حذف کرد. نظیر مثال ۳، مشاهده می‌کنیم که $n + ۶ \le ۷n$ و اینکه $\frac{۱}{۲} n^۲ \le n^۲ - ۶$ مشروط بر اینکه $n > ۳$. بنابراین کافی است داشته باشیم $۷n/(\frac{۱}{۲} n^۲) < \varepsilon$ [برای $n > ۳$] یا $n > ۱۴/\varepsilon$. بنابراین $N = \max\{۳ , ۱۴/\varepsilon\}$ را امتحان کنید.

۳.۸ بحث. می‌خواهیم $\sqrt{s_n} < \varepsilon$ یا $s_n < \varepsilon^۲$. اما $s_n \to ۰$، بنابراین می‌توانیم برای nهای بزرگ، $s_n < \varepsilon^۲$ را به دست آوریم.

برهان صوری. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. چون $\varepsilon^۲ > ۰$ و $\lim s_n = ۰$، Nای وجود دارد به طوری که برای $n > N$، $|s_n - ۰| < \varepsilon^۲$. بنابراین برای $n > N$، $s_n < \varepsilon^۲$ و لذا برای $n > N$، $\sqrt{s_n} < \varepsilon$، یعنی برای $n > N$، $|\sqrt{s_n} - ۰| < \varepsilon$. نتیجه می‌گیریم $\sqrt{s_n} = ۰$.

۵.۸ (الف) فرض کنید $\varepsilon > ۰$. هدف این است که نشان دهیم برای nهای بزرگ، $s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$. چون $\lim a_n = s$، $N_۱$ای موجود است به طوری که برای $n > N_۱$، $|a_n - s| < \varepsilon$. به ویژه،

(۱) $n > N$ مستلزم آن است که $s - \varepsilon < a_n$

به همین نحو، $N_۲$ای وجود دارد به طوری که برای $n > N_۲$، $|b_n - s| < \varepsilon$ و بنابراین

(۲) $n > N_۲$ مستلزم آن است که $b_n < s + \varepsilon$.

اما

$n > \max\{N_۱ , N_۲\}$ مستلزم آن است که $s - \varepsilon < a_n \le s_n \le b_n < s + \varepsilon$ و بنابراین $|s - s_n| < \varepsilon$.

(ب) می‌توان به آسانی نشان داد که $\lim (-t_n) = ۰$ در صورتی که $\lim t_n = ۰$. حال قسمت (الف) را در مورد نابرابریهای $-t_n \le s_n \le t_n$ به کار برید.

۷.۸ (الف) فرض کنید $\lim \cos(n\pi/۳) = ۰$. در این صورت N ای موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|\cos(n\pi/۳) - a| < ۱$. اعداد $n > N$ و $n + ۳$ را که در آن n مضرب ۶ است، در نظر بگیرید؛ با قرار دادن این مقادیر در نابرابری، نتیجه می‌شود که $|a - ۱| < ۱$ و $|a - (-۱)| < ۱$. بنابر نابرابری مثلث،

$$۲ = |(۱ - a) - (-۱ - a)| \le |۱ - a| + |-۱ - a| < ۱ + ۱ = ۲$$

که یک تناقض است.

(ب) فرض کنید $\lim(-۱)^n n = a$. در این صورت N ای وجود دارد به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|(-۱)^n n - a| < ۱$. برای عددی زوج مانند $n > N$ و برای $n + ۲$، این نابرابری حاکی از آن است که $|n - a| < ۱$ و $|n + ۲ - a| < ۱$. بنابراین

$$۲ = |n + ۲ - a - (n - a)| \le |n + ۲ - a| + |n - a| < ۲,$$

که یک تناقض است.

(پ) توجه کنید که دنباله، مقادیر $\pm\sqrt{۳}/۲$ را برای مقادیر بزرگ n اختیار می‌کند. فرض کنید که $\lim \sin(n\pi/۳) = a$. در این صورت N ای موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که $|\sin(\frac{n\pi}{۳}) - a| < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

با قرار دادن مقادیر مناسب n، $n > N$، به دست می‌آوریم $|\sqrt{۳}/۲ - a| < \sqrt{۳}/۲$ و $|-\sqrt{۳}/۲ - a| < \sqrt{۳}/۲$. بنابر نابرابری مثلث

$$\sqrt{۳} = |\frac{\sqrt{۳}}{۲} - (\frac{-\sqrt{۳}}{۲})| \le |\frac{\sqrt{۳}}{۲} - a| + |a - (-\frac{\sqrt{۳}}{۲})|$$
$$< \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

که یک تناقض است.

۹.۸ (الف) راهنمایی: $N_۰$ ای در N موجود است به طوری که برای $n > N_۰$، $s_n \ge a$. فرض کنید که $s = \lim s_n$ و اینکه $s < a$. گیرید $\varepsilon = a - s$ و $N \ge N_۰$ را طوری انتخاب کنید که برای $n > N$، $|s_n - n| < \varepsilon$. نشان دهید که برای $n > N$، $s_n < a$؛ شاید کشیدن یک تصویر کمک مؤثری باشد.

۱.۹ (الف) ۱ $= ۰ + ۱ = \lim ۱ + \lim(۱/n) = \lim(۱ + ۱/n) = \lim((n + ۱)/n)$. تساوی

دوم بنابر قضیهٔ ۳.۹ موجه است و تساوی سوم از مثال اساسی ۷.۹ (الف) نتیجه می‌شود.

(ب)
$$\lim(۳n + ۷)/(۶n - ۵) = \lim(۳ + ۷/n)/(۶ - ۵/n) =$$
$$(\lim(۳ + ۷/n)/(\lim(۶ - ۵/n)) = (\lim ۳ + ۷.\lim(۱/n))/(\lim ۶ - ۵ . \lim(۱/n))$$
$$= (۳ + ۷.۰)/(۶ - ۵.۰) = \frac{۱}{۲} .$$

دومین تساوی بنابر قضیهٔ ۶.۹ موجه است، تساوی سوم از قضیه‌های ۳.۹ و ۲.۹ نتیجه می‌شود، و در چهارمین تساوی از مثال اساسی ۷.۹ (الف) استفاده می‌شود.

(۳.۹) نخست دوبار از قضیهٔ ۴.۹ استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم
$$\lim a_n^۳ = \lim a_n . \lim a_n^۲ = a . \lim a_n^۲ = a . \lim a_n . \lim a_n =$$
$$= a . a . a = a^۳ .$$

بنابر قضیه‌های ۳.۹ و ۲.۹، داریم
$$\lim(a_n^۳ + ۴a_n) = \lim a_n^۳ + ۴ . \lim a_n = a^۳ + ۴a .$$

به همین نحو،
$$\lim(b_n^۲ + ۱) = \lim b_n . \lim b_n + ۱ = b^۲ + ۱ .$$

چون $b^۲ + ۱ \neq ۰$، قضیه ۶.۹ نشان می‌دهد که
$$\lim s_n = (a^۳ + ۴a)/(b^۲ + ۱) .$$

۵.۹. راهنمایی: فرض کنید $t = \lim t_n$ و نشان دهید که $t = (t^۲ + ۲)/۲t$. سپس نشان دهید که $t = \sqrt{۲}$.

۷.۹. نشان داده شده است که برای $n \geq ۲$، $s_n < \sqrt{۲/(n - ۱)}$ و لازم است ثابت کنیم که $\lim s_n = ۰$.

بحث. فرض کنید که $ε > ۰$. می‌خواهیم $s_n < ε$، بنابراین کافی است به دست آوریم که $\sqrt{۲/(n - ۱)} < ε$ یا $۲/(n - ۱) < ε^۲$ یا $n > ۱ + ۲ε^{-۲}$.

برهان صوری. گیرید $ε > ۰$ و $N = ۲ε^{-۲} + ۱$. در این صورت $n > N$ مستلزم آن است که
$$s_n < \sqrt{۲/(n - ۱)} < \sqrt{۲/(۲ε^{-۲} + ۱ - ۱)} = ε .$$

۹.۹. (الف) گیرید $M > ۰$. چون $\lim s_n = +\infty$، $N_۰$ای موجود است به طوری که برای $N \geq N_۰$

$N < n$، $s_n > M$. در این صورت آشکار است که برای $n > N$، $t_n > M$، و برای هر n، $s_n \leq t_n$. این نتیجه نشان می‌دهد که $\lim t_n = \pm\infty$.

(پ) قسمتهای (الف) و (ب) پاسخگوی حدهای نامتناهی‌اند، بنابراین فرض کنید که (s_n) و (t_n) همگرا هستند. چون برای هر $n > N_0$، $t_n - s_n \geq 0$، بنابراین ۹.۸ (الف)، $\lim(t_n - s_n) \geq 0$. در نتیجه بنابر قضیه‌های ۳.۹ و ۲.۹، $\lim t_n - \lim s_n \geq 0$.

۱۱.۹. (الف) بحث. گیرید $M > 0$ و $m = \inf\{t_n : n \in N\}$. می‌خواهیم برای nهای بزرگ داشته باشیم $s_n + t_n > M$، اما کافی است برای nهای بزرگ به دست آوریم $s_n + m > M$ یا $s_n > M - m$. بنابراین N را طوری انتخاب کنید که برای $n > N$ داشته باشید $s_n > M - m$.

(ب) اگر $\lim t_n > -\infty$، آنگاه $\inf\{t_n : n \in N\} > -\infty$. قسمت (الف) را به کار ببرید.

۱۳.۹. اگر $|a| < 1$، در این صورت بنابر مثال اساسی ۷.۹ (ب)، $\lim a^n = 0$. اگر $a = 1$، آنگاه بدیهی است که $\lim a^n = 1$.

فرض کنید $a > 1$. در این صورت $1/a < 1$ و بنابراین مانند قبل $\lim (1/a)^n = 0$. در نتیجه $\lim 1/a^n = 0$. حال، قضیه ۱۰.۹ [با $s^n = a^n$] نشان می‌دهد که $\lim a^n = +\infty$. [می‌توان با به کاربردن تمرین ۱۲.۹ نیز از عهدهٔ این حالت برآمد].

فرض کنید $a \leq -1$ و فرض کنید که $\lim a^n$ موجود باشد. برای n زوج، $a^n \geq 1$ و برای n فرد، $a^n \leq -1$. آشکار است که $\lim a^n = +\infty$ و $\lim a^n = -\infty$ غیر ممکن است. فرض کنید که برای عددی حقیقی مانند A، $\lim a^n = A$. عددی مانند N موجود است به طوری که برای $n > N$، $|a^n - A| < 1$. برای n زوج، این نتیجه مستلزم آن است که $A > 0$ و برای n فرد، این نتیجه مستلزم آن است که $A < 0$، که یک تناقض است.

۱۵.۹ تمرین ۱۲.۹ را، با $s_n = a^n/n!$، به کار ببرید. در این صورت، $\lim(s_{n+1}/s_n) = \lim a/(n+1) = 0 < 1$ و بنابراین، $\lim s_n = 0$.

۱۷.۹ بحث. فرض کنید $M>0$؛ می‌خواهیم $n^2 > M$ یا $n > \sqrt{M}$. بنابراین قرار دهید $N = \sqrt{M}$.

۱.۱۰ نانزولی: (پ)؛ ناصعودی: (الف)، (ج)؛ کراندار: (الف)، (ب)، (پ)، (ج).

۳.۱۰ تساوی ذکر شده در راهنمایی را می‌توان به کمک استقرا تحقیق کرد؛ با تمرین ۵.۱ مقایسه کنید. حال، بنابر (۱) در بحث ۳.۱۰ داریم

$$s_n = k + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n} \leq k + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n} < k + 1 .$$

۷.۱۰ فرض کنید $s_\circ = \sup S$. چون $s_\circ - ۱$ کران بالایی برای S نیست، $s_۱ \in S$ ای موجود است به طوری که $s_\circ - ۱ < s_۱$. چون $s_\circ \notin S$، داریم $s_\circ - ۱ < s_۱ < s_\circ$. حال، $\max\{s_\circ - \frac{۱}{۲}, s_۱\}$ کران بالایی برای S نیست، بنابراین $s_۲ \in S$ ای موجود است به طوری که $s_۲ > \max\{s_\circ - \frac{۱}{۲}, s_۱\}$. در این صورت داریم $s_۱ < s_۲$ و $s_\circ - \frac{۱}{۲} < s_۲ < s_\circ$. با استقرا پیش می‌رویم. فرض کنید $s_۱$ ، $s_۲$ ، ... ، s_n در S به گونه‌ای انتخاب شده باشند که $s_۱ < s_۲ < \dots < s_n$ و $s_\circ - ۱/n < s_n < s_\circ$. در این صورت $\max\{s_\circ - ۱/(n+۱), s_n\}$ کران بالایی برای S نیست و بنابراین $s_{n+۱} \in S$ ای موجود است به طوری که $s_{n+۱} > \max\{s_\circ - ۱/(n+۱), s_n\}$. در این صورت $s_۱ < s_۲ < \dots < s_{n+۱}$ و $s_\circ - ۱/(n+۱) < s_{n+۱} < s_\circ$ و بنابراین این ساختمان ادامه پیدا می‌کند. روشن است که دنباله‌ای نانزولی در S ساخته‌ایم و به علاوه داریم $\lim s_n = s_\circ$. زیرا برای هر n، $s_\circ - \frac{۱}{n} < s_n < s_\circ$. [ساختمانهایی مشابه در بخش بعدی مطرح می‌شوند.]

۹.۱۰ (الف) $s_۲ = \frac{۱}{۲}$، $s_۳ = \frac{۱}{۶}$، $s_۴ = \frac{۱}{۴۸}$.

(ب) ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر $n \geq ۱$،

$$\circ < s_{n+۱} < s_n \leq ۱ \qquad (۱)$$

این حکم از قسمت (الف) برای $n = ۱ , ۲ , ۳$ بدیهی است. فرض کنید که (۱) برای هر n برقرار باشد. در این صورت $s_{n+۱} < ۱$ و بنابراین

$$s_{n+۲} = \frac{n+۱}{n+۲} s_{n+۱}^۲ = \left(\frac{n+۱}{n+۲} s_{n+۱}\right) s_{n+۱} < s_{n+۱}$$

زیرا $[(n+۱)/(n+۲)]\, s_{n+۱} < ۱$. چون $s_{n+۱} > \circ$، همچنین داریم $s_{n+۲} > \circ$. بنابراین $۱ \geq s_{n+۱} > s_{n+۲} > \circ$ و (۱) به استقرا برقرار است.

حکم (۱) نشان می‌دهد که (s_n) یک دنبالهٔ یکنوای کراندار است. و بنابراین طبق قضیهٔ ۲.۱۰، (s_n) همگراست.

(پ) فرض کنید $s = \lim s_n$. با استفاده از قضیه‌های حدی به دست می‌آوریم $s = \lim s_{n+۱} = \lim n/(n+۱)\,.\, \lim s_n^۲ = s^۲$. در نتیجه $s = ۱$ یا $s = \circ$. اما $s = ۱$ غیر ممکن است، زیرا برای $n \geq ۲$، $s_n \leq \frac{۱}{۲}$. پس $s = \circ$.

۱۱.۱۰. (الف) نشان دهید (t_n) یک دنبالهٔ یکنوای کراندار است.

(ب) پاسخ بدیهی نیست! نتیجه این می‌شود که $\lim t_n$ یک حاصل ضرب والیس است و مقدار آن $\pi/۲$ است که حدود ۶۳۶۶ر۰ است. توجه کنید که قسمت (الف) چقدر آسانتر از (ب) است.

۱.۱۱ (الف) ۱، ۵، ۱، ۵، ۱، ۵، ۱، ۵

(ب) فرض کنید $\sigma(k) = n_k = ۲k$. در این صورت (a_{n_k}) دنباله‌ای است که تنها مقدار ۵ را اختیار می‌کند. [انتخابهای ممکن متعدد دیگری برای σ وجود دارد.]

۳.۱۱ (الف) برای (s_n)، مجموعهٔ S حدهای زیر دنباله‌ای عبارت است از $\{۱ , -\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲} , -۱\}$. برای (t_n) , $S = \{۰\}$. برای (u_n)، $S = \{۰\}$. برای (v_n)، $S = \{-۱ , ۱\}$.

(پ) $\lim\sup s_n = ۱$، $\lim\inf s_n = -۱$، $\lim\sup t_n = \lim\inf t_n = \lim t_n = ۰$، $\lim\sup u_n = \lim\inf u_n = \lim u_n = ۰$، $\lim\sup v_n = ۱$، $\lim\inf v_n = -۱$.

(ت) (t_n) و (u_n) همگرا هستند.

(ث) (s_n)، (t_n)، (u_n)، و (v_n) همه کراندارند.

۵.۱۱ (الف) $[۰ , ۱]$؛ (ب) $\lim\sup q_n = ۱$، $\lim\inf q_n = ۰$.

۷.۱۱ راهنمایی: از یک ساختمان استقرایی استفاده کرده نشان دهید که زیر دنباله‌ای مانند (r_{n_k}) موجود است که برای $k \in N$ در $r_{n_k} > k$ صدق می‌کند؛ مقایسه کنید با مثال ۳.

۹.۱۱ (الف) برای اینکه نشان دهیم $[a , b]$ بسته است، لازم است حدی مانند s از یک دنبالهٔ همگرای (s_n) از $[a , b]$ را در نظر گیریم و نشان دهیم که s نیز در $[a , b]$ است. اما این کار در تمرین ۹.۸ انجام شده است.

(ب) نه! $(۰ , ۱)$ بسته نیست، یعنی $(۰ , ۱)$ خاصیت توصیف شده در قضیهٔ ۸.۱۱ را ندارد. به عنوان مثال $t_n = ۱/n$ دنباله‌ای در $(۰ , ۱)$ تعریف می‌کند به طوری که $t = \lim t_n$ به $(۰ , ۱)$ تعلق ندارد.

۱.۱۲ فرض کنید $u_N = \inf\{s_n : n > N\}$ و $w_N = \inf\{t_n : n > N\}$. در این صورت (u_N) و (w_N) دنباله‌هایی نانزولی هستند و برای هر $N_۰$، $n > N_۰$، $u_N \le w_N$. بنابر تمرین ۹.۹ (پ)، $\lim\inf s_n = \lim u_N \le \lim w_N = \lim\inf t_n$. نابرابری $\lim\sup s_n \le \lim\sup t_n$ را می‌توان به نحو مشابه ثابت کرد یا می‌توان تمرین ۸.۱۱ (الف) را به کار برد.

۳.۱۲ (الف) ۰؛ (ب) ۲؛ (ت) ۳؛ (ث) ۴؛ (ج) ۰؛ (چ) ۲.

۵.۱۲ بنابر تمرین ۴.۱۲ ، $\limsup(-s_n - t_n) \le \limsup(-s_n) + \limsup(-t_n)$ و بنابراین $-\limsup(-(s_n + t_n)) \ge -\limsup(-s_n) + [-\limsup(-t_n)]$. حال تمرین ۸.۱۱ (الف) را به کار ببرید.

۷.۱۲ فرض کنید (s_{n_j}) زیر دنباله‌ای از (s_n) باشد به طوری که $\lim_{j\to\infty} s_{n_j} = +\infty$. [ما از j به جای k استفاده کرده‌ایم تا از مشتبه شدن آن با $k > 0$ مفروض جلوگیری کنیم.] در این صورت، بنابر تمرین ۱۰.۹ (الف)، $\lim_{j\to\infty} ks_{n_j} = +\infty$. چون $(k\, s_{n_j})$ زیر دنباله‌ای از $(k\, s_n)$ است، نتیجه می‌گیریم که $\limsup(k_{s_n}) = +\infty$.

۹.۱۲ (الف) چون $\liminf t_n > 0$ ، N_1 ای موجود است به طوری که $m = \inf\{t_n: n>N_1\}>0$. حال $M > 0$ را در نظر بگیرید. چون $\lim s_n = +\infty$ ، N_2 ای موجود است به طوری که برای $n > N_2$ ، $s_n > M/m$. در این صورت $n > \max\{N_1,N_2\}$ مستلزم آن است که $s_nt_n > (M/m)\, t_n \ge (M/m)m = M$. بنابراین $\lim s_n t_n = +\infty$.

۱۱.۱۲ بخشی از برهان. فرض کنید $M = \liminf |s_{n+1}/s_n|$ و $\beta = \liminf |s_n|^{1/n}$. برای اینکه نشان دهیم $M \le \beta$ ، کافی است ثابت کنیم که برای هر $M_1 < M$ ، $M_1 \le \beta$. چون

$$\liminf \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{N\to\infty} \inf \left\{\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| : n > N\right\} > M_1,$$

N ای موجود است به طوری که

$$\inf \left\{\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| : n > N\right\} > M_1 .$$

اینک از برهان قضیه ۲.۱۲ تقلید کنید، اما توجه کنید که جهت بسیاری از نابرابریها عکس خواهد شد.

۱۳.۱۲ **برهان** تساوی $\sup A = \liminf s_n$. عدد N را در $\mathbf{N}$ در نظر بگیرید و ملاحظه کنید که $u_N = \inf\{s_n : n>N\}$ عددی در A است، زیرا $\{n \in \mathbf{N} : s_n < u_N\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$. لذا برای هر N ، $u_N \le \sup A$ و در نتیجه $\liminf s_n = \lim u_N \le \sup A$.

اینک فرض کنید $a \in A$. فرض کنید $N_0 = \max\{n \in \mathbf{N} : s_n < a\} < \infty$. در این صورت برای $n > N_0$ ، $s_n \ge a$. بنابراین برای $N \ge N_0$ داریم، $u_N=\inf\{s_n : n>N\} \ge a$. نتیجه می‌شود که $\liminf s_n = \lim u_N \ge a$. به این ترتیب نشان داده‌ایم که $\liminf s_n$ کران بالایی برای مجموعهٔ A است. در نتیجه $\liminf s_n \ge \sup A$.

۱.۱۳ (الف) روشن است که d_1 و d_2 در D۱ و D ۲ ی تعریف ۱.۱۳ صدق می‌کنند. اگر

$x, y, z \in R^k$، آنگاه برای هر j، $k, \ldots, ۲, ۱ = j$، داریم

$$|x_j - z_j| \le |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \le d_۱(x, y) + d_۱(y, z)$$

و لذا $d_۱(x, z) \le d_۱(x, y) + d_۱(y, z)$. بنابراین $d_۱$ در نابرابری مثلث صدق می‌کند و استدلال مشابهی برای $d_۲$ صادق است؛ برهان آن را ارائه کنید. (ب) برای کامل بودن $d_۱$ از قضیهٔ ۴.۱۳ و نابرابریهای

$$d_۱(x, y) \le d(x, y) \le \sqrt{k} d_۱(x, y)$$

استفاده می‌کنیم. در واقع، اگر (x_n) نسبت به $d_۱$ یک دنبالهٔ کوشی باشد، آنگاه نابرابری دوم نشان می‌دهد که (x_n) نسبت به d یک دنبالهٔ کوشی است. بنابراین طبق قضیهٔ ۴.۱۳، برای $x \in R^k$ای داریم $\lim d(x_n, x) = ۰$. بنابر نابرابری اول، همچنین داریم $\lim d_۱(x_n, x) = ۰$، یعنی، (x_n) در متریک $d_۱$ به x همگراست. برای $d_۲$، از کامل بودن $d_۱$ و نابرابریهای

$$d_۱(x, y) \le d_۲(x, y) \le k d_۱(x, y)$$

استفاده می‌کنیم.

۳.۱۳ (ب) خیر، زیرا لزومی ندارد که $d^*(x, y)$ متناهی باشد. به عنوان مثال، دو عنصر $x = (۱, ۱, ۱, \ldots)$ و $y = (۰, ۰, ۰, \ldots)$ را در نظر بگیرید.

۷.۱۳ **خلاصهٔ برهان.** مجموعه‌ای باز مانند $U \subseteq R$ را در نظر بگیرید. فرض کنید (q_n) شمارشی از اعداد گویا در U باشد. برای هر n، فرض کنید

$$a_n = \inf\{a \in R : (a, q_n) \subseteq U\}, \quad b_n = \sup\{b \in R : [q_n, b) \subseteq U\}.$$

نشان دهید که برای هر n، $(a_n, b_n) \subseteq U$ و $U = \bigcup_{n=۱}^{\infty} (a_n, b_n)$. نشان دهید که

$$(a_n, b_n) \cap (a_m, b_m) \ne \phi$$

مستلزم آن است که

$$(a_n, b_n) = (a_m, b_m).$$

حال، یا تنها تعدادی متناهی از بازه‌های مجزا [و متمایز] وجود دارد یا در غیر این صورت زیر دنباله‌ای مانند $\{(a_{n_k}, b_{n_k})\}_{k=۱}^{\infty}$ از $\{(a_n, b_n)\}$ متشکل از بازه‌های مجزایی خواهد بود که برای آن $U = \bigcup_{k=۱}^{\infty} (a_{n_k}, b_{n_k})$.

۹.۱۳ (الف) $\{۰\} \cup \{۱/n : n \in \mathbf{N}\}$؛ (ب) $\mathbf{R}$؛ (پ) $[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$.

۱۱.۱۳ فرض کنید که E فشرده، و بنابراین طبق قضیهٔ ۱۲.۱۳، بسته و کراندار باشد. دنباله‌ای مانند $(\mathbf{x}_n)$ در E در نظر بگیرید. بنابر قضیهٔ ۵.۱۳، زیر دنباله‌ای مانند $(\mathbf{x}_n)$ به عضوی مانند $\mathbf{x}$ از R^k همگراست. چون E بسته است، $\mathbf{x}$ باید در E باشد؛ نگاه کنید به قضیه ۹.۱۳ (ب).

فرض کنید هر زیر دنباله در E زیر دنباله‌ای دارد که به نقطه‌ای در E همگراست. بنابر قضیهٔ ۱۲.۱۳، کافی است نشان دهیم که E بسته و کراندار است. اگر E کراندار نبود، E شامل دنباله‌ای مانند $(\mathbf{x}_n)$ می‌بود که در آن $\lim d(\mathbf{x}_n , ۰) = +\infty$ و در این صورت هیچ زیر دنباله‌ای همگرا نمی‌شد. بنابراین E کراندار است. اگر E نابسته می‌بود، در این صورت بنابر قضیهٔ ۹.۱۳ دنباله‌ای همگرا مانند $(\mathbf{x}_n)$ در E وجود می‌داشت به طوری که $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_n \notin E$. چون هر زیر دنباله‌ای نیز به $\mathbf{x}$، $\mathbf{x} \notin E$، همگراست، به یک تناقض می‌رسیم.

۳.۱۳ فرض کنید، به عنوان مثال، که $\sup E \notin E$. مجموعهٔ E کراندار است و لذا بنابر تمرین ۷.۱۰، دنباله‌ای مانند (s_n) در E موجود است به طوری که $\lim s_n = \sup E$. حال، قضیهٔ ۹.۱۳ (ب) نشان می‌دهد که $\sup E \in E$، که یک تناقض است.

۱۵.۱۳ (الف) F کراندار است زیرا برای هر $\mathbf{x}$ در F، $d(\mathbf{x} , ۰) \le ۱$ که در آن $۰ = (۰ , ۰ , ۰ , \ldots)$. برای اینکه نشان دهیم F بسته است، دنباله‌ای همگرا مانند $(\mathbf{x}^{(n)})$ در F در نظر بگیرید. باید نشان دهیم که $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}^{(n)}$ در F است. برای هر j، $j = ۱ , ۲ \ldots$، به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که $\lim_{n\to\infty} x_j^{(n)} = x_j$. چون هر $x_j^{(n)}$ به $[-۱ , ۱]$ تعلق دارد، x_j بنابر تمرین ۹.۸ به $[-۱ , ۱]$ تعلق دارد. نتیجه می‌شود که $\mathbf{x} \in F$.

(ب) برای اثبات آخرین حکم راهنمایی، ملاحظه کنید که $\mathbf{x}^{(n)} , \mathbf{x}^{(m)} \in U(\mathbf{x})$ مستلزم آن است که $d(\mathbf{x}^{(n)} , \mathbf{x}^{(m)}) \le d(\mathbf{x}^{(n)} , \mathbf{x}) + d(\mathbf{x} , \mathbf{x}^{(m)}) < ۲$ در حالی که برای $m \neq n$، $d(\mathbf{x}^{(n)} , \mathbf{x}^{(m)}) = ۲$. حال نشان دهید که هیچ زیر خانوادهٔ متناهی $\mathscr{U}$ نمی‌تواند $\{\mathbf{x}^{(n)} : n \in \mathbf{N}\}$ را بپوشاند.

۱.۱۴ (الف) - (پ) همگرا؛ از آزمون نسبت استفاده کنید.

(ت) واگراست؛ از آزمون نسبت استفاده کنید یا نشان دهید که جملهٔ nام به ۰ همگرا نیست [نگاه کنید به نتیجهٔ ۵.۱۴].

(ث) با $\sum 1/n^2$ مقایسه کنید.

(ج) با $\sum 1/n$ مقایسه کنید.

۳.۱۴ همه بجز (ث) همگرا هستند.

۵.۱۴ (الف) فرض می‌کنیم که سری با $n = 1$ شروع می‌شود. فرض کنید $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ و $t_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$. می‌دانیم که $\lim s_n = A$ و $\lim t_n = B$. بنابراین طبق قضیهٔ ۳.۹، $\lim(s_n + t_n) = A + B$. روشن است که $s_n + t_n = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)$ مجموع جزئی nام برای $\sum(a_n + b_n)$ است و لذا $\sum(a_n + b_n) = \lim(s_n + t_n) = A + B$.

(پ) این حدس حتی برای سریهای متشکل از دو جمله نیز معقول نیست:

$$a_1b_1 + a_2b_2 \neq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) .$$

۷.۱۴ بنابر نتیجهٔ ۵.۱۴، N ای موجود است به طوری که برای $n > N$، $a_n < 1$. چون $p > 1$، برای $n > N$، $a_n^p = a_n a_n^{p-1} < a_n$. بنابراین $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^p$ بنابر آزمون مقایسه همگراست و لذا $\sum a_n^p$ نیز همگراست.

۹.۱۴ راهنمایی فرض کنید که $N_0 = \max\{n \in \mathbf{N} : a_n \neq b_n\} < \infty$. اگر $n \geq m > N_0$، آنگاه $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} = mb_k$.

۱۱.۱۴ فرض کنید که برای $n \geq 1$، $a_{n+1}/a_n = r$. در این صورت $a_2 = ra_1$، $a_3 = ra_2 = r^2a_1$، و غیره. یک استدلال استقرائی ساده نشان می‌دهد که برای $n \geq 1$، $a_n = r^{n-1}a_1$. بنابراین $\sum a_n = \sum a_1 r^{n-1}$ یک سری هندسی است.

۱۳.۱۴ (الف) ۲ و $-\frac{2}{5}$.

(ب) توجه کنید که

$$s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

زیرا کسرهای میانی یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین $\lim s_n = 1$.

(ث) ۲ .

۱.۱۵ (الف) بنابر قضیه سری متناوب همگراست.

(ب) واگراست؛ توجه کنید که بنابر تمرین ۱۲.۹ (ب) ، $\lim(n!/2^n) = +\infty$.

۳.۱۵ راهنمایی: از آزمونهای انتگرال استفاده کنید. توجه کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\log 2}^{\log n} \frac{1}{u^p}\,du .$$

۵.۱۵ کوچکترین $p_0 > 1$ ای موجود نیست و بنابراین سری واحدی مانند $\sum 1/n^{p_0}$ موجود نیست که بتوان کلیهٔ سریهای $\sum 1/n^p$ $[p > 1]$ را با آن مقایسه کرد.

۷.۱۵ (الف) **برهان.** فرض کنید $\varepsilon > 0$. بنابر معیار کوشی، N ای موجود است به طوری که $n \geq m > N$ مستلزم آن است که $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

به ویژه

$n > N$ مستلزم آن است که $a_{N+1} + \dots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

بنابراین، $n > N$ مستلزم آن است که

$$(n - N)\, a_n \leq a_{N+1} + \dots + a_n < \frac{\varepsilon}{2} .$$

اگر $n > 2N$ ، آنگاه $n < 2(n - N)$ و بنابراین ، $na_n < 2(n - N)\, a_n < \varepsilon$. این امر ثابت می‌کند که $\lim(na_n) = 0$.

۱.۱۶ (الف) به عبارت دیگر، نشان دهید که

$$2 + 7\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2} + \sum_{j=3}^{\infty} 9\cdot10^{-j} = 2 + 7\cdot10^{-1} + 5\cdot10^{-2} = \frac{11}{4} .$$

این سری، یک سری هندسی است؛ نگاه کنید به مثال ۱ بخش ۱۴.

(ب) $2{,}75\overline{0}$.

۳.۱۶ فرض کنید که A و B معرف مجموع سریها باشند. بنابر تمرین ۵.۱۴ ، داریم $B - A = \sum(b_n - a_n)$. چون برای هر n ، $b_n - a_n \geq 0$ ، و برای n ای، $b_n - a_n > 0$ ، روشن است که داریم $B - A > 0$.

۵.۱۶ (الف) $0{,}125\overline{0}$ و $0{,}124\overline{9}$ ؛ (پ) $0{,}\overline{6}$ ؛ (ث) $0{,}\overline{54}$.

۷.۱۶ خیر.

۹.۱۶ (الف) $\gamma_n - \gamma_{n+1} = \int_n^{n+1} t^{-1}\,dt - 1/(n+1) > 0$ زیرا برای هر t در $[n, n+1)$, $1/(n+1) < t^{-1}$.

(ث) برای هر n ، $\gamma_n \leq \gamma_1 = 1$. همچنین

$$\gamma_n > \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} t^{-1}\, dt\right) > 0 .$$

(پ) قضیهٔ ۲.۱۰ را به کار ببرید.

۱.۱۷ (الف) $\mathrm{dom}(f+g) = \mathrm{dom}(fg) = (-\infty, 4]$،

$\mathrm{dom}(f\circ g) = [-2, 2]$ ، $\mathrm{dom}(g\circ f) = (-\infty, 4]$.

(ب) $f\circ g(0) = 2$ ، $g\circ f(0) = 4$ ، $f\circ g(1) = \sqrt{3}$ ، $f\circ g(2) = 0$ ، $g\circ f(2) = 2$.

(پ) خیر!

(ت) $f\circ g(3)$ نیست، اما $g\circ f(3)$ هست.

۳.۱۷ (الف) می‌دانیم که $f(x) = \cos x$ و $g(x) = x^4$ $[p = 4]$ پیوسته‌اند. لذا بنابر قضیهٔ ۵.۱۷، $g\circ f$، یعنی $g\circ f(x) = \cos^4 x$ پیوسته است. بدیهی است که تابع متحداً برابر با ۱ پیوسته است [اگر این امر برای شما بدیهی نیست، آن را بررسی کنید]. بنابراین $1 + \cos^4 x$ طبق قضیهٔ ۴.۱۷ (i) پیوسته است. سرانجام $\log_e(1 + \cos^4 x)$ بنابر قضیهٔ ۵.۱۷ پیوسته است زیرا این تابع همان $h\circ k(x)$ است که در آن $k(x) = 1 + \cos^4 x$ و $h(x) = \log_e x$.

(ب) چون می‌دانیم که $\sin x$ و x^2 پیوسته‌اند، قضیهٔ ۵.۱۷ نشان می‌دهد که $\sin^2 x$ پیوسته است. به همین نحو، $\cos^6 x$ پیوسته است. بنابراین طبق قضیهٔ ۴.۱۷ (i)، $\sin^2 x + \cos^6 x$ پیوسته است. چون برای هر x، $\sin^2 x + \cos^6 x > 0$ و چون x^π نیز برای $x > 0$ پیوسته فرض شده است، مجدداً از قضیهٔ ۵.۱۷ استفاده می‌کنیم تا نتیجه بگیریم که $[\sin^2 x + \cos^6 x]^\pi$ پیوسته است.

(ث) می‌دانیم که $\sin x$ و $\cos x$ در هر نقطهٔ $x \in \mathbb{R}$ پیوسته‌اند. بنابراین قضیهٔ ۴.۱۷ (iii) نشان می‌دهد که $\sin x/\cos x = \tan x$ هر جا که $\cos x \neq 0$، یعنی برای x غیر از مضارب فرد $\pi/2$، پیوسته است.

۵.۱۷ (الف) تذکرات. می‌توان یک برهان $\varepsilon - \delta$ را براساس اتحاد

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \dots + xy^{m-2} + y^{m-1})$$

ارائه داد. یا می‌توان نتیجه را به استقرای روی n، به صورت زیر، ثابت کرد.

می‌توان به آسانی ثابت کرد که $g(x) = x$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته است. اگر $f(x) = x^m$ بر $\mathbf{R}$ پیوسته باشد، در این صورت، بنابر قضیه‌های ۴.۱۷ (i) و ۳.۱۷، $(fg)(x) = x^{m+1}$ نیز پیوسته است.

(ب) صرفاً (الف) و قضیه‌های ۴.۱۷ و ۳.۱۷ را به کار ببرید.

۹.۱۷ (الف) بحث. فرض کنید $\varepsilon > 0$. می‌خواهیم که برای $|x - 2|$ ی کوچک، $|x^2 - 4| < \varepsilon$؛ یعنی، می‌خواهیم برای $|x-2|$ ی کوچک، $|x-2|.|x+2| < \varepsilon$. اگر $|x - 2| < 1$، آنگاه $|x + 2| < 5$، بنابراین کافی است که داشته باشم $|x - 2| < \varepsilon / 5$. قرار دهید $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$.

(پ) برای $\varepsilon > 0$، قرار دهید $\delta = \varepsilon$ و ملاحظه کنید که $|x - 0| < \delta$ مستلزم آن است که $|x\sin(\frac{1}{x}) - 0| < \varepsilon$.

۱۱.۱۷ اگر f در x_0 پیوسته باشد و اگر (x_n) دنباله‌ای یکنوا در dom(f) باشد که به x_0 میل می‌کند، آنگاه بنابر تعریف ۱.۱۷ داریم $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

اینک فرض می‌کنیم که

$$\text{اگر } (x_n) \text{ در } \mathrm{dom}(f) \text{ یکنوا باشد و } \lim x_n = x_0\text{،}$$

$$\text{آنگاه } \lim f(x_n) = f(x_0)\text{،} \qquad (1)$$

اما f در x_0 ناپیوسته است. در این صورت بنابر تعریف ۱.۱۷، دنباله‌ای مانند (x_n) در dom(f) موجود است به طوری که $\lim x_n = x_0$، اما $(f(x_n))$ به $f(x_0)$ همگرانیست.

با نقیض کردن تعریف ۱.۷، ملاحظه می‌کنیم که $\varepsilon > 0$ای موجود است به طوری که

(۲) برای هر N، $n > N$ ای موجود است که در $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ صدق می‌کند.

می‌توان به آسانی از (۲) استفاده کرده زیر دنباله‌ای مانند (x_{n_k}) از (x_n) به دست آورد به طوری که برای هر k،

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| \geq \varepsilon . \qquad (3)$$

حال، قضیهٔ ۳.۱۱ نشان می‌دهد که (x_{n_k}) زیر دنباله‌ای یکنوا مانند $(x_{n_{k_j}})$ دارد. بنابر (۱)، داریم $\lim_{j\to\infty} f(x_{n_{k_j}}) = f(x_0)$، اما بنابر (۳) برای هر j داریم $|f(x_{n_{k_j}}) - f(x_0)| \geq \varepsilon$، که یک تناقض است.

۱۳.۱۷ (الف) راهنمایی: فرض کنید $x \in R$. دنباله‌ای مانند (x_n) را انتخاب کنید به طوری که $\lim x_n = x$، x_n برای nهای زوج گویا، و x_n برای nهای فرد، گنگ باشد. در این صورت $f(x_n)$ برای nهای زوج برابر ۱ و برای nهای فرد ۰ است و بنابراین $f(x_n)$ نمی‌تواند همگرا باشد.

۱۵.۱۷ به طور خلاصه بیان می‌کنیم که

(i) f در $x_\circ$ پیوسته است.

(ii) برای هر دنبالهٔ (x_n) در $\mathrm{dom}(f)\backslash\{x_\circ\}$ که به $x_\circ$ همگراست، $\lim f(x_n) = f(x_\circ)$.

از تعریف ۱.۱۷ آشکار است که (i) مستلزم (ii) است. فرض کنید (ii) برقرار باشد ولی (i) برقرار نباشد. همان طور که در حل تمرین ۱۱.۱۷ دیدیم، دنباله‌ای مانند (x_n) در $\mathrm{dom}(f)$ و $\varepsilon>\circ$ای موجودند به طوری که $\lim x_n = x_\circ$ و برای هر n، $|f(x_n) - f(x_\circ)| \geq \varepsilon$. بدیهی است که برای هر n، $x_n \neq x_\circ$، یعنی x_n در $\mathrm{dom}(f)\backslash\{x_\circ\}$ است. وجود این دنباله، (ii) را نقض می‌کند.

۳.۱۸. این تمرین عمداً به صورت نامناسبی بیان شد که گویا f باید حتماً ماکسیمم و مینیممی در $[\circ\ ,\ ۵)$ داشته باشد؛ نگاه کنید به تذکرات بعد از قضیهٔ ۱.۱۸. مینیمم f بر $[\circ\ ,\ ۵)$ برابر است با $f(۳)=f(\circ)=۱$، اما f بر $[\circ\ ,\ ۵)$ ماکسیمم ندارد، گرچه $۲۱=\sup\ \{f(x) : x \in [\circ,۵)\}$.

۵.۱۸. (الف) فرض کنید $h = f - g$ در این صورت h پیوسته است [چرا؟] و $h(b) \leq \circ \leq h(a)$.
حال قضیهٔ ۲.۱۸ را به کار برید.

(ب) از تابع gی تعریف شده با $g(x) = x$ برای هر x در $[\circ\ ,\ ۱]$ استفاده کنید.

۷.۱۸ راهنمایی: فرض کنید $f(x) = x۲^x$؛ f پیوسته است، $f(\circ) = \circ$ و $f(۱) = ۲$.

۹.۱۸ فرض کنید $f(x) = a_\circ + a_۱x + \dots + a_nx^n$ که در آن $a_n \neq \circ$ و n فرد است.

می‌توانیم فرض کنیم که $a_n = ۱$؛ در غیر این صورت با $(۱/a_n) f$ کار می‌کنیم. چون f پیوسته است، قضیهٔ ۲.۱۸ نشان می‌دهد که کافی است نشان دهیم که برای xای $f(x) < \circ$ و برای x دیگری $f(x) > \circ$. این مطلب درست است. زیرا $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x) = -\infty$ [به خاطر داشته باشید که $a_n = ۱$]، اما می‌توانیم از این مفاهیم حدی به صورت زیر دوری گزینیم. ملاحظه کنید که

$$f(x) = x^n \left[۱ + \frac{a_\circ + a_۱x + \dots + a_{n-۱}x^{n-۱}}{x^{n-۱}}\right]. \qquad (۱)$$

فرض کنید $c = ۱ + |a_\circ| + |a_۱| + \dots + |a_{n-۱}|$. اگر $|x| > c$، آنگاه

$$|a_\circ + a_۱x + \dots + a_{n-۱}\, x^{n-۱}| \leq (|a_\circ| + |a_۱| + \dots + |a_{n-۱}|)\ |x|^{n-۱}$$
$$< |x|^n ,$$

لذا عدد داخل کروشه در (۱)، مثبت است. حال اگر $x > c$، آنگاه $x^n > \circ$ و بنابراین $f(x) > \circ$. اگر $x < -c$، آنگاه $x^n < \circ$ [چرا؟] و لذا $f(x) < \circ$.

۱.۱۹ راهنماییها: برای پاسخ به (الف) و (ب)، از قضیهٔ ۲.۱۹ استفاده کنید. قسمتهای (پ)، (ث)،

(ج)، و (ح) را می‌توان با استفاده از قضیهٔ ۵.۱۹ حل کرد. می‌توان از قضیهٔ ۴.۱۹ نیز برای پاسخ به (ث) و (ج) استفاده کرد؛ مقایسه کنید با مثال ۶. برای پاسخ به (ت) باید به تعریف متوسل شد.

۳.۱۹ (الف) بحث. فرض کنید $\varepsilon > 0$. می‌خواهیم برای $|x - y|$ کوچک، x و y در $[0 , 2]$، داشته باشیم

$$\left|\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right| < \varepsilon \text{ ، یا } \left|\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right| < \varepsilon .$$

چون برای x و y در $[0 , 2]$، $x + 1 \geq 1$ و $y + 1 \geq 1$، کافی است که نابرابری $|x - y| < \varepsilon$ را به دست آوریم. بنابراین قرار می‌دهیم $\delta = \varepsilon$.

برهان صوری. فرض کنید $\varepsilon > 0$ و $\delta = \varepsilon$. در این صورت $x , y \in [0,2]$ و $|x - y| < \delta = \varepsilon$ مستلزم آن خواهند بود که

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right| \leq |x - y| < \varepsilon .$$

(ب) بحث. فرض کنید $\varepsilon > 0$. می‌خواهیم برای $|x - y|$ ی کوچک، $x \geq 1$، $y \geq 1$ داشته باشیم $|g(x) - g(y)| = |(5y - 5x)/((2x - 1)(2y - 1))| < \varepsilon$، لذا کافی است به دست آوریم $|5y - 5x| < \varepsilon$. بنابراین فرض کنید $\delta = \varepsilon/5$. باید جزئیات برهان صوری را بنویسید.

۵.۱۹ (الف) $\tan x$ بنابر قضیهٔ ۲.۱۹ بر بازهٔ $[0 , \pi/4]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

(ب) $\tan x$ بنابر تمرین ۴.۱۹ (الف) بر بازهٔ $[0 , \pi/2)$ پیوستهٔ یکنواخت نیست، زیرا این تابع بر مجموعهٔ مزبور کراندار نیست.

(پ) فرض کنید $\tilde{h}$ مانند مثال ۹ باشد. در این صورت $(\sin x)\tilde{h}(x)$ یک توسیع پیوستهٔ $(1/x)\sin^2 x$ بر $(0 , \pi]$ است. قضیهٔ ۵.۱۹ را به کار ببرید.

(ث) $1/(x - 3)$ بنابر تمرین ۴.۱۹ (الف) بر $(3 , 4)$ پیوستهٔ یکنواخت نیست، و لذا بر $(3 , \infty)$ نیز پیوستهٔ یکنواخت نیست.

(ج) تذکر. می‌توان به آسانی برهان $\varepsilon - \delta$ یی داد که $1/(x - 3)$ بر $(4 , \infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است. استفاده از قضیهٔ ۶.۱۹ حتی آسانتر از آن است.

۷.۱۹ (الف) می‌دانیم که f بر $[k , \infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است، و f بنابر قضیهٔ ۲.۱۹ بر $[0 , k + 1]$ پیوستهٔ یکنواخت است. فرض کنید $\varepsilon > 0$. δ_1 و δ_2 ای موجودند به

طوری که

(۱) $|x - y| < \delta_1$، $x, y \in [k, \infty)$، مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$،

(۲) $|x - y| < \delta_2$، $x, y \in [0, k + 1]$، مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

فرض کنید $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$ و نشان دهید که

$|x - y| < \delta$، $x, y \in [0, \infty)$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

۹.۱۹ (پ) این بخش از مسأله، محتاج فوت و فن است، اما نتیجه این می‌شود که f بر R پیوستهٔ یکنواخت است. جرح و تعدیل سادهٔ تمرین ۷.۱۹ (الف) نشان می‌دهد که کافی است نشان دهیم که f بر $[1, \infty)$ و $(-\infty, -1]$ پیوستهٔ یکنواخت است. می‌توان این کار را با استفاده از قضیهٔ ۶.۱۹ انجام داد. توجه کنید که نمی‌توانیم از قضیهٔ ۶.۱۹ بر R استفاده کنیم زیرا f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست؛ همچنین f' در مجاورت $x = 0$ کراندار نیست.

۱۱.۱۹ مانند حل تمرین ۹.۱۹ (پ)، کافی است نشان دهیم که $\tilde{h}$ بر $[1, \infty)$ و $(-\infty, -1]$ پیوستهٔ یکنواخت نیست. قضیهٔ ۶.۱۹ را به کار ببرید.

۱.۲۰ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$؛ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$؛ $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نیست.

۳.۲۰ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$؛ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$
$= \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

۵.۲۰ فرض کنید $S = (0, \infty)$. در این صورت برای هر x در S، $f(x) = 1$. بنابراین برای هر دنبالهٔ (x_n) در S داریم $\lim f(x_n) = 1$. نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to 0^S} f(x) = \lim_{x\to\infty^S} f(x) = 1$، یعنی، $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. به همین نحو، اگر $S = (-\infty, 0)$، آنگاه $\lim_{x\to 0^S} f(x) = \lim_{x\to -\infty^S} f(x) = -1$ و بنابراین $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$. قضیهٔ ۱۰.۲۰ نشان می‌دهد که $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نیست.

۷.۲۰ اگر (x_n) دنباله‌ای در $(0, \infty)$ باشد و $\lim x_n = +\infty$، آنگاه $\lim(1/x_n) = 0$. چون $(\sin x_n)$ یک دنبالهٔ کراندار است، نتیجه می‌گیریم که بنابر تمرین ۴.۸، $\lim(\sin x_n)/x_n = 0$. بنابراین $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. به همین نحو، $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$. حکم باقیمانده، $\lim_{x\to 0} (\sin x)/x = 1$ است که در مثال ۹ بخش ۱۹ بحث شده است.

۹.۲۰ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$ ؛ $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$ ؛ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ ؛ $\lim_{x\to ۰} f(x)$ موجود نیست.

۱۱.۲۰ (الف) $۲a$ ؛ (پ) $۳a^۲$.

۱۳.۲۰ ابتدا توجه کنید که اگر $\lim_{x\to a^s} f(x)$ موجود و متناهی باشد و اگر $k \in \mathbf{R}$، آنگاه $\lim_{x\to a^s} (kf)(x) = k \cdot \lim_{x\to a^s} f(x)$. این همان قضیهٔ ۴.۲۰ (ii) است که در آن $f_۱$ ثابت k است و $f_۲ = f$.

(الف) تذکر بالا و قضیهٔ ۴.۲۰ نشان می‌دهند که

$$\lim_{x\to a} [۳f(x) + g(x)^۲] = ۳\lim_{x\to a} + [\lim_{x\to a} g(x)]^۲ = ۳.۳ + ۲^۲ = ۱۳.$$

(پ) مانند (الف)، $\lim_{x\to a} [۳f(x) + ۸g(x)] = ۲۵$ بازه‌ای باز مانند J شامل a موجود است به طوری که برای $x \in J \setminus \{a\}$، $f(x) > ۰$ و $g(x) > ۰$. قضیهٔ ۵.۲۰ را می‌توان با $S = J\setminus\{a\}$، $۳f + ۸g$ به جای f و با $g(x) = \sqrt{x}$ به کار برد تا نتیجه شود که $\lim_{x\to a} \sqrt{۳f(x) + ۸g(x)} = \sqrt{۲۵} = ۵$.

۱۵.۲۰ فرض کنید (x_n) دنباله‌ای در $(-\infty\ ,\ ۲)$ باشد به طوری که $\lim x_n = -\infty$. ادعا می‌کنیم که

$$\lim(x_n - ۲)^{-۳} = ۰. \qquad (۱)$$

تمرینهای ۱۰.۹ و ۱۱.۹ و قضیه‌های ۹.۹ و ۱۰.۹ را به کار می‌بریم تا نتیجه بگیریم که $\lim(-x_n) = +\infty$، $\lim(۲ - x_n) = +\infty$، $\lim(۲ - x_n)^۳ = +\infty$، $\lim(۲ - x_n)^{-۳} = ۰$، و بنابراین (۱) برقرار است. حال دنباله‌ای مانند (x_n) در $(۲\ ,\ \infty)$ را در نظر بگیرید به طوری که $\lim x_n = ۲$. نشان می‌دهیم که

$$\lim(x_n - ۲)^{-۳} = +\infty \qquad (۲)$$

چون $\lim(x_n - ۲) = ۰$ و هر $x_n - ۲ > ۰$، قضیهٔ ۱۰.۹ نشان می‌دهد که داریم $\lim(x_n - ۲)^{-۱} = +\infty$ و (۲) با کاربرد قضیهٔ ۹.۹ نتیجه می‌شود.

۱۷.۲۰ ابتدا فرض کنید که L متناهی است. از (۱) در نتیجهٔ ۸.۲۰ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. $\delta_۱ > ۰$ و $\delta_۳ > ۰$ای موجودند به طوری که

$a < x < a + \delta_۱$ مستلزم آن است که $L - \varepsilon < f_۱(x) < L + \varepsilon$

و

$a < x < a + \delta_۳$ مستلزم آن است که $L - \varepsilon < f_۳(x) < L + \varepsilon$.

اگر $\delta = \min\{\delta_۱\ ,\ \delta_۳\}$، آنگاه

$a < x < a + \delta$ مستلزم آن است که $L - \varepsilon < f_2(x) < L + \varepsilon$.

بنابراین طبق نتیجهٔ ۸.۲۰ داریم $\lim_{x\to a^+} f_2(x) = L$.

فرض کنید $L = +\infty$. گیرید $M > 0$. با توجه به بحث ۹.۲۰، $\delta > 0$ ای موجود است به طوری که

$a < x < a + \delta$ مستلزم آن است که $f_1(x) > M$.

در این صورت آشکارا

$a < x < a + \delta$ مستلزم آن است که $f_2(x) > M$،

و این نتیجه، نشان می‌دهد که $\lim_{x\to a^+} f_2(x) = +\infty$. حالت $L = -\infty$ مشابه همین است.

۱۹.۲۰ فرض کنید $L_2 = \lim_{x\to a}^{s} f(x)$ با $S = (a , b_2)$ موجود باشد. دنباله‌ای مانند (x_n) در (a , b_1) با حد a را در نظر بگیرید. در این صورت (x_n) دنباله‌ای در (a , b_2) با حد a است و بنابراین $\lim f(x_n) = L_2$. این مطلب، نشان می‌دهد که $\lim_{x\to a}^{s} f(x) = L_2$ با $S = (a , b_1)$.

فرض کنید $L_1 = \lim_{x\to a}^{s} f(x)$ با $S = (a , b_1)$ موجود باشد و دنباله‌ای مانند (x_n) در (a , b_2) با حد a را در نظر بگیرید. N ای موجود است به طوری که $n \geq N$ مستلزم آن است که $x_n < b_1$. در این صورت $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ دنباله‌ای در (a , b_1) با حد a است. بنابراین $\lim f(x_n) = L_1$، صرف نظر از اینکه دنباله را در $n = N$ یا $n = 1$ شروع کنیم. این مطلب، نشان می‌دهد که $\lim_{x\to a}^{s} f(x) = L_1$ با $S = (a , b_2)$.

۱.۲۱ فرض کنید $\varepsilon > 0$. برای $j = 1 , 2 , \ldots , k$، $\delta_j > 0$ ای موجود است به طوری که

$s , t \in \mathbf{R}$ و $|s - t| < \delta_j$ مستلزم آن است که $|f_j(s) - f_j(t)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$.

فرض کنید $\delta = \min\{\delta_1 , \delta_2 , \ldots , \delta_k\}$. در این صورت بنابر (۱) در برهان قضیهٔ ۲.۲۱،

$s , t \in R$ و $|s - t| < \delta$ مستلزم آن است که $d^*(\gamma(s) , \gamma(t)) < \varepsilon$.

۳.۲۱ راهنمایی: نشان دهید که $|d(s , s_0) - d(t , s_0)| \leq d(s , t)$. بنابراین اگر $\varepsilon > 0$، آنگاه

$s , t \in S$ و $d(s , t) < \varepsilon$ مستلزم آن است که $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$.

۵.۲۱ (ب) بنابر قسمت (الف)، تابع حقیقی مقدار پیوستهٔ بیکرانی مانند f بر E موجود است. نشان دهید که $h = |f|/[1 + |f|]$ پیوسته و کراندار است و سوپرمم ۱ بر E را به خود نمی‌گیرد.

۷.۲۱ (ب) γ در $t_\circ$ پیوسته است هرگاه برای هر $t_\circ$ در $[a , b]$ و $\varepsilon > \circ$، عدد مثبت δیی موجود باشد به طوری که

$t \in [a , b]$ و $|t - t_\circ| < \delta$ مستلزم آن است که $d^*(\gamma(t) , \gamma(t_\circ)) < \varepsilon$.

تذکر: اگر γ در $t_\circ \in [a , b]$ پیوسته باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۴.۱۲، γ بر $[a , b]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۹.۲۱ (الف) مثلاً از $f(x_\text{۱} , x_\text{۲}) = x_\text{۱}$ استفاده کنید.

(ب) این مطلب قطعاً بدیهی نیست، اما نگاشتهای پیوسته‌ای از $[\circ , \text{۱}]$ به روی مربع واحد موجودند. چنین تابعهایی ممکن است «بد رفتار» باشند و اغلب خمهای پئانو [به یاد همان پئانوی صاحب اصل موضوعها] نامیده می‌شوند؛ نگاه کنید به [۴]، بخش ۵.۵، یا [۱۸]، بخش ۳.۶.

۱۱.۲۱ (الف) اگر تابع پیوسته‌ای $[\circ , \text{۱}]$ را بر $(\circ , \text{۱})$ بنگارد، در این صورت تصویر $(\circ , \text{۱})$ بنابر قضیهٔ ۴.۲۱ (i) فشرده خواهد بود. اما $(\circ , \text{۱})$ بسته و بنابراین فشرده نیست.

۱.۲۲ (الف) $[\circ , \text{۱}]$ همبند است اما $[\circ , \text{۱}] \cup [\text{۲} , \text{۳}]$ همبند نیست. نگاه کنید به قضیهٔ ۲.۲۲. به عنوان روشی دیگر، قضیهٔ مقدار میانی ۲.۱۸ را به کار برید.

۳.۲۲ فرض کنید که E همبند است اما E^- همبند نیست. در این صورت مجموعه‌های باز مجزایی مانند $U_\text{۱}$ و $U_\text{۲}$ موجودند به طوری که $E^- \subseteq U_\text{۱} \cup U_\text{۲}$، $E^- \cap U_\text{۱} \neq \phi$ و $E^- \cap U_\text{۲} \neq \phi$. چون $E \subseteq U_\text{۱} \cup U_\text{۲}$، کافی است نشان دهیم که $E \cap U_\text{۱} \neq \phi$ و $E \cap U_\text{۲} \neq \phi$. در واقع، اگر $E \cap U_\text{۱} = \phi$، آنگاه $E^- \cap (S \backslash U_\text{۱})$ مجموعه‌ای بسته شامل E خواهد بود که، برخلاف تعریف E^-، از E^- کوچکتر است. به همین نحو $E_\text{۱} \cap U_\text{۲} \neq \phi$.

۵.۲۲ (الف) فرض کنید مجموعه‌های باز مجزای $U_\text{۱}$ و $U_\text{۲}$، مجموعهٔ $E \cup F$ را ناهمبند می‌کنند. $s_\circ \in E \cap F$ را در نظر بگیرید؛ $s_\circ$ به یکی از مجموعه‌های باز تعلق دارد، مثلاً $s_\circ \in U_\text{۱}$. چون $E \subseteq U_\text{۱} \cup U_\text{۲}$، $E \cap U_\text{۱} \neq \phi$ و E همبند است، باید داشته باشیم $E \cap U_\text{۲} = \phi$. به همین نحو، $F \cap U_\text{۲} = \phi$. اما در این صورت $(E \cup F) \cap U_\text{۲} = \phi$، که یک تناقض است.

(ب) چنین مثالی در **R** موجود نیست [چرا؟]، اما مثالهای زیادی در صفحه موجوند به عنوان مثال،

$$E = \{(x_\text{۱} , x_\text{۲}) : x_\text{۱}^\text{۲} + x_\text{۲}^\text{۲} = \text{۱} , x_\text{۱} \geq \circ\}$$

$$F = \{(x_۱ , x_۲): x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱ , x_۱ < ۰\}$$

را در نظر بگیرید.

۹.۲۲ بحث. با مفروض بودن $\varepsilon > ۰$، به $\delta > ۰$ای نیاز داریم به طوری که

(۱) $\quad s , t \in \mathbf{R}$ و $|s - t| < \delta$ مستلزم آن است که $d(F(s) , F(t)) < \varepsilon$.

حال،

$$\begin{aligned} d(F(s) , F(t)) &= \sup \{|sf(x) + (۱ - s)g(x) - tf(x) - (۱ - t) g(x)| : x \in S\} \\ &= \sup \{|sf(x) - tf(x) - sg(x) + tg(x)| : x \in S\} \\ &\leq |s - t| \,.\, \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in S\} \end{aligned}$$

چون f و g ثابت‌اند، آخرین سوپرمم عدد ثابتی مانند M است. می‌توانیم فرض کنیم $M > ۰$، که در این صورت $\delta = \varepsilon/M$ رابطهٔ (۱) را برقرار خواهد بود.

۱۱.۲۲ (الف) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای همگرا در $\mathscr{C}$ باشد. بنابر قضیهٔ ۹.۱۳ (ب)، کافی است نشان دهیم که $f = \lim f_n$ در $\mathscr{C}$ قرار دارد. برای هر x در S،

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq d(f , f_n) + ۱ .$$

چون $\lim d(f , f_n) = ۰$، داریم $|f(x)| \leq ۱$.

(ب) کافی است نشان دهیم که $c(S)$ پیوستهٔ مسیری است. بنابراین از تمرین ۹.۲۲ استفاده کنید.

۱.۲۳ بازه‌های همگرایی: (الف) $(-۱ , ۱)$؛ (پ) $[-\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲}]$؛ (ث) $\mathbf{R}$؛ (چ) $[-\frac{۴}{۳} , \frac{۴}{۳}]$.

۳.۲۳ $(-(۲)^{۱/۳} , (۲)^{۱/۳})$.

۵.۲۳ (الف) چون برای تعدادی نامتناهی از n ها، $|a_n| \geq ۱$، برای هر N داریم، $\sup\{|a_n|^{۱/n} : n>N\} \geq ۱$. بنابراین $\beta = \lim \sup|a_n|^{۱/n} \geq ۱$؛ در نتیجه $R = ۱/\beta \leq ۱$.

(ب) c را طوری انتخاب کنید که $۰ < c < \lim \sup |a_n|$. در این صورت برای هر N، $\sup \{|a_n| : n > N\} > c$. زیر دنباله‌ای مانند (a_{n_k}) از (a_n) این خاصیت را دارد که برای هر k، $|a_{n_k}| > c$. چون $|a_{n_k}|^{۱/n_k} > (c)^{۱/n_k}$ و $\lim_{k\to\infty} c^{۱/n_k} = ۱$ [بنابر ۷.۹ (ث)]، تمرین ۱.۱۲ نشان می‌دهد که $\lim \sup|a_{n_k}|^{۱/n_k} \geq ۱$. نتیجه می‌شود که $\beta = \lim \sup |a_n|^{۱/n} \geq ۱$ [از قضیهٔ ۷.۱۱ استفاده کنید]. بنابراین $R = ۱/\beta \leq ۱$.

۹.۲۳ (الف) بدیهی است که $\lim f_n(۰) = ۰$. $۰ < x < ۱$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که

$s_n = nx^n$. در این صورت $s_{n+1}/s_n = [(n+1)/n]x$ و بنابراین $\lim |s_{n+1}/s_n| = x < 1$.
تمرین ۱۲.۹ (الف) نشان می‌دهد که $\lim f_n(x) = \lim nx^n = \lim s_n = 0$.

۱.۲۴ بحث. فرض کنید $\varepsilon > 0$. می‌خواهیم برای هر x و برای nهای بزرگ داشته باشیم $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$. کافی است برای nهای بزرگ به دست آوریم $3/\sqrt{n} < \varepsilon$. بنابراین، فرض کنید $n > 9/\varepsilon^2 = N$.

۳.۲۴ (الف) برای $0 \le x < 1$، $f(x) = 1$؛ $f(1) = \frac{1}{2}$؛ برای $x > 1$، $f(x) = 0$. نگاه کنید به تمرین ۱۳.۹.

(ب) (f_n) بنابر قضیهٔ ۳.۲۴ به طور یکنواخت بر $[0, 1]$ پیوسته نیست.

۵.۲۴ (الف) برای $x \le 1$، $f(x) = 0$ و برای $x > 1$، $f(x) = 1$. توجه کنید که $f_n(x) = 1/[1+n/x^n]$ و اینکه برای $x > 1$، بنابر تمرین ۱۲.۹ یا ۱۴.۹، $\lim_{n\to\infty} n/x^n = 0$.

(ب) به طور یکنواخت بر $[0, 1]$، $f_n \to 0$. راهنمایی: نشان دهید که برای $x \in [0, 1]$، $|f_n(x)| \le 1/n$.

(پ) راهنمایی: از قضیهٔ ۳.۲۴ استفاده کنید.

۷.۲۴ (الف) بلی. برای $x < 1$، $f(x) = x$ و $f(1) = 0$.

(ب) خیر، مجدداً بنابر قضیهٔ ۳.۲۴.

۹.۲۴ (الف) برای $x \in [0, 1]$، $f(x) = 0$. مانند تمرین ۹.۲۳ (الف) برای $x < 1$، $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$.

(ب) از حسابان استفاده کرده نشان دهید که f_n ماکسیمم خود را در $n/(n+1)$ اختیار می‌کند. در نتیجه، $\sup\{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\} = f_n(n/(n+1)) = [n/(n+1)]^{n+1}$. مانند مثال ۸ نتیجه این می‌شود که $f_n(n/(n+1)) = 1/e$. بنابراین تذکر ۴.۲۴ نشان می‌دهد که (f_n) به طور یکنواخت به 0 همگرا نیست.

(پ) $\int_0^1 f_n(x)\,dx = n/[(n+1)(n+2)] \longrightarrow 0 = \int_0^1 f(x)dx$.

۱۵.۲۴ (الف) $f(0) = 0$ و برای $x > 0$، $f(x) = 1$. (ب) خیر، (پ) بلی.

۳.۲۵ (الف) چون $f_n(x) = (1 + (\cos x)/n)/(2 + (\sin^2 x)/n)$، به طور نقطه به نقطه، $f_n \to \frac{1}{2}$.
برای به دست آوردن همگرایی یکنواخت، نشان دهید که برای کلیهٔ اعداد حقیقی x و برای هر $n > 3/(4\varepsilon)$،

$$|f_n(x) - \frac{۱}{۲}| = |\frac{۲\cos x - \sin x}{۲(۲n + \sin^۲ x)}| \le \frac{۳}{۲(۲n)} < \varepsilon .$$

(ب) بنابر قضیهٔ ۲.۲۵ ، $\int_۲^۷ \frac{۱}{۲}\, dx = \frac{۵}{۲}$.

۵.۲۵ چون به طور یکنواخت بر S ، $f_n \to f$ ، N ای در N موجود است به طوری که $n > N$ مستلزم آن است که برای هر x در S ، $|f_n(x) - f(x)| < ۱$. به ویژه، برای هر x در S ، $|f_{N+۱}(x) - f(x)| < ۱$. اگر M کرانی برای $|f_{N+۱}|$ در S باشد [یعنی اگر برای هر x در S ، $|f_{N+۱}(x)| \le M$]، آنگاه $M + ۱$ کرانی برای $|f|$ در S است [چرا؟] .

۷.۲۵ فرض کنید که $g_n(x) = n^{-۲} \cos nx$. در این صورت برای هر $x \in R$ ، $|g_n(x)| \le n^{-۲}$ و $\sum n^{-۲} < \infty$. بنابراین طبق آزمون M وایرشتراس ۷.۲۵، $\sum g_n$ به طور یکنواخت بر S همگراست. بنابر قضیهٔ ۵.۲۵، تابع حدی پیوسته است.

۹.۲۵ (الف) سری بنابر (۲)ی مثال ۱ بخش ۱۴، نقطه به نقطه بر $(-۱ , ۱)$ به $۱/(۱ - x)$ همگراست. این سری بنابر آزمون M وایراشتراس بر $[-a , a]$ همگرای یکنواخت است. زیرا، برای x در $[-a , a]$ ، $|x^n| \le a^n$ و از آنجا که $\sum a^n < \infty$.

(ب) می‌توان مستقیماً نشان داد که دنبالهٔ مجموعهای جزئی $s_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} x^k = (۱ - x^{n+۱})/(۱ - x)$ به طور یکنواخت بر $(-۱ , ۱)$ همگرانیست. توجه به این نکته آسانتر است که مجموعهای جزئی s_n هر یک بر $(-۱ , ۱)$ کراندارند، و بنابراین اگر (s_n) همگرای یکنواخت باشد، در این صورت، تابع حدی باید، بنابراین ۵.۲۵ کراندار باشد. اما، $۱/(۱ - x)$ بر $(-۱ , ۱)$ کراندار نیست.

۱۱.۲۵ (ب) راهنمایی: آزمون M وایراشتراس را در مورد $\sum h_n$ به کار ببرید که در آن $h_n(x) = (۳/۴)^n g_n(x)$.

۱۳.۲۵ سریهای $\sum g_k$ و $\sum h_k$ بر S به طور یکنواخت کوشی هستند و کافی است نشان دهیم که $\sum(g_k + h_x)$ نیز چنین است؛ نگاه کنید به قضیهٔ ۶.۲۵. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. $N_۱$ و $N_۲$ ای موجودند به طوری که

(۱) $n \ge m > N_۱$ مستلزم آن است که برای x در S ، $|\sum_{k=m}^{n} g_k(x)| < \frac{\varepsilon}{۲}$ ،

(۲) $n \ge m > N_۲$ مستلزم آن است که برای x در S ، $|\sum_{k=m}^{n} h_k(x)| < \frac{\varepsilon}{۲}$ ،

در این صورت

$n \geq m > \max\{N_1, N_2\}$ مستلزم آن است که برای هر x در S، $|\sum_{k=m}^{n} (g_k + h_k)(x)| < \varepsilon$.

۱۵.۲۵ (الف) توجه کنید که برای هر x و هر n، $f_n(x) \geq 0$. فرض کنید (f_n) به طور یکنواخت بر $[a, b]$ به a همگرا نیست. در این صورت $\varepsilon > 0$ ای موجود است به طوری که

(۱) برای هر N عددی مانند $n > N$ و x ای در $[a, b]$ موجود است به طوری که $f_n(x) \geq \varepsilon$.

ادعا می‌کنیم که

(۲) برای هر n در N عددی مانند x_n در $[a, b]$ موجود است که در آن $f_n(x_n) \geq \varepsilon$.

اگر چنین نباشد، n_0 ای در N موجود است به طوری که برای هر x در $[a, b]$، $f_{n_0}(x) < \varepsilon$. چون $(f_n(x))$ برای هر x ناصعودی است، نتیجه می‌گیریم که برای هر x در $[a, b]$ و $n \geq n_0$، $f_n(x) < \varepsilon$. این نتیجه آشکارا با (۱) تناقض دارد. به این ترتیب حکم مذکور در راهنمایی را برقرار کرده‌ایم.

حال، بنابر قضیهٔ بولتسانو - وایراشتراس، دنبالهٔ داده شده در (۲)، زیر دنبالهٔ همگرایی مانند (x_{n_k}) دارد: فرضاً $x_{n_k} \to x_0$. چون $\lim f_n(x_0) = 0$، m ای موجود است به طوری که $f_m(x_0) < \varepsilon$. چون $x_{n_k} \to x_0$ و f_m در x_0 پیوسته است، داریم $\lim_{k\to\infty} f_m(x_{n_k}) = f_m(x_0) < \varepsilon$. بنابراین k ای موجود است به طوری که

$k > K$ مستلزم آن است که $f_m(x_{n_k}) < \varepsilon$.

اگر $k > \max\{K, m\}$، آنگاه $n_k \geq k > m$ و بنابراین

$$f_{n_k}(n_k) \leq f_m(x_{n_k}) < \varepsilon .$$

اما برای هر n، $f_n(x_n) \geq \varepsilon$، بنابراین به یک تناقض می‌رسیم.

(ب) راهنمایی: نشان دهید که قسمت (الف) در مورد دنبالهٔ (g_n) که در آن $g_n = f_n - f$ صادق است.

۳.۲۶ (الف) فرض کنید که برای $|x| < 1$، $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x/(1-x)^2$. بنابر قضیهٔ ۵.۲۶

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right] = (1+x)(1-x)^{-3}$$

و بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = (x + x^2)(1-x)^{-3}$.

(ب) ۶ و ۳/۲.

۵.۲۶ راهنمایی: قضیهٔ ۵.۲۶ را به کار ببرید.

۷.۲۶ خیر! سری توانی در هر نقطهٔ x در $\mathbf{R}$ مشتقپذیر است ولی $f(x) = |x|$ در $x = 0$ مشتقپذیر نیست.

۱.۲۷ فرض کنید ϕ تابع مذکور در راهنمایی باشد. بنابر قضیهٔ ۴.۲۷، دنباله‌ای مانند (q_n) از چند جمله‌ایها موجود است به طوری که به طور یکنواخت بر $[0 , 1]$، $q_n \to f\circ\phi$. توجه کنید که ϕ یک به یک است و $\phi^{-1}(y) = (y - a)/(b - a)$. فرض کنید که $p_n = q_n \circ \phi^{-1}$. در این صورت p_n یک چند جمله‌ای است و به طور یکنواخت بر $[a , b]$، $p_n \to f$.

۳.۲۷ (الف) فرض کنید که p برای هر x در R در $|p(x) - \sin x| < 1$ صدق کند. آشکار است که p نمی‌تواند یک تابع ثابت باشد. اما اگر p ثابت نباشد، در این صورت p بر R بیکران است و همین حکم در مورد $p(x) - \sin x$ نیز صادق است که یک تناقض است.

(ب) فرض کنید که برای هر x در $\mathbf{R}$، $|e^x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| < 1$. برای $x > 0$ داریم

$$e^x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \geq \frac{1}{n!} x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, x^k$$

و برای xهای بزرگ، طرف راست از ۱ بزرگتر است.

۵.۲۷ (الف) برای هر n، $B_n f(x) = x$. از (۲) ی لم ۲.۲۷ استفاده کنید.

(ب) $B_n f(x) = x^2 + (1/n)x(1 - x)$. از (۴) در لم ۲.۲۷ استفاده کنید.

۱.۲۸ (الف) $\{0\}$؛ (ب) $\{0\}$؛ (پ) $\{n\pi : n \in Z\}$؛ (ت) $\{0 , 1\}$؛ (ث) $\{1 , -1\}$؛ (ج) $\{2\}$.

۳.۲۸ (ب) چون $x - a = (x^{1/3} - a^{1/3})(x^{2/3} + a^{1/3}x^{1/3} + a^{2/3})$، برای $a \neq 0$،

$$f'(a) = \lim_{x\to a} (x^{2/3} + a^{1/3}x^{1/3} + a^{2/3})^{-1} = (3a^{2/3})^{-1} = \frac{1}{3} a^{-2/3} .$$

(پ) f در $x = 0$ مشتقپذیر نیست زیرا حد $\lim_{x\to 0} x^{1/3}/x$ به عنوان عددی حقیقی موجود نیست. حد موجود نیست و برابر $+\infty$ است که انعکاسی از این نتیجهٔ هندسی است که نمودار f مماسی عمودی در $(0 , 0)$ دارد.

۵.۲۸ (پ) فرض کنید

$$h(x) = [g(f(x)) - g(f(0))]/[f(x) - f(0)] .$$

بنابر تعریف ۳.۲۰ (الف)، برای اینکه $\lim_{x\to 0} h(x)$ دارای معنی باشد، h باید برای

بازهٔ بازی مانند J شامل ۰ بر $J\setminus\{0\}$ تعریف شده باشد. اما محاسبات انجام شده در (ب) نشان می‌دهند که h برای $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ در $(\pi n)^{-1}$ تعریف شده نیست.

۷.۲۸ (ت) f' بر $\mathbf{R}$ پیوسته است اما f' در $x = 0$ مشتقپذیر نیست.

۹.۲۸ (ب) $f(x) = x^4 + 13x$ و $g(y) = y^7$. در این صورت

$$h'(x) = g'(f(x)) \,.\, f'(x) = 7(x^4 + 13x)^6 \,.\, (4x^3 + 13) \,.$$

۱۱.۲۸ با فرض بیان شده، hogof در a مشتقپذیر است و

$$(hogof)'(a) = h'(gof(a)) \,.\, g'(f(a)) \,.\, f'(a) \,.$$

برهان. بنابر ۴.۲۸، gof در a مشتقپذیر است و $(gof)'(a) = g'(f(a)) \,.\, f'(a)$. مجدداً بنابر ۴.۲۸،

$$(ho(gof))'(a) = h'((gof)(a)) \,.\, (gof)'(a) \,.$$

۱۳.۲۸ عددهای مثبتی مانند δ_1 و ε موجودند به طوری که f بر $(a - \delta_1 \,,\, a + \delta_1)$ تعریف شده است و g بر $(f(a) - \varepsilon \,,\, f(a) + \varepsilon)$ تعریف شده است. بنابر قضیهٔ ۲.۱۷، $\delta_2 > 0$ ای موجود است به طوری که

$x \in dom(f)$ و $|x - a| < \delta_2$ مستلزم آن است که $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

اگر $|x - a| < \min\{\delta_1 \,,\, \delta_2\}$، آنگاه $x \in dom(f)$ و $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ و بنابراین $f(x) \in dom(g)$، یعنی، $x \in dom(gof)$.

۱.۲۹ (الف) $x = \frac{1}{2}$.

(پ) اگر $f(x) = |x|$، آنگاه بجز در ۰، $f'(x) = \pm 1$. بنابراین هیچ xای در معادله $f'(x) = [f(2) - f(-1)]/[2 - (-1)] = 1/3$ صدق نمی‌کند. فرض مفقود: f بر $(-1 \,,\, 1)$ مشتقپذیر نیست زیرا f در $x = 0$ مشتقپذیر نیست.

(ث) $x = \sqrt{3}$.

۳.۲۹ (الف) قضیهٔ مقدار میانگین را در مورد $[0 \,,\, 2]$ به کار ببرید.

(ب) بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، برای yای در $(1 \,,\, 2)$، $f'(y) = 0$. با توجه به این مطلب و قسمت (الف)، قضیهٔ ۸.۲۹ نشان می‌دهد که f' کلیهٔ مقادیر بین ۰ و $\frac{1}{2}$ را اختیار می‌کند.

۵.۲۹ برای هر a در $\mathbf{R}$ داریم $|(f(x) - f(a))/(x - a)| \leq |x - a|$. به آسانی نتیجه می‌شود که برای هر a در $\mathbf{R}$، $f'(a)$ موجود و برابر ۰ است. لذا بنابر نتیجه ۴.۲۹، f ثابت است.

۷.۲۹ (الف) با به کاربردن ۴.۲۹ در مورد f'، برای ثابتی مانند a به دست می‌آوریم $f'(x) = a$.

اگر $g(x) = f(x) - ax$، آنگاه برای هر x در I، $g'(x) = 0$ و لذا بنابر ۴.۲۹، عدد ثابتی مانند b موجود است به طوری که برای هر x در I، $g(x) = b$.

۹.۲۹ راهنمایی: فرض کنید که برای هر x در $\mathbf{R}$، $f(x) = e^x - ex$. از f' استفاده کنید تا نشان دهید که f بر $[1, \infty)$ صعودی و بر $(-\infty, 1]$ نزولی است. بنابراین f مینیمم خود را در $x = 1$ اختیار می‌کند.

۱۳.۲۹ فرض کنید $h(x) = g(x) - f(x)$ و نشان دهید که برای $x \geq 0$، $h(x) \geq 0$.

۱۵.۲۹ مانند مثال ۲، فرض کنید $g(x) = x^{1/n}$. چون $\operatorname{dom}(g) = [0, \infty)$. هرگاه n زوج باشد و $\operatorname{dom}(g) = \mathbf{R}$. هرگاه n فرد باشد، داریم $\operatorname{dom}(g) = \operatorname{dom}(h) \cup \{0\}$. همچنین $h = g^m$. از قاعدهٔ زنجیری برای محاسبهٔ $h'(x)$ استفاده کنید.

۱۷.۲۹ فرض کنید که $f(a) = g(a)$. در این صورت

$$\lim_{x \to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{و} \quad ،\quad \lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(a) \qquad (1)$$

اگر علاوه بر این داشته باشیم $f'(a) = g'(a)$، در این صورت قضیهٔ ۱۰.۲۰ نشان می‌دهد که $h'(a)$ موجود است و، در واقع، $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

حال فرض کنید h در a مشتقپذیر باشد. در این صورت h در a پیوسته است و بنابراین $f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} h(x) = h(a) = g(a)$. بنابراین (۱) برقرار است. اما حدهای موجود در (۱) هر دو برابر $h'(a)$ هستند و بنابراین $f'(a) = g'(a)$.

۱.۳۰ (الف) ۲؛ (ب) $\frac{1}{2}$؛ (پ) ۰؛ (ت) ۱. گاهی می‌توان از قضیهٔ هوپیتال اجتناب کرد. به عنوان مثال، برای (ت) توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}.$$

۳.۳۰ (الف) ۰؛ (ب) ۱؛ (پ) $+\infty$؛ (ت) $-\frac{2}{3}$.

۵.۳۰ (الف) e^2؛ (ب) e^2؛ (ت) e.

۱.۳۱ از سری توانی $\sin x$ جمله به جمله مشتق بگیرید و از قضیهٔ ۵.۲۶ استفاده کنید.

۳.۳۱ مشتقها در بازه‌ای شامل ۱ دارای کران مشترکی نیستند.

۵.۳۱ (الف) برای x در $\mathbf{R}$، $g(x) = f(x^2)$ که در آن f مانند مثال ۳ است. از استقرا استفاده کرده ثابت کنید که چند جمله‌ایهایی مانند p_{kn}، $1 \leq k \leq n$ موجودند به طوری که برای x در R، $x \geq 1$،

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=۱}^{n} f^{(k)}(x^۲)p_{kn}(x) .$$

۱.۳۲ از افراز P در مثال ۱ استفاده کرده $U(f , P) = b^۴n^۴(n + ۱)^۲/(۴n^۴)$ و $L(f, P) = b^۴(n - ۱)^۲n^۲/(۴n^۴)$ را محاسبه کنید. نتیجه بگیرید که $U(f)=b^۴/۴$ و $L(f)=b^۴/۴$.

۳.۳۲ (الف) مجموعهای بالایی مانند مجموعهای بالایی مثال ۱ هستند و بنابراین $U(g)=b^۳/۳$. نشان دهید که $L(g) = ۰$.

(ب) خیر

۵.۳۲ S عبارت از همهٔ اعداد $L(f , P)$ و T عبارت از همهٔ اعداد $U(f , P)$ است.

۷.۳۲ استقرای ساده‌ای نشان می‌دهد که می‌توانیم بجز در یک نقطهٔ $u \in [a , b]$، فرض کنیم که $g(x) = f(x)$. فرض کنید B کرانی برای $|f|$ و $|g|$، $B > ۰$، باشد. اگر $\varepsilon > ۰$، افرازی مانند P موجود است به طوری که $U(f , P) - L(f , P) < \varepsilon/۳$. می‌توانیم فرض کنیم که برای هر k، $t_k - t_{k-۱} < \varepsilon/(۱۲B)$. چون u حداکثر به دو بازهٔ $[t_{k-۱} , t_k]$ تعلق دارد، ملاحظه می‌کنیم که

$$|(U(g , P) - U(f , P)| \leq ۲[B - (-B)] . \max \{t_k - t_{k-۱}\} < \frac{\varepsilon}{۳} .$$

به همین نحو، $|L(g , P) - L(f , P)| < \frac{\varepsilon}{۳}$ و بنابراین $U(g , P) - L(g , P) < \varepsilon$. بنابراین g انتگرالپذیر است. انتگرالها با هم وفق دارند زیرا

$$\int_a^b g \leq U(g , P) < U(f , p) + \frac{\varepsilon}{۳} < L(f , P) + \frac{۲\varepsilon}{۳} \leq \int_a^b f + \frac{۲\varepsilon}{۳}$$

و به همین نحو $\int_a^b g > \int_a^b f - ۲\frac{\varepsilon}{۳}$.

۱.۳۳ اگر f در $[a , b]$ نزولی باشد، آنگاه $-f$ بر $[a , b]$ صعودی است و بنابراین $-f$ به طوری که در قضیهٔ ۱.۳۳ ثابت شد، انتگرالپذیر است. حال قضیهٔ ۳.۳۳ را با $c = -۱$ به کار ببرید.

۳.۳۳ (ب) ۱۳۸

۷.۳۳ (الف) برای هر مجموعهٔ $S \subseteq [a , b]$ و $x_۰ , y_۰ \in S$، داریم

$$\begin{aligned} f(x_۰)^۲ - f(y_۰)^۲ &\leq |f(x_۰) + f(y_۰)| \; |f(x_۰) - f(y_۰)| \\ &\leq ۲B|f(x_۰) - f(y_۰)| \leq ۲B[M(f , S) - m(f , S)] . \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که، $M(f^۲ , S) - m(f^۲ , S) \leq ۲B[M(f , S) - m(f , S)]$.

از این نتیجه استفاده کرده، نشان دهید که

$$U(f^۲ , P) - L(f^۲ , P) \leq ۲B[U(f , P) - L(f , P)]$$

(ب) از قضیهٔ ۵.۳۲ و قسمت (الف) استفاده کنید.

۹.۳۳ عددی مانند m در N را انتخاب کنید به طوری که برای کلیهٔ xها در $[a , b]$ داشته باشیم $|f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2}\,\varepsilon/(b - a)$. در این صورت برای هر افراز P،

$$-\frac{1}{2}\varepsilon \le L(f - f_m , P) \le U(f - f_m , P) \le \frac{1}{2}\varepsilon .$$

افرازی مانند P_0 را انتخاب کنید به طوری که $U(f_m , P_0) - L(f_m , P_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. چون $f = (f - f_m) + f_m$، می‌توانیم از نابرابریهای برهان قضیهٔ ۳.۳۳ استفاده کرده نتیجه بگیریم که $U(f , P_0) - L(f , P_0) < \varepsilon$. حال، قضیهٔ ۵.۳۲ نشان می‌دهد که f انتگرالپذیر است. برای کامل کردن اثبات، مانند برهان قضیهٔ ۲.۲۵ عمل کنید.

۱۱.۳۳ (الف) و (ب): نشان دهید که f بر هیچ بازه‌ای شامل ۰، پیوسته و یکنوا نیست.

(پ) فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون f بر $[\varepsilon/8 , 1]$ پیوستهٔ تکه‌ای است، افرازی مانند P_1 از $[\varepsilon/8 , 1]$ موجود است به طوری که $U(f , P_1) - L(f , P_1) < \varepsilon/4$. به همین نحو، افرازی مانند P_2 از $[-1 , -\varepsilon/8]$ موجود است به طوری که $U(f , P_2) - L(f , P_2) < \varepsilon/4$. فرض کنید $P = P_1 \cup P_2$، افرازی از $[-1 , 1]$ باشد. چون

$$\{M(f , [-\frac{\varepsilon}{8} , \frac{\varepsilon}{8}]) - m(f , [\frac{\varepsilon}{8} , \frac{\varepsilon}{8}])\} \cdot \{\frac{\varepsilon}{8} - (-\frac{\varepsilon}{8})\} < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

نتیجه می‌گیریم که $U(f , P) - L(f , P) < \varepsilon$. حال، قضیهٔ ۵.۳۲ نشان می‌دهد که f انتگرالپذیر است.

۱۳.۳۳ قضیهٔ ۹.۳۳ را در مورد $f - g$ به کار ببرید.

۳.۳۴ (الف) برای $x < 0$، $F(x) = 0$؛ برای $0 \le x \le 1$، $F(x) = x^2/2$؛ برای $x > 1$، $F(x) = 4x - \frac{7}{2}$.

(پ) بنابر قضیهٔ ۳.۳۴، F، بجز احتمالاً در $x = 1$، مشتقپذیر است. برای اینکه نشان دهید F در $x = 1$ مشتقپذیر نیست، از تمرین ۱۷.۲۹ استفاده کنید.

۵.۳۴ $F'(x) = f(x + 1) - f(x - 1)$.

۹.۳۴ از $a = 0$، $b = \pi/6$ و $g(x) = \sin x$ استفاده کنید.

۱۱.۳۴ اگر f بر $[a , b]$ متحداً برابر ۰ نباشد، آنگاه برای x_0ای در $[a , b]$، $f(x_0) > 0$ که می‌توان آن را در (a , b) اختیار کرد. $\delta > 0$ را طوری انتخاب کنید که $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ و برای $|x - x_0| < \delta$، $f(x) > f(x_0)/2$. فرض کنید که برای $|x - x_0| < \delta$، $g(x) = f(x_0)/2$، و

و در غیر این صورت $g(x) = ۰$. در این صورت برای x در $[a , b]$، $g(x) \geq f(x)$ و بنابراین

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx = \delta f(x_۰) > ۰ .$$

۳.۳۵ (الف) ۲۱ ؛ (ب) ۱.۴ ؛ (پ) ۰ .

۵.۳۵ (الف) هر مجموع بالایی برابر $F(b) - F(a)$ و هر مجموع پایینی برابر ۰ است. بنابراین

$$U_F(f) = F(b) - F(a) \neq ۰ = L_F(f) .$$

۷.۳۵ (الف) از راه حل تمرین ۷.۳۳ تقلید کنید.

(ب) و (پ) : از راهنماییهای تمرین ۸.۳۳ استفاده کنید.

۹.۳۵ (الف) فرض کنید m و M مینیمم و ماکسیمم f [که f آنها را اختیار می‌کند] بر $[a , b]$ باشد. در این صورت $\int_a^b m\,dF \leq \int_a^b f\,dF \leq \int_a^b M\,dF$ یا $m \leq [F(b) - F(a)]^{-۱} \int_a^b f\,dF \leq M$. از قضیهٔ ۲.۱۸ استفاده کنید.

(ب) f و g را مانند ۱۴.۳۳ در نظر بگیرید و فرض کنید F مانند تمرین ۸.۳۵ باشد. بنابر قسمت (الف)، برای xای در $[a , b]$ داریم

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f\,dF = f(x)[F(b) - F(a)] = f(x) \int_a^b g(t)\,dt .$$

۱۱.۳۵ فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و افرازی مانند

$$P = \{a = t_۰ < t_۱ < \dots < t_n = b\}$$

را اختیار کنید که در $U_F(f , P) - L_F(f , P) < \varepsilon$ صدق کند. فرض کنید $u_k := \phi^{-۱}(t_k)$ و

$$Q = \{c = u_۰ < u_۱ < \dots < u_n = d\} .$$

نشان دهید که $U_G(g , Q) = U_F(f , P)$ و $L_G(g , Q) = L_F(f , P)$. در این صورت $U_G(g , Q) - L_G(g , Q) < \varepsilon$ و بنابراین g، G- انتگرالپذیر است. برابری انتگرالها به آسانی نتیجه می‌شود.

۱.۳۶ راهنمایی: اگر $|f|$ به وسیلهٔ B کراندار شود، در این صورت

$$\left|\int_a^d f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq B(b - d) .$$

۳.۳۶ (ب) از قسمت (الف) و مثالهای ۱ و ۲ استفاده کنید.

۷.۳۶ (الف) کافی است نشان دهیم که $\int_۱^\infty e^{-x^۲}dx < \infty$. اما برای $x \geq ۱$، $e^{-x^۲} \leq e^{-x}$ و $\int_۱^\infty e^{-x}dx = ۱/e$.

(ب) انتگرال دوگانه برابر است با $[\int_{-\infty}^\infty e^{-x^۲}dx]^۲$ و نیز برابر است با

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r dr = \pi .$$

۹.۳۶ (الف) راهنمایی: از قضیهٔ ۱۳.۳۵ استفاده کنید.

(ب) ۱ ؛ (پ) $+\infty$ ؛ (ت) $\sqrt{2}/\pi$؛ (ث) ۰ .

۱۳.۳۶ ادعا: اگر f بر P پیوسته باشد و $\int_{-\infty}^{\infty} |f|\, dF < \infty$، آنگاه f، F- انتگرالپذیر است.

برهان. چون $f+|f| \geq 0$، انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} [f+|f|]\, dF$ موجود است و چون $f + |f| \leq 2|f|$، این انتگرال متناهی است، یعنی $f + |f|$، F- انتگرالپذیر است. چون $-|f|$، F - انتگرالپذیر است، تمرین ۱۰.۳۶ نشان می‌دهد که مجموع $f + |f|$ و $-|f|$، F - انتگرالپذیر است.

۱۵.۳۶ (الف) به عنوان مثال $f_n(x) = 1/n$ برای $x \in [0 , n]$ و $f_n(x) = 0$ در سایر جاها.

(ب) **خلاصه برهان.** در وهلهٔ اول، f بنابر تمرین ۶.۳۵ بر هر $[a , b]$، F- انتگرالپذیر است. با تحلیل موشکافانهٔ تمرین ۵.۲۵، معلوم می‌شود که کران مشترکی مانند B برای $|f|$ و همهٔ $|f_n|$ ها موجود است. هر $b > 0$ را در نظر بگیرید به طوری که $1 - F(b) < \varepsilon/(2B)$. Nای موجود است به طوری که برای $n > N$، $|\int_0^b fdF - \int_0^b f_n dF| < \varepsilon/2$. در این صورت

$$n > N \text{ مستلزم آن است که } |\int_0^b fdF - \int_0^b f_n dF| < \varepsilon . \qquad (1)$$

به ویژه $m , n > N$ مستلزم آن است که $|\int_0^{\infty} f_n dF - \int_0^{\infty} f_m dF| < 2\varepsilon$ و لذا $(\int_0^{\infty} f_n dF)_{n\in N}$ یک دنبالهٔ کوشی با حدی متناهی مانند L است. از (۱) نتیجه می‌شود که

$$1 - F(b) < \frac{\varepsilon}{2B} \text{ مستلزم آن است که } |\int_0^b fdF - L| \leq \varepsilon ،$$

و لذا $\lim_{b\to\infty} \int_0^b fdF=L$. بنابراین $\int_0^b fdF$ موجود، متناهی، و برابر است با $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n dF$. با استدلال مشابهی می‌توان از عهدهٔ $\lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{0} fdF$ بر آمد.

۱.۳۷ راهنمایی:

$$\int_1^{yz} t^{-1}dt - \int_1^{y} t^{-1}dt = \int_y^{yz} t^{-1}dt .$$

۷.۳۷ (الف) $B(x) = E(xL(b))$، لذا بنابر قاعدهٔ زنجیری، داریم

$$B'(x) = E(xL(b)) . L(b) = L(b)b^x = (\log_e b)b^x .$$

۹.۳۷ (الف) $\log_e y = L(y) = \int_1^y t^{-1}dt \leq y - 1 < y$.

کتابشناسی

دو کتاب عالی با اهدافی مشابه هدف کتاب حاضر، عبارت‌اند از [۴] و [۸]. کتابهایی که بیشتر دایرة المعارفی‌اند و در همین سطح با تفصیل فراوان و مثالهای متعدد به عرضهٔ مطالب پرداخته‌اند، عبارت‌اند از [۶] و [۲۱]. کتابهای درسی بسیار خوبی در سطحی پیشرفته‌تر موجودند: [۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۷]، [۱۹] و [۲۰]، و بدون شک [۱۱]، گر چه من [۱۱] را ندیده‌ام. هر یک از این هفت کتاب را می‌توان برای درک کامل آنالیز و آماده شدن برای مباحث پیشرفته در سطح کارشناسی ارشد و بالاتر در آنالیز به کار برد.

مسیرهای ممکن برای مطالعه پس از این مرحله، زیادتر از آن اند که بتوان در اینجا آنها را بر شمرد. با این حال، خواننده‌ای که نیازها یا اهداف مشخصی ندارد و تنها علاقه‌مند به آشنایی با ایده‌های مهم گوناگون در چندین شاخهٔ ریاضیات است از خواندن [۷] لذت و سود خواهد برد.

1. Apostol, T.M.: Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus, 2nd edition. Reading: Addison-Wesley 1974.
2. Beals, R.: Advanced Mathematical Analysis. Graduate Texts in Mathematics 12. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1973.
3. Birkhoff, G. and MacLane, S.: A Survey of Modern Algebra. New York: Macmillan 1953.
4. Clark, C.: The Theoretical Side of Calculus. Belmont: Wadsworth 1972. Reprinted by Krieger, New York 1978.
5. Flatto, L.: Advanced Calculus. Baltimore: Williams & Wilkins 1976.
6. Fulks, W.: Advanced Calculus: An Introduction to Analysis, 3rd edition, New York: John Wiley & Sons 1978.

7. Garding, L.: Encounter with Mathematics. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1977.

8. Gaughan, E. D.: Introduction to Analysis, 2nd edition . Belmont: Wadsworth 1975.

9. Germignani, M.: Introduction to Real Analysis. Philadelphia: W. B . Saunders Co. 1971. Out of print.

10. Goffman, C.: Introduction to Real Analysis. New York : Harper and Row 1966. Out of print.

11. Hewitt, E.: Numbers, Series, and Integrals. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag (To be published).

12. Hewitt, E. and Stromberg, K.: Real and Abstract Analysis. Graduate Texts in Mathematics 25. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1975.

13. Hoffman, K.: Analysis in Euclidean Space. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1975.

14. Johnsonbaugh, R. and Pfaffenberger, W. E.: Foundations of Mathematical Analysis. New York: Marcel Dekker 1980.

15. Landau, E.: Foundations of Analysis . Chelsea 1951.

16. Niven, I.: Irrational Numbers. Carus Monograph 11. Washington, D.C.: Mathematical Association of America 1956.

17. Protter, M. H. and Morrey, C.B.: A First Course in Real Analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1977.

18. Randolph, J. F.: Basic Real and Abstract Analysis . New York: Academic Press 1968.

19. Rudin, W.: Principles of Mathematical Analysis, 3rd edition. New York: McGraw-Hill 1976.

20. Stromberg, K.: An Introduction to Classical Real Analysis. Prindle, Weber & Schmidt 1980.

21. Trench, W.F.: Advanced Calculus. New York: Harper & Row 1978.

مقاله‌های برگزیده

مقاله‌های زیر، که در این کتاب به آنها اشاره شده است، در مجله ماهانهٔ ریاضی آمریکایی چاپ شده‌اند.

a. J. L. Borman, A remark on integration by parts, vol. 51 (1944), pp. 32-33.

b. F. Cunningham, Jr., The two fundamental theorems of calculus, vol. 72 (1965), pp. 406-407.

c. D.S. Greenstein, A property of the logarithm, vol. 72 (1965), page 767.

d. Edwin Hewitt, Integration by parts for Stieltjes integrals, vol. 67 (1960), pp. 419-423.

e. Edwin Hewitt, The rôle of compactness in analysis, vol. 67 (1960), pp. 499-516.

f . James Wolfe, A proof of Taylor's formula, vol. 60 (1953), page 415.

یک مجموعهٔ بسیار مفید ازمقاله‌ها تحت عنوان مقاله‌های برگزیده در حسابان در سال ۱۹۶۹ به توسط انجمن ریاضی آمریکا چاپ شده است. این مجموعه، چاپهای مجدد ۱۶۰ مقاله منتشر شده بین ۱۹۰۴ و ۱۹۶۸، از جمله مقاله‌های بالا، بجز [d] و [e] را در بردارد.

فهرست راهنما

واژه‌نامه

آزمون	test
اصل موضوع کمال	completion axiom
افراز	partlition
انتگرال ناسره	improper integral
برش	cut
بستار	closure
بسط اعشاری دوره‌ای	repeating decimal
پایهٔ استقرا	basis for induction
تابع تکه‌ای پیوسته	piecewise continuous function
تابع تکه‌ای یکنوا	piecewise monotone function
تابع تمبر پستی	postage - stamp function
تابع توزیع	distribution function
تابع چگالی	density function
تابع علامت	signum function
تابع گزیننده	selection function
خاصیت ارشمیدسی	Archimedean property
دنبالهٔ یکنوا	monotone sequence
رخنه	gap
روزنه	mesh
سری توانی	power series
سری متناوب	alternating series

شعاع همگرایی	radius of convergence
عدد جبری	algebraic number
فضای متریک	metric space
قاعدهٔ زنجیری	chain rule
قانون ترایایی	transitive law
قانون تعویضپذیری	commutative law
قانون توزیعپذیری	distributive law
قضیهٔ بنیادی حسابان	fundamental theorem of calculus
قضیهٔ مقدار میانگین	mean value theorem
قضیهٔ مقدار میانی	intermediate value theorem
مرحلهٔ استقرا	induction basis
مسیر	path
معیار کوشی	Cauchy criterion
مقدار اصلی کوشی	Cauchy principal value
همگرایی یکنواخت	uniform connergence
هیأت	field
هیأت مرتب	ordered field